

А К А Д Е М И Я Н А У К С О Ю З А С С Р

ИНСТИТУТ МАШИНОВЕДЕНИЯ

621.02

В-74

P175866

**ВОПРОСЫ РАСЧЕТА
И КОНСТРУИРОВАНИЯ
ДЕТАЛЕЙ МАШИН**

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СОЮЗА ССР

МОСКВА

1942

ЛЕНИНГРАД



А К А Д Е М И Я Н А У К С О Ю З А С С Р
ИНСТИТУТ МАШИНОВЕДЕНИЯ

ВОПРОСЫ РАСЧЕТА
И КОНСТРУИРОВАНИЯ
ДЕТАЛЕЙ МАШИН

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СОЮЗА ССР
МОСКВА 1942 ЛЕНИНГРАД

621.025.

B 74

К ВОПРОСУ О НАПРЯЖЕНИЯХ И УСИЛИЯХ ПРИ УДАРЕ

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время наблюдается оправданное стремление к повышению скоростей работы машин. В скоростных машинах детали работают в новых условиях: изменение величин нагрузок деталей происходит за все более короткое время, дающее во многих случаях приблизительно мгновенное приложение силы или снятие ее.

Неизбежные, а иногда и сознательно допускаемые зазоры между деталями машины вызывают при всяком изменении направления действующей на стык силы относительное перемещение деталей (например, пальца и вкладыша или ползуна и направляющей). Скорость этого относительного движения в быстроходных машинах велика, и соприкосновение деталей в новых точках с полным правом может быть названо ударом. Такой удар иногда имеет место несколько раз в течение каждого цикла работы машины, и детали в этом случае подвержены постоянным ударам — выдерживают ударную нагрузку.

Прочность деталей современных машин следует рассчитывать не только на их статическую работу, как это делалось прежде, но и на динамическую нагрузку, т. е. на силы, изменяющиеся по величине и направлению, и на удары. В число первых входят такие нагрузки, действием которых в тихоходных машинах можно было пренебречь. Таковы кинетические реакции масс неравномерно движущихся деталей (инерционные силы) и силы, возникающие при упругих колебаниях. При ударе к ним присоединяются еще местные силы и местные напряжения, действующие в областях, близких к точкам соприкосновения деталей и передачи нагрузки.

Задача определения максимальных расчетных напряжений, возникающих под действием удара, имеет поэтому первостепенное значение.

Вторым вопросом расчета являются характеристики материала деталей в условиях, отличных от статических, и величины допускаемых при этом кратковременных напряжений. Последний вопрос также распадается на две части: влияние переменных напряжений на усталость металла и влияние мгновенных нагрузок на повышение предела текучести.

Наиболее важным фактором является при этом хрупкий или пластический характер сопротивления детали и ее возможного разру-

шения. Повышение предела текучести может не оказать благотворного влияния на прочность детали, так как оно соответствует пластической ее деформации. Внезапный же характер ударного воздействия благоприятствует проявлению хрупкости материала, и не исключена возможность поломки детали без использования повышенной (благодаря возрастанию σ_s) ее прочности. Переход материала детали из вязкого состояния в хрупкое зависит от целого ряда факторов; в их число входит большая скорость нагружения, сопряженная с ударной нагрузкой.

Ударный характер нагрузки соответствует очень малой продолжительности ее действия (для машинных деталей меньше 0.001 сек.), что чрезвычайно затрудняет выяснение закона изменения напряжений в зависимости от времени.

Классическая теория удара оперирует не с силами, а с их импульсами (интеграл силы по времени), имеющими конечную и легко определяемую величину. Однако переход от импульса к максимальному напряжению материала затруднителен: нехватает знания продолжительности удара, которая сильно зависит от податливости сталкивающихся деталей; нехватает и сведений об изменении силы взаимодействия ударяющихся тел в течение малого промежутка времени, соответствующего удару.

При практических расчетах часто определяется поглощаемая при ударе кинетическая энергия, переходящая в работу деформации упругих деталей. Такая (энергетическая) трактовка явления удара приемлема, если подвергающаяся удару система отличается значительной жесткостью при небольшой длине. Деформации подобного тела чрезвычайно малы. По мере роста их, т. е. по мере увеличения длины тела и уменьшения его жесткости, все большую роль начинают играть распространяющиеся вдоль тела волны напряжения, и расчет только по затрате работы деформации оказывается недостаточным.

Из двух наиболее распространенных теорий упругого удара одна учитывает колебания ударяющихся тел под влиянием распространяющихся в них волн давления и разрежения; другая — местные явления сжатия в зоне удара. Общей для обеих теорий является тенденция к переходу от импульсов сил, характерных для классической механики, к самим действующим силам и, следовательно, к вызываемым ими напряжениям.

Экспериментальная проверка этих теорий показала, что каждая из них согласуется с результатами опыта в своих строго определенных условиях: колебательная теория справедлива для стержней значительной длины и малой жесткости, например, имеющих вид пружин; теория же сжатия (Герца) — для обратного случая.

Обе теории обычно приложимы лишь к телам простейшей формы — шарам, плоскостям, стержням, балочкам. Применение их к деталям сложной конфигурации возможно только приближенное. Только эксперимент может указать границы для применения того или иного метода расчета и соответствующей теории удара.

Что же должно быть сделано для овладения теорией удара тел и ее приложением к расчету и конструированию деталей машин?

Во-первых, нужно углубленное изучение самого явления удара. Недостаточно только измерение работы, поглощаемой деформацией ударяющихся деталей. Нужно измерять силу воздействия тел друг на друга и изменение ее по времени. Нужно измерять величину текучей и максимальной деформации сталкивающихся деталей. Нужно, наконец, непосредственное определение напряжений в различных сечениях детали или ее прозрачной модели при помощи лучей Рентгена и поляризованного света.

Все эти экспериментальные работы очень нелегки, так как про-

должительность явления чрезвычайно мала, но некоторые измерения напряжений в простейших деталях — кронштейне, балочке, кольце — уже выполнены (работы Туци и Низида и других экспериментаторов).

Во-вторых, нужно изучить характеристические свойства металла при действии ударных нагрузок. До сих пор можно считать установленным, что модуль упругости металла сохраняется для всей массы детали ту же величину, как и при статических нагрузках. Это равенство может не относиться к поверхностному слою детали в месте удара, носящему следы наклепа от предшествующей обработки. Рамзауер [28] считает этот слой настолько тонким, что массой его можно пренебречь по сравнению с массой целой детали. Однако его упругие свойства и, в частности, модуль упругости вследствие предварительного наклепа или некоторой местной пластической деформации при ударе могут измениться и повлиять на результат столкновения деталей.

Рамзауер предложил сделать опытную модель стержня, подвергнутого удару, из тугой пружины с более слабыми пружинами в качестве наконечников. В некоторых случаях применялась для последних слоновая кость. К сожалению, отношение жесткостей главной пружины и наконечников было неизвестно, и модель не могла осуществить действительных соотношений.

Удар реальных деталей часто происходит в некоторой среде, заменяющей собою промежуточный слой Рамзауера. Такую роль часто играет смазка¹. Экспериментальное изучение того влияния, которое оказывает промежуточный слой смазки на протекание явления удара, следует считать совершенно необходимым.

Далее установлено, что предел текучести материала показывает при ударе сильный „всплеск“ (Одинг и Шихобалов), поднимаясь значительно более чем в 4 раза выше временного сопротивления при статическом нагружении образца. Значение этого факта огромно для расчета на удар.

Love в своей „Математической теории упругости“ пишет: „Даже очень большая сила, действуя в течение короткого промежутка времени — порядка 0,001 сек. или менее, не обязательно производит опасные деформации или разрушение, хотя бы напряжение и превысило статический предел упругости (σ_s) или даже критическую точку ($\delta\sigma$). Такие напряжения могут быть без большой ошибки вычислены методами математической теории упругости, как будто бы никакого предела упругости не существовало“.

Чрезвычайно важным в этой области является изучение перехода металла из вязкого состояния в хрупкое. На этот переход влияет целый ряд факторов: скорость деформации, температура, форма детали, могущая вызвать концентрацию напряжений. Совпадение двух таких факторов (большая скорость деформации при ударе всегда налицо) способствует опасному проявлению ударной хрупкости.

Акад. Н. Н. Давиденков (АН УССР) отмечает, что удар при отсутствии хладноломкости, т. е. при вязком состоянии металла, не только не ухудшает, а даже улучшает реакцию металла на внешние усилия; это соответствует упомянутому выше „всплеску“ предела текучести. Только для металлов, обладающих свойством хладноломкости, при неблагоприятных условиях наступают хрупкое состояние и опасность внезапного излома.

Первая задача — изучение усилий, изменений формы деталей и трансформирования энергии при ударе — есть задача теории упругости. Вторая задача — изучение поведения металла при ударе — носит

¹ Например, при ударах в подшипниках.

характер материаловедческий. Наконец, обобщение обеих задач в комплексный расчет деталей, испытывающих удары в работе, составляет область науки о деталях машин, имеющей всегда дело с задачами, отражающими влияние многих условий работы детали.

В настоящее время в этой области сделаны лишь первые робкие шаги. Дальнейшая работа требует больших усилий и затрат. Но значение ее для правильного расчета современных быстроходных машин настолько велико, что нет сомнений, что эти усилия и затраты окупятся. Будут созданы рациональные конструкции ударных деталей, дающие более полное использование металла и возможность повышения скоростей и производительности машин.

В практике инженерных расчетов весьма часто с успехом применяются приближительные решения задачи удара, основанные на элементарной теории.

Жаннен в своей книге „Как учитывать влияние ударов при расчетах прочности материалов“ [10] очень ясно показывает разницу между действием статических усилий и удара. „Цилиндр из мягкой стали, — говорит он, — деформируемый с малой скоростью между подвижной и неподвижной плитами гидравлического пресса, становится выпуклым в середине. Если тот же цилиндр поставить на наковальню и подвергнуть удару молота, достаточному для получения остаточных деформаций, то при малом весе падающей бабы утолщения получатся на обоих концах его (большее на стороне удара); таким образом, характер деформаций при спокойной нагрузке и при ударе оказывается различным, и часто выводы, получаемые для сопротивления детали ударной нагрузке, не совпадают с выводами для статического сопротивления“.

Для статических нагрузок определяются силы, действующие на деталь и ее сечение, необходимые для восприятия этих усилий; при ударе находят величину работы, поглощаемой деталью или их совокупностью, и определяют необходимый объем этих деталей.

При статической нагрузке детали каждая ее часть, каждое ее сечение должны быть способны вынести все действующие усилия или их составляющую; при поглощении деталью работы удара достаточно, чтобы последняя равнялась сумме работ деформации отдельных ее частей. Пример: каждое звено цепи подъемного крана должно быть рассчитано статически на полный поднимаемый груз, для поглощения же работы удара (например, при трогании с места) достаточно, чтобы каждое из n работающих звеньев произвело работу упругой деформации, равную $1/n$ полной поглощаемой работы. Максимальная величина работы упругой деформации равна

$$\frac{1000 \sigma^2 e}{2E} \text{ кгм/дм}^3.$$

Следовательно, для повышения упругого сопротивления детали удару (ее работы упругой деформации) нужно выбрать материал с максимальным пределом упругости или текучести и с минимальным модулем упругости E , иначе говоря с максимальной податливостью.

Изучение удара различными исследователями дало обширный материал, к сожалению, разбросанный в специальной литературе на различных языках. Лучшее, что имеется на эту тему на русском языке, — это книга С. П. Тимошенко „Теория колебаний в инженерном деле“.

Настоящая работа имеет целью собрать и объединить наличный материал по расчетам на удар. Можно надеяться, что такая работа

окажется полезной для инженера, занимающегося конструированием деталей, подверженных ударным нагрузкам.

В дальнейшем изложении будут рассмотрены:

В гл. I—классическая теория удара. Рассматривая вообще идеализированные тела, классическая механика для случая удара вынуждена отказаться от абсолютно твердых, неспособных деформироваться тел. Она изучает столкновение тел деформируемых, совершенно упругих, вполне неупругих и так называемых физических или не вполне упругих тел. Величины деформаций, времени их возникновения и распространения и других важных вопросов она совершенно не касается. Строгое математическое ее изложение можно найти у Герца [Von den Unstetigkeiten der Bewegung, Собрание сочинений, т. II (2)].

Ввиду распространенности и общеизвестности классической теории удара мы изложим ее лишь кратко, обращая внимание читателей на ряд графических приемов исследования, заимствованных у Пёшля [5], и на приложения теории удара к расчетам прочности по Жаннену [10].

В гл. II излагается волновая теория удара по Сен-Венану. Она рассматривает само явление удара как распространение в упругих соударяющихся телах волн напряжений (сжатия или растяжения). Как ее практическое приложение рассмотрен целый ряд графических расчетов, встречаемых за последние годы у французских авторов; эти построения представляют своеобразный способ интегрирования уравнений движения и служат заменой весьма сложной вычислительной работы.

Гл. III содержит теорию удара Герца, состоящую в применении к удару его знаменитых формул сжатия двух упругих тел в месте их контакта. Эта теория занимается рассмотрением местных деформаций—сближения сталкивающихся тел в точке их касания; на остальном протяжении тел должна быть применена или классическая теория, или теория Сен-Венана. Тимошенко [8] с большим успехом применил теорию Герца к поперечному удару по балке, вызывающему в ней колебания изгиба, что и изложено в конце гл. III.

В гл. IV приводится краткое изложение характерных свойств металлов при ударе (работы Н. Н. Давиденкова). Эти свойства нуждаются в дальнейшем изучении и в накоплении экспериментальных коэффициентов, характеризующих поведение металла в ударных условиях.

Наконец гл. V и VI описывают методы экспериментального исследования удара, применявшиеся различными испытателями.

Глава I

КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ УДАРА

Классическая теория удара использует свойство очень больших (ударных) сил производить при соответственно кратковременном действии разрывное изменение скоростей без одновременных изменений положения тела (Пёшьль). Дарбу в книге „*Étude géométrique sur les percussions et le choc des corps*“ [4] следующим образом выясняет действие ударных сил:

Импульсы сил с составляющими по осям координат

$$\int_0^t X dt; \int_0^t Y dt; \int_0^t Z dt$$

определяют на основании теоремы о количестве движения геометрические приращения скорости материальной точки и, если начальное значение скорости известно, позволяют найти по величине и направлению конечную скорость (но не конечное положение точки).

Представим себе процесс уменьшения промежутка времени, в течение которого действуют силы, с одновременным сохранением конечной величины импульсов некоторых сил, что требует соответствующего увеличения этих сил; изменение скорости будет происходить за промежуток времени все более короткий, но величина изменения будет оставаться конечной. Если принять, что и для всякого промежутка времени, заключенного внутри рассматриваемого, импульсы сил остаются меньшими заданных величин, то с уменьшением интервала времени изменения скорости останутся конечными, а перемещения материальной точки будут уменьшаться. В пределе движущаяся точка получает резкое изменение скорости без изменения положения. Это изменение выше и было названо разрывным.

Именно этот предельный случай и изучается в теории удара. Импульсы сил, не изменяющих своей величины, например, тяжести, обратятся при этом в нуль. Поступательные импульсы, приложенные к центру тяжести тела, вызывают изменение скорости центра тяжести без изменения бывшего налицо вращательного движения тела относительно центра тяжести. Моменты вращательных импульсов производят изменения угловой скорости этого вращательного движения.

В. Л. Кирпичев в своих „Беседах о механике“ [9], излагая учение об импульсах, применяет к ним начало Даламбера: приложенные к системе точек внешние удары уравниваются с количествами движения, потерянными при ударе.

Силы связи при ударе также имеют характер мгновенных сил; удары на связи должны уравновесить как внешние приложенные

удары, так и количества движения, потерянные при ударе. Если тело имеет при плоском движении неподвижную точку (центр вращения), то опора с центром вращения может быть свободна от действия удара лишь в том случае, если внешний импульс приложен в центре удара (центре качания) по отношению к неподвижному центру вращения.

Фиг. 1 показывает относительное расположение трех точек: центра вращения O , центра тяжести C и центра качания K . В машинах вращающиеся детали очень часто уравновешены, т. е. точки O и C совпадают, а точка K уходит в бесконечность. Для таких вращающихся деталей всякий тангенциальный удар будет передаваться на ось.

Удар совершенно упругих тел происходит по классической теории без рассеивания энергии. Обозначая скорости масс m_1 и m_2 до удара через v_1 и v_2 , а после удара v'_1 и v'_2 , получим для совершенно упругого удара уравнения:

$$m_1 v'_1 + m_2 v'_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2, \quad (1)$$

$$m_1 (v'_1)^2 + m_2 (v'_2)^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2, \quad (2)$$

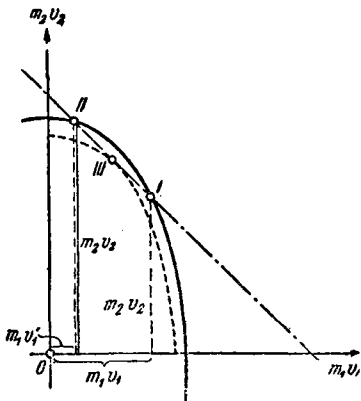
откуда

$$v'_1 = v_1 - \frac{2m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2); \quad v'_2 = v_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2);$$

$$\frac{v'_1 - v'_2}{v_2 - v_1} = 1.$$

Величина силы импульса удара P равна:

$$\begin{aligned} P &= m_1 (v'_1 - v_1) = -m_2 (v'_2 - v_2) = \\ &= -\frac{2m_1 m_2 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} = \frac{2m_1 m_2 (v'_1 - v'_2)}{m_1 + m_2}. \end{aligned} \quad (3)$$



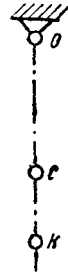
Фиг. 2. Графическое представление явления удара.

Геометрическое толкование этих уравнений приводит Пёшьль (фиг. 2) [5].

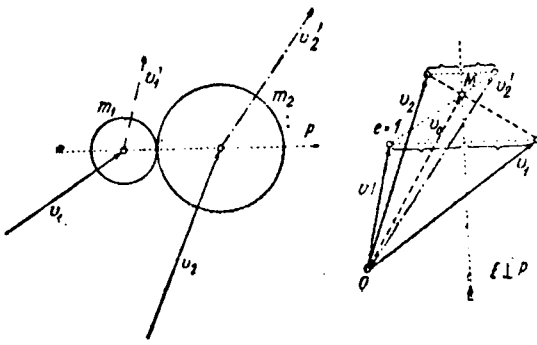
Два основных уравнения упругого удара (равенство количества движения и равенство кинетических энергий до и после удара) могут быть представлены в осях координат $m_1 v_1$ и $m_2 v_2$: первое — прямой линией с угловым коэффициентом -1 , а второе — эллипсом. Прямая и эллипс пересекаются в двух действительных точках I и II . Удар переводит систему из состояния, выражаемого точкой I , в состояние II . При неупругом ударе происходит переход из состояния I в состояние, представляемое точкой III касания прямой $I-II$ с эллипсом, подобным первоначальному эллипсу энергии.

В случае косо́го удара (фиг. 3) составляющие скоростей, перпендикулярные к направлению удара, остаются при отсутствии трения без изменения.

Фиг. 3 показывает построение Максвелла: из полюса O проводим векторы скоростей v_1 и v_2 до удара; делим лежащий между их ко-



Фиг. 1. Расположение центра качания детали.



Фиг. 3. Построение Максвелла.

носительно этой прямой. Векторы, соединяющие O с построенными зеркальными изображениями, представляют скорости v'_1 и v'_2 после удара.

Тела совершенно неупругие обладают после удара одинаковыми компонентами скорости v_0 в направлении удара; составляющие же, перпендикулярные к направлению удара, остаются без изменения:

$$v_0 = v'_1 = v'_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v'_1 + m_2 v'_2}{m_1 + m_2}.$$

Возникающая при этом потеря работы ΔT равна:

$$\begin{aligned} \Delta T &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} m_1 (v'_1)^2 - \\ &- \frac{1}{2} m_2 (v'_2)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Сила (импульс) удара P равна:

$$P = m_1 (v'_1 - v_1) = -m_2 (v'_2 - v_2) = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2). \quad (5)$$

Не вполне упругий (физический) удар излагается в классической теории удара с помощью допущений Ньютона о так называемом коэффициенте восстановления:

$$e = \frac{v'_1 - v'_2}{v_2 - v_1}, \quad (6)$$

Коэффициент этот Ньютон считает правильной дробью, постоянной для данной пары сталкивающихся материалов. Случай совершенно упругого удара соответствует $e=1$, совершенно неупругого $e=0$.

С переходом предела упругости коэффициент восстановления уменьшается.

Первая стадия явления удара состоит в сжатии обоих сталкивающихся тел до получения обоими общей скорости; эта фаза одинакова и для упругих, и для неупругих тел.

Однако изменение силы удара до максимального значения происходит, по мнению Ф. Куба (Druckwechsel und Stösse an Kolbenmaschinen) [19], в обоих случаях различно, и, следовательно, форма закона удара должна быть также неодинаковой.

Поэтому для действительных деталей, обладающих некоторой степенью упругости и пластичности, не известно, можно ли выразить

при помощи коэффициента восстановления e закон изменений воздействия их друг на друга подобно тому, как это делается для скоростей и потери кинетической энергии. По опытам Планка, максимальное значение силы удара не совпадает с наибольшей величиной деформации, а бывает вскоре после начала удара; в дальнейшем она убывает, несмотря на возрастание деформации.

Для деталей неупругих удар на этом сжатии заканчивается; тела же упругие начинают после момента наибольшего сжатия, соответствующего одинаковой скорости в направлении удара, вторую стадию — полного или частичного, в зависимости от величины e , восстановления формы.

Дарбу доказывает, что момент времени, когда $\int P dt$ принял значение, равное половине окончательного, соответствует равенству скоростей по направлению удара, или наибольшему сжатию сталкивающихся тел. Другими словами, в случае совершенно упругих тел полное воздействие тел друг на друга (percussion) будет вдвое больше, чем при неупругом ударе. То же соотношение относится и к продолжительности удара.

Соотношения между скоростями до и после установления общей скорости v_0 будут:

1) упругий удар:

$$v'_1 - v_0 = v_0 - v_1; \quad v'_2 - v_0 = v_0 - v_2, \quad (7)$$

2) совершенно неупругий удар:

$$v'_1 - v_0 = v'_2 - v_0 = 0, \quad (8)$$

3) физический удар:

$$v'_1 - v_0 = e(v_0 - v_1); \quad v'_2 - v_0 = e(v_0 - v_2) \quad (9)$$

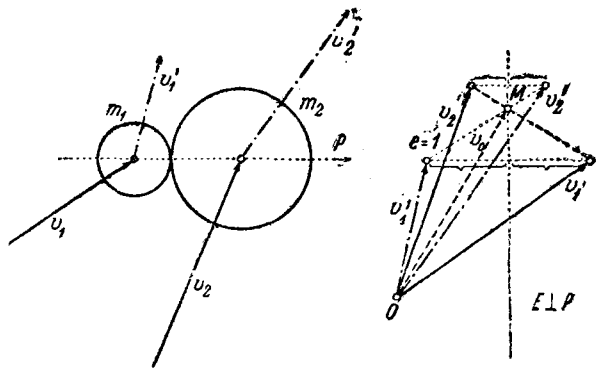
$$v'_1 = \frac{(m_1 - em_2)v_1 + (1+e)m_2v_2}{m_1 + m_2} \quad (10)$$

$$v'_2 = \frac{(1+e)m_1v_1 + (m_2 - em_1)v_2}{m_1 + m_2} \quad (11)$$

$$P = - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1+e) (v_1 - v_2). \quad (12)$$

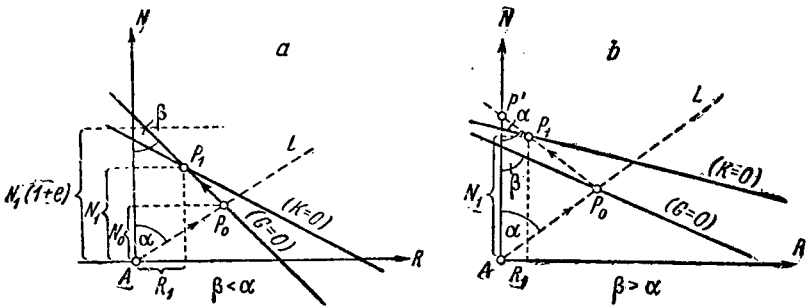
Построение Максвелла, описанное на фиг. 3, может быть распространено и на случай физического удара (фиг. 4). Разница состоит в том, что концы векторов скорости до и после удара не будут симметричными относительно прямой E , а их расстояния должны в этом случае относиться, как $e:1$.

Косой удар двух деталей при наличии трения между ними может быть графически представлен по методу Routh. По оси ординат откладываются величины нормальных ударов N



Фиг. 4. Построение Максвелла для не вполне упругих тел ($e \neq 1$).

(в направлении общей нормали к поверхности касания тел), а по оси абсцисс величины R ударов с трением в плоскости касания тел¹ (фиг. 5). В течение всего времени удара N остается положительным, иначе тела отойдут друг от друга.



Фиг. 5. Построение для косо́го удара.

На графике (фиг. 5) наносим вспомогательные прямые: 1) $G=0$, соответствующую отсутствию скольжения между телами, или трению прилипания (Haftreibung), при котором возможно лишь качение тел друг по другу; 2) $K=0$ — прямую максимального сжатия (K есть относительная скорость сжатия обоих тел).

В начале удара тела скользят друг по другу; трение действует своей полной величиной в направлении, обратном скольжению; закон его изменения выразится прямой AL , тангенс угла α наклона которой к вертикали равен коэффициенту трения f . Скольжение длится до пересечения с прямой $G=0$ в точке P_0 . Если угол β наклона прямой $G=0$ к вертикали меньше α , то получится качение соприкасающихся поверхностей деталей, и изображающаяся точка будет перемещаться дальше по линии $G=0$ до точки P_1 пересечения с прямой максимального сжатия $K=0$ (фиг. 5, а). Если же $\beta > \alpha$ (фиг. 5, б), то трение изменит свое направление при сохранении своей максимальной величины, и изображающая точка будет перемещаться по прямой P_0P_1 (фиг. 5, б), симметричной AL (также наклоненной к вертикали под углом α). Точка P_1 лежит и в этом случае на прямой максимального сжатия $K=0$.

Обозначим ординату точки P_1 через N_1 . Момент окончания удара будет соответствовать $N=N_1(1+e)$, а значение R равно абсциссе R_1 точки P_1 . Подставляя N и R_1 в уравнения удара:

$$m_1(v'_1 - v_1)_x = -R,$$

$$m_1(v'_1 - v_1)_y = N,$$

$$I_1(\omega'_1 - \omega_1) = -Rb_1 - Na_1$$

(где a_1 и b_1 — координаты центра тяжести тела I) и в аналогичные уравнения для тела II , можно определить скорости после удара.

Для тел совершенно гладких $f=0$, $R=0$ и прямая AL совпадает с осью ординат. В этом случае изображающая точка будет двигаться по оси N до точки N_1 пересечения с прямой $K=0$, а конечное значение N равно $N_1(1+e)$.

Для тел совершенно шероховатых $f=\infty$, угол $\alpha=90^\circ$, прямая AL идет по оси абсцисс, и изображающая точка будет двигаться по ней до пересечения с прямой $G=0$, а затем по этой последней прямой до точки P_1 пересечения с прямой наибольшего сжатия

¹ R строится в направлении, обратном тому, в котором он действует на тело I .

$K=0$. Для тел неупругих координата R_1 будет представлять искомое значение R ; при телах упругих изображающая точка будет двигаться дальше по линии $G=0$ до тех пор, пока $N=N_1(1+e)$. Соответствующее значение абсциссы даст искомую величину R . При совершенно упругих телах $e=1$.

Приложение классической теории удара к расчётам прочности

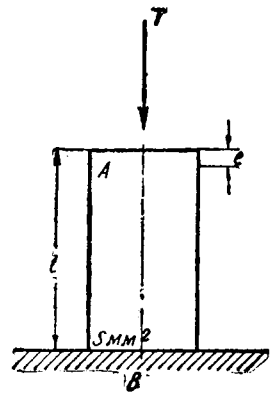
По Жаннену [10] при ударе стержня A (фиг. 6) о неподвижную и недеформируемую плиту B , приложенном так, что весь стержень подвергается сжимающей нагрузке и поглощает при ударе работу T , напряжение детали A в момент наибольшего сжатия равно

$$R = \sqrt{\frac{2000ET}{sl}} \text{ кг/мм}^2. \quad (13)$$

Здесь E выражено в кг/мм^2 , T — в кгм , s — в мм^2 , l — в миллиметрах.

Максимальное давление P между деталями A и B

$$P = sR = \sqrt{\frac{2000ETs}{l}} \text{ кг}. \quad (14)$$



Фиг. 6. Удар стержня о жесткую плиту.

Поглощаемая работа T равна

$$T = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{R^2sl}{2000E}. \quad (15)$$

Деформация стержня

$$e = \frac{R}{E} \cdot l. \quad (16)$$

Усилие на стыке P :

$$P = v \sqrt{\frac{1000Ems}{l}}. \quad (17)$$

$$T_{\max} = \frac{\sigma_e^2sl}{2000E} \text{ или } l = \frac{2000ET_{\max}}{\sigma_e^2s}. \quad (18)$$

Вычисленная длина стержня l мм необходима для возможности поглощения и перевода в работу упругой деформации заданной работы T_{\max} ; при меньшей длине каждый удар вызывает остаточную

¹ Работа упругой деформации равна $T = \frac{P\lambda}{2}$. Заменяя P через sR кг, а λ через $\frac{R}{E} \cdot l$ м, находим

$$T = \frac{lsR^2}{2000E}. \quad (15)$$

² Величина модуля упругости E для детали (условного) может иногда значительно отличаться от значения E для материала, из которого деталь выполнена. Яркий пример этой разницы показан в „Сопротивлении материалов“ Н. М. Беляева: при расчете стального каната E принято равным $7 \cdot 10^3$, т. е. примерно в три раза меньше, чем для стальной проволоки, являющейся материалом для каната.

деформацию; через некоторое время они повлекут за собой поломку детали.

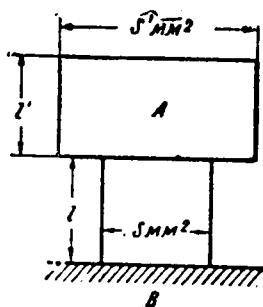
Допуская напряжение $R = \sigma_e$ и учитывая напряжение $\frac{s\delta}{s10^6} = \frac{l\delta}{10^6}$ кг/мм² от собственного веса стержня A , найдем

$$\sigma_e = \frac{l\delta}{10^6} + \sqrt{\frac{2000 ET}{sl}}$$

отсюда

$$T = \frac{\left(\sigma_e - \frac{l\delta}{10^6}\right)^2 sl}{2000 E} \quad (19)$$

Работа упругой деформации T обращается в нуль при $l=0$ и при $l = \frac{\sigma_e \cdot 10^6}{\delta}$. Между этими двумя нулевыми значениями имеется максимум поглощаемой работы при $l = \frac{\sigma_e \cdot 10^6}{3\delta}$.



Фиг. 7. Удар ступенчатого тела.

Если деталь (фиг. 7) состоит из двух ступеней различных поперечных сечений, то при нагрузке, сжимающей деталь A по всей ее длине, напряжения будут обратно пропорциональными площади сечений:

$$R : R' = s' : s.$$

Работа, поглощаемая нижней частью тела A , равна

$$\frac{R^2 ls}{2000 E},$$

а верхней частью

$$\frac{(R')^2 l' s'}{2000 E} = \frac{R^2 s^2 l' s'}{(s')^2 2000 E}.$$

Сумма обеих работ равна общей работе T , обращаемой в потенциальную энергию деформации детали A :

$$\frac{R^2}{2000 E} \left(ls + \frac{l' s^2}{s'} \right) = T.$$

Отсюда:

$$R = \sqrt{\frac{2000 ETs'}{ls' + l's^2}}; \quad R' = \sqrt{\frac{2000 ETs}{l'ss' + l(s')^2}}.$$

Давление P на плиту B .

$$P = sR = \sqrt{\frac{2000 ETss'}{ls' + l's}} = \sqrt{\frac{2000 ET}{\frac{l}{s} + \frac{l'}{s'}}}.$$

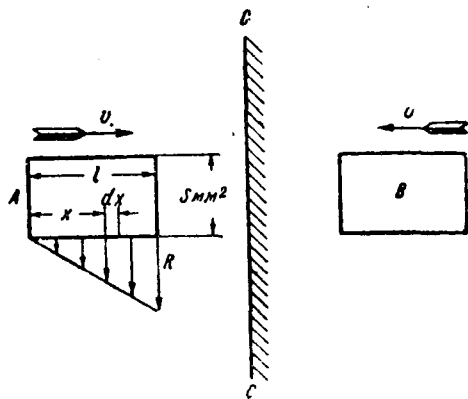
Если деталь A ступенчатой формы заменить цилиндрическим стержнем с сечением s , равным меньшей ступени, и тем увеличить податливость детали или ее способность к более значительным деформациям, то напряжение R_1 будет равно:

$$R_1 = \sqrt{\frac{2000 ET}{s(l+r)}}.$$

Так как $s < s'$, то $R_1 < R$ и давление $P_1 < P$ — увеличение податливости детали — уменьшает напряжения при ударе как в ней самой, так и в соударяющейся плите B .

Удар упругого тела об упругую плиту с бесконечно большой массой может быть мысленно заменен эквивалентным по своим последствиям ударом двух симметричных относительно плоскости $C-C$ плиты (фиг. 8) масс A и B , движущихся навстречу друг другу с одинаковыми скоростями v .

Передние сечения деталей A и B , касающиеся при ударе, будут в этом случае испытывать наибольшие напряжения R , а задние будут совершенно свободны от напряжения. Принимая для простоты распределение напряжений по закону прямой линии (фиг. 8), найдем, что напряжение в элементе длины dx , находящемся на расстоянии x



Фиг. 8. Удар упругого тела по упругой плите.

от свободного конца, равно $R \frac{x}{l}$, а работа упругой деформации этого элемента

$$\frac{R^2 x^2}{l^2} \cdot \frac{s dx}{2000 E}.$$

Сумма подобных работ для всех элементов тела A — от нуля до l — дает поглощаемую им работу $T = \frac{1}{2} m v^2$. Отсюда

$$R = \sqrt{\frac{6000 ET}{sl}} = v \sqrt{\frac{3000 Em}{sl}} = v \sqrt{\frac{3 E \delta}{1000 g}}.$$

Для заданного материала детали (E и δ) напряжение зависит только от v .

Допуская как максимум $R = \sigma_e \approx \sigma_s \approx$ пределу пропорциональности, найдем предельную скорость упругого удара:

$$v_{\max} = \sigma_e \sqrt{\frac{1000 g}{3 E \delta}}. \quad (20)$$

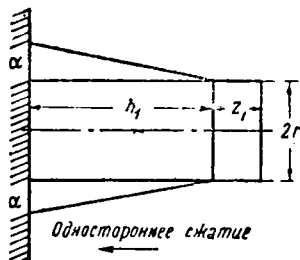
Например, для стали с $E = 22\,000$, $\sigma_e = 30$ и $\delta = 7,8$ предельная скорость, не вызывающая остаточных деформаций, равна 6,9 м/сек. Для стали с содержанием Si и Mn, закаленной и отпущенной при 400° , — до 23 м/сек (по Жаннену).

При ударе двух упругих тел с конечными размерами и массами

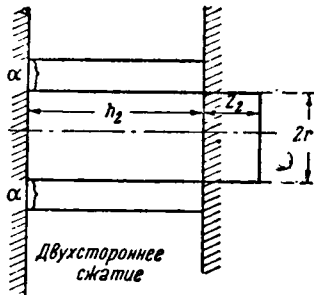
$$R = (v_1 - v_2) \sqrt{\frac{3000 m_1 m_2 E_1 E_2 s_2}{s_1 (m_1 + m_2) (l_1 s_2 E_2 + l_2 s_1 E_1)}}$$

$$R' = (v_1 - v_2) \sqrt{\frac{3000 m_1 m_2 E_1 E_2 s_1}{s_2 (m_1 + m_2) (l_1 s_2 E_2 + l_2 s_1 E_1)}}$$

Реньо в „Mémorial de l'Artillerie Française“ 1939 г. [20] находит необходимым делать различие между односторонним и двухсторонним ударами. В случае одностороннего продольного удара цилиндрическая деталь принимает форму усеченного конуса с параболической образующей (параболоида вращения), которую практически можно принять за прямую. При приблизительном сохранении объема детали имеем согласно фиг. 9:



Фиг. 9. Схема одностороннего удара.



Фиг. 10. Схема двухстороннего удара.

$$\pi r^2 h = \frac{\pi h}{3} [(r + \alpha)^2 + r^2 + r(r + \alpha)].$$

Откуда, пренебрегая членом с α^2 , находим:

$$h - h_1 = z_1 = \alpha \frac{h_1}{r}.$$

В случае двухстороннего удара (фиг. 10) цилиндр остается цилиндром, уширения сечения происходят на обоих основаниях и

$$z_2 = 2\alpha \frac{h_2}{r}.$$

Таким образом, с точностью до малых второго порядка

$$z_1 = \frac{1}{2} z_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \frac{Pl}{Es}.$$

Автор считает два удара равными, если одинаковы величины α увеличения радиуса цилиндра.

Ссылаясь на опыты, произведенные несколько лет назад в центральной лаборатории французской морской артиллерии, Реньо утверждает, что количество энергии, которое переходит в работу деформации при ударе, равно не полному количеству сообщенной энергии, а лишь части ее. Деформация ударяющей массы m_1 соответствует, по его мнению, при одностороннем ударе количеству энергии

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2},$$

остальная часть $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 \cdot \frac{m_1}{m_1 + m_2}$ представляет кинетическую энергию всей системы ($m_1 + m_2$), которая не принимает участия в максимальном сжатии массы m_1 . При двухстороннем ударе в работу упругой деформации ударяемой массы m_1 , помещенной в этом случае между ударяющей деталью m_2 и неподвижной плитой, переходит энергия

$$\frac{1}{2} m_2 v_2^2 \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2},$$

а энергия, которая кажется исчезнувшей в момент наибольшего сжатия, составляет

$$\frac{1}{2} m_2 v_2^2 \cdot \frac{m_1}{m_1 + m_2}.$$

Когда сообщаемая работа должна быть поглощена деформацией не одной детали в машине, а совокупности деталей целого узла, то определение работы, приходящейся на долю каждой, происходит на основании ее пропорциональности относительной деформации при действии одной и той же, например, единичной, нагрузки (1 кг). Если полная работа деформации T распределяется между n деталями, которые передают одна другой одну и ту же силу P и которые при действии 1 кг нагрузки испытывают деформации $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$, то для первой мы можем написать уравнение:

$$T_1 = \frac{1}{2} P(Pf_1) = \frac{P^2}{2} f_1.$$

Аналогично

$$T_2 = \frac{P^2}{2} f_2, T_3 = \frac{P^2}{2} f_3; \dots T_n = \frac{P^2}{2} f_n.$$

Отсюда

$$\frac{T_1}{f_1} = \frac{T_2}{f_2} = \frac{T_3}{f_3} = \dots = \frac{T_n}{f_n} \quad (21)$$

и

$$T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_n = T. \quad (22)$$

Увеличивая сечение одной из деталей, мы уменьшаем ее податливость и с нею количество воспринимаемой ею работы, увеличивая тем нагрузку остальных деталей. Если увеличение сечения было сделано для избежания поломки первой детали, то при ударе могут оказаться поврежденными смежные. Для разгрузки первой детали могло бы также служить некоторое уменьшение жесткости остальных деталей узла. Идеальным было бы такое распределение жесткости или, обратно, податливости отдельных деталей в узле, чтобы все они работали при ударе с одинаковым запасом прочности. Для восприятия ударов большой интенсивности нужны вообще детали значительного объема, снабженные пружинами для увеличения податливости.

В названной выше книге Жаннена [10] даны расчеты на ударную нагрузку целого ряда деталей: штока молота простого и двойного действия, матриц для ударной штамповки, деталей винтового пресса, ферм железнодорожного моста при ударе колес на стыках рельс, мостового крана. Расчеты эти соответствуют энергетической теории удара.

Расчет продолжительности удара (Жаннен)

Рассмотрим опять тот же узел из n деталей, передающих одна другой при ударе одну и ту же нагрузку P . Абсолютная величина ускорения равна $a = \frac{P}{m}$ м/сек². Если $f_{\text{мн}}$ есть деформация всей системы при нагрузке в 1 кг, то действительное перемещение ударяемой точки в метрах при действии силы P равно

$$e = \frac{Pf}{1000}.$$

Отношение $a:e$ для всякого момента в течение удара равно

$$a:e = \frac{P}{m} : \frac{Pf}{1000} = \frac{1000}{mf} \cdot \text{const.}$$

Это постоянство указывает на колебательный характер движения точки удара при деформации узла. Полный период колебания равен

$$2\pi \sqrt{\frac{mf}{1000}} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{Gf}{1000}}. \quad (23)$$

Первая фаза удара от начала соприкосновения тел до их наибольшего сжатия соответствует изменению ускорения, отрицательного по знаку, от нуля до некоторого максимального значения, т. е. одной четверти полного периода колебания

$$t = \frac{\pi}{2\sqrt{g}} \sqrt{\frac{Gf}{1000}}. \quad (24)$$

Время полного удара вдвое больше. Подкоренное количество представляет усадку всей системы в метрах под действием статической нагрузки от собственного веса G . Итак, время удара есть функция общей гибкости (податливости) системы, получающей удар.

Глава II

ВОЛНОВАЯ ТЕОРИЯ УДАРА

Волновая теория удара связана с именами Юнга, Навье, Буссиньеса, Неймана, Сен-Венана и других. В изложении Сен-Венана (дополнения к переведенной им с немецкого теории упругости Клебша¹) колебания тел при ударе отличаются тем, что тело, сообщающее толчок, колеблется до окончания явления удара вместе с деталью, воспринимающей удар. В некоторых случаях по окончании удара тела колеблются самостоятельно, и это движение приводит их к новой встрече и новому столкновению; такой многократный удар встречается при поперечных колебаниях упругой балки вследствие удара.

Если ударное давление P кг начало мгновенно действовать на крайнее торцевое сечение упругого стержня, то в начальный момент удара будет сжат только первый слой al ; весь же остальной материал стержня остается недеформированным и потому ненапряженным. Относительное укорочение первого слоя

¹ См. [1] в перечне литературы.

$$\varepsilon = \frac{R}{E} = \frac{P}{sE}, \quad (1)$$

где s есть площадь поперечного сечения стержня. Сжатый слой будет оказывать давление на следующий за ним, следующий — на третий, и сжатие распространится вдоль всего стержня в виде волны; по одну сторону ее фронта материал будет сжат, по другую сохранится в неизменном начальном состоянии. Само явление удара рассматривается как распространение в стержне волны разрыва между напряжениями части, подверженной действию удара, и части, до которой он еще не достиг. Если время деформации первого слоя dl равно dt , то скорость распространения волны равна

$$c = \frac{dl}{dt}.$$

За то же самое время сжатый слой сократится на $du = \varepsilon dl$. Скорость этого движения

$$v = \frac{\varepsilon dl}{dt} = \varepsilon c = \frac{P}{sE} c = \frac{\sigma}{E} c. \quad (2)$$

Итак, при распространении волны напряжения в стержне, скорость v его частиц пропорциональна напряжению σ , а скорость c распространения напряжения не зависит от его величины. При переменных силах воздействия тел во время удара напряжения σ и скорости v частиц стержней по длине волны будут различными.

Уравнение количеств движения для сжатого слоя

$$dmv = Pdt;$$

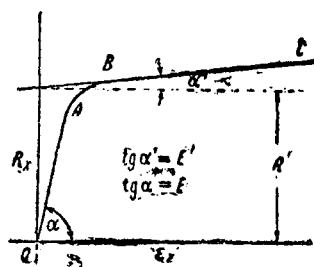
$$sdl\rho \frac{P}{sE} c = Pdt, \text{ где } \rho - \text{плотность};$$

$$\frac{dl}{dt} c = c^2 = \frac{E}{\rho};$$

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (3)$$

Это выражение представляет скорость распространения в ударяемой детали не только волны сжатия, но и звуковой волны. В твердых телах эта скорость достаточно велика; для стали $c \approx 5000$ м/сек.

При переходе напряжения R за предел упругости σ_e для определения скорости волны c может быть применен метод рассуждений, данный Шнейдером (Wasserkraft und Wasserwirtschaft, 1936, февраль; цитируем по Бержерону, La Technique Moderne, 1937, апрель [6]). Эмпирическая кривая напряжений R_x , в зависимости от удлинения ε_x , имеет форму, показанную на фиг. 11. Часть ее OA соответствует упругим деформациям стержня, а BC дает деформации за пределом упругости. С достаточным приближением она для начала пластической деформации может быть принята за прямую. Все написанные выше уравнения могут быть применены и для этого случая, но де-



Фиг. 11. Переход напряжения за предел упругости.

формация сжатия вместо $\frac{P}{E_s} = \frac{R_x}{E}$ ¹ обратится в $\frac{R_x - R'}{E'}$, где R' есть ордината точки пересечения прямой BC с осью ординат, а E' — угловой коэффициент этой прямой, представляющий как бы новый модуль упругости, значительно меньший E . Таким образом, из уравнения количества движения получим:

$$sdl\rho \cdot \frac{R_x - R'}{E'} \cdot c = R_x sdt,$$

но

$$R_x = \frac{sdl\rho}{dts} v = c\rho v,$$

$$c^2\rho \left(\frac{c\rho v - R'}{E'} \right) = c\rho v$$

или

$$c = \frac{R'}{2\rho v} + \sqrt{\left(\frac{R'}{2\rho v} \right)^2 + \frac{E'}{\rho}}.$$

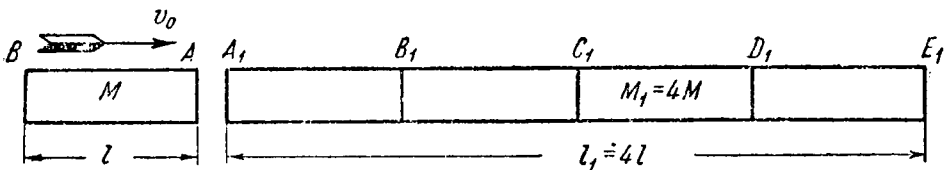
Если скорость v деформации за пределом упругости велика (что всегда имеет место при ударе), то первым членом найденного выражения и первым членом подкоренной величины можно пренебречь и получается

$$c = \sqrt{\frac{E'}{\rho}}, \quad (4)$$

т. е. то же выражение для c , что и при упругих деформациях, но с заменю модуля упругости значительно меньшей величиной E' .

А. Продольный удар

Рассмотрим в качестве начального примера распространения волны при ударе продольное столкновение двух упругих тел M и M_1 (фиг. 12) одинакового сечения s , но различной длины и вследствие этого различной массы.



Фиг. 12. Схема продольного удара стержней.

Пусть $l_1 = 4l$ и $M_1 = 4M$. Назовем через Δt время прохождения волною длины l ударяющего тела; $\Delta t = \frac{l}{c}$.

Следующие явления произойдут за первый промежуток времени Δt : сечения A и A_1 при столкновении сожмутся, и сжатие успеет распространиться до B и B_1 ; масса $AB + A_1B_1$, равная $2M$, примет общую скорость v , определяемую из уравнения количества движения

$$Mv_0 = 2Mv;$$

$$v = \frac{v_0}{2}.$$

¹ Уравнение (1) настоящей главы.

Повышение напряжения в сжатых частях стержней определяется по уравнениям:

$$\begin{aligned} \sigma s \Delta t &= Mv; \\ \sigma s \frac{l}{c} &= sl\rho \frac{v_0}{2}; \\ \sigma &= \frac{v_0}{2} \rho c = \frac{v_0}{2} \sqrt{E\rho}. \end{aligned} \quad (5)$$

Всякое, даже небольшое, совершенно твердое тело вызовет при ударе остаточную деформацию стержня, если скорость ударяющего тела больше величины, соответствующей пределу упругости σ_e стержня. Эта критическая скорость равна

$$\frac{2\sigma_e}{\sqrt{E\rho}}. \quad (6)$$

σ_e , по Одингю и Шихобалову, имеет большое числовое значение (всплеск σ_e).

За второй промежуток времени Δt :

1) Ударяющее тело — стержень M : в конце B сжатие прекращается, так как никаких препятствий для свободного перемещения этого сечения нет. За слоем B следуют сжатые слои стержня M , и вся его масса в течение второго промежутка теряет постепенно напряжение сжатия, — по ней проходит от B к A волна расширения; иначе, отражение волны произошло от конца B с переменою знака.

Когда эта волна докатится до стыка стержней A , давление между ними обратится в нуль; но сами стержни останутся в соприкосновении до момента возвращения отраженной волны в более длинном ударяемом стержне.

Скорость перемещения каждого сечения ударяющего стержня M при этом еще уменьшается на $\frac{v_0}{2}$ и обращается в нуль; общее его перемещение за $2\Delta t$ равно $\frac{v_0}{2} \cdot 2 \cdot \frac{l}{c} = \frac{v_0 l}{c}$. После этого стержень M остается в покое.

2) В ударяемом теле волна сжатия продолжает распространяться вправо до сечения C_1 . Ее характеристики прежние:

$$\sigma = \frac{v_0}{2} \sqrt{E\rho} \text{ и } v = \frac{v_0}{2}.$$

За третий и четвертый промежутки времени Δt :

Волна сжатия доходит до конечного сечения E_1 . За нею, также вправо, идет волна расширения, происхождение которой таково: при ослаблении давления со стороны короткого ударяющего стержня материал большего стержня расширяется, начиная от сечения A_1 , и теряет напряжение сжатия σ , переходя в нормальное состояние. Волна ослабления сжатия, т. е. волна расширения, начавшаяся в конце B , как бы переходит из малого стержня в большой через стык AA_1 и продолжает распространяться по большому стержню с той же скоростью c . За два рассматриваемых промежутка времени она распространится до сечения C_1 .

За пятый период удара:

В свободном конце E_1 волна сжатия отражается с переменою знака, т. е. в виде волны расширения, идущей влево. В конце пятого

промежутка времени обе волны встретятся в сечении D_1 , и никакого сжатия тела не останется. В то время как расширение слоев влево (против скорости v_0) доводило скорость каждого слоя до нуля, расширение вправо удваивает существующую скорость слоя, доводя ее до v_0 ; такую скорость, равную начальной скорости ударяющего тела, получит последний элемент D_1E_1 стержня, имеющий длину l .

Шестой, седьмой и восьмой промежутки времени Δt :

Волна растяжения, идущая справа со скоростью c , дойдет за это время до торца A_1 . Несомое ею напряжение равно $-\sigma$.

Вторая волна растяжения, встретившаяся с первой в точке D_1 , пройдет за это время до конечного сечения E_1 , отразится с переменным знаком и в виде волны сжатия успеет дойти до сечения C_1 , уничтожая на своем пути существовавшее в материале стержня A_1E_1 напряжение растяжения ($-\sigma$).

Так как в точке удара короткий стержень не может сопротивляться отходу сечения A_1 вправо, то стержни должны разъединиться окончательно. Тело M останется неподвижным и лишенным напряжения; по длинному же стержню пойдет вправо волна сжатия (напряжение σ , скорость c). По истечении времени Δt волны сжатия встретятся в B_1 , и весь стержень будет свободен от напряжения. Волны же будут продолжать свое распространение в нем, в точности повторяя те фазы распределения напряжений, которые имели место $8\Delta t$ тому назад. Если пренебречь затуханием колебаний, то последовательное прохождение по стержню волн сжатия и расширения будет продолжаться до бесконечности.

В отличие от элементарной теории, энергия этого колебательного движения не переходит в работу деформации ударяемого тела.

Так как при этом все волны растяжения отражаются от левого торца, а все волны сжатия от правого, то оба крайних сечения, а с ними и весь стержень получают в моменты отражений импульсы вправо, вызывающие его скачкообразные перемещения в эту сторону каждый раз на величину $\frac{v_0 l}{c}$. Фиг. 13 показывает ряд последователь-

ных положений обоих тел M и M_1 и распределение напряжений в них. Сжатые элементы отмечены наклонной штриховкой, а растянутые — продольной. Фиг. 14 дает аналогичную картину по Рамзауеру [28] при отношении длин стержней 1:2 и делении времени на более мелкие (в 4 раза) промежутки Δt .

Кривые в нижней части чертежа дают значения напряжений σ и $-\sigma$ для обоих сталкивающихся тел в зависимости от времени.

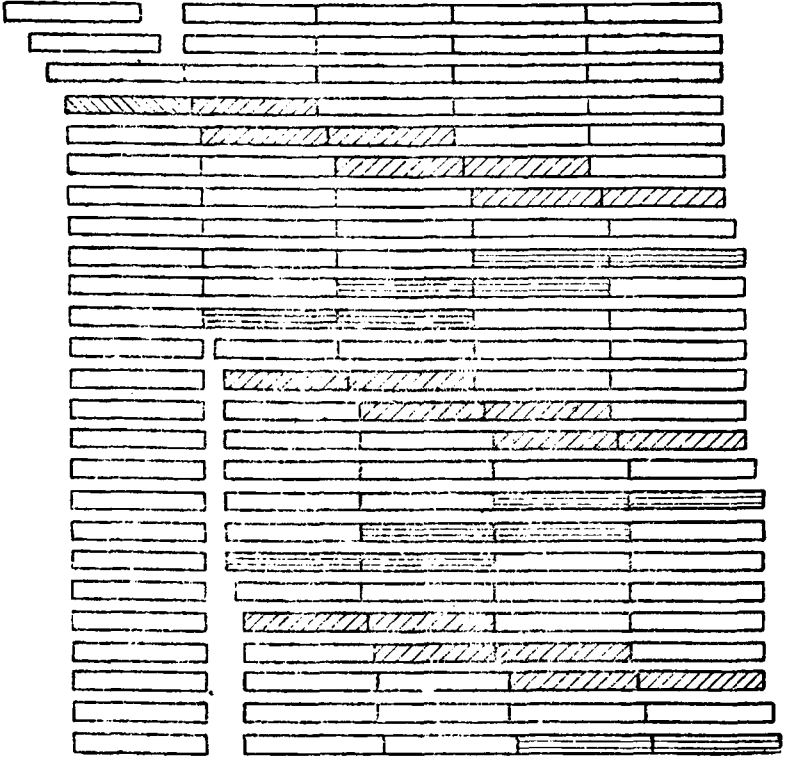
Если ударяемый упругий стержень имеет закрепленный противоположный конец, то достигшая его волна напряжения, например сжатия, отразится без перемены знака, т. е. также в виде волны сжатия.

Несомое ею напряжение $\sigma_0 = \frac{v_0}{2} \sqrt{E\rho}$ (уравнение 5) будет при этом

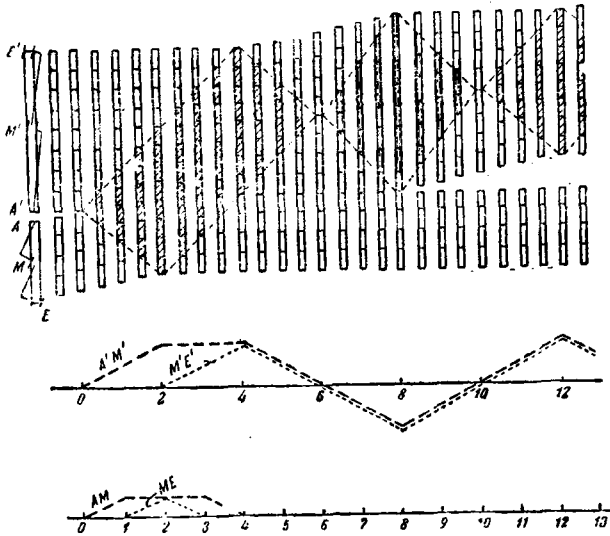
удваиваться ($\sigma = 2\sigma_0$). Считая ударяющее тело в первом приближении абсолютно жестким (неупругим), мы найдем, что отраженная волна не сможет проникнуть в него через стык стержней; сама ударяющая масса не сможет мгновенно изменить свою скорость под давлением σ отраженной в упругом стержне волны. Поэтому для ее распространения ударяющая масса будет представляться неподвижной преградой, и новое отражение произойдет от точки удара, как от закрепленного конца, без перемены знака. В результате напряжение сжатия мгновенно возрастет на величину $2\sigma_0$.

Величина напряжения σ_0 при ударяющем неупругом теле окажется вдвое больше. Действительно, если сжатие одного из стержней отсутствует, тот же самый импульс вызовет сжатие массы только

одного из них с большею вдвое скоростью $v = v_0$. Тогда, повторяя вывод уравнения (5), получим:



Фиг 13. Последовательные положения стержней при ударе.



Фиг . 14. Картина продольного удара, по Рамзауеру.

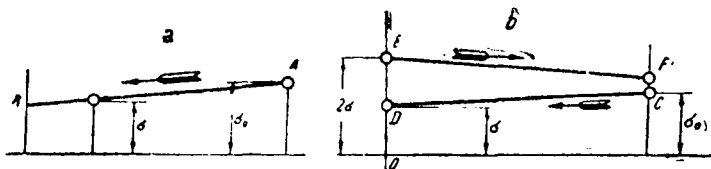
$$\sigma_0 s \Delta t = M v_0;$$

$$\sigma_0 s \frac{l}{c} = s l \rho v_0;$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_0 &= v_0 \rho c = v_0 \sqrt{E\rho}; \\ \sigma &= 2\sigma_0 = 2v_0 \sqrt{E\rho}. \end{aligned} \right\} \quad (5')$$

Подобный же резкий скачок напряжения будет происходить через каждый промежуток времени $T = \frac{2L}{l}$, нужный волне для прохождения в оба конца длины стержня L .

Более точную картину распределения напряжений представляет фиг. 15, учитывающая сопротивление сжимаемого стержня. Спро-



Фиг. 15. Изменения напряжений в стержне.

тивление уменьшает скорость ударяющего тела, а с нею и давление на стержень. В результате получаются волны с постепенно уменьшающейся величиной деформаций, или с постепенно уменьшающимся напряжением. Считая приблизительно закон уменьшения прямолинейным, имеем, что вычисленное выше напряжение $\sigma_0 = v_0 \sqrt{E\rho}$ будет лишь в голове волны, текущее же напряжение $\sigma < \sigma_0$ (фиг. 15a). На фиг. 15b изображен момент возвращения отраженной волны к месту удара. Напряжение в месте стыка стержней будет $\sigma < 2\sigma_0$ (ордината OD). Скачок напряжения в момент второго отражения волны пройдет на величину σ ($OE = 2OD$).

Для стержней с несоизмеримыми длинами анализ требует применения общих положений, данных С.-Венаном и Буссинеском.

Если рассматривать элемент стержня площадью S с абсциссами конечных сечений x и $(x + dx)$,¹ то действующие на него продольные противоположные по направлению усилия равны

$$-ES \frac{\partial u}{\partial x} \text{ и } +ES \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \right),$$

где u есть продольное перемещение сечения. Ускорение элемента под действием этих сил равно $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ и уравнение его движения

$$S dx \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx,$$

откуда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (7)$$

Интегралом этого уравнения является

$$u = f(ct - x) \mp f_1(ct + x - 2l).$$

В этом можно убедиться проверкой:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''_{ct-x}(ct - x) \mp f''_{1ct+x-2l}(ct + x - 2l);$$

¹ Начало координат помещаем в точке удара,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 j''_{ct-x}(ct-x) \mp c^2 j''_{1ct+x-2l}(ct+x-2l);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

При решении задачи должны быть выполнены условия, начальные и граничные. Условия эти следующие.

При $t=0$, $u=0$ и $\frac{\partial u}{\partial t}=0$ для всех точек стержня, кроме точки удара, где $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{x=0} = v$.

Если противоположный ударяемому конец стержня закреплен, то, при $x=l$, $u=0$, или

$$f(ct-l) \mp f_1(ct-l) = 0. \quad (8)$$

Верхний знак у второго члена относится именно к этому случаю, а нижний знак (плюс) к свободному концу. Производная $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ каково бы ни было t .

Двучленная форма выражений для u показывает, что мы имеем дело с двумя волнами деформации, перемещающимися вдоль стержня в противоположные стороны со скоростью звука c .

Уравнением, относящимся к точке удара, является уравнение совместного колебательного движения обоих соударяющихся тел. Это уравнение, по С.-Венану, составляется следующим образом. Обозначим ударяющую массу через M_1 , а ударяемую через M_2 , силу инерции первой через $-M_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ и добавляемую к ней силу, приходящуюся на каждую единицу массы и являющуюся функцией времени, через $p'(t)$.

Тогда:

$$M_1 p'(t) - M_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + M_2 \frac{c^2}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (9)^1$$

или

$$p'(t) = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k \frac{c^2}{l} \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{x=0}, \quad (10)$$

где k обозначает отношение масс:

$$\frac{M_2}{M_1} = k. \quad (11)$$

Подставляя значения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ и $\frac{\partial u}{\partial x}$, находим:

$$p'(t) = c^2 [f''(ct-x) \mp f''(ct+x-2l)]_{x=0} - \frac{kc^2}{l} [-f'(ct-x) \mp f'(ct+x-2l)]_{x=0}, \quad (12)$$

или

$$\frac{1}{c^2} p'(t) = f''(ct) \mp f''(ct-2l) - \frac{k}{l} [-f'(ct) \mp f'(ct-2l)]. \quad (13)$$

¹ Ударяющее тело M_1 С.-Венан считает коротким и жестким,

При $t \leq 0$, т. е. до начала удара, деформация $u = 0$;

$$f(ct - x) \mp f(ct + x - 2l) = 0;$$

$$f(ct - x) = \pm f[(ct - x) + 2(x - l)].$$

Это равенство возможно только в том случае, если $f(ct - x)$ постоянно сохраняет нулевое значение при нулевом или отрицательном значении аргумента. Соответственно $f'(ct - x) = 0$.

Так как то же самое свойство имеет функция $p'(t)$, то все члены уравнения (13):

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} p'(t) d(ct) &= f''(ct) d(ct) \mp f''(ct - 2l) d(ct) + \\ &+ \frac{k}{l} f'(ct) d(ct) \pm \frac{k}{l} f'(ct - 2l) d(ct) \end{aligned}$$

можно интегрировать непосредственно, начиная от значения $t = 0$ или $ct = 0$, без добавления постоянной интегрирования. Находим при обозначении $ct = z$ и перегруппировке членов:

$$f'(z) + \frac{k}{l} f(z) = \left\{ \frac{1}{c} p \left(\frac{z}{c} \right) \pm \left[f'(z - 2l) - \frac{k}{l} f(z - 2l) \right] \right\}.$$

Вторичное интегрирование дает:

$$f(z) = e^{-\frac{kz}{l}} \int_0^z e^{\frac{kz}{l}} \left\{ \frac{1}{c} p \left(\frac{z}{c} \right) \pm \left[f'(z - 2l) - \frac{k}{l} f(z - 2l) \right] \right\} dz.$$

Чтобы иметь значения выражения, заключенного в фигурные скобки, даем z начальное значение $2l$; тогда $f(z - 2l)$ и $f'(z - 2l)$ равны нулю; затем увеличиваем z каждый раз на $2l$; последовательные значения обеих функций будут определяться при этом. Функция $p(z/c)$ имеет значение скорости ударяющей массы v , кроме незначительных промежутков времени t вблизи нижнего предела интеграла.

Окончательный вид последнего уравнения:

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{l}{k} \cdot \frac{v}{c} \left(1 - e^{-\frac{kz}{l}} \right) \pm e^{-\frac{kz}{l}} \int_0^z e^{\frac{kz}{l}} \left[f'(z - 2l) - \right. \\ \left. - \frac{k}{l} f(z - 2l) \right] dz. \end{aligned} \quad (14)$$

Вычисляя значения подинтегрального выражения при значениях $z = 0$, $z = \varepsilon$ от нуля до $2l$, от $2l + \varepsilon$ до $4l$, от $4l + \varepsilon$ до $6l$ и от $6l + \varepsilon$ до $8l$. С. Венан получает следующую таблицу значений $f(z)$ и $f'(z)$ (табл. 1)

Последовательные значения $f(z)$ и ее производной

$f(z)$	$f'(z)$
I) $f(z \leq 0) = 0.$	1) $f'(z = \varepsilon) = \frac{v}{c}.$
II) $f(0 < z < 2l) = \frac{l}{k} \cdot \frac{v}{c} \left(1 - e^{-\frac{kz}{l}}\right).$	2) $f'(\varepsilon < z < 2l) = \frac{v}{c} e^{-\frac{kz}{l}}.$
III) $f(2l < z < 4l) = \frac{l}{k} \cdot \frac{v}{c} \left(1 - e^{-\frac{kz}{l}}\right) \pm$ $\pm \frac{l}{k} \cdot \frac{v}{c} \left[-1 + \left(1 + 2k \frac{z-2l}{l}\right) \cdot e^{-\frac{k}{l}(z-2l)}\right]$	3) $f'(2l + \varepsilon < z < 4l) = \frac{v}{c} e^{-\frac{kz}{l}} \pm$ $\pm \frac{v}{c} \left(1 - 2k \frac{z-2l}{l}\right) e^{-\frac{k}{l}(z-2l)}.$
IV) $f(4l < z < 6l) = \frac{l}{k} \cdot \frac{v}{c} \left(1 - e^{-\frac{kz}{l}}\right) \pm$ $\pm \frac{l}{k} \cdot \frac{v}{c} \left[-1 + \left(1 + 2k \frac{z-2l}{l}\right) e^{-\frac{k}{l}(z-2l)}\right] \pm$ $\pm \frac{l}{k} \cdot \frac{v}{c} \left\{1 - \left[1 + 2k^2 \left(\frac{z-4l}{l}\right)^2\right] e^{-\frac{k}{l}(z-4l)}\right\}.$	4) $f'(4l + \varepsilon < z < 6l) = \frac{v}{c} e^{-\frac{kz}{l}} \pm$ $\pm \frac{v}{c} \left(1 - 2k \frac{z-2l}{l}\right) e^{-\frac{k}{l}(z-2l)} \pm \frac{v}{c} \left[1 -$ $- 4k \frac{z-4l}{l} + 2k^2 \left(\frac{z-4l}{l}\right)^2\right] e^{-\frac{k}{l}(z-4l)}$
V) $f(6l < z < 8l) = \frac{l}{k} \cdot \frac{v}{c} \left(1 - e^{-\frac{kz}{l}}\right) \pm$ $\pm \frac{l}{k} \cdot \frac{v}{c} \left[-1 + \left(1 + 2k \frac{z-2l}{l}\right) e^{-\frac{k}{l}(z-2l)}\right] \pm$ $\pm \frac{l}{k} \cdot \frac{v}{c} \left\{1 - \left[1 + 2k^2 \left(\frac{z-4l}{l}\right)^2\right] e^{-\frac{k}{l}(z-4l)}\right\} \pm$ $\pm \frac{l}{k} \cdot \frac{v}{c} \left\{-1 + \left[1 + 2k \frac{z-6l}{l} - 2k^2 \left(\frac{z-6l}{l}\right)^2 +$ $+ \frac{4}{3} k^3 \left(\frac{z-6l}{l}\right)^3\right] e^{-\frac{k}{l}(z-6l)}\right\}.$	5) $f'(6l + \varepsilon < z < 8l) = \frac{v}{c} e^{-\frac{kz}{l}} \pm$ $\pm \frac{v}{c} \left(1 - 2k \frac{z-2l}{l}\right) e^{-\frac{k}{l}(z-2l)} \pm$ $\pm \frac{v}{c} \left[1 - 4k \frac{z-4l}{l} + 2k^2 \left(\frac{z-4l}{l}\right)^2\right] \cdot$ $\cdot e^{-\frac{k}{l}(z-4l)} \pm \frac{v}{c} \left[1 - 6k \frac{z-6l}{l} +$ $+ 6k^2 \left(\frac{z-6l}{l}\right)^2 - \frac{4}{3} k^3 \left(\frac{z-6l}{l}\right)^3\right] \cdot$ $\cdot e^{-\frac{k}{l}(z-6l)}$

По этим данным может быть определено перемещение u .

В момент обращения в нуль и перемены в дальнейшем знака производной $\frac{\partial u}{\partial x}$, а следовательно, и деформации ударяемого стержня M_2 , происходит отделение сжатых ранее тел друг от друга и окончание явления удара. Этот момент при свободном ударяемом стержне (нижние знаки перед всеми членами с двойными знаками) наступает при $t = \frac{2l}{c}$, когда волна колебания пройдет один раз вдоль стержня и обратно.

При ударяемом стержне, имеющем закрепленный противоположный конец ($x = l$), до момента $t = \frac{2l}{c}$ разделение стержней не может иметь места. Чтобы оно произошло от $t = \frac{2l}{c}$ до $t = \frac{4l}{c}$, нужно, чтобы

$$k = \frac{M_2}{M_1} \geq 0.578595,$$

или

$$\frac{1}{k} = \frac{M_1}{M_2} \leq 1.7283.$$

Если $1.7283 \leq \frac{M_1}{M_2} \leq 4.1511$, то удар окончится между

$$t = \frac{4l}{c} \text{ и } t = \frac{6l}{c};$$

если

$$4.1511 \leq \frac{M_1}{M_2} \leq 7.35,$$

то $\frac{6l}{c} < t$ окончания удара $< \frac{8l}{c}$.

Точное значение t во всех случаях получается приравнением нулю соответствующего значения производной $\frac{\partial u}{\partial x}$ и решением полученного уравнения относительно z/l .

Наибольшее по абсолютной величине перемещение точки удара $(u_0)_{\max}$ может быть с достаточной для практики точностью найдено по уравнению:

$$\frac{c}{v} \cdot \frac{(u_0)_{\max}}{l} = \sqrt{\frac{\kappa}{1 + \frac{\kappa}{3}}}, \quad (15)$$

приближенно представляющему решение Навье.

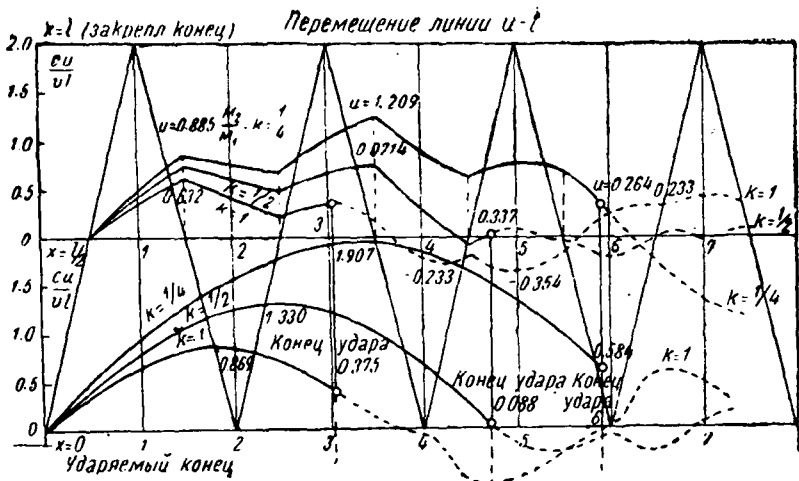
Максимальные деформации в других сечениях ударяемого стержня равны:

$$-\partial = -\frac{\partial u}{\partial x} = f'(ct - x) + f'(ct + x - 2l).$$

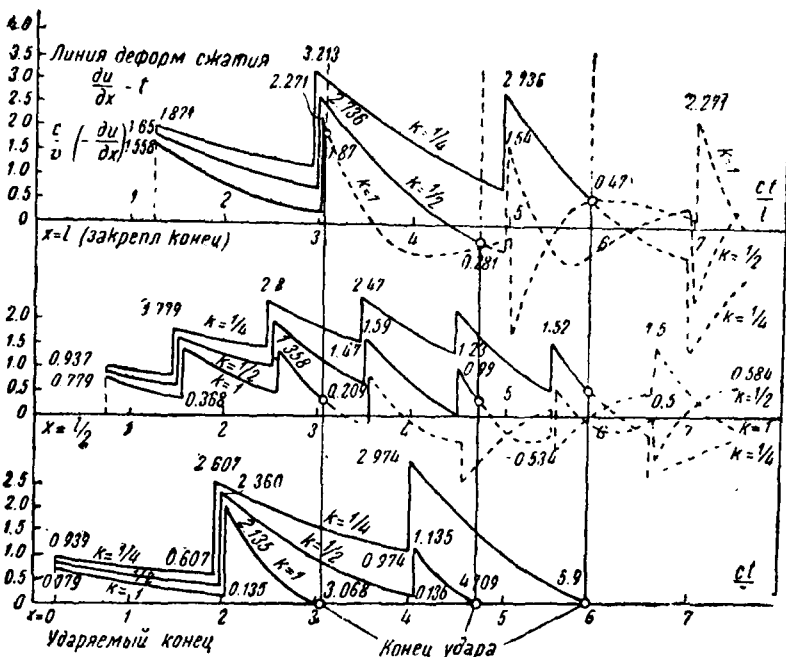
Абсолютный максимум имеет место при $x = l$, т. е. в закрепленном конце стержня.

Ход кривых $\frac{\partial u}{\partial x}$ и u (точнее: $-\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{c}{v}$ и $\frac{c}{v} \cdot \frac{u}{l}$) в зависимости от времени (по оси абсцисс отложены значения $\frac{ct}{l}$) показан на фиг. 16 и 17. Три вычерченных кривых соответствуют значениям $k = \frac{M_2}{M_1} = 1, 1/2$ и $1/4$. Линии $\frac{cu}{v}l$ после окончания удара показаны пунктиром и обнаруживают периодический характер. В точках, в которых $ct - x$ или $ct + x - 2l$ кратны $2l$, получаем разрыв на кривой $\frac{\partial u}{\partial x}$ и соответствующий излом (угол) на кривой $\frac{c}{v} \cdot \frac{u}{l}$ (фиг. 16).

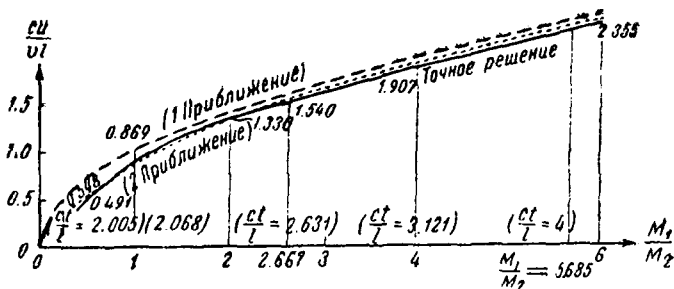
Фиг. 18 показывает u_{\max} в зависимости от $\frac{1}{k} = \frac{M_1}{M_2}$.



Фиг. 16. Перемещение сечений при ударе, по Сен-Венану.



Фиг. 17. Деформации при продольном ударе.



Фиг. 18. Максимальные перемещения, по Сен-Венану.

Эти наибольшие значения получаются:

$$\text{при } 0 < \frac{M_1}{M_2} < 5.686 \text{ во время } \frac{2l}{c} < t < \frac{4l}{c};$$

$$\text{„ } 5.686 < \frac{M_1}{M_2} < 13.816 \text{ „ „ } \frac{4l}{c} < t < \frac{6l}{c};$$

$$\text{„ } 13.816 < \frac{M_1}{M_2} < 25.16 \text{ „ „ } \frac{6l}{c} < t < \frac{8l}{c}.$$

Сами величины соответствующих деформаций на закрепленном конце равны:

$$\text{Для первого случая } 0 < \frac{M_1}{M_2} < 5.686:$$

$$-\partial = 2 \frac{v}{c} (1 + e^{-2k}). \quad (16)$$

Это выражение при малых значениях $\frac{M_1}{M_2}$ стремится к $2 \frac{v}{c}$.

$$\text{Для второго случая } 5.686 < \frac{M_1}{M_2} < 13.816:$$

$$-\partial = \frac{2v}{c} [1 + (1 - 4k)e^{-2k} + e^{-4k}]. \quad (17)$$

Для третьего случая:

$$-\partial = \frac{2v}{c} [1 + (1 - 8k^2 + 8k^2)e^{-2k} + (1 - 8k)e^{-4k} + e^{-6k}]. \quad (18)$$

Наконец, если $\frac{1}{k} = \frac{M_1}{M_2} > 25.16$, то приблизительно

$$-\partial = \frac{v}{c} \sqrt{\frac{1}{k}}. \quad (19)$$

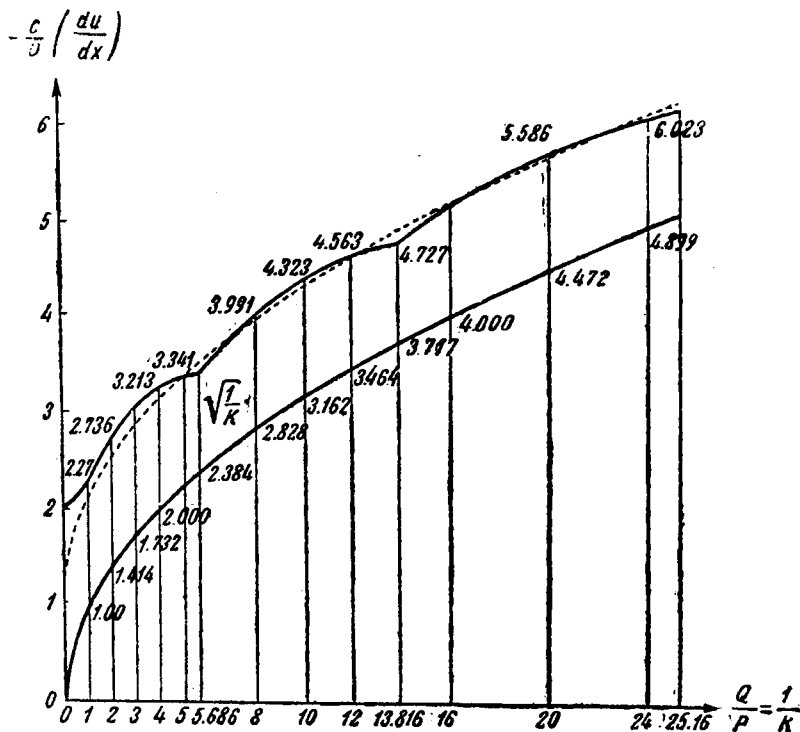
Буссинек отмечает, что коэффициент при v/c во всех этих выражениях возрастает при увеличении M_1/M_2 , начиная от 2, и стремится к величине $1/k$, оставаясь постоянно больше квадратного корня из этого отношения.

Фиг. 19 представляет своими ординатами наибольшие значения деформаций $-\frac{c}{v} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$ в зависимости от $\frac{1}{k} = \frac{M_1}{M_2}$. Протекание функции между написанными выше пределами показано сплошными линиями, а выравнивающая все три участка средняя кривая показана пунктиром. При $0 < \frac{M_1}{M_2} < 5$ к ней хорошо подходит уравнение:

$$-\frac{c}{v} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 2(1 + e^{-2k}), \quad (20)$$

а для $5 < M_1/M_2 < 24$ — уравнение $-\frac{c}{v} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 1 + \sqrt{\frac{1}{k}}$. (21)

Вычисленные деформации, отмечает С.-Венан, могут служить для определения максимальных напряжений.



Фиг. 19. Максимальные сжатия в закрепленном конце стержня.

В своем выводе Буссинек и С.-Венан считают ударяющую массу M_1 короткой и жесткой, т. е. недеформируемой при столкновении; вся деформация воспринимается по их расчету сравнительно длинным и упругим стержнем M_2 . Максимальные напряжения, получаемые при этом предположении, преувеличены, так как не принята во внимание энергия, которую поглощают упругие колебания массы M_1 .

Если предположить, что оба соударяющихся стержня выполнены из одного и того же материала ($E_1 = E_2$ и $\rho_1 = \rho_2$), то отношение масс k равно:

$$k = \frac{M_2}{M_1} = \frac{s_2 L_2}{s_1 L_1}, \quad (22)$$

$\frac{s_2}{s_1}$ есть отношение напряжений $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \beta$,

$$\beta = k \frac{L_1}{L_2}. \quad (23)$$

При постоянном отношении масс (k) максимальные значения напряжений зависят от отношения длин.

Приводим таблицу, разработанную Лелу (Revue Universelle des Mines, 1938, № 8—9) для удара (табл. 2).

k	$\frac{L_1}{L_2}$	Максимальное напряжение при упругой массе M_1		Максимальные напряжения при неупругой массе M_1		$\sigma = \sigma_0 \sqrt{\frac{1}{k}}$	$\sigma = \sigma_0 (\sqrt{\frac{1}{k}} + 1)$
		в закрепленном конце	в ударяемом конце	в закрепленном конце	в ударяемом конце		
0.5	1	1.34 σ_0	1.12 σ_0	2.736 σ_0	2.368 σ_0	1.41 σ_0	2.41 σ_0
	2	1.60	1.57				
	5	2.16	1.99				
	20	2.57	2.26				
	40	2.67	2.32				
0.1	1	3.02	3.00	4.323 σ_0		3.17 σ_0	4.17 σ_0
	2	3.64	3.47				
	3	3.80	3.58				
	5	4.01	3.76				

В таблице $\sigma_0 = \frac{v_0}{c} E$ при M_1 абсолютно неупругой.

Из нее видно, что приблизительная формула

$$\sigma = \sigma_0 \left(\sqrt{\frac{1}{k}} + 1 \right) \quad (24)$$

подходит при значениях $\frac{L_1}{L_2}$, больших единицы, а формула

$$\sigma = \sigma_0 \sqrt{\frac{1}{k}}, \quad (25)$$

когда это отношение меньше единицы.

Далее, так как сама величина напряжения σ_0 пропорциональна \sqrt{E} и $\sqrt{\rho}$,

$$\sigma_0 = \frac{v_0}{2} \sqrt{E\rho}, \quad (5)$$

то при различных материалах, но одном и том же k

$$\sigma_1 : \sigma_2 = \sqrt{\frac{E_1}{E_2}}. \quad (26)$$

При ударе двух металлических деталей $\sqrt{\frac{E_1}{E_2}}$ не может превзойти 2 (удар стали по бронзе). При этом изменении $\sqrt{\frac{E_1}{E_2}}$ происходит возрастание действительных напряжений:

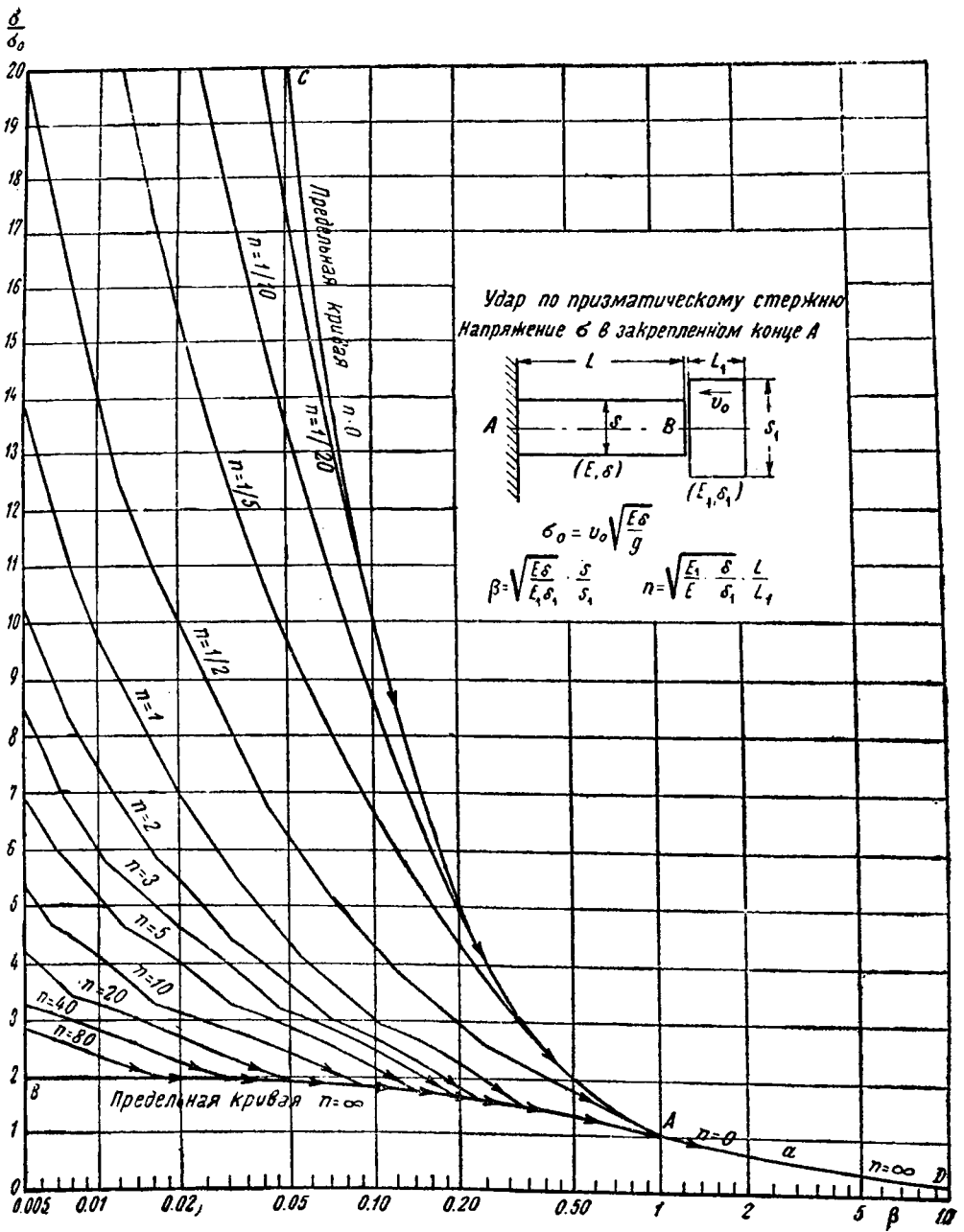
$k = 0.5$; $L_1 : L_2 = 1$ от 1.34 σ_0 до 1.6 σ_0 ;

$k = 0.5$; $L_1 : L_2 = 20$ от 2.57 σ_0 до 2.67 σ_0 ;

$k = 0.1$; $L_1 : L_2 = 2$ от 3.64 σ_0 до 3.9 σ_0 .

Дальнейшие исследования Лелу (там же, 1938, № 12) привели к двум диаграммам — фиг. 20 и 21, дающим для неподвижного конца A стержня AB (фиг. 20) и для точки удара B (фиг. 21) отношение $\sigma_{\max} : \sigma_0$ в зависимости от параметров ударяющихся тел (длины, сечения, модуля упругости, удельных весов и скорости удара).

Напряжение σ_0 при жесткой ударяющей массе M_1 равно:

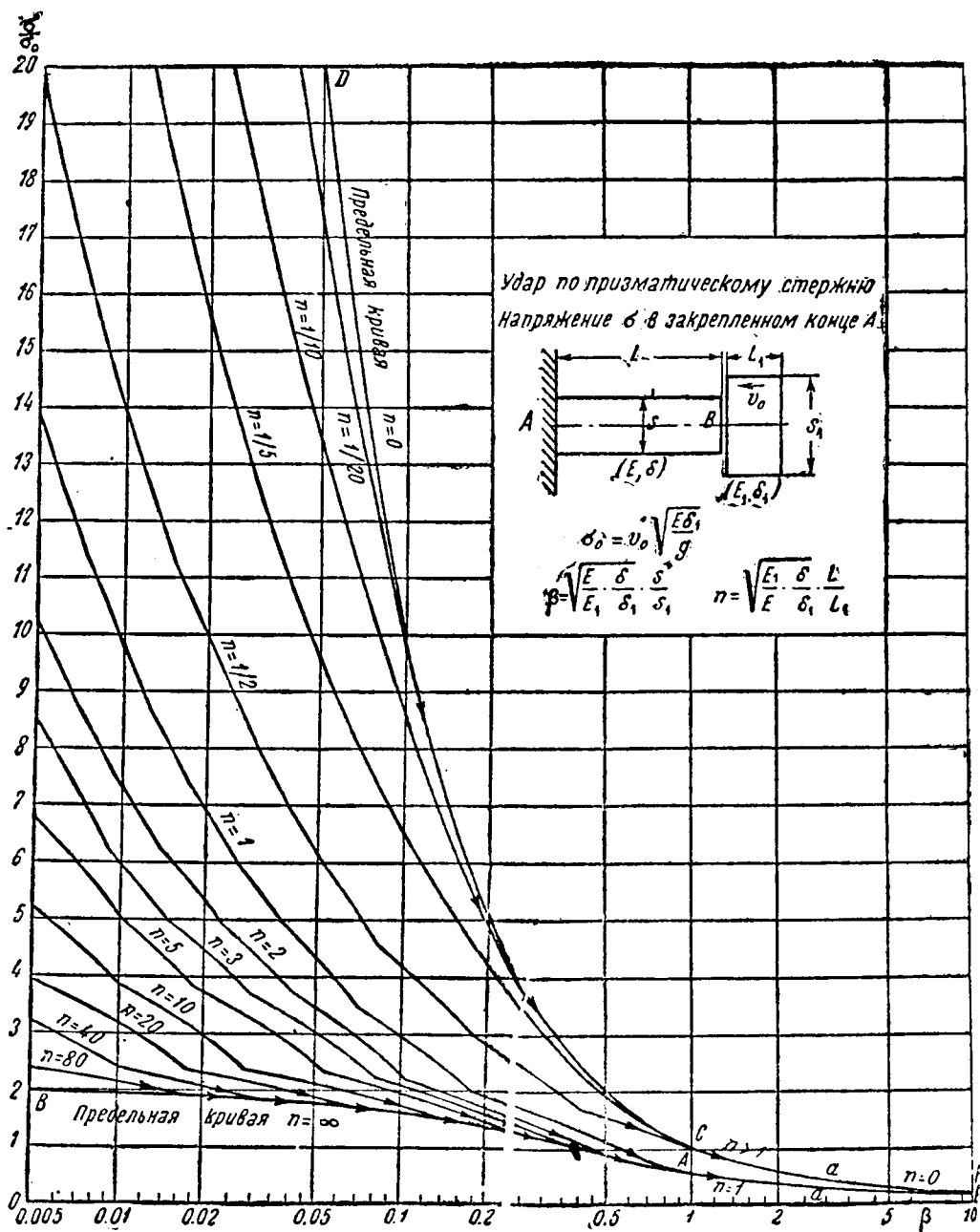


Фиг. 20. Диаграмма $\frac{\sigma}{\sigma_0}$ в зависимости от параметров ударяющихся тел для неподвижного конца стержня.

$$\sigma_0 = \frac{v_0}{c} E = v_0 \sqrt{E\rho} = v_0 \sqrt{\frac{E\delta}{g}} \quad (5')$$

Отношение напряжений $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \beta$ равно:

$$\beta = \frac{s}{s_1} \sqrt{\frac{E}{E_1} \cdot \frac{\delta}{\delta_1}}$$



Фиг. 21. Диаграмма $\frac{\sigma}{\sigma_1}$ для точки удара.

Отношение n равно:

$$n = \frac{L}{L_1} \sqrt{\frac{E_1 \delta_1}{E} \cdot \frac{\delta}{\delta_1}}$$

Максимальные напряжения во всем стержне представляет фиг. 20. Напряжения на свободном конце показаны на фиг. 21. Напряжения в промежуточных сечениях заключаются между напряжениями в концах стержня.

Диаграммы могут иметь приложение до предела упругости σ_e металлов, из которых выполнены соударяющиеся детали. Их напряжения в точке удара обратно пропорциональны площадям s и s_1 поперечных сечений.

Напряжения в закрепленном конце заключены между двумя предельными кривыми, соответствующими $n=0$ и $n=\infty$ (кривая BAD относится к длинному и податливому стержню, выносящему удар, а кривая CAD к короткому и жесткому). Их общая часть AD годится для всех значений n от нуля до бесконечности.

Предельные кривые для ударяемого конца B (фиг. 21) представляют подобную же картину, отличающуюся лишь отсутствием общей части.

При ударе стержней часто встречается случай перехода напряжения (например, сжатия) за предел упругости σ_e . Приближенное решение дается для этого случая уравнением (4) настоящей главы:

$$c = \sqrt{\frac{E'}{\rho}},$$

в котором $E' < E$.

Более точное решение потребовало бы применения уравнения (7) два раза — при возникновении в стержне напряжения и при его разгрузке под влиянием волны противоположного знака. При переходе напряжения за предел упругости может быть применен закон Герстнера, по которому полная деформация разлагается на упругую и остаточную, причем для первой соблюдается пропорциональность между напряжениями и деформациями также и за пределом упругости.

Так как при разгрузке стержня будет обращаться в нуль только упругая часть деформации, то угловые коэффициенты кривых нагружения и разгрузки стержня будут различны. Соответственно фиг. 11, кажущийся модуль упругости при нагружении E' должен быть меньше E , а при падении напряжения он сохранит величину E . Итак, вместо уравнения (7) получим два:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{E'}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \text{ для нагружения}$$

и

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \text{ для снятия напряжения.}$$

При проходе вдоль стержня ряда волн сжатия и растяжения оба уравнения поочередно должны иметь приложение. Их совместное решение представляет большие математические трудности, вызывающие приближенное применение только одного уравнения (7) с подстановкою в него уменьшенного значения E' , которое должно быть определено из опыта.

Графический метод проф. Бержерона

В области практического приложения расчетов С.-Венана и Бусиньека можно отметить работы Бержерона и Лелу.

Первый сравнивает явление удара твердых тел и распространение волн напряжения вдоль ударяющихся стержней с явлением гидравлического удара при изменении установившегося в трубопроводе режима и с распространением при этом волн давления вдоль трубы с жидкостью.

В обоих случаях в точке удара мгновенно устанавливается повышение давления, которое распространяется со скоростью c вдоль трубы или вдоль стержня до достижения его торцевой поверхности. В случае свободной поверхности отражение волны происходит с переменной знака, при закрепленном конце — без перемены. Оба сравнимых случая отличаются, по Бержерону, только количеством — величиною модуля упругости (например $2 \cdot 10^6$ кг/см² для стали вместо $2.07 \cdot 10^4$ кг/см² для воды).

Аналогично переменному напору и скорости в выбранном сечении трубы мы получаем уравнения для переменных напряжения и скорости в рассматриваемом сечении стержня.

Состояние материала в заданном сечении определяется наложением на начальное напряжение и скорость частиц тела тех переменных величин, распространение которых и составляет волны, прямую и отраженную.

Направление скорости v частиц стержня совпадает с направлением действующего усилия. При волне сжатия, считаемой нами положительной, скорость v частиц совпадает также и с направлением движения волны, а при волне растяжения она имеет обратное направление. Если обозначить через σ' и σ'' значения напряжений (их скачков), несомых каждою из этих волн, а через v' и v'' соответствующие скорости поперечных сечений стержней, то полное напряжение и скорость в рассматриваемом сечении выразятся:

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma' + \sigma'' \quad (27)$$

и

$$v = v_0 + v' - v'' = v_0 + \frac{c}{E} (\sigma' - \sigma''). \quad (28)$$

При сложении двух встречных волн напряжения в упругом стержне, имеющих одинаковые периоды колебаний, результирующее напряжение получается алгебраическим сложением, а равнодействующая скорость частиц — алгебраическим вычитанием.

Если в эти уравнения вместо напряжений ввести возникающие при ударе и распространяющиеся в виде волн усилия $F = \sigma's$ и $f = \sigma's$, то получим:

$$F_x = F_0 + F + f,$$

$$v_x = v_0 + \frac{c}{Es} (F - f).$$

Исключая из этих двух уравнений f , находим:

$$F_x = F_0 + 2F + (v_0 - v_x) \frac{Es}{c}. \quad (29)$$

Прилагаем это уравнение к сечению, для которого F_i и v_i представляют усилие и скорость в заданный момент:

$$F_i = F_0 + 2F + (v_0 - v_i) \frac{Es}{c}. \quad (30)$$

Задача построения характеристических кривых для соударяющихся стержней значительно упрощается, если вместо того, чтобы рассматривать состояния стержня с неподвижной точки, вообразить наблюдателя перемещающимся вдоль каждого из стержней со скоростью c волны. При отражении последний наблюдатель также меняет направление своего движения.

Если наблюдатель начинает свое перемещение из рассматриваемого сечения в тот момент, когда в нем имеют место F_i и v_i , то текущие значения F_x и v_x для произвольного проходимогo им сечения будут связаны соотношением, которое получится вычитанием двух последних уравнений для исключения из них члена $2F$, остающегося для движущегося наблюдателя постоянным:

$$F_x - F_i = -\frac{Es}{c}(v_x - v_i). \tag{31}$$

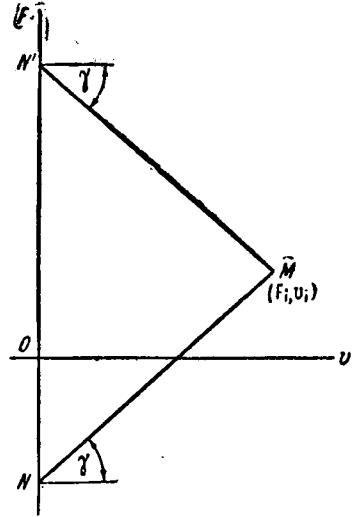
Это уравнение может быть представлено прямой MN (фиг. 22), проведенной через точку $M(F_i, v_i)$ и имеющей угловой коэффициент

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{Es}{c}. \tag{32}$$

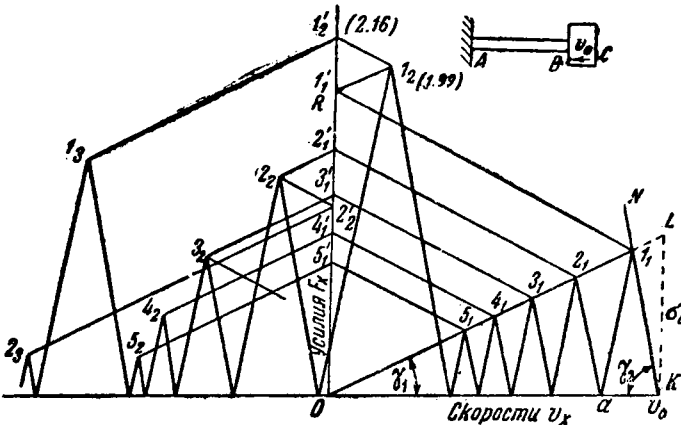
При движении наблюдателя в обратном направлении вместе с отраженной волной f , уравнение будет отличаться знаком второй части и представляться прямой MN' , симметричной с предыдущей.

Рассмотрим применение графического метода Бержерона к частным случаям удара (по Лелу, *Revue Universelle des Mines*, 1938, август — сентябрь).

Пусть происходит столкновение двух упругих стержней AB и BC (фиг. 23) из различного материала, различной длины и различного поперечного сечения. Угловые коэффициенты характеристических прямых равны:



Фиг. 22. Диаграмма ускорение-скорость в ударной и отраженной волнах.



Фиг. 23. Эпюра удара двух цилиндрических стержней.

для стержня $\operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{E_1 s_1}{c_1}$;

для ударяющего тела $Bc \operatorname{tg} \gamma_2 = \frac{E_2 s_2}{c_2}$.

Время прохождения волны напряжения или волны звука по длине каждого из стержней в оба конца равно:

$$T_1 = \frac{2L_1}{c_1} \quad \text{и} \quad T_2 = \frac{2L_2}{c_2}.$$

Разберем случай, когда T_1 кратно T_2 ; Лелу принимает (фиг. 23) $T_1 = 5T_2$.

До начала удара во всех сечениях стержней $F_x = 0$ и $v_x = 0$ для ударяемого стержня AB и $F_x = 0$; $v_x = v_0$ для ударяющего стержня BC .

Рассмотрим сечение B , по которому происходит соприкосновение стержней, во время удара, в моменты $0, T_2, 2T_2, 3T_2, 4T_2$ и $5T_2$. Чтобы движущийся наблюдатель мог достигнуть стыка B в эти моменты, он должен начать свое движение до начального момента удара. Характеристические прямые будут проходить через точку O ($F_i = 0, v_i = 0$) или K ($F_i = 0, v_i = v_0$) под углами γ_1 и γ_2 к горизонтальной оси скорости. Точка I_1 пересечения этих прямых OL и KN (фиг. 23) представляет состояние сечения B в начальный момент удара.

В этот момент в обоих сталкивающихся стержнях возникают волны сжатия, расходящиеся от стыка B к концам A и C . Для следования за этими волнами представим себе двух наблюдателей, движущихся вместе с ними или с отраженными волнами.

Для короткого стержня кривая напряжений будет:

1) I_1a , симметричная KN ; состояние свободного конца C характеризуется нулевым напряжением, и соответствующая точка a характеристической прямой I_1a должна лежать на оси абсцисс;

2) прямая $a2_1$ также под углом γ_2 к оси абсцисс соответственно движению отраженной от C волны к сечению B ; последняя ее точка 2_1 должна лежать на прямой OL , являющейся вплоть до момента $T_1 = 5T_2$ характеристикой стержня AB ;

3) дальнейшие ветви ломаной, общим числом 10, соответственно пяти периодам T_2 , попеременно наклонены вправо и влево под углом γ_2 к горизонтали.

Последняя из этих ветвей будет оканчиваться не на линии OL , так как характеристика длинного стержня AB изменится в связи с подходом в нем к общему сечению B волны, отраженной от закрепленного конца A .

Характеристическая ломаная линия стержня AB соответствует движению другого наблюдателя. Она состоит из прямой I_1I_1' , симметричной OI_1 , т. е. наклоненной под углом γ_1 к горизонту; ее конец соответствует $v_x = 0$ (сечение A закреплено), т. е. лежит в точке I_1' на оси ординат; второе звено ломаной линии $I_1'I_2$ параллельно OL .

Пересечение последних элементов ломаных характеристик для обоих стержней — точка I_2 — представляет своими координатами скорость общего сечения B , и напряжение в нем в момент $T_1 = 5T_2$.

После рассматриваемого момента к стыку B будут непрерывно подходить с обеих сторон напряжения, представляемые волнами, движущимися по стержням. Следовательно, постоянной прямой характеристики, подобной линии OL , при дальнейшем движении сечения B не будет, и отдельные вершины ломаных характеристик нужно определить тем же методом, каким была найдена точка I_2 . Например, для точки 2_2 нужно отсчитать от точки 2_1 десять звеньев ломаной, расположенных под углом γ_2 к оси абсцисс, и два звена ($2_1'2_1'$ и $2_1'2_2$) под углом γ_1 к оси. Восемь частей первой ломаной уже вычерчены на эюре (фиг. 23) между 2_1 и I_2 ; поэтому остается только провести через точку I_2 линию под углом γ_2 к горизонтали до пересечения с осью абсцисс (напряжение в свободном сечении C равно нулю) и симметричную последней линию до встречи в точке 2_2 с характеристикой длинного стержня $2_1'2_2$.

Подобным же образом от точки Z эпюры переходим к Z_2 , затем к $4_2, 5_2, 1_3, 2_3$ и т. д. Продолжая построение, можно найти момент конца удара и напряжения в более длинном стержне после его окончания.

Напряжения стержня в точке удара B представлены ординатами диаграмм; наибольшее соответствует моменту T_1 возвращения отраженной волны в более длинном стержне AB .

Для закрепленного сечения A максимальное напряжение выражается ординатой I'_2 , имеющей место в промежутке между I_2 и I_3 , т. е. между $T = \frac{2L_1}{c_1}$ и $2T = \frac{4L_1}{c_1}$ (отношение масс стержней меньше 5.686).

Чтобы определить числовые величины напряжения, заметим, что ордината KL соответствует значению напряжения σ_0 при ударе по стержню от массы абсолютно неупругой:

$$\sigma_0 = V_0 \sqrt{E\rho}. \quad (5')$$

Максимальные напряжения в торцевых сечениях стержня B и A равны для рассматриваемого Лелу случая $1.99\sigma_0$ и $2.16\sigma_0$.

На фиг. 24 показаны эпюры, составленные Бержероном для удара трехступенчатого упругого тела о жесткую плиту (слева). Отдельные ступени имеют различные диаметры и длины и выполнены из различных материалов, но размеры их подобраны так, что волны требуют одно и то же время τ для прохождения каждого отрезка тела:

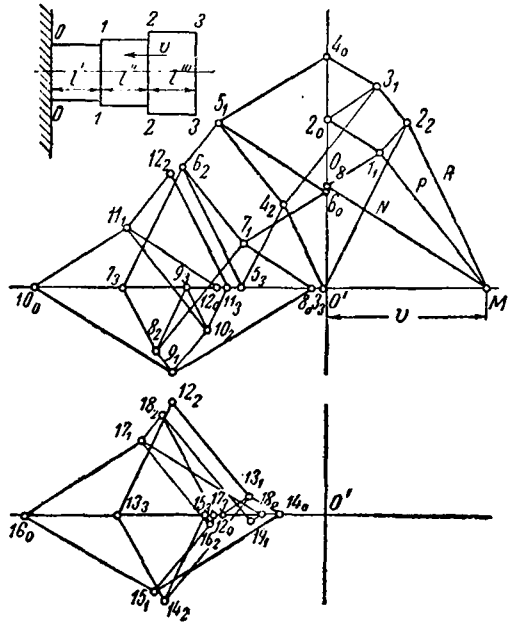
$$\frac{l'}{c'} = \frac{l''}{c''} = \frac{l'''}{c'''} = \tau.$$

Время τ принято за единицу, и эпюры содержат рассмотрение колебания напряжений в точке удара в течение 50 промежутков времени τ . Рассмотрим явления, происходящие за первые 5τ . Изображающие точки помещены на эпюрах цифрами, дающими рассматриваемый момент (число промежутков τ , истекших от начала удара), с индексами, обозначающими номер сечения детали.

Начальная точка M с абсциссой σ и ординатой нуль соответствует нулевому напряжению в детали до удара. Угловые коэффициенты характеристических прямых для трех наблюдателей, движущихся влево — в направлении начальной скорости v , равны соответственно:

$$\frac{E's'}{c'} = \rho's'c'; \quad \frac{E''s''}{c''} = \rho''s''c'' \quad \text{и} \quad \frac{E''s''}{c''} = \rho''s''c''.$$

На фиг. 24 они представлены направлениями MN , MP и MR . Кроме начальной скорости v , задано, что плита неподвижна и ее характеристическая прямая совпадает с осью ординат.



Фиг. 24. Эпюра для трехступенчатого тела.

Чтобы быть в сечении O в момент начала удара, наблюдатель должен выйти заранее со скоростью звука. Характеристика MN его движения пересечет ось ординат в точке O_0 , определяя ординатой $O'O_0$ напряжение сжатия в плоскости стыка $O-O$ в момент начала удара. Волна сжатия дойдет до сечения $1-1$ за время $\tau = 1$. Поэтому изображающая точка I_1 должна получиться в пересечении прямой MP , представляющей состояние сечения $1-1$, и линии O_0I_1 , симметричной с MO_0 . Координаты точки I_1 изображают скорость деформации (частиц) сечения $1-1$ и возникшее в нем в момент 1τ напряжение.

От сечения $1-1$ волна сжатия частично пойдет дальше к сечению $2-2$, частью же отразится обратно к сечению $O-O$. В оба эти сечения она придет в момент 2τ . Характеристические прямые соответствующих подвижных наблюдателей: I_1I_2 — симметричная MP , и I_1I_0 — параллельная MO_0 . Пересечения с осью ординат и с линией MR определяют изображающие точки 2_0 и 2_2 .

Отражаясь от конца O ступенчатого стержня и от сечения $2-2$ (отчасти), волны пойдут к сечению $1-1$, достигнув его в момент 3τ . Соответствующая точка эпюры 3_1 получается в пересечении прямых 2_0I_1 , параллельной O_0I_1 , и 2_2I_1 , параллельной MP . Кроме того, часть волны направится от сечения $2-2$ к торцевому сечению $3-3$, которого достигнет тоже в момент 3τ . Изображающая точка 3_3 должна лежать на пересечении 2_2I_3 , симметричной MR , и оси абсцисс (напряжение на свободном торце $3-3$ равно нулю).

За следующий промежуток времени τ волны распространятся от сечения $1-1$ к неподвижному сечению $O-O$ (3_1I_0 параллельна MN) и от $1-1$ и $3-3$ к сечению $2-2$. Изображающая точка 4_2 находится на пересечении $3_1I_2 \parallel 2_2I_1$ и $3_3I_2 \parallel MR$.

Для пятого промежутка τ находим изображающие точки 5_1 ($4_0I_1 \parallel O_0I_1$ и $4_2I_1 \parallel MP$) и 5_3 ($4_2I_3 \parallel 2_2I_3$); точка 5_3 лежит на оси абсцисс.

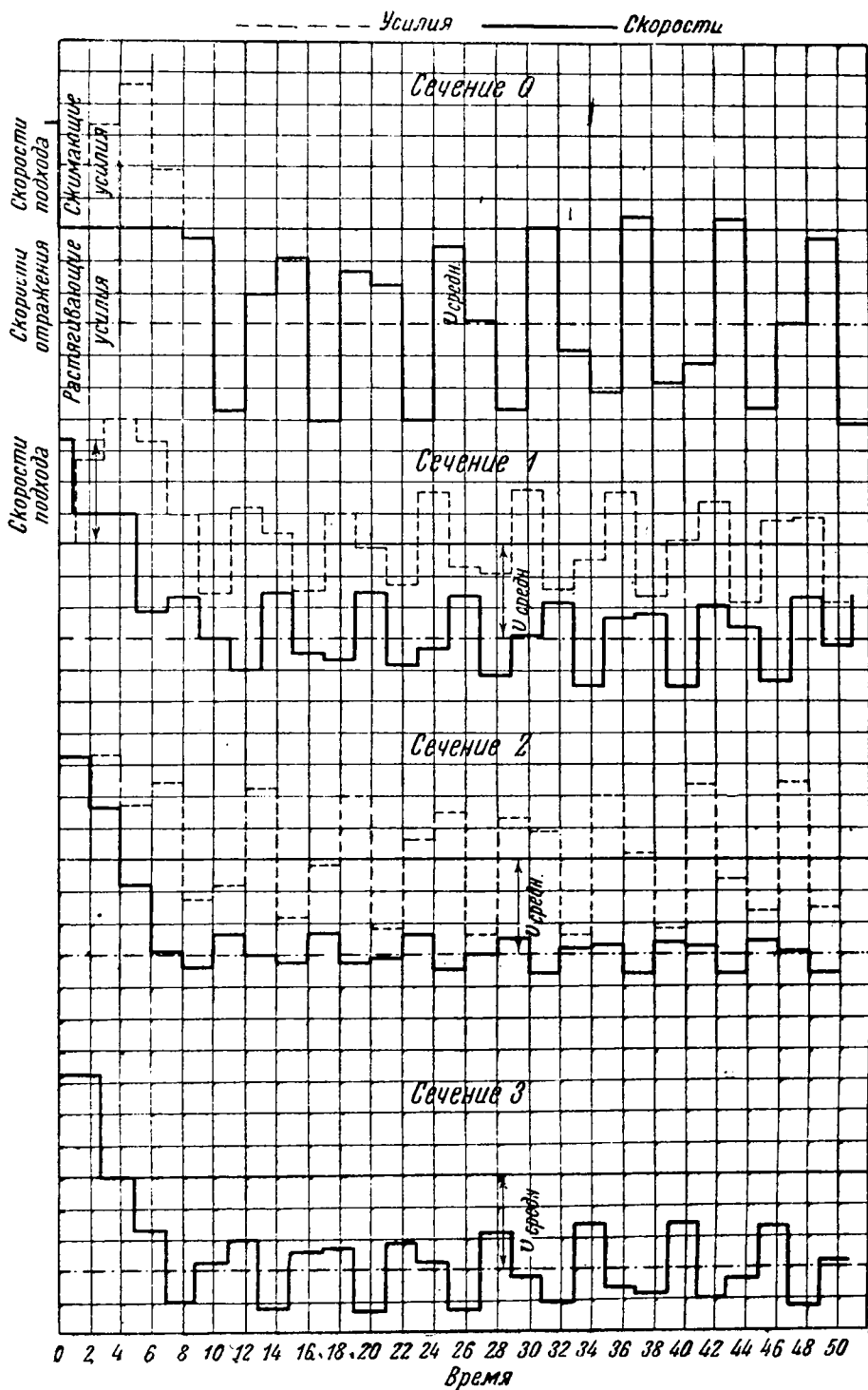
Продолжая те же построения, можем найти, что в точке δ_0 , соответствующей времени 8τ , напряжение сжатия в сечении стыка $O-O$ и сила взаимодействия ступенчатого стержня и плиты обратились в нуль, и удар окончился. Дальнейшие эпюры дают напряжения в свободном, отскокившем от плиты стержне вследствие прохождения по нему волн растяжения и сжатия (колебания частиц стержня).

Фиг. 25 показывает диаграммы изменения напряжений (или пропорциональных им усилий) в сечениях $O-O$, $1-1$, $2-2$ и $3-3$ (пунктирная линия) и соответствующих скоростей перемещения этих сечений при деформации (сплошная линия). Из этих диаграмм видны колебания скорости в крайних сечениях $O-O$ и $3-3$ по отношению к средней скорости отражения, а также колебания внутренних сил в сечениях $1-1$ и $2-2$.

Бержерон отмечает, что средняя скорость отражения для совершенно упругого тела (коэффициент восстановления нигде не был введен в расчет, что соответствует его значению, равному единице), несколько меньше начальной скорости. Это объясняется наличием в стержне после удара внутренних колебаний, вызывающих напряжения и деформации стержня и переводящих часть полной сообщенной энергии в работу упругой деформации.

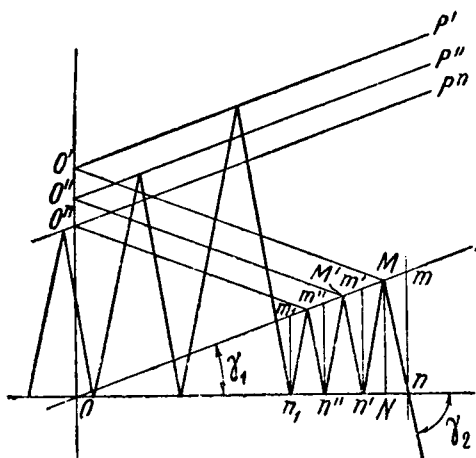
Величина перемещения при ударе некоторого сечения стержня может быть определена по построенным эпюрам, как Σut .

Рассмотрим еще при помощи графического метода Бержерона удар между упругим телом, с одной стороны, и абсолютно жестким — с другой. Характеристическая прямая для первого в нулевой момент времени есть OP (фиг. 26); она приложена в промежутке времени от нуля до $2\tau_1$, в течение которого волна напряжения проходит в оба конца длину ударяемого упругого стержня. Реакция этого тела



Фиг. 25. Изменения усилий и скоростей при ударе в зависимости от времени.

изменяется за промежуток времени $2\tau_1$ от m_1 до $m_1 n_1$ (эпюра 26). Если время $2\tau_1$ достаточно мало, то его можно принять за единицу; в противном случае его можно разделить на n разных частей (на эпюре взяты 3 части, так чтобы замедляющая сила реакции упругого



Фиг. 26 Удар по абсолютно жесткому телу.

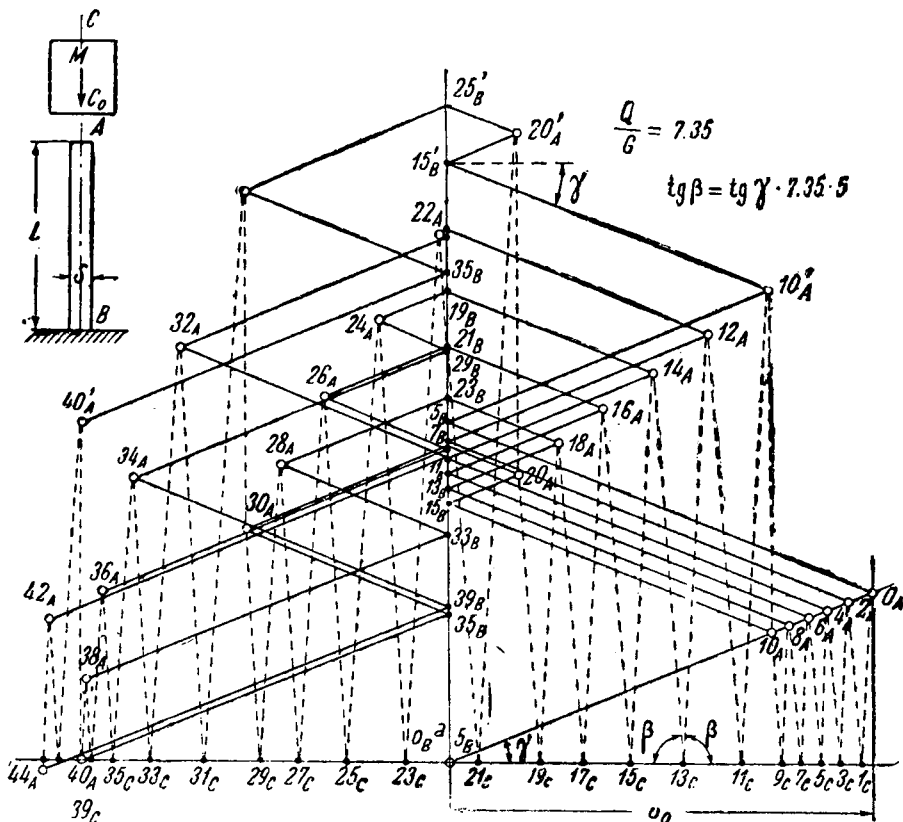
стержня за этот промежуток времени могла быть принята равной среднему арифметическому из начальной и конечной величин для этого промежутка (например MN для промежутка $n'n$). Прилагая к этому промежутку уравнение количеств движения, для всего тела имеем:

$$MN \frac{2\tau_1}{n} = M_1 n' n \doteq M_1 2nN,$$

откуда

$$\operatorname{tg} \gamma_2 = \frac{MN}{nN} = \frac{M_1}{\tau_1} n.$$

Строим последовательно ломаные линии nMn' , $n'M'n''$ и $n''M''n_1$. Линия OP переходит в параллельное положение $O'P'$ через промежуток времени $2\tau_1 + \frac{2\tau_1}{n}$, в $O''P''$ по прошествии времени $2\tau_1 + 2\frac{2\tau_1}{n}$, в $O''''P''''$ через $2\tau_1 + n\frac{2\tau_1}{n} 4\tau_1$. Увеличение n далее 3 или 4 мало влияет на повышение точности построения.



Фиг. 27. Удар по абсолютно жесткому телу при отношении масс 7.35.

Фиг. 27 (Бержерон, Comptes Rendus, 1938, № 16) дает подробную эпюру для той же задачи, но при соотношении $M_1 = 7.35M_2$.

Для этого случая, по Буссинеку и С.-Венану, сила взаимодействия обращается в нуль, и удар заканчивается после четырех двукратных проходов волны напряжения по всей длине L стержня AB ($t = 4 \frac{2L}{c}$).
 Выбранная на чертеже единица времени равна $1/10$ от продолжительности $\frac{2L}{c}$ пробега волны в оба конца.

В момент 40 , соответствующий $4 \frac{2L}{c}$, изображающая точка для стыка A оказывается на оси абсцисс в положении 40_A , и сила давления между стержнями действительно обращается в нуль.

Однако в тот же момент, как показывает точка $40'_A$, сила опять становится положительной (сжатие) и равной по величине двойному начальному усилию; следовательно, удар продолжается до момента нового обращения в нуль в момент 44 , на этот раз с переменной знака.

Резкое изменение давления в сечении A происходит при каждом двукратном проходе волны по стержню. Подобный же скачок напряжения происходит в момент 20 между изображающими точками 20_A и $20'_A$.

Удар заканчивается, таким образом, не после 4 двукратных проходов волны по стержню, а в момент 44 — после 4.4 прохода. Разъединение стержней соответствует не наименьшему корню, обращаемому в нуль давление на стыке A , а следующему по величине корню. Графический метод, значительно упрощая вычислительную работу, позволил продолжить исследование изменения давления и найти этот результат.

Чтобы закончить вопрос о продольном ударе упругих стержней, рассмотрим еще приложение мгновенной, но безударной нагрузки.

Пусть стержень постоянного сечения с закрепленным концом подвергается на другом конце мгновенному воздействию силы P . Равенство работ силы P и сил упругости стержня дает:

$$\frac{\sigma^2 s L}{2E} = P \frac{\sigma L}{E},$$

откуда

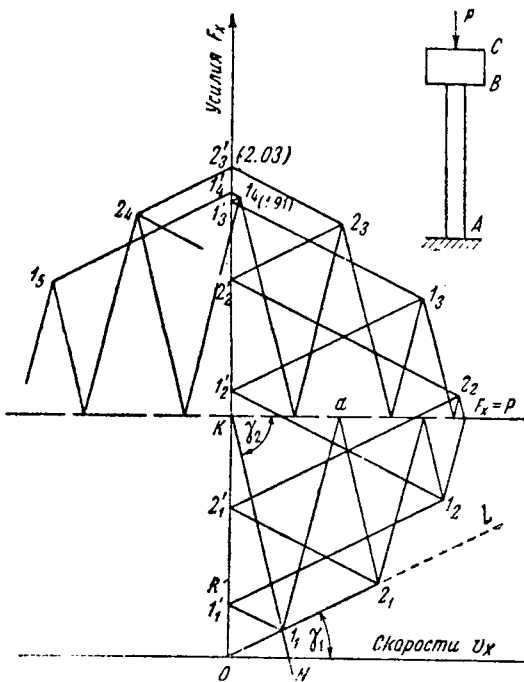
$$\sigma = 2 \frac{P}{s}.$$

Эта связь между продольными напряжениями статическим $\frac{P}{s}$ и динамическим σ хорошо известна и часто применяется при расчетах.

Более точное исследование с учетом конечной скорости распространения волн напряжения по стержню может быть выполнено как аналитическим, так и графическим путями. Рассмотрим последний, как более простой (фиг. 28).

Данными является $\operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{E_1 s_1}{c_1}$; $\operatorname{tg} \gamma_2 = \frac{E_2 s_2}{c_2}$ и соотношение $T_1 = n T_2$ (на эпюре принято $T_1 = 2 T_2$). Индексы (1) относятся к ударяемому упругому стержню I . Так как для него никаких изменений по сравнению с рассмотренными выше случаями удара не произошло, то его характеристическая прямая за время от нуля до T_1 остается попрежнему OL .

Характеристика ударяющей массы до начала воздействия на стержень $v_x = 0$ и $F_x = P$. Отложим по оси ординат $OK = P$ и проведем



Фиг. 28. Мгновенная, но безударная нагрузка.

Характеристическими прямыми для стержня AB будут I_1R , симметричная OI_1 , и RI_2 , параллельная OI_1 . Пересечение I_2 обеих характеристических ломаных будет изображающей точкой для сечения B в момент $2T_2 = T_1$. Для получения точки 2_2 проводим $2_1 2_1' \parallel I_1R$ и $2_1' 2_2 \parallel RI_2$; для короткого стержня $I_2F \parallel I_1a$ и $F2_2 \parallel KI_1$. Для нахождения следующей изображающей точки I_3 строим характеристические прямые $I_2 I_2'$ и $I_2' I_3$ под углами γ_1 к горизонту и два звена ломаной $2_2 I_3$ под углами γ_2 к оси абсцисс, и т. д.

Усилия в закрепленном конце A стержня могут быть получены измерением ординат точек $I_1', 2_1', I_2'$. Максимальное усилие $O2_3' = 2.03 P$ получается в закрепленном конце. Максимальное усилие в свободном (нагружаемом) конце в точке I_4 равно $1.91 P$.

В рассматриваемом случае нет момента, аналогичного концу удара. Если не учитывать затухания колебаний под действием пассивных сопротивлений (предположить тела совершенно упругими), то воздействие тел и происходящие от него колебания напряжения продолжатся неопределенно долгое время. Лелу исследовал графически большое число периодов и нашел, что найденный выше максимум очень медленно уменьшается с течением времени.

Диаграмма фиг. 29 показывает зависимость максимальных напряжений (точнее: их отношений к статическому напряжению P/s) от отношения K масс деталей. Отдельные тонкие кривые соответствуют промежуткам от T до $2T$, от $2T$ до $3T$, от $3T$ до $4T$ и т. д., где T есть время прохождения волны в оба конца по нагружаемому упругому стержню. Абсолютный максимум напряжения в стержне под действием внезапно приложенной безударной нагрузки представлен толстой кривой, имеющей несколько скачков.

При $K \rightarrow 0$ она стремится к $2P/s$ и при $K \rightarrow \infty$ к $2.426 P/s$. С достаточной точностью можно представить этот закон двумя пунктирными прямыми с уравнениями:

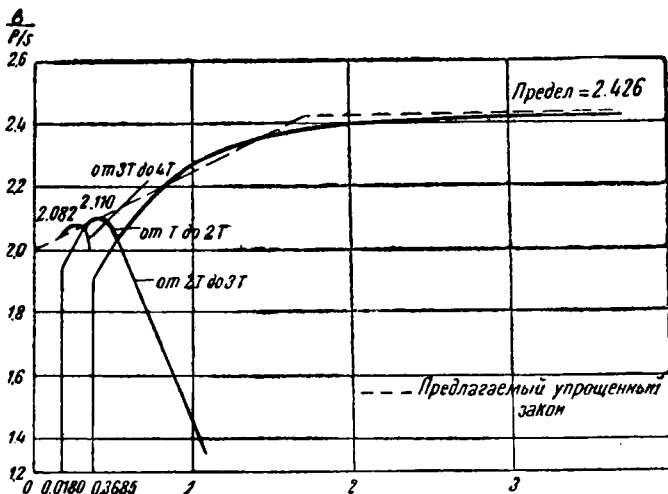
$$\sigma = (2 + 0.25 K) P/s \quad (33)$$

горизонтальную прямую $F_x = P$. Точка K будет началом прямой KN , которая образует с горизонталью угол γ_2 , представляющий состояние детали, передающей нагрузку, до начала воздействия. Точка I_1 пересечения обеих характеристических прямых изображает состояние сечения B в нулевой момент. Для наблюдателя, движущегося в детали BC , характеристическими прямыми будут I_1a (симметричная KI_1 ; точка a на прямой передаваемого усилия $F_x = P$) и $a2_1$, параллельная KI_1 . Точка 2_1 представляет состояние сечения B в момент T_2 . Второй пробег волны усилия по стержню BC дает две характеристических прямых, параллельных предыдущим и приводящих в точку I_2 .

$$\sigma = 2.43 P/s.$$

(34)

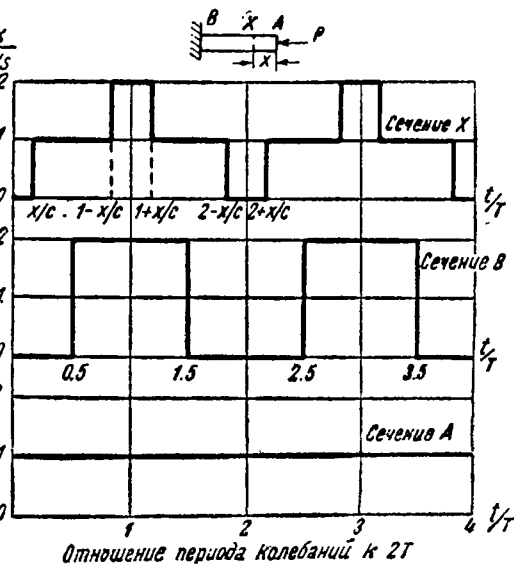
В практических случаях отношение K является малым, и $\sigma \approx 2 P/s$. Когда усилие прикладывается без массы, например, при помощи магнитного действия, напряжение в свободном конце (фиг. 30), подвергшемся воздействию силы P , будет P/s .



Фиг. 29. Диаграмма максимальных напряжений стержня в зависимости от отношения масс.

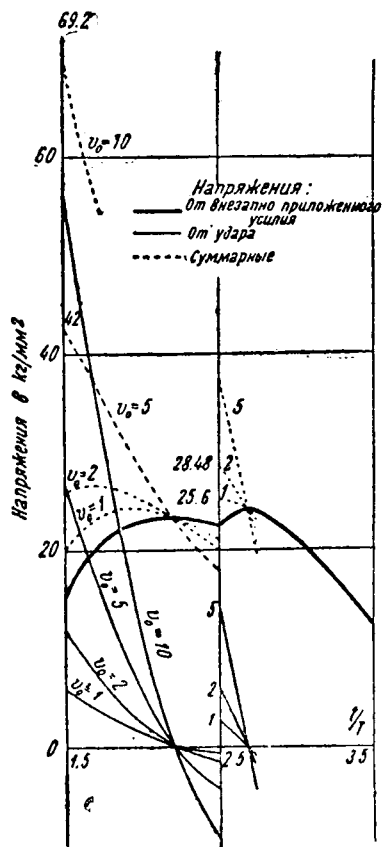
От этого конца исходит волна усилия P . Обозначим $\frac{\sigma}{P/s}$ через T время $2 L/c$ прохождения волны по ударяемому стержню в оба конца. По истечении времени $T/2$ от начала воздействия нагрузки P волна дойдет до закрепленного конца B , и весь стержень будет находиться под напряжением P/s . Отражение волны происходит без перемены знака, и к моменту T ее возвращения к началу стержня A все его сечения будут подвержены напряжению $2 P/s$. От конца A отражение произойдет с переменной знака, и стержень постепенно разгружается: за первые $T/2$ до напряжения P/s , а к моменту $2T$ до нуля. Далее эти колебания напряжения будут повторяться, как это показано на фиг. 30, для обоих крайних и одного из промежуточных сечений.

При одновременном действии на одну и ту же деталь удара и мгновенной нагрузки напряжение в произвольном сечении будет равно сумме одновременных напряжений, происходящих от каждого из воздействий в отдельности. Максимум напряжения проявится в закрепленном конце; однако он не будет равен сумме наибольших



Фиг. 30. Мгновенно приложенная нагрузка при отсутствии массы.

напряжений, происходящих от каждой из причин. Чтобы это сложение получилось, нужно, чтобы оба максимума возникли в закрепленном сечении одновременно, что обычно не осуществляется. Максимальное суммарное напряжение, достигаемое в закрепленном конце, будет всегда меньше суммы максимумов напряжения от обоих воздействий, и принять в расчет эту сумму — значит обеспечить стержню избыточную надежность. В большинстве случаев она не особенно велика, и только в случае, если оба воздействия одного порядка, имеется риск переоценить напряжение. В качестве примера Лелу рассматривает толчок при падении с некоторой высоты клетки подъемника вследствие ослабления каната, когда клетка успеет развить начальную скорость v_0 удара и, кроме того, сообщит канату внезапную нагрузку от своего веса. На фиг. 31 по оси абсцисс отложено время, а по ординатам — напряжения в закрепленном конце каната; тонкие сплошные линии показывают напряжения удара при различных начальных скоростях v_0 , развиваемых клеткой во время ее свободного падения; толстая линия представляет напряжения от внезапно приложенной нагрузки; наконец, пунктирные кривые дают их алгебраическую сумму. К ним следует добавить еще статическое напряжение от собственного веса каната.



Фиг. 31. Максимальные напряжения в закрепленном конце каната при различных скоростях падения клетки.

При малых скоростях удара (в разобранном Лелу числовым примере не выше 2 м/сек) пренебрежение происходящими от него напряжениями можно считать допустимым; при более значительных эффект удара является преобладающим. При $v_0 = 5$ м/сек (для выбранных автором числовых данных) влияние обоих воздействий приблизительно одинаково; в этом случае разница между точно подсчитанным напряжением и суммой отдельных максимумов достигает наибольшей величины — 20%.

Если клетка после толчка, сообщенного канату, подпрыгнет, то напряжение от вторичного толчка может сложиться с оставшимся от первого и превысить показанное на фиг. 31.

Лелу приводит графический расчет для резкого возрастания усилия в цилиндре двигателя внутреннего сгорания под действием потока газообразных продуктов горения.

Начиная от момента воспламенения, скорость распространения сгорания бывает невелика, порядка нескольких метров в секунду, и возрастание давления идет прогрессивно в течение промежутка времени, значительного по сравнению с продолжительностью распространения напряжения в поршне и шатуне. Максимальное достигнутое напряжение может быть при этих условиях очень отличным от максимума, соответствующего мгновенному приложению нагрузки. С другой стороны, в конце сжатия может произойти явление детонации, в котором скорость распространения фронта огня достигает 2000 —

2500 м/сек. Если вспомнить, что скорость распространения напряжения в деталях, движущихся вперед и назад и сделанных из стали или алюминия, около 5000 м/сек и что длина этих деталей в 6—8 раз больше камеры сгорания, то окажется, что усилие нарастает до максимума за время, которое есть только часть периода T (например $\frac{T}{3} - \frac{T}{4}$), и достигнутое напряжение должно быть близким, если не равным, максимуму, соответствующему мгновенно приложенной нагрузке.

Итак, если нормально в двигателе внутреннего сгорания, начиная с момента воспламенения, усилие, приложенное к возвратно-поступательным массам, и не достигает максимального эффекта мгновенно приложенной нагрузки, то такой эффект все-таки может произойти при сжатии от явления детонации.

Определим максимальный эффект воздействия газового потока в предположении мгновенности действия. Для применения графического метода определения напряжений нужно найти:

$$\frac{\operatorname{tg} \gamma_1}{\operatorname{tg} \gamma_2} = \sqrt{\frac{E\delta}{E'\delta'} \cdot \frac{s}{s'}}$$

и

$$n = \sqrt{\frac{E'\delta}{E\delta} \cdot \frac{L}{L'}}$$

Считая начальное давление равным 28 кг/см² и приравнивая газовую смесь к воздуху, находим, что удельный вес смеси равен 14 кг/м³; ударяемую массу деталей, движущихся возвратно-поступательно, считаем имеющей удельный вес 5000 кг/м³ (с учетом того, что поршень выполнен из легкого металла). Коэффициенты упругости приблизительно равны $E = 10$ кг/мм² и $E' = 0,5$ кг/мм². Отношение длины деталей, находящихся в поступательном движении вперед и назад, к длине камеры сгорания $L:L' = 8$. При условиях

$$\frac{\operatorname{tg} \gamma_1}{\operatorname{tg} \gamma_2} = 2600 \frac{s}{s'}, \quad n = 1.14.$$

Для построения эпюры принимают для угла γ_1 какое-нибудь значение (например 30°) и определяют по первому из отношений угол γ_2 ; независимо от величины отношения $\frac{s'}{s}$, угол γ_2 практически равен

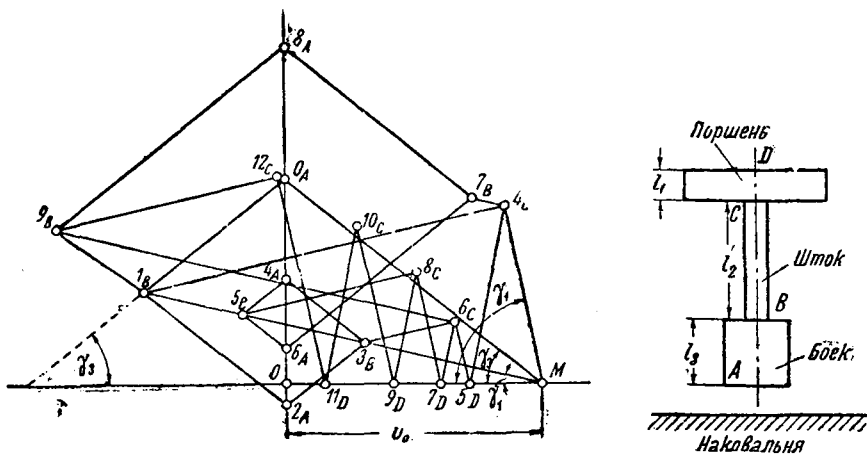
нулю. Обратившись к фиг. 28, видим, что прямая KN становится горизонтальной, начальное напряжение в точке удара равно P/s , а максимум напряжения в стержне достигает $2P/s$.

Коэффициенты E , E' , δ и δ' , которые мы выбрали произвольно, могут изменяться в широких пределах, не изменяя найденных решений, так как отношение $\frac{\operatorname{tg} \gamma_1}{\operatorname{tg} \gamma_2}$ всегда остается значительным.

Итак, в случае резкого толчка от газового потока максимум напряжения достаточно точно выражается элементарной формулой $\sigma = \frac{2P}{s}$.

Фиг. 32 показывает построение усилий в штоке BC парового молота, соединяющем поршень CD и боек AB . Если молот двойного действия, то пар не только поднимает падающие части на высоту h , но при падении давит на верхнюю сторону поршня. Пусть его работа за этот период, измеренная по индикаторной диаграмме, равна T ; тогда

$$T + Gh = \frac{1}{2} \cdot \frac{G}{g} v^2_0,$$



Фиг. 32. Эпюра усилий в штоке парового молота.

и начальная скорость удара

$$v_0 = \sqrt{\frac{2Tg}{G} + 2gh}. \quad (35)$$

Эта скорость отложена по оси абсцисс в виде отрезка OM .

Угловые коэффициенты прямых, характеристических для поршня, штока и бойка, равны:

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{E}{c} s_1 = \rho c s_1;$$

$$\operatorname{tg} \gamma_2 = \rho c s_2;$$

$$\operatorname{tg} \gamma_3 = \rho c s_3.$$

При одинаковой скорости c распространения звука во всех трех падающих деталях время пробега волны по каждой из них пропорционально ее длине. Для построения принято:

$$\tau_1 = \frac{\tau_2}{3} = \tau_3.$$

Удар считаем происходящим непосредственно по наковальне без поковки между ними, что представляет исключительный случай, вызывающий во всей системе наибольшие напряжения (при нормальной работе часть энергии падающих тел тратится на полезную деформацию поковки). Накowальню считаем неподвижной и недеформируемой, — ее характеристическая прямая совпадает с осью ординат.

Момент столкновения изображается точкой O_A (цифра обозначает число истекших от начала удара промежутков $\tau_1 = \tau_3$, а индекс — сечение падающего тела). Волна сжатия в бойке соответствует прямой $O_A I_B$; угол этой прямой с осью абсцисс равен γ_3 , а точка I_B лежит на характеристической прямой $M I_B$ штока ($< I_B M O = \gamma_2$).

В сечении B волна разделяется на две: отраженная к торцу A представлена линией $I_B 2_A$, симметричной предыдущей; волна, идущая далее по штоку в течение трех промежутков τ_1 , показана линией $I_B 4_C$. Эта прямая составляет с горизонтальной линией угол γ_2 ; последняя ее точка лежит на прямой $M 4_C$, соответствующей поршню (угол γ_1).

От сечения C волна идет, во-первых, к свободному торцу D (точка 5_D соответствует нулевому напряжению), а, во-вторых, обратно по штоку к сечению B (линия $4_C 7_B$, симметричная $1_B 4_C$).

Волна $5_D 6_C$, отраженная от торца D , представляется прямой, составляющей с горизонталью угол γ_1 ; ее последняя точка 6_C определяется пересечением этой прямой с линией $3_B 6_C^1$, т. е. с волной, достигшей сечения C в момент 6 или вышедшей из B на три промежутка τ_1 раньше — в момент 3_B .

Подобным же образом можно найти и остальные изображающие точки. Напряжения в различных сечениях определяются ординатами соответствующих точек эпюры, умноженными на масштаб сил и деленными на площадь сечения. Для отыскания масштаба сил отметим, что начальная ордината 00_A представляет силу

$$\sigma_0 s_0 = v_0 \sqrt{E\rho} \cdot s_0$$

(см. уравнение 5').

Приведенные примеры показывают применение графического метода к решению задач о продольном ударе. С.-Венан, пользовавшийся только аналитическим решением вопроса, жалуется на крайнюю утомительность вычислительной работы. Графический метод приводит к тем же результатам значительно проще и скорее.

Выше (фиг. 27) мы видели, что эта сравнительная легкость работы позволила Бержерону продолжить ее после предполагавшегося конца явления удара и внести этим поправку в теорию Буссинека и С.-Венана.

Приведенное исследование продольного удара с точки зрения волновой теории основывается на допущении (см. Тимошенко, «Колебания в инженерном деле»), что поверхности соприкосновения являются идеальными параллельными плоскостями. В действительных условиях требуется известный промежуток времени, чтобы на стыке сгладились шероховатости. Если это время того же порядка, как и время L/c , нельзя ожидать удовлетворительного согласования между теорией и опытом.

С этой точки зрения интересны опыты Рамзауера и Сирса. Первый заменил ударяющиеся стержни пружинами с целью уменьшения условного модуля сопротивления изделия E и скорости c распространения в нем колебаний. Второй ввел полушаровые концы стержней, представляющие при ударе более однообразные и потому более определенные условия соприкосновения, чем параллельные плоскости. Этими мерами оба исследователя добивались лучшего совпадения волновой теории удара с результатами опытов.

Фойгт объясняет противоречия между волновой теорией удара и опытом (например отскакивание ударяющего стержня вместо нулевой скорости по волновой теории) тем, что касающиеся при ударе стержни нельзя рассматривать как соединенные жестко в одно твердое тело. Это обуславливается как неровностями (шероховатостью) поверхностей касания, так и наличием в месте удара промежуточного слоя (по предположению Фойгта—газового) с иными упругими свойствами, чем материал стержня.

Кроме того, возможно предположить изменение упругих свойств внешнего слоя самих стержней в зависимости от предыдущей обработки (наклеп, термические влияния). По опытам Витмана (Давиденков, «Проблема удара в металловедении»), толщина слоя, упрочненного резцом, достигает 0.1 мм.

¹ Составляющей с горизонтальной осью угол γ_3 .

Б. Поперечный удар.

Задача о поперечном ударе только приближенно сводится к задаче с одной степенью свободы. Под действием такого удара упругое тело, имеющее в этом случае вид балки, переходит вместе с ударившим телом в колебательное движение (поперечные колебания).

Когда массой балки можно пренебречь сравнительно с массой ударяющего тела, допускают, что упругая линия при ударе имеет ту же форму, как и соответствующая способу нагружения и опорным условиям балки статическая упругая линия. Рассмотрим энергию системы, считая, что при ударе никакой потери ее нет.

При двухопорной балке, свободно лежащей на опорах и испытывающей падение сосредоточенного груза P с высоты h в середине между опорами, соотношение между прогибом и нагрузкой имеет вид:

$$\delta_{\text{стат}} = \frac{Pl^3}{48EI}.$$

Потенциальная энергия деформации при ударе определяется выражением:

$$\frac{P\delta_{\text{дин}}}{2} = \frac{24EI\delta_{\text{дин}}^2}{l^3} = P(h + \delta_{\text{дин}}).$$

Отсюда

$$\delta_{\text{дин}} = \delta_{\text{стат}} + \sqrt{\delta_{\text{стат}}^2 + 2h\delta_{\text{стат}}}. \quad (36)$$

В этом выводе мы пренебрегали массой балки по сравнению с массой P/g падающего груза.

В действительных условиях часть кинетической энергии при ударе будет потеряна, динамический прогиб окажется меньше вычисленного выше. Для более точного решения нужно принять во внимание массу упругой балки (вес ее G кг).

При совершенно неупругой деформации скорость после удара (в данном случае после начального момента удара) устанавливается общая. Величина ее

$$v = v_0 \frac{P}{P + G}. \quad (37)$$

Такова будет скорость среднего сечения балки. Скорости остальных сечений считают приблизительно пропорциональными ординатам статической упругой линии балки. Это условие позволяет заменить

массу $\frac{G}{g}$ балки, приведенной к среднему сечению, величиною $k \frac{G}{g}$ (для

простой двухопорной балки $\frac{17}{35} \frac{G}{g}$).

Тогда

$$v = v_0 \frac{P}{P + kG}. \quad (38)$$

Кинетическая энергия системы будет при этом равной:

$$\frac{(P + kG) v^2}{2g} = \frac{Pv_0^2}{2g(1 + k \frac{G}{P})} \quad (39)$$

и

$$\delta_{\text{дин}} = \delta_{\text{стат}} + \sqrt{\delta_{\text{стат}}^2 + \frac{2h\delta_{\text{стат}}}{1 + k \frac{G}{P}}}. \quad (40)$$

Для малых значений h формула приблизительно дает:

$$\delta_{\text{дин}} \approx 2\delta_{\text{стат}} . \quad (41)$$

Изложенная элементарная теория поперечного удара основана на допущениях, не вполне совпадающих с действительностью. Формула (38) справедлива только в том случае, если импульсы реакций опор равны нулю.

Экспериментальная проверка результатов подобного расчета была проведена Арнольдом [34]. Он отмечает, что „значительное расхождение экспериментальных кривых с теорией Сох'а (уравнения 38 — 40) указывает на неточность последней“.

Если масса балки сравнительно велика, необходимо рассмотрение ее колебаний, которые сильно влияют на деформацию и вид упругой линии балки и поглощают значительную долю энергии ударяющей массы. Аналитическое исследование С.-Венана (добавление к § 61 переведенной им книги Клебша), относящееся к поперечным колебаниям балки при ударе, отличается большою сложностью и трудно применимо к практическим расчетам. В следующей главе приведем изложение вопроса о поперечном ударе по Тимошенко („Теория колебаний в инженерном деле“) с учетом и теории поперечных колебаний и теории Герца.

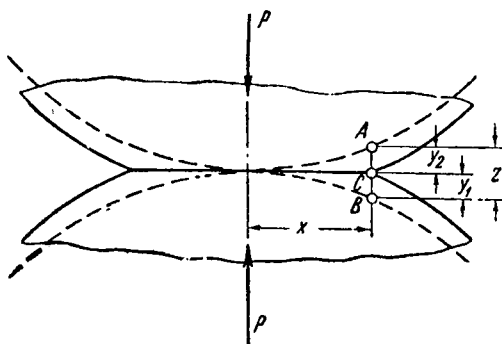
Глава III

ТЕОРИЯ ГЕРЦА

Теория удара Герца основана на его известных формулах сжатия двух упругих тел в месте их контакта.

Приведем элементарный вывод этих формул, сделанный членом-корреспондентом Украинской Академии Наук проф. И. Я. Штаерманом, используя с любезного разрешения автора рукопись его статьи, которая должна вскоре появиться в печати.

Предположим, что два упругих тела, сжимаемых силами P (фиг. 33), деформируются так, что точки, находившиеся на расстоянии $AB = z$,



Фиг. 33. Сжатие упругих тел.

после деформации сближаются вплотную в точке C . Если сила P возрастает на dP , то и z возрастет на величину dz , и, таким образом, сблизятся точки, ранее находившиеся на расстоянии $z + dz$.

Основные допущения вывода Герца состоят в том, что относительная индикатрисса z сжимаемых тел может быть представлена уравнением второй степени и что можно применить формулы Буссинеска для силы, действующей на „упругое полупространство“.

В настоящем выводе также делается допущение. Оно выражается уравнением:

$$dP = k \frac{E}{1 - \mu^2} l dz . \quad (1)$$

В нем k есть коэффициент пропорциональности, определяемый ниже;

l — периметр площадки сжатия; в случае сжатия двух цилиндров

с параллельными осями и отнесения силы P к единице длины образующей (площадка сжатия ограничена с двух сторон) $l=2$, в случае круговой площадки сжатия с радиусом x $l=2\pi x$;

dz — сближение точек, лежащих на периметре площадки сжатия; при различных величинах сближения вдоль периметра l под dz нужно понимать усредненное значение;

E — модуль упругости материала, необходимый для перехода от деформации к усилию dP . Так как в рассматриваемом случае сжатия происходит лишь местная деформация, а элементы, смежные с площадкой сжатия, только косвенно участвуют в деформации, то сжимаемые элементы оказываются как бы в „упругой коробочке“ (частный случай всестороннего сжатия), что повышает их сопротивление деформации. Это обстоятельство учтено в уравнении заменой E на $E(1-\mu^2)$.

Проинтегрируем наше уравнение для двух цилиндров с параллельными осями и для двух шаров. В обоих случаях мы можем определить z по формулам элементарной геометрии:

$$y_1 = \frac{x^2}{2R_1}; \quad y_2 = \frac{x^2}{2R_2}; \quad (2)$$

$$z = y_1 + y_2 = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{x^2}{2}.$$

Интегрирование дает для сжатия цилиндров:

$$P = \frac{k \cdot 2E}{1-\mu^2} z = \frac{kE}{1-\mu^2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) x^2. \quad (3)$$

Постоянная интегрирования C обращается в нуль, так как для $z=0$ $P=0$.

Для сжатия шаров имеем:

$$dP = k \frac{E2\pi x}{(1-\mu^2)} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) x dx,$$

и, следовательно,

$$P = k \frac{2\pi E}{3(1-\mu^2)} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) x^3. \quad (4)$$

Коэффициент k определяется из экспериментальных данных. Если мы примем $k=1/\pi$, то получаем полное совпадение с результатами теории Герца, а именно:

$$P = \frac{E}{\pi(1-\mu^2)} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) x^2 \quad \text{для цилиндров} \quad (5)$$

$$\text{и} \quad P = \frac{2}{3} \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) x^3 \quad \text{для шаров.} \quad (6)$$

Сближение центров тяжести сжимаемых тел равно z , так что

$$P = \frac{2E}{\pi(1-\mu^2)} \cdot z \quad \text{для цилиндров} \quad (7)$$

$$\text{и} \quad P = \frac{4\sqrt{2}}{3} \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{1/2}} \cdot z^{3/2} \quad \text{для шаров.} \quad (8)$$

Замечательно, что для цилиндров с параллельными осями сжимающая сила P оказалась прямо пропорциональной сближению z их центров тяжести. Вследствие этого задача соударения цилиндров является значительно более простой, чем рассмотренный Герцем удар двух шаров.

Основная идея вывода И. Я. Штаермана состоит в том, что сжимающая сила P является функцией ряда параметров:

$$P = f\left(\frac{E}{1 - \mu^2}, l, R_1, R_2\right).$$

Сравнивая размерности обеих частей уравнения, автор утверждает что P пропорционально E , и можно написать:

$$P = \frac{E}{1 - \mu^2} \cdot F(l, z).$$

Принимая за F такую функцию, чтобы ее дифференциал равнялся ldz , мы в таком частном случае получаем формулы Герца. Если выбрать на основании эксперимента иной вид функции с менее узкими ограничениями, то получим формулы более общего вида, охватывающие экспериментальные данные также и в случаях, которые недоступны для теории Герца.

До сих пор предполагалось, что соударяющиеся тела имеют одинаковый модуль упругости E . Предположим теперь, что $E_1 \neq E_2$. Рассмотрим сперва сжатие двух цилиндрических стержней размерами $l \times s$ под действием продольных сил P . Полное сжатие обоих стержней составит:

$$\Delta l = \frac{Pl}{E_1 s} + \frac{Pl}{E_2 s}.$$

Определим, каков должен быть модуль E двух однородных стержней, полное сжатие которых равнялось бы полному сжатию данных стержней:

$$\frac{Pl}{E_1 s} + \frac{Pl}{E_2 s} = 2 \frac{Pl}{E s},$$

откуда

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right).$$

По этой формуле мы должны произвести замену модуля E в формулах Герца, чтобы перейти к случаю сжатия тел из разнородных материалов. Новое уравнение относится только к стержням одинаковой длины, но надо иметь в виду, что в теории Герца при определении деформаций сжимающихся тел применяются формулы, относящиеся к действию сосредоточенной силы на „упругое полупространство“ или „упругую полуплоскость“. Таким образом, различие размеров сжимающихся тел не учитывается, так как область местных деформаций весьма мала по сравнению с их размерами, и замена не вносит ощутительных погрешностей. Окончательный вид формул для цилиндров:

$$P = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}{\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}\right)(1 - \mu^2)} z^2,$$

для шаров:

$$P = \frac{4}{3} \cdot \frac{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}{\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}\right)(1 - \mu^2)} x^3.$$

Остановимся еще на вычислении интенсивности нагрузки по поверхности площадки сжатия. Если мы примем вместе с Герцем, что диаграмма напряжений имеет вид эллипсоида вращения для случая сжатия тел вращения и, соответственно, эллипса для сжатия цилиндров, то, обозначая максимальную интенсивность нагрузки через q_{\max} , получим для плоской задачи (для цилиндров):

$$\frac{\pi x q_{\max}}{2} = P,$$

$$q_{\max} = \frac{2E}{\pi^2(1 - \mu^2)} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) x$$

и для сжатия тел вращения (по формуле объема половины эллипсоида)

$$\frac{2}{3} \pi x^2 q_{\max} = P$$

$$q_{\max} = \frac{E}{\pi(1 - \mu^2)} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) x.$$

Обычный вид формулы Герца, применяемый для случая столкновения шаров, есть:

$$z = k_1 P^{2/3}, \quad (9)$$

легко получаемый из написанного выше уравнения

$$P = \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{E}{1 - \mu^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^{1/2}} \cdot z^{3/2} \quad (8)$$

обозначением всего коэффициента при $z^{3/2}$ через k_2 :

$$P = k_2 z^{3/2} \quad (10)$$

и введением $k_1 = k_2^{-2/3}$.

Бергер (Kraftverlauf beim Stoss, 11) приводит такую геометрическую интерпретацию этого закона (фиг. 34). Пунктирные окружности K_1 и K_2 представляют два равных шара, касающиеся друг друга в момент $t=0$ в точке O . Пусть шар K_2 удерживается, а K_1 надавливает на него влево. Положения шаров после деформации показаны сплошными линиями K'_1 и K'_2 ; точка касания O обратилась в площадку сжатия AB .

Если бы величина сжатия шаров была пропорциональна сжимающей силе, то последняя выражалась бы ординатами прямой $P = kz$. Действительное, подтверждаемое опытами, изменение силы происходит по уравнению Герца:

$$P = k_2 z^{3/2}$$

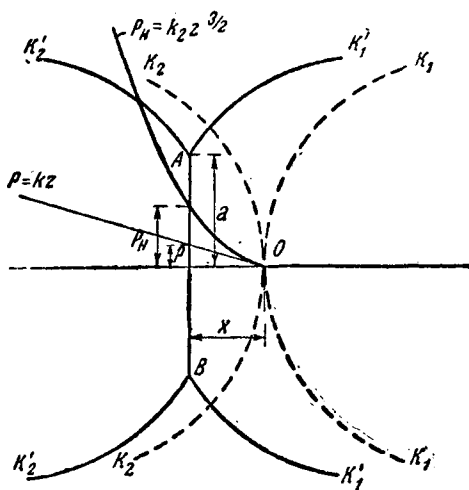
и представляется параболической кривой P_H . (10)

Основное предположение Герца, относящееся ко всем случаям удара, то, что его продолжительность велика по сравнению с време-

нем прохождения в оба конца упругих волн по сталкивающимся телам. Это представляется правдоподобным, так как скорость распространения волны, например, в стали около 5000 м/сек, а предельная скорость удара, еще не вызывающая остаточных деформаций, около 7 м/сек (см. уравнение 20, гл. I).

Большей скорости волны для конечных размеров деталей, разумеется, соответствует значительно меньшее время ее пробега по ударяющимся телам.

При сближении z двух шаров вследствие удара, скорость v сближения равна $v = \frac{dz}{dt}$.



Фиг. 34. Геометрическое представление законов Гука и Герца.

Приращение количества движения за время dt равно:

$$P dt = -M dv,$$

$$dv = -\frac{1}{M} P dt = -k_3 P dt. \quad (11)$$

Подставляя $P = k_2 z^{3/2}$, находим:

$$dv = -k_3 k_2 z^{3/2} \frac{dz}{v}$$

или

$$v dv = -k_3 k_2 z^{3/2} dz. \quad (12)$$

Интегрируя это уравнение от начальной скорости v_0 до текущего значения v , находим:

$$v^2 - v_0^2 + \frac{4}{5} k_3 k_2 z^{5/2} = 0. \quad (13)$$

В момент наибольшего сближения $v = 0$ и $z = z_{\max}$.

$$z_{\max} = \left(\frac{5}{4k_3 k_2} \cdot v_0^2 \right)^{2/5}, \quad (14)$$

$$P_{\max} = k_2 z_{\max}^{3/2} = k_2 \left(\frac{5}{4k_3 k_2} \cdot v_0^2 \right)^{3/5} = K_1 v_0^{6/5}. \quad (15)$$

Так выражается максимальная сила взаимодействия шаров в зависимости от начальной скорости. Чтобы выразить через v_0 продолжительность удара, интегрируем предыдущее уравнение еще раз:

$$v^2 = v_0^2 - \frac{4}{5} k_3 k_2 z^{5/2};$$

$$\frac{dz}{dt} = \sqrt{v_0^2 - \frac{4}{5} k_3 k_2 z^{5/2}};$$

$$dt = \frac{dz}{\sqrt{v_0^2 - \frac{4}{5}k_2k_3z^{5/2}}}$$

Называя время от начала касания тел до момента наибольшего сжатия через t , а полную продолжительность удара — через $T=2t$, находим:

$$\begin{aligned} T &= 2 \int_0^{z_{\max}} \frac{dz}{\sqrt{v_0^2 - \frac{4}{5}k_2k_3z^{5/2}}} = \\ &= 2 \int_0^{z_{\max}} \frac{dz}{v_0 \sqrt{1 - \left(\frac{z}{z_{\max}}\right)^{5/2}}} = \\ &= 2 \int_0^{z_{\max}} \frac{z_{\max}}{v_0} \cdot \frac{d\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^{5/2}}}, \end{aligned}$$

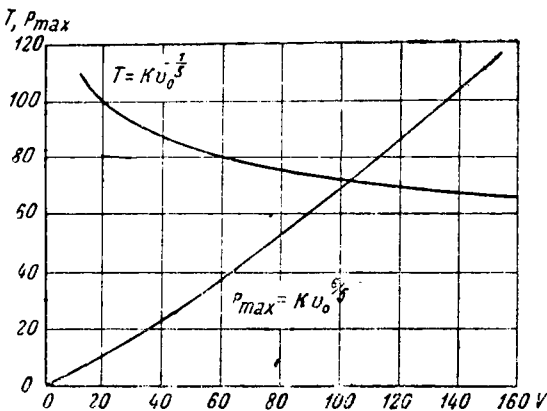
где

$$\varepsilon = \frac{z}{z_{\max}},$$

$$T = \frac{2z_{\max}}{v_0} \int_0^1 \frac{d\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^{5/2}}}. \quad (16)$$

Определенный интеграл имеет значение 1.4716. Подставляя найденное выше значение для наибольшего сближения z_{\max} и обозначая все постоянные величины, входящие в выражение для T , общим коэффициентом K , имеем:

$$T = K v_0^{-1/5}. \quad (17)$$



Фиг. 35. Диаграмма максимальных значений силы взаимодействия и времени удара в зависимости от начальной скорости.

Значение постоянной K определяется лучше всего экспериментально.

Картину изменения T и P_{\max} при изменении v_0 дает фиг. 35.

При вычислении по формуле для T продолжительность столкновения двух стальных шаров, равных по диаметру земному шару и сталкивающихся с начальной скоростью 10 мм/сек, составляет около 27 час. Максимальное давление достигает при этом 3 600 000 т, радиус круга давления 7,5 км, максимальное напряжение 8400 кг/см² (см. Динник, „Удар и сжатие упругих тел“) [12].

Теория Герца исследует явления упругого сжатия, протекающие в сравнительно малой области (измеряемой для деталей обычного

размера микронами) в непосредственной близости от площадки сжатия. На всем своем остальном протяжении сталкивающиеся тела считаются подчиняющимися классической теории, так как их собственные колебания почти не будут возбуждаться ударом. При ударе действительных физических тел, несомненно, должно отражаться влияние многих обстоятельств: и возникающих колебаний соударяющихся тел, продольных или поперечных, и упругих изменений тел в зоне удара, и, наконец, остаточных деформаций тел в месте соприкосновения, поскольку практические скорости удара деталей часто превышают то критическое значение, при котором напряжение достигает предела упругости σ_e .

Существует теория Гош [31], предполагающая, что непосредственно после прикосновения соударяющихся тел явление удара подчиняется закону Герца и давление между телами достигает величины

$$P = k_2 z^{3/2}. \quad (10)$$

После этого сжатие из местного становится распределенным по всему сечению стержня, явление подчиняется закону Гука, и в стержне возникает волна сжатия, распространяющаяся от подвергнутого удару свободного конца. После некоторого времени колебаний действие закона Гука прекращается, и давление вновь принимает значение P .

От этого значения давление падает до нуля, повинувшись вновь закону Герца. Обращение давления в нуль соответствует окончанию удара.

Пёшль принимает для распространения уравнений Герца на случай перехода предела упругости предположение, что сопротивления ударяющихся тел сплющиванию являются функцией (он принимает ради удобства интегрирования квадратичную зависимость) от относительной скорости v .

При этом предположении вместо уравнения (12) предыдущего вывода

$$dv = -k_2 k_3 z^{3/2} dt,$$

или

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -k_2 k_3 z^{3/2},$$

получим более сложное уравнение движения:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} \pm \frac{\lambda}{2} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 = -k_2 k_3 z^{3/2}. \quad (18)$$

Верхний знак относится к первой фазе удара (сжатию тел до момента максимального сближения), а нижний — ко второй фазе — возвращению в начальное состояние. Первый член может быть преобразован так:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} = \frac{dv}{dz} \cdot v = \frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{dz}.$$

Делаем подстановки $\lambda z = x$ и $v^2 = v_0^2 V^2$:

$$\frac{1}{2} \lambda \frac{v_0^2 d(V^2)}{dx} \pm \frac{\lambda}{2} \cdot v_0^2 V^2 = -\frac{k_2 k_3 x^{3/2}}{\lambda^{3/2}},$$

или

$$\frac{d(V^2)}{dx} \pm V^2 = -\left(\frac{2k_2 k_3}{v_0^2} \right) x^{3/2}.$$

Обозначаем:

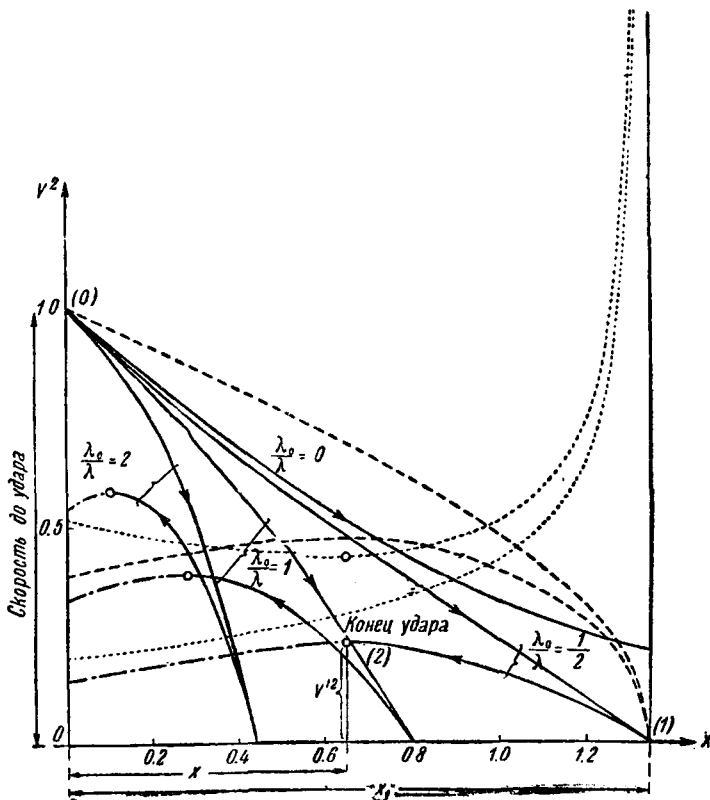
$$\frac{2k_3k_2}{v_0^2} = \frac{5}{2} \lambda_0^{1/2}.$$

Тогда

$$\frac{d(V^2)}{dx} \pm V^2 = -\frac{5}{2} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^{5/2} x^{3/2}. \quad (19)$$

После интегрирования разложением в ряд находим:

$$V^2 = e^{\mp x} - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^{5/2} x^{5/2} \left[1 \mp \frac{2}{7} x + \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{9} x^2 \mp \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{11} x^3 + \dots \right].$$



Фиг. 36. Картина удара, по Пёшлю.

Достаточно небольшого числа членов ряда для выражения характера процесса.

Графически он представлен фиг. 36, дающей семейство кривых (сплошные линии) $V^2 - x$ для различных значений $\lambda_0 \lambda$.

Все эти кривые соответствуют одной и той же начальной скорости удара и потому начинаются в одной и той же точке (0), ордината которой равна

$$V^2 = \frac{v^2}{v_0^2} = 1.$$

Точки кривых на оси абсцисс соответствуют моменту наибольшего сжатия, а вторая нижняя ветвь каждой кривой — второй половине явления до конца удара. Диаграмма показывает, что только часть сжатия восстанавливается; другая часть не переходит в скорость и должна считаться остаточной, пластической деформацией.

По кривым V^2-x можно вычертить для обеих фаз процесса линии $V-x$ (пунктирные) и далее $1/V-x$ (пунктир из точек) и получить полную продолжительность удара по уравнению:

$$T = \int_0^1 \frac{dx}{V} + \int_1^2 \frac{dx}{V}. \quad (20)$$

Весьма интересной была бы работа, которая эмпирическим путем выяснила бы действительный характер зависимости сопротивления сплющиванию от относительной скорости v вместо взятой произвольно пропорциональности квадрату v . Математическая часть решения, конечно, усложнилась бы при этом, но были бы получены данные о поведении действительных деталей в часто встречающемся случае перехода напряжений в точке удара за предел упругости.

Экспериментальная проверка расчета по Герцу

В одном из последних номеров „Journal of Applied Mechanics“ (1940 г., март) помещена статья Фаннинга и Бассета, в которой есть сведения об экспериментальной проверке расчета продольного удара двух стержней, выполненного Сирсом. Длина стержней равнялась 6 футам. Один из них имел плоскую торцевую поверхность, а другой — сферическую, и полное усилие, действующее между стержнями при ударе, передавалось через малую площадку соприкосновения A (фиг. 37).

В непосредственной близости к ней распределение напряжений трехмерное, но по принципу С.-Венана на небольшом расстоянии от области контакта напряжение равномерно распределено по поперечному сечению.

Для элемента стержня длиной dx действующая на него сила равна $\Delta F = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot dx$.

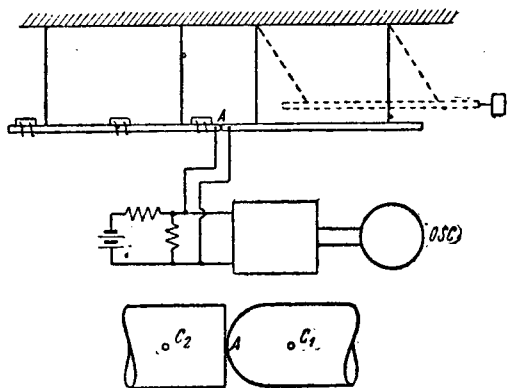
Обозначая через ρ плотность тел, через S площадь их поперечных сечений и через u — перемещение элемента, имеем согласно уравнению (7) гл. II:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

где

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Это уравнение годится для средней части стержня. Оно имеет хорошо известное решение:



Фиг. 37. Измерительная установка Фаннинг и Бассет.

$$u = f_1 \left(t - \frac{x}{c} \right) + f_2 \left(t + \frac{x}{c} \right). \quad (21)$$

Вблизи конца стержня напряжение не подчиняется этому уравнению волны для одного измерения, а является по существу трехмерным.

Сирс доказывает, что эта область мала и что точки C_1 и C_2 , показанные на фиг. 37, могут быть найдены с тем условием, что для них справедлив закон деформаций Герца, т. е.

$$F = k z^{3/2}. \quad (10)$$

Здесь F есть сила, действующая между телами, а постоянная k равна $\frac{2E}{3(1-\mu^2)} \cdot \left(\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \right)^{1/2}$; μ — есть отношение Пуассона, r_1 и r_2 — радиусы кривизны тел в области контакта. Далее,

$$AC_1 = AC_2 = a \sqrt{\frac{3}{2}} + a \pi E B \sqrt{\frac{2}{3}},$$

где a есть радиус стержня, а

$$B = \left(\frac{6E + 5G}{3E + G} + 1 \right) \frac{1}{4\pi G},$$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \text{ — модуль сдвига.}$$

Так как область $C_1 C_2$ мала, можно пренебречь влиянием конечного времени распространения по ней напряжения для рассматриваемого момента и применять уравнение (10) к случаю удара. Найденную таким образом силу можно рассматривать как приложенную в конце стержня, который для расчета движения волн рассматривается, как система с одним измерением.

Назовем:

β — перемещение точки C_1 относительно неподвижных осей,

γ — то же для точки C_2 ,

v_1 и v_2 — начальные скорости этих точек.

Направленне измерения всех этих величин одно и то же, и

$$z = \beta - \gamma.$$

Для нашего случая уравнение (21) принимает вид:

$$u = f_1 \left(t - \frac{x}{c} \right),$$

т. е. $f_2 = 0$, что соответствует волне, идущей по стержню в противоположном направлении.

Из уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho S} \frac{\partial F}{\partial x} = 0;$$

$$F = SE \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{SE}{c} \frac{\partial u}{\partial t};$$

¹ Сравните уравнение (8), гл. II.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{SE}{c} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(SE \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\frac{1}{c} \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Для элемента вблизи точки C_1 , где $u_1 = \beta$

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho c} S \frac{\partial F}{\partial t} = 0.$$

После однократного интегрирования

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} + \frac{1}{\rho c S} F \left(t - \frac{x}{c} \right) = \text{const} = v_1;$$

$$\beta = v_1 - \frac{1}{\rho c} P \left(t - \frac{x}{c} \right). \quad (22)$$

Аналогично

$$\gamma = v_2 - \frac{1}{\rho c} P \left(t - \frac{x}{c} \right), \quad (23)$$

где $P = \frac{F}{S}$ — напряжению. Последние уравнения совместно с уравнением (10) разрешают нашу задачу. Решение $P = p(t)$ невозможно с помощью известных функций, и необходимо постепенное интегрирование.

Уравнения (22) и (23) пригодны до возвращения отраженной волны, после чего к правой части каждого из равенств должны быть прибавлены выражения вида $P_{t - \left(2l - \frac{x}{c} \right)}$.

Интегрируя для малого времени τ , получим:

$$\beta_t - \beta_{t-\tau} = v_{1\tau} - \frac{1}{\rho c} \int_{t-\tau}^t P \left(t - \frac{x}{c} \right) dt.$$

Если $t = n\tau$ и мы обозначим $\beta_{n\tau}$ через β_n и

$$A_n = \frac{1}{\rho c} \int_{(n-1)\tau}^{n\tau} P \left(t - \frac{x}{c} \right) dt = \frac{1}{2\rho c} (P_n + P_{n-1}),$$

то, поскольку τ мало,

и

$$A_n = c(P_n + P_{n-1}).$$

$$\beta_n = \beta_{n-1} + v_{1\tau} - A_{n-1}.$$

Подобно этому

$$\gamma_n = \gamma_{n-1} + v_{2\tau} - A_{n-1}.$$

Для нашего случая v_1 равна известной скорости ударяющего стержня; $v_2 = 0$; $\beta_0 = \gamma_0 = 0$; $P_0 = P_{-1} = 0$, откуда

$$A_0 = c(0) = 0;$$

$$\beta_1 = 0 + v_{1\tau} - 0 = v_{1\tau};$$

$$\gamma_1 = 0$$

$$z_1 = \beta_1 - \gamma_1 = v_{1\tau}.$$

По этим данным можем теперь вычислить $k' = \frac{k}{s}$

и

$$P_1 = k' z_1^{3/2}.$$

Таким образом,

$$A_1 = c(P_1 + P_0) = \frac{1}{2\rho c} P_1;$$

$$\beta_2 = \beta_1 + v_1 A_1;$$

$$\gamma_2 = \gamma_1 + 0 - A_1.$$

В этих равенствах известны все члены правых частей. После этого можно найти z_2 , затем P_2 и т. д.

По возвращении отраженных волн имеем вместо уравнения (22):

$$\beta_n = \beta_{n-1} + v_1 A_{n-1} - A_{n-1} - A_{n-1-2l} \dots \text{ и т. д.}$$

Это дает напряжения в конце стержня, или, лучше, напряжения, которые существовали бы в воображаемом стержне в этой точке, если бы напряжения были распределены равномерно по поперечному сечению до самого конца. Измеренные экспериментальные значения были на расстоянии $5\frac{5''}{8}$ или на 4 интервала длиной AC_1 от конца. Рассчитаем эти напряжения.

Обозначаем P'_n напряжение в момент $n\tau$ в точке, находящейся на расстоянии m единиц длиной $AC_1 = AC_2$ от конца.

$$P'_n = P_{n-m} - P_{n-(110-m)} + P_{n-(110+m)},$$

так как вся проходимая волною в оба конца длина стержня равна 110 таким единицам.

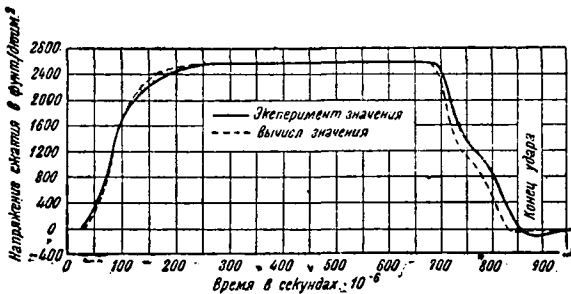
P_{n-m} представляет напряжение, происходящее от прямой волны, идущей от ближайшего конца (отстающее на m единиц); $P_{n-(110-m)}$ — напряжение от отраженной волны со знаком минус, а $P_{n-(110+m)}$ с положительным знаком — напряжение от волны, дважды отраженной.

Для нашего случая $m=4$ и $P'_n = P_{n-4} - P_{n-106} + P_{n-114}$, что и показано на фиг. 37.

В этом расчете различные константы имели следующие значения:

$a = 0.531$; $AC_1 = 1.31$ дюйма; $r_1 = 0.531$ дюйма; $r_2 = \infty$; $c = 16800$ фут/сек. = 201800 дюйм/сек.; $\tau = \frac{AC_1}{c} = 6.491 \cdot 10^{-6}$ сек.; $v_1 = 34.75$

дюйм/сек.; $k' = \frac{k}{S} = 1.554 \cdot 10^7$.



Фиг. 38. Сравнение ударных напряжений, вычисленных и экспериментальных.

Фиг. 38 показывает сопоставление рассчитанных и экспериментальных значений напряжения. Максимальные ординаты приведены к одинаковой величине, чтобы яснее показать сходство формы сплошной (расчетной) и пунктирной (экспериментальной) кривых.

Поперечный удар по балке

Тимошенко („Теория колебаний в инженерном деле“) находит допущение С.-Венана, что ударяющее тело не отделяется от балки за все время удара, произвольным, так как возможны многократные удары с перерывами, и рассматривает для получения более точной картины явления и колебания балки, и упругие местные деформации обоих тел в точке соприкосновения. При ударе падающего шара по балке связь между сжимающей силой P и сближением z выражается уравнением Герца:

$$z = k_1 P^{2/3}. \quad (9)$$

Давление P при ударе будет переменным и вызовет прогиб балки, получаемый по уравнению ее вынужденных колебаний.

Для нормальных видов колебаний балки прогиб в любом ее сечении изменяется гармонически со временем и может быть представлен выражением:

$$y = X(A \cos pt + B \sin pt), \quad (24)$$

где X — функция абсциссы x , определяющая форму рассматриваемого нормального вида колебания.

Дифференциальное уравнение поперечного колебания выразится:

$$\frac{d^4 X}{dx^4} = \frac{p^2 F \gamma}{EI g} X = k^4, \quad (25)$$

где

F — площадь сечения балки,

γ — удельный вес ее материала,

EI — ее жесткость.

Можно легко проверить, что $\sin kx$, $\cos kx$, $\text{sh } kx$ и $\text{ch } kx$, будут частными решениями уравнения поперечных колебаний, а общее решение получится в виде

$$X = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + C_3 \text{sh } kx + C_4 \text{ch } kx, \quad (26)$$

где постоянные C_1, \dots, C_4 определяются из условий в концах (опорах) балочки.

Для балки, свободно лежащей на двух опорах, $C_1 = C_2 = 0$ и $C_3 = C_4 = C$.

Уравнением частоты колебаний будет $\sin kl = 0$. Его последовательными корнями будут выражения $k_1 l = \pi$, $k_2 l = 2\pi$, \dots , $k_i l = i\pi$; последнее дает $k_i = \frac{i\pi}{l}$.

Частоты последовательных видов колебаний равны:

$$f_i = \frac{\pi i^2}{2l^2} \sqrt{\frac{EI g}{F \gamma}}, \quad (27)$$

и собственный период:

$$\tau_i = \frac{1}{f_i} = \frac{2l^2}{\pi i^2} \sqrt{\frac{F \gamma}{EI g}}. \quad (28)$$

Уравнение (26) принимает вид:

$$X_i = C_i \sin k_i x = C_i \sin \frac{i\pi x}{l}. \quad (26')$$

Наложением друг на друга нескольких нормальных колебаний получится общее выражение свободных поперечных колебаний:

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} X_i (A_i \cos p_i t + B_i \sin p_i t).$$

Обозначая выражение в скобках через q_i и принимая его за обобщенную координату, имеем:

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} q_i X_i.$$

Потенциальная энергия изогнутой балки может быть выражена так:

$$v = \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{EI}{2} \sum_{i=1}^{\infty} q_i^2 \int_0^l \left(\frac{d^2 X_i}{dx^2} \right)^2 dx \dots \quad (29)$$

Кинетическая энергия колеблющегося стержня равна:

$$T = \frac{\gamma F}{2g} \int_0^l (y')^2 dx = \frac{\gamma F}{2g} \sum_{i=1}^{\infty} (q_i')^2 \int_0^l X_i^2 dx \dots \quad (30)$$

Подстановкой вместо X_i выражения $\sin \frac{i\pi x}{l}$ (включая коэффициент C_i в выражение q_i) находим:

$$v = \frac{EI}{2} \sum_{i=1}^{\infty} q_i^2 \int_0^l \frac{i^4 \pi^4}{l^4} \sin^2 \frac{i\pi x}{l} dx = \frac{EI\pi}{4l^3} \sum_{i=1}^{\infty} i^4 q_i^2; \quad (31)$$

$$T = \frac{\gamma F}{2g} \sum_{i=1}^{\infty} (q_i')^2 \int_0^l \sin^2 \frac{i\pi x}{l} dx = \frac{F\gamma l}{4g} \sum_{i=1}^{\infty} (q_i')^2. \quad (32)$$

Уравнение Лагранжа для произвольной координаты q_i :

$$\frac{F\gamma l}{2g} q_i'' + \frac{EI\pi^4 i^4}{2l^3} q_i = Q_i, \quad (33)$$

где Q_i обобщенная приложенная (возмущающая) сила, соответствующая q_i .

Обозначая через a^2 выражение

$$a^2 = \frac{EIg}{F\gamma},$$

можно преобразовать уравнение Лагранжа к виду:

$$q_i'' + \frac{i^4 \pi^4 a^2}{l^4} q_i = \frac{2g}{F\gamma l} Q_i. \quad (34)$$

После интегрирования получаем:

$$q_i = \left[A_i \cos \frac{i^2 \pi^2 a t}{l^2} + B_i \sin \frac{i^2 \pi^2 a t}{l^2} \right] + \frac{2lg}{i^2 \pi^2 a F\gamma} \int_0^t Q_i \sin \frac{i^2 \pi^2 a (t-t_1)}{l^2} dt_1. \quad (35)$$

Первые два члена этого выражения, поставленные в квадратных скобках, представляют свободное колебание балки, постепенно затухающее из-за различных сопротивлений. Последний член представляет колебание, вызываемое возмущающими силами Q_i , переменными по величине.

Для удара шара по балке

$$Q_i = P \sin \frac{i\pi}{2}. \quad (36)$$

Если рассматриваемая балка подвергается удару в середине пролета, то будут возникать только виды колебаний, симметричные относительно середины балки. При этом i будет получать только четные значения.

Прогиб в среднем сечении, вызванный ударным давлением P шара, равен:

$$y = \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{2lg}{i^2\pi^2 a \gamma F} \int_0^t P \sin \frac{i^2\pi^2 a(t-t_1)}{l^2} dt_1. \quad (37)$$

Полное перемещение центра шара от начала удара ($t=0$) равно $z+y$.

Текущая скорость шара в момент $t=t_1$ при начальной скорости v_0 равна:

$$v = v_0 - \frac{1}{m} \int_0^{t_1} P dt_1,$$

перемещение шара к моменту t :

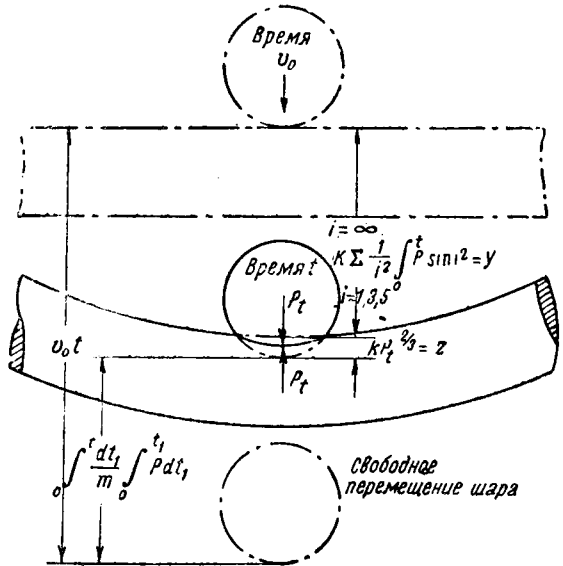
$$z+y = v_0 t - \int_0^t \frac{dt_1}{m} \int_0^{t_1} P dt_1 = v_0 t - \frac{1}{m} \int_0^t P(t-t_1) dt_1 \quad (38)$$

(см. Карас [14], „Ingenieur Archiv“, 1939, август).

Связь между величинами z, y, v_0 и последним членом Арнольд [34] представляет фиг. 39.

Подставляя выражения для z и y , находим

$$\begin{aligned} & v_0 t - \frac{1}{m} \int_0^t P(t-t_1) dt_1 = k_1 P^{2/3} + \\ & + \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{3lg}{i^2\pi^2 a \gamma F} \int_0^t P \sin \frac{i^2\pi^2 a(t-t_1)}{l^2} dt_1. \end{aligned} \quad (39)$$



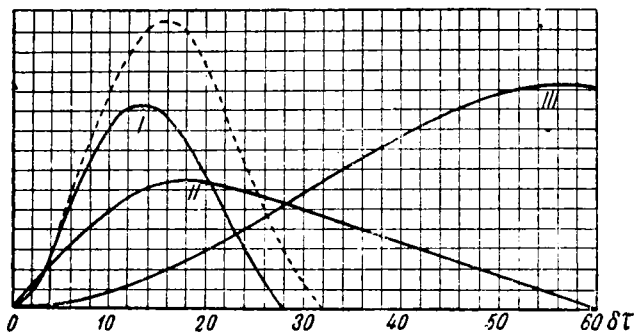
Фиг. 39. Поперечный удар, по Тимошенко.

Это уравнение Тимошенко решает численным интегрированием, подразделяя промежуток времени от нуля до t на небольшие эле-

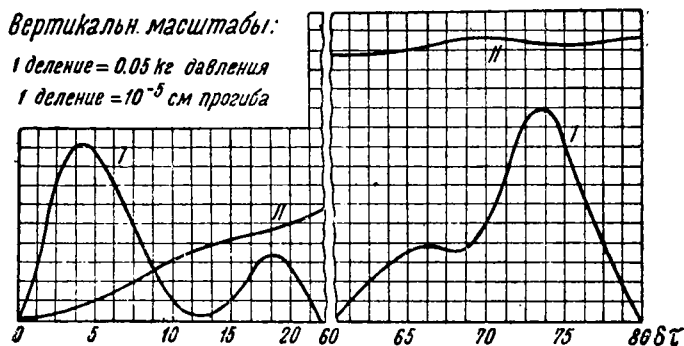
менты, считая на протяжении каждого из них взаимодействие P шара и балочки постоянным и последовательно вычисляя перемещения ударяющего шара.

Значения P могут быть только положительными. При обращении P в нуль детали расходятся.

Фиг. 40⁽¹⁾ показывает полученные им результаты для удара стального шара радиусом 1 см с начальной скоростью 1 см/сек по сталь-



(1)



(2)

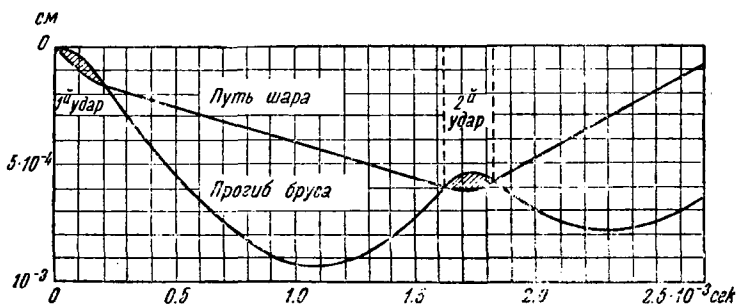
Фиг. 40. 1. Диаграмма давлений, перемещений ударяющего шара и прогибов балки, по Тимошенко. 2. Вертикальные масштабы.

ному же брусу квадратного сечения 1×1 см с пролетом 15,35 см; $E = 2.2 \cdot 10^6$ кг/см²; $\gamma = 7.96$ г/см³; период основного колебания $\tau = 0.001$ сек. Для числового решения он был разделен на 180 малых промежутков $\delta\tau$, равных $1/180 \tau$. Давление P , вычисленное для каждой части, показано кривой I. Пунктирная кривая показывает усилия при ударе того же шара о неподвижную плоскость. При обращении давления в нуль ($t = 28 \delta\tau$) движение самого бруса не прекращается; стрелка прогиба бруса и его скорость в месте удара после разъединения ударяющихся деталей являются начальными значениями параметров свободного колебательного движения бруса после удара, и максимальный вызванный ударом прогиб получается часто значительно позже. Перемещения шара показаны кривой II, а прогиб балки в среднем сечении — кривой III.

Во многих случаях, в особенности если после удара направление движения ударяющего тела не меняется, возможен вторичный удар.

На фиг. 40(2) длина балочки и радиус шара взяты вдвое больше. Период основного колебания стал больше в 4 раза. Кривая I, более сложной формы, показывает изменение давления P тел при ударе. Последнее обращается в нуль при $t = 19.5 \delta\tau$. После этого от $t = 60 \delta\tau$ до $t = 80 \delta\tau$ происходит вторичный нажим сталкивающихся деталей друг на друга — их второй удар.

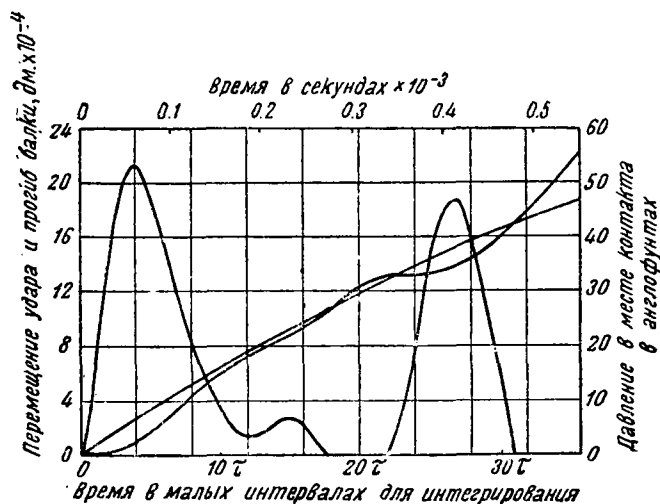
Леннерц [13] в журнале „Ingenieur Archiv“, 1937, февраль, несколько уточняет последний расчет Тимошенко. Фиг. 41 показывает построен-



Фиг. 41. Диаграмма, по Леннерцу.

ную им диаграмму перемещений по времени для шара и для колеблющегося бруса. Разница между ординатами обеих кривых дает в моменты перекрывания их, т. е. ударов первичного и вторичного, взаимное сближение ударяющихся тел.

Подобна рассмотренным диаграммам и фиг. 42 (Масон и Рочестер [30], „Journal of Applied Mechanics“, 1936, т. III, № 2) соответ-



Фиг. 42. Диаграммы Масон и Рочестер.

ствующая удару 2-дюймового стального шара с начальной скоростью 5.16 дюйма в секунду по стальной балочке с сечением $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ дюйма и пролетом 15,3 дюйма. Начальный удар представляется на ней двойным с очень малым интервалом.

По тому же предложенному С. П. Тимошенко пути идет в своих расчетах Карас [14] („Ingenieur Archiv“, 1939, август), прилагая их к деформациям плит при поперечном ударе. Попутно он занимается исследованием точности приближенных решений той же задачи и применением их к удару снаряда по бетонным покрытиям.

Таким образом, в области поперечного удара руководящими являются результаты работ Герца и Тимошенко.

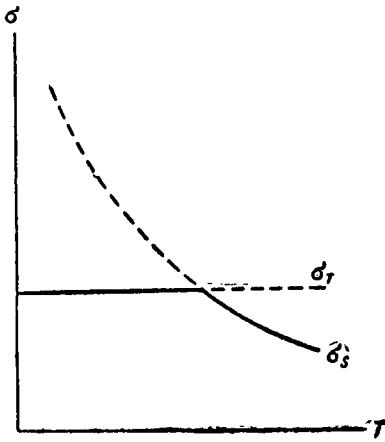
ХАРАКТЕРНЫЕ СВОЙСТВА МЕТАЛЛОВ ПРИ УДАРЕ

Современные взгляды на особенности поведения металлов при ударе сформулированы акад. Давиденковым в его книгах „Динамические испытания металлов“, „Проблема удара в металловедении“ и многочисленных отчетах об экспериментальных работах.

Разрушение деталей машин или образцов при ударных испытаниях носит хрупкий характер; оно происходит по граням кристаллов металла без предварительного скольжения (сдвига) кристаллов друг по другу; сам излом имеет кристаллический вид.

Хрупкость при ударе обязана своим происхождением хладноломкости металла. Опасное действие удара начинается лишь тогда, когда проявляется хладноломкость.

Акад. А. Ф. Иоффе в своей теории хрупкости считает, что хрупкая прочность металла не зависит ни от температуры, ни от скорости деформирования (горизонтальная прямая σ_T на фиг. 43). Кривая же предела текучести σ_s в зависимости от температуры имеет вид, показанный на той же фигуре. Точка их пересечения показывает „критическую“ температуру, при которой одинаково вероятно наступление хрупкого излома и пластической деформации. При более высоких температурах скорее наступит вторая, при более низких — хрупкое разрушение металла (сплошные части показанных кривых). Аналогично влияет целый ряд других параметров и в их числе скорость деформирования. Однако влияние понижения температуры более эффективно.



Фиг. 43. Зависимость предела текучести от температуры.

Переход от вязкого излома образца к хрупкому при понижении температуры происходит для ненадрезанных образцов с небольшой зоной рассеяния, внутри которой встречаются изломы обоих типов. Надрезанные образцы дают постепенный переход, занимающий гораздо большую разность температур и дающий значительное количество точек, представляющих изломы, по своим свойствам промежуточные между хрупкими и вязкими (полухрупкие). Описываемое расширение переходной зоны рассеяния происходит за счет верхней ее границы; влияние надреза благоприятствует получению хрупких изломов даже при более высоких температурах.

Критическая температура, ниже которой разрушение материала имеет хрупкий характер, зависит от целого ряда факторов; к их числу относятся:

- 1) Форма и размеры деталей. При увеличении размеров критическая температура (и с нею опасность хрупкого излома) повышается. Это влияние, его пределы, зависимость от напряженного состояния детали и от ее формы нуждаются в дальнейшем подробном изучении.
- 2) Способы ударного нагружения детали: ударные растяжение, сжатие, изгиб, кручение и сложное напряженное состояние.
- 3) Концентрация напряжений, например, от надрезов на образцах для ударного испытания на изгиб.
- 4) Начальные напряжения материала, упругие, вызванные прило-

женными к деталям силами, а также остаточные напряжения, взаимно уравновешивающиеся в изделии без помощи внешних сил.

5) Скорость деформации.

При статическом нагружении деформации выравниваются, и образец до самого образования шейки тянется равномерно по всей своей длине; при ударе такое выравнивание не успевает произойти; поэтому в отдельных сечениях приближается опасность достижения хрупкой прочности σ_T или же предела текучести σ_s . Отсутствие шейки при растягивающем ударе объясняет, по мнению Давиденкова, повышение временного сопротивления; наблюдаемые напряжения приближаются при этом к истинным.

6) Состояние поверхностного слоя.

Поверхностные дефекты имеют большое влияние именно при переводе испытываемого тела в хрупкое состояние (при пластической деформации напряжения по сечению образца выравниваются). Полировка поверхности понижает критическую температуру, повышая безопасность тела по отношению к хрупкому излому. Снятие (растворение) поверхностного слоя, получившего наклеп при обработке резцом, снижает хладноломкость изделия, т. е. уменьшает опасность его хрупкого разрушения.

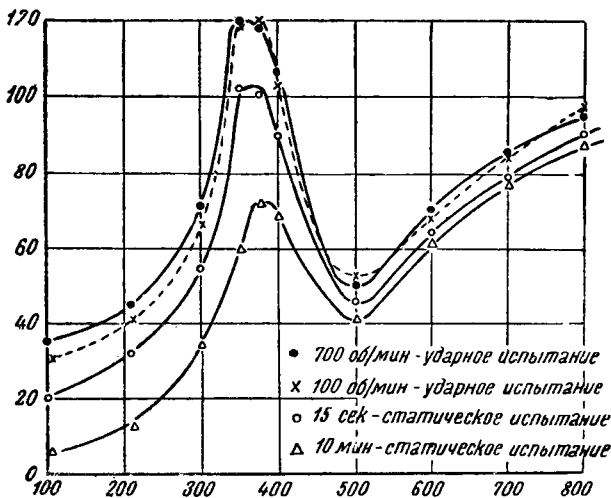
Металлические покрытия поверхности изделия также влияют на его критическую температуру: хромирование должно повышать склонность детали к хрупкому разрушению, а пластические поверхностные слои, например никелировка, должны уменьшать хладноломкость стального изделия.

7) Термическая обработка детали.

Как общее правило, крупнозернистое строение стали соответствует большей хладноломкости.

В 1940 г. появилась в журнале „Transactions of the American Society for Metals“ (№ 2) работа Грина и Стоута о характеристиках напряжений и деформаций стали при крутящем ударе. Некоторые ее положения представляют значительный интерес.

Фиг. 44 показывает приводимую авторами диаграмму зависимости работы разрушения образца от температуры отпуска материала. Об-



Фиг. 44. Зависимость работы разрушения стального образца от температуры отпуска.

разцы были выполнены из углеродистой стали с 1.1%С, нагреты перед закалкой в свинцовой ванне до 1450°F (790°C) и закалены в

соленой воде. Температуры отпуска показаны на оси абсцисс. Приводимые 4 кривых получены при испытаниях на кручение с различными скоростями: верхняя кривая соответствует ударному испытанию при 700 об/мин. (73 рад/сек), нижняя — статическому испытанию продолжительностью 10 мин. (скорость закручивания 0.001 рад/сек.). Как показывает диаграмма, характер всех четырех кривых один и тот же. Расстояние по ординате между тремя верхними кривыми велико только в области малого отпуска, т. е. при хрупком состоянии образца. После отпуска при 400°F (206°C) разность получаемых значений очень невелика. Авторы статьи считают возможным применять оба метода нагружения для получения диаграмм, представляющих связь крутящих моментов с углами закручивания. Они указывают, что повышение напряжений при динамической нагрузке по сравнению со статической происходит, главным образом, от инерции, а не от изменений механических свойств самого нагружаемого тела.

В расчетах деталей на ударные нагрузки и в лабораторных испытаниях материалов обычно фигурирует удельная работа деформации.

Обозначая через $A = \int_0^1 \sigma v d\varepsilon$ полную работу деформации, а через v — объем работающего на удар тела, имеем удельную работу a на единицу объема:

$$a = \frac{A}{v}. \quad (1)$$

Эксперименты дают значения a при ударном разрушении образца на 10—70% больше, чем $a_{\text{стат}}$. Давиденков ставит вопрос, нельзя ли вести расчет по удельной работе упругой деформации, сравнивая ее расчетное значение $\sigma^2/2E$ с работой разрушения a по уравнению:

$$\frac{\sigma^2}{2E} \cdot n = a, \quad (2)$$

в котором n представляет запас прочности.

На этот вопрос он отвечает отрицательно по таким соображениям:

- 1) чтобы при таком расчете не выйти за предел упругости, коэффициент n должен получить необычно большие значения (1000—2000);
- 2) при повторных ударах одной и той же величины, если только они выводят материал за предел упругости, величина a будет все время уменьшаться, и даже при больших значениях n может произойти разрушение.

Таким образом, расчет прочности следует вести не по работе деформации, а по напряжениям. Считая действующие в детали во время удара усилия известными, предстоит выбрать допускаемые напряжения $R_{\text{дин}}$.

Точный метод состоит в предварительном испытании материалов на удар с измерением действующих при ударе сил. До сих пор такие испытания применяются лишь в исключительных случаях.

Приближенный метод определяет $R_{\text{дин}}$ по формуле:

$$(\sigma_b)_{\text{дин}} = n \cdot R_{\text{дин}} = \frac{a_{\text{дин}}}{\eta \cdot \delta_{\text{дин}}}, \quad (3)$$

где n — есть коэффициент запаса, η — коэффициент заполнения диаграммы, а $\delta_{\text{дин}}$ — величина ударной деформации. В запас прочности можно при этом допустить, что динамические значения σ_b и σ_1 равны статическим.

Условный метод расчета состоит в определении силы, которая, действуя статически, произвела бы ту же самую деформацию, что и истинная сила. Расчет на нагрузку от условной силы производится по статическим нормам.

Разницу между тремя применяемыми методами расчета можно проследить на примере упругой балочки, лежащей на двух опорах и получающей в середине пролета l удар от груза P , падающего с высоты h . Вес балочки G .

Точный способ расчета основывается на предварительном экспериментальном изучении движения балок под действием падающего груза при различных изменяющихся параметрах (весе груза, высоте падения, жесткости балки, ее пролете и т. д.). Закон перемещения центра тяжести груза по времени позволяет найти в каждом случае силу давления груза на балочку и возникающие в последней напряжения. Эти напряжения можно сравнивать с полученными теоретическим расчетом, что позволит сделать заключение о справедливости допущений Герца и Тимошенко. С другой стороны, должно быть экспериментально изучено повышение предела текучести для материала балочки в условиях ударной нагрузки (по выражению Одингга, „всплеск“ предела текучести). Отношение последнего напряжения к первому дает коэффициент запаса.

Приближенный метод расчета отличается второй его половиной. При испытании ударом образцов металла балочки на копре определяется работа деформации (работа падения бабы минус кинетическая энергия после удара). Отношение ее к объему образца даст удельную работу $a_{\text{дин}}$. Разделив ее на величину соответствующей деформации и на коэффициент η заполнения диаграммы, обращающий ее в прямоугольник $\delta_{\text{дин}} \cdot (\sigma_{\text{б}})_{\text{дин}}$, находим последнюю величину. Ее отношение к σ во время удара дает коэффициент запаса n .

Наконец, условный метод расчета определяет динамический (ударный) прогиб балки по формуле (40) гл. II.

$$\delta_{\text{дин}} = \delta_{\text{стат}} = \sqrt{\delta_{\text{стат}}^2 + \frac{2h\delta_{\text{стат}}}{1 + \frac{17G}{35P}}}$$

Напряжение $\sigma_{\text{дин}}$, которое мы при этом определяем, соответствует удлинению $\delta_{\text{дин}}$ при статическом действии нагрузки.

По закону Гука

$$\frac{\delta_{\text{стат}}}{\delta_{\text{дин}}} = \frac{\sigma_{\text{стат}}}{\sigma_{\text{дин}}},$$

откуда

$$\sigma_{\text{дин}} = \sigma_{\text{стат}} \cdot \frac{\delta_{\text{дин}}}{\delta_{\text{стат}}},$$

или

$$\sigma_{\text{дин}} = \sigma_{\text{стат}} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{\text{стат}}} \cdot \frac{P}{P + \frac{17}{35}G}} \right]^1$$

Таким образом, при допущении одинаковых напряжений при ударе и статической нагрузке балки коэффициент запаса n уменьшится в первом случае в

¹ Н. М. Беляев считает более правильным коэффициент $k = 5/8$ вместо $17/35$.

$$1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{\text{стат}}} \cdot \frac{P}{P + \frac{17}{35}G}} \text{ раз.}$$

Последний метод расчета применяется чаще других.

Кроме установления расчетом определенного запаса прочности, Давиденков рекомендует назначать еще запас вязкости применяемого материала. Запас этот заключается в достаточном удалении деформаций при ударной работе тела от критической точки и области хрупких изломов детали. Наиболее удобный способ контролировать это удаление и соответствующий ему запас вязкости металла — это сравнение критической температуры T_k и рабочей T^1 . При понижении последней на $(T - T_k)$ будет достигнута верхняя граница переходной зоны к хрупкому разрушению, и запас вязкости обратится в нуль. Желание представить коэффициент запаса вязкости отвлеченным (безразмерным) числом заставило Давиденкова предложить для него выражение:

$$\xi = \frac{T - T_k}{T}. \quad (5)$$

В единицу этот коэффициент может обратиться только при T_k , равной абсолютному нулю температуры.

Для правильной работы детали коэффициент ξ должен быть всегда больше нуля.

Подобно тому как запас прочности часто определяется по отношению к σ_b , которого рабочее напряжение в детали никогда не должно достигать, так и запас вязкости берется от критической температуры, лежащей, как правило, ниже рабочей и никогда не достигаемой при нагрузке. Температурный параметр является наиболее удобной переменной, легко поддающейся изменению и точно регистрируемой. Те же самые условия наступления хрупкости могут получиться и в результате изменения других величин (например скорости деформации или концентрации напряжений). Таким образом, запас ξ имеет в виду стечение таких неблагоприятных условий работы, которые могут повысить критическую температуру изделия T_k . Чтобы при этом не произошло хрупкого излома, запас ξ должен быть достаточно велик.

Для определения условной критической температуры исследуемого металла² без снятия силовых диаграмм Давиденков пользуется тем, что при этой температуре работа деформации образца падает приблизительно до 40% от своего максимального значения. Число это он считает, однако, лишь первым приближением, подлежащим дальнейшему уточнению.

Двойной запас и прочности и вязкости материала является необходимым при ударе, так как при переходе материала изделия в область хрупкого разрушения и возрастания нагрузки в n раз до величины σ_c вместо пластической деформации детали наступит сразу ее поломка.

В современных условиях работы (быстроходные машины) деталь бывает принуждена выдерживать не отдельные удары, а их многократное повторение. Например, при излишней свободе зазора между валиком (пальцем) и вкладышем подшипника удар будет происходить при каждой перемене давления, т. е. при каждом обороте, а иногда и несколько раз за оборот. Так возникает понятие об ударной усталости.

¹ Температуры абсолютные.

² Т. е. средней температуры переходной зоны рассеяния.

Давиденков описывает исследования Дженкина с повторным ударом: образец имел вид тонкого стержня (балочки на двух опорах) и помещался средней частью в сильное магнитное поле. Через образец пропускался переменный ток высокой частоты; пролет образца между опорами назначался в соответствии с частотой тока для получения резонанса. Напряжения были прямо пропорциональны прогибу, изменявшемуся оптическим путем по перемещению золоченого пятнышка. Частота колебаний тока регулировалась путем изменения величины емкости в колебательном контуре; для ее измерения был применен стробоскоп (20 прорезов; число оборотов в минуту до 4000). Первая трещина в образце расстраивала резонанс, и амплитуда колебаний резко уменьшалась. Когда число полных колебаний в секунду приближалось к 1000, скорости переходили из области статической (испытание на усталость) в область удара. Переход этот к динамическим скоростям сопровождался заметным повышением прочности. При 60 000 циклах в минуту повышение достигает 7.5%.

Глава V

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ УДАРА

Наряду со стремлением „описать“ явление удара при помощи математических формул и воспользоваться затем этими формулами для расчетов крепости деталей машин, подвергающихся при своей работе ударным воздействиям, много усилий и изобретательности было затрачено на экспериментальное изучение свойств и проявлений удара. Опыты с ударом твердых тел, упругих, неупругих и физических, т. е. не вполне упругих, были отчасти нужны для подтверждения или, наоборот, для выявления недостатков теории; отчасти же они помогли ее развитию, представляя в числах различные явления при протекании удара и поведение при этом соударяющихся тел.

Трудность относящихся к удару измерений состоит прежде всего в чрезвычайно малой продолжительности изучаемого явления. Для деталей машин она не превышает 0.001 сек. За это или меньшее время происходит сложная игра усилий, моментов, работы деформаций и вызываемых ими напряжений материала, которую экспериментатор должен зафиксировать полностью или отчасти. Некоторые из переменных величин, подлежащих измерению, отличаются крайне малыми числовыми значениями. К их числу принадлежат деформации сталкивающихся тел; теории удара обычно рассматривают упругий удар, при котором напряжения не выходят за предел текучести; величины деформаций при этом, и в особенности их колебания с течением времени удара, могут быть измерены с большим трудом. Обрато, усилия и возникающие в ударяющихся деталях напряжения часто имеют большие значения, в некоторых случаях представляющие затруднения для измерения. Это показывает, почему, несмотря на многочисленные опыты, мы все-таки не располагаем вполне точными и достоверными данными, касающимися ударных величин: перемещений тел или их сечений, скоростей, усилий, напряжений в различных местах сталкивающихся деталей, времени их соприкосновения и нажатия друг на друга и пр.

С другой стороны, без отчетливого знания этих механических параметров удара не может идти правильное проектирование деталей, подверженных ударному воздействию (а число таких деталей в современных бытовых машинах все растет), не могут быть заранее установлены необходимые запасы прочности и вязкости (для последней нужно измерение критической температуры начала хрупкого раз-

рушения). Все это указывает на практическую необходимость продолжения опытов по удару твердых тел.

Наиболее подробно история проведенных экспериментальных работ, полученные результаты, стремления исследователей и их разочарования имеются в книгах Пёшля [5] и Бергера [11]. Нас будут интересовать те методы, которые были применены для измерений в трудных случаях и которые могут и в дальнейшем встретиться при изучении явления удара деталей.

Измерение времени удара

Весьма многие исследователи определяли полную продолжительность соприкосновения тел при ударе по методу баллистического гальванометра, предложенному Пуйлье. Идея опыта прекрасно изложена во „Введении в механику и акустику“ проф. Поля [2]. Соударяющиеся детали служат проводниками для электрического тока, замыкающегося ими на время удара. Проходящий в это время ток производит выброс стрелки гальванометра, пропорциональный и силе тока (или напряжению), и времени действия прибора, иначе, времени замыкания тока при ударе. Градуировка гальванометра производится под ничтожным напряжением; обратно пропорционально ему возрастает время, необходимое для получения того же выброса стрелки прибора; оно становится удобно измеримым, а от него можно перейти обратно к искомому малому времени удара.

Гамбургер [22] при градуировке определял выброс стрелки, соответствовавший замыканию тока маятником с платиновым контактом в нижней точке при прохождении последнего по латунной полоске точно измеренной ширины (0.95 мм). Скорость подвижного платинового контакта вычислялась из законов качания маятника.

Из наших соотечественников методом Пуйлье пользовался Динник [12]; за границей применение этого способа при ударе также распространено. Однако многие из применявших метод Пуйлье не считают его безусловно надежным; вероятно, могут оказывать влияние инерция гальванометра и возможность перекрытия током малого промежутка между ударяющимися телами и, таким образом, кажущегося удлинения времени прохождения тока — времени удара; напряжение пропускаемого тока приходится выбирать значительным для получения возможно большего наблюдаемого выброса стрелки; так, в опытах Динника оно достигло 50 V, в схеме, рассматриваемой в книге Поля, — 100 V.

Наконец, при этом способе приходится различать время соприкосновения тел и время их сжатия. Временем удара, строго говоря, приходится считать только второе. Между тем при прекращении давления контакт не обязательно прекращается.

Нелюбов в своих опытах по проверке формул Герца применял несколько измененный метод (Пёшль): неподвижный шар был заземлен, а ударяющий присоединялся к конденсатору, заряженному перед началом опыта до определенного потенциала. По емкости конденсатора и величине падения потенциала определялось время прохождения тока и, следовательно, время удара обоих шаров.

Многие способы связаны с промером путей, зарегистрированных пишущими приборами. Один из простейших приборов подобного рода был сконструирован Тэтом (описание по Диннику [12], „Удар и сжатие упругих тел“). Деревянный прямоугольник размером приблизительно $20 \times 16 \times 6$ см и весом около 5 кг падал между направляющими колоннами. Внизу, на фундаменте, укреплялось другое исследуемое тело с слегка выпуклой поверхностью. Немного выше на горизонтальной оси вращался вертикальный массивный закопченный

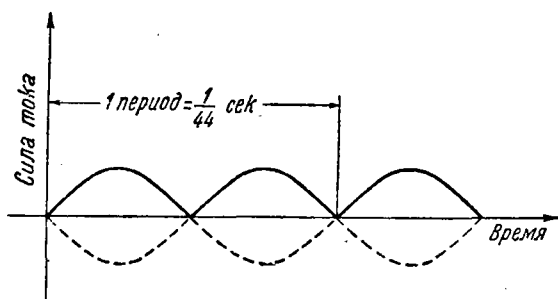
диск. Падающий деревянный прямоугольник снабжался острием, которое могло чертить на вращающемся диске. Сначала падающий прямоугольник устанавливался на поверхности испытываемого тела, и пишущее острие чертило при этом на диске основной круг. Затем прямоугольник падал с определенной высоты. Зачерченная при этом кривая несколько раз пересекала основной круг, пока колебания не прекращались. Так как угловая скорость вращающегося диска была известна, то точки пересечения отмечали продолжительность последовательных колебаний ударяющихся тел с достаточной точностью. Величины же деформации (сближений) записывались в слишком мелком масштабе, и коэффициент восстановления при их помощи не мог быть определен точно; некоторое искажение в диаграмму вносила также вибрация пишущего острия (того же порядка, что и записываемые колебания).

Ряд исследователей применяет для записи времени камертон, число колебаний которого в секунду точно известно. В некоторых опытах он бывает связан с пишущим приспособлением или непосредственно или, в случае оптических систем, при посредстве зеркальца, приводимого им в качательное движение. В результате рядом с записью наблюдаемой переменной величины на диаграмме получается синусоида, соответствующая колебаниям камертона и служащая для определения масштаба времени. В других установках камертон не дает собственной записи, а лишь прерывает основную линию диаграммы, делает ее из сплошной линии пунктирной; каждая черточка пунктира соответствует известному времени одного колебания камертона.

В опыте Зеехазе [23] камертон размыкал искровой промежуток электрической цепи, и в последней через равные интервалы проскакивали искры. Их изображение при помощи объектива направлялось на ту же пленку, на которой производилась главная запись, и служило для точного отсчета времени.

В других случаях применяется так называемая развертка снимаемой диаграммы по времени. Так, в катодных осциллографах применяется отклонение действующего на фотопленку луча в плоскости, перпендикулярной к плоскости записи; эти отклонения производятся действием переменного тока, изменяющегося во времени по известному заранее закону, например синусоидальному, и позволяют найти время соответствующее каждой зарегистрированной ординате.

Бергер [11] в своих опытах применил периодическое усиление и ослабление силы света дуговой лампы, освещающей блестящую точку фотографируемого предмета, и, следовательно, периодическое усиление и ослабление интенсивности записи. Он работал с сильной дуговой лампой (от 10 до 12 А) постоянного тока для получения ярко светящегося кратера положительного угля. Питание лампы производилось выпрямленным переменным током, заимствованным от городской сети с напряжением 105 В и числом периодов 44 в секунду. Диаграмма выпрямленного тока показана на фиг. 45. Ячейка выпрямителя состояла из электродов алюминиевого (А1) и угольного (С) (иногда свинцового или железного) и раствора. Наилучшей солью для раствора оказался $(\text{NH}_4)_2 \text{HBO}_3$ — двузамещенный борнокислый аммоний. При показанном на фиг. 46 (схема) включении два максимума тока получились за время одного периода, т. е. через 0.01136 сек. друг от друга. Повышение числа периодов тока желательно в смысле уменьшения этого промежутка, но уменьшает падение яркости света кратера от максимальной (недостаточное время для охлаждения угля). При фотографировании движущейся блестящей точки деформируемого ударом тела получается траектория ее с более и менее сильными местами; расстояния между ними соответствуют времени полупериода. Расстояния эти измеряются под микроскопом и дают непо-

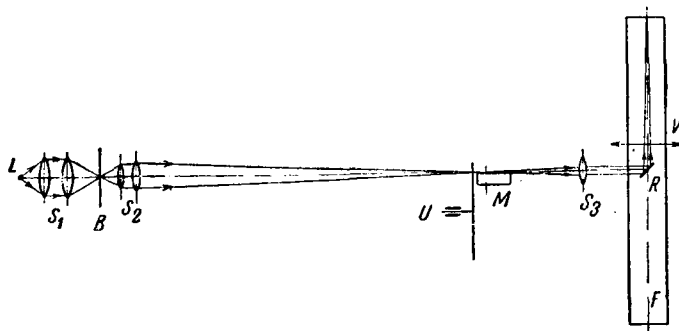


Фиг. 45. Выпрямленный переменный ток.

не длина штриха, а расстояние между соответственными точками двух смежных штрихов. Кажется все-таки, что промежуток времени между этими точками снимка слишком велик по сравнению с полной продолжительностью изучаемого явления удара и оно целиком уместится на одном штрихе получаемого пунктира. Точность измерительного микроскопа была в опытах Бергера 0.05 мм, точность самого фотоснимка значительно выше.

Пунктирные линии для записи различных процессов удара тел применяются весьма часто, причем прерыв светового луча может быть сделан быстровращающимся прерывателем, например, в виде зубчатого колесика. Луч проходит в промежутке между зубьями. При их числе z и числе оборотов в минуту n промежуток времени между соответственными точками двух смежных штрихов пунктира равен $\frac{60}{nz}$ сек.

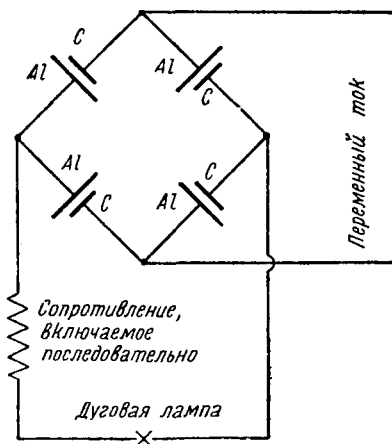
На фиг. 47 показана установка Минтропа [24] для изучения удара шара по неподвижной плите. Источник света L и система стекол S_1



Фиг. 47. Установка Минтропа. L — источник света; S_1, S_2, S_3 — оптическая система; B — диафрагма; U — прерыватель; M — место измерения; R — вращающееся зеркало; F — барабан с пленкой; V — подача.

сосредоточивают свет в отверстии диафрагмы B , откуда вторая система линз S_2 подводит лучи к прерывателю U и к месту измерения

средственно скорости рассматриваемой точки. Бергер пишет даже, что минимальная интенсивность снятой траектории падала до нуля и линия получалась пунктирной; концы черточек пунктира, по его словам, не получались резко, что не мешало точности наблюдения, так как для вычисления была нужна



Фиг. 46. Схема выпрямительной установки.

M (к месту прикосновения шара с плитой). Во время удара и сжатия тел свет полностью затемнен, после окончания удара свет возобновляется. После места удара свет проходит через систему линз S_3 , поступает на вращающееся зеркало R и отбрасывается им на пленку барабана F . При длине пленки 3000 мм и 12 000 об/мин зеркала R , времени удара 0.0002 сек. соответствует длина перерыва световой линии на пленке в 120 мм. Диск прерывателя служит для нанесения мелких делений, соответствующих малым долям секунды.

Главнейшие результаты измерений продолжительности удара следующие: согласование теоретических и экспериментальных значений для времени удара получается слабое; особенно велика разница для волновой теории упругого удара. Пёшль указывает, что при продольном ударе упругих стержней часть энергии тратится на возбуждение и поддержание поперечных колебаний, которые в теории С.-Венана не предусматриваются, но которые могут быть вызваны одним из упругих продольных изгибов, которые появляются при ударе. Элементарная теория удара совсем не дает указаний относительно времени удара, другие же вычисляемые по ней величины согласуются с опытом удовлетворительно. Теория Герца, за исключением зоны удара, рассматривает тела как неупругие и применяет к ним выводы элементарной теории. Все теории имеют в виду протекание ударных напряжений в пределах упругости (текучести) ударяющихся тел, т. е. при весьма малых скоростях удара. Как только напряжение превышает предел текучести, согласование между опытом и теорией нарушается, так как теория рассматривает удар как явление обратимое, опытные же кривые показывают неизменно наличие рассеяния энергии (упругий гистерезис).

Шнебелли [25] изучал время удара шаров о значительную массу плиты (приблизительно можно принять за бесконечность). При этом продолжительность удара: 1) почти пропорциональна массе ударяющего тела; 2) уменьшается со скоростью удара, как это требуется по теории Герца; 3) уменьшается при возрастании радиуса кривизны поверхности соприкосновения; 4) увеличивается с длиной ударяющего тела. Если ударяющее тело имеет форму шара из различных материалов, то время удара обратно пропорционально корню из модуля упругости E . Средняя наблюдаемая продолжительность удара составляла около 0.0002 сек.

Довольно близко подходят к ним и результаты опытов Гамбургера [22]. Кроме того, он отмечает, что убывание времени удара при возрастании начальной его скорости происходит быстрее при малых скоростях и медленнее при больших. Этот результат подтверждается формулами Герца, которых экспериментатор, повидимому, не знал.

Динник [12] в своих опытах получил хорошее подтверждение формул Герца для стальных шаров и плохое для шаров менее упругих — цинковых и свинцовых. Для продолжительности удара шаров с радиусами R_1 и R_2 и плотностями ρ_1 и ρ_2 он предлагает обобщенную формулу:

$$T = 0.7358 \sqrt{\left[\frac{10 \pi \rho_1 \rho_2 (E_1 + E_2)}{\frac{\rho_1}{R_1^3} + \frac{\rho_2}{R_2^3}} \right]^2 \cdot \frac{1}{v} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}$$

в которой v обозначает относительную скорость тел до удара.

По опытам Моро полная продолжительность удара может быть представлена эмпирической формулой:

$$T = A + \frac{B}{v}$$

в которой v обозначает скорость удара, а A и B — постоянные, соответствующие применяемому материалу ударяющихся тел. Продолжительность T_1 деформации тела до их наибольшего сжатия не зависит от скорости удара и уменьшается с радиусом ударяющего шара. Время T_2 второй фазы удара (восстановления) увеличивается при возрастании скорости до некоторого предельного значения; при малых скоростях T_1 и T_2 почти равны между собою.

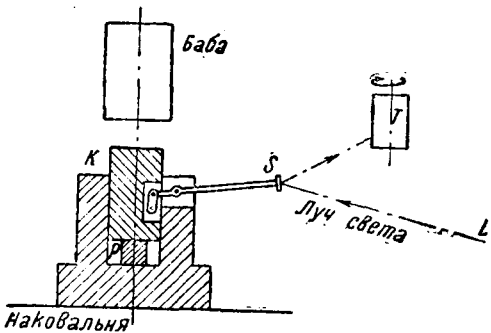
Измерение перемещений и деформаций при ударе

При записи перемещений колеблющегося сечения в натуральную величину, как мы видели выше в опыте Тэта и как это применялось многими исследователями, масштаб получается настолько мелким, что точные измерения записанных величин невозможны. Необходимы значительные увеличения для получения длин, пригодных для последующей обработки.

Простейший прием для отсчета перемещений колеблющегося стержня (его крайних положений) применял Больцман [26]. Ударяющиеся цилиндры у него, как и во многих опытах, были подвешены наподобие маятников. Такой способ направления ударяющихся тел представляет меньшие вредные сопротивления, чем устройство направляющих какой-либо другой конструкции. Больцман подвешивал свои стержни на шелковых нитях длиной около 1.5 м. Тени этих нитей двигались при колебаниях стержней по миллиметровой шкале и позволяли с некоторым увеличением определить перемещения крайних точек.

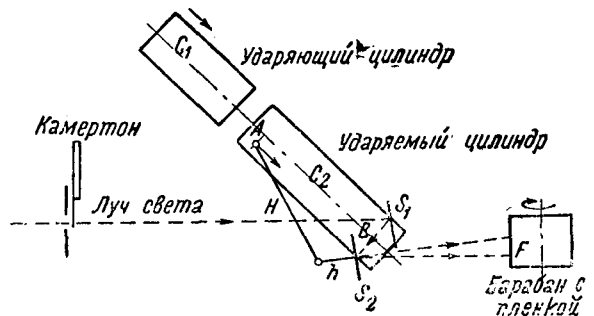
Наилучшим способом увеличения, дающим точную запись, нужно считать оптический способ. Весьма часто он основан на том, что измеряемое перемещение сообщает поворот зеркалу, отражающему луч к экрану. При повороте зеркала на некоторый угол отражаемый луч повернется на двойной угол; при большом расстоянии до экрана линейное перемещение на нем освещенной точки может быть очень значительным.

Фиг. 48 показывает простейший пример подобной установки Дюнна [27]. Ударное давление на испытываемый образец P передается поршнем K , выполненным из



Фиг. 48. Установка Дюнна.

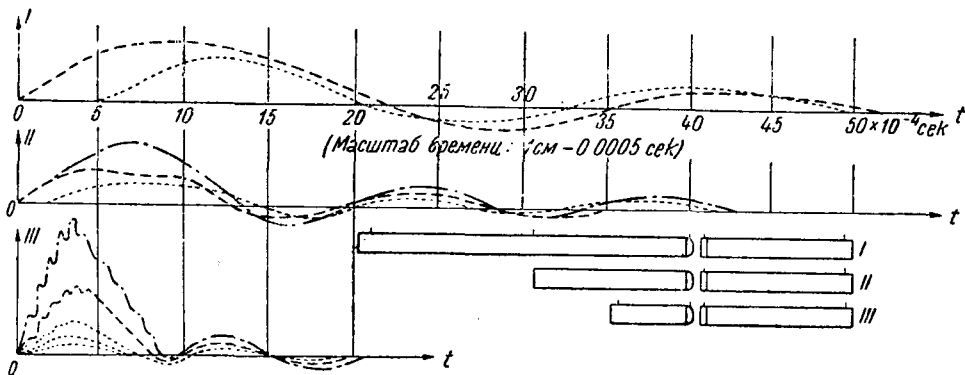
возможно жесткого материала. С ним посредством малого шатуна соединен рычаг, несущий зеркало S . Отражаемый им луч света поступает на быстро вращающийся барабан T , покрытый светочувствительной бумагой. Считается, что перемещение поршня равно деформации образца; оно производит поворот зеркала и передвижение светящейся точки вдоль образующей барабана.



Фиг. 49. Установка Рамзаугера.

Другой пример расположения ударяющихся тел показывает фиг. 49 (опыт Рамзауера [28]). Ударяемый цилиндр несет на своем конце, противоположном удару, два зеркала S_1 и S_2 . Первое закреплено на стержне C_2 , второе может поворачиваться относительно точки B стержня и связано с небольшим кривошипом h . На его конце надета штанга H , другой конец которой сочленен с точкою A стержня C_2 вблизи места удара. Вследствие сжатия цилиндра при ударе точка A движется по направлению стрелки и поворачивает этим на небольшой угол зеркало S_2 . Луч света проходит через диафрагму с отверстием 0.1 мм, прерывается через равные промежутки времени камертоном, падает поочередно на оба зеркала и отражается на барабан F , несущий светочувствительную пленку. Поворот зеркала при сжатии тел вызывает перемещение точки падения на барабане для записи вдоль образующей. Сам барабан быстро вращается, и после развертывания пленки на ней получается запись перемещений точки A по времени. Прерывистый характер кривой позволяет знать числовые значения промежутков времени.

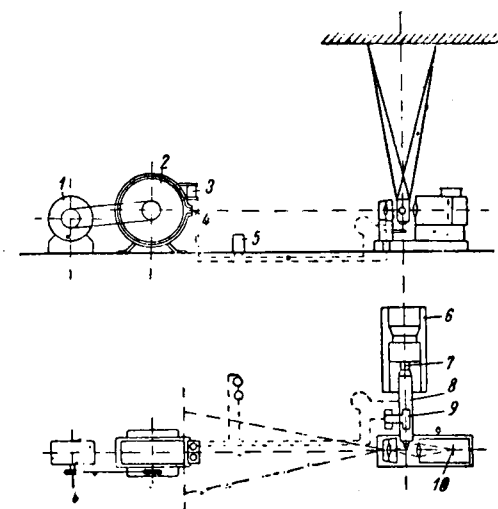
Фиг. 50 показывает результаты этих опытов Рамзауера. По оси абсцисс на всех трех диаграммах отложено время, а по ординатам —



Фиг. 50. Результаты опытов Рамзауера.

величины деформации сжатия стержней при ударе. Кривые относятся к каучуковым цилиндрам с наконечниками из слоновой кости. Отношение длин стержней для первой диаграммы 2:1; для второй — 1:1; для третьей — 1:2. Кривые с исходными точками вне начала координат относятся к средним сечениям стержней; многократные кривые соответствуют различным начальным скоростям при ударе.

Другой способ определения перемещений тела состоит в фотографировании движения его тени за время удара. Фиг. 51 представляет опытную установку Хенигера [29]. Ударяющее тело подвешено наподобие маятника, перемещается во время удара почти горизонтально и несет на своем заднем конце пластинку, кромка (Schneide) которой при этом загораживает полностью или отчасти отверстие для пропуска лучей на светочувствительную пленку. Барабан, несущий пленку, помещен в светонепроницаемой камере, в которой имеется только узкое отверстие длиной 55 мм и шириной 1 мм. Перед прорезом помещена цилиндрическая линза, которая суживает проникающий пучок лучей до ширины 0.07 мм. Длина 55 мм закрывается отчасти при ударе кромкою ударяющего тела, причем расхождение регистрирующего прибора от аппарата, в котором происходит удар, выбрано так, что бы перемещения кромки передавались с 10-кратным увеличением. Отверстие в камеру, содержащую барабан с пленкой, защищено от света еще одной крышкой, которая открывается перед самым началом удара и закрывается вскоре после его окончания.



Фиг. 51. Установка Хенигера. 1 — мотор; 2 — пилющее приспособление; 3 — электромагнит; 4 — запирающая шайба; 5 — батарея; 6 — наковальня; 7 — образец; 8 — ударяющая баба; 9 — контактная пружина; 10 — дуговая лампа.

нужный момент разрядом лейденской банки. Время такого разряда чрезвычайно мало даже по сравнению с продолжительностью удара, и заметного передвижения снимаемого острия нельзя установить под измерительным микроскопом. Для получения достаточно четких снимков нужно, чтобы освещающие разрядные искры были возможно активными. С этой точки зрения наилучшим металлом для искровых электродов оказался (по опытам Бергера) магний, на втором месте — амальгамированная латунь. Электроды имели форму шаров и диаметр 10 мм. Величина искрового промежутка составляла от 4.5 до 7.5 мм; меньший из этих размеров совершенно достаточен для целей фотографирования. Так как искра очень богата ультрафиолетовыми лучами, то Бергер не советует применять ортохроматические пластинки. В качестве конденсатора у него служили две параллельно соединенные лейденские банки общей емкостью 10 650 см, применяемые в искровой телеграфии. Глатцель в своей книге «Электрические методы моментальной фотографии» определяет емкость конденсатора для снимков с передним освещением в $(0.1 \text{ до } 0.15) \cdot 10^{-6}$ фарад (около 100 000 см), т. е. в десять раз больше. В опытах Бергера хватило значительно меньшей емкости благодаря тому, что расстояние от искрового промежутка до освещаемого предмета составляло всего 10 см. При таких малых расстояниях важно, чтобы объектив во избежание вуали был закрыт от непосредственного действия лучей разряда, а получал только отраженный свет от снимаемого предмета.

Фиг. 52 показывает сталкивающиеся маятники P_1 и P_2 и прикрепленный к одному из них (ударяющему) рычаг A , который на нижнем конце несет латунный шар K_1 ; C изображает конденсатор; $M_1 M_2$ есть осветительный искровой промежуток с магниевыми электродами. В разрядной цепи имеется еще искровой промежуток $K_2 K_3$ с латунными шарообразными электродами, больший, чем $M_1 M_2$ и являющийся для всей цепи предохранительным: разряд конденсатора наступает только тогда, когда шар K_1 поместится между K_2 и K_3 и настолько сократит собою большой искровой промежуток, что напряжение банки явится достаточным для перекрытия второго по ве-

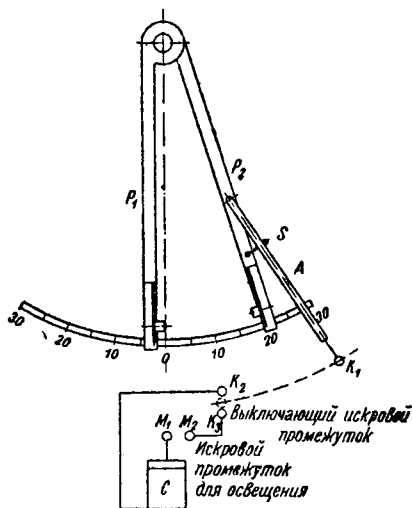
Перемещения этого затвора производятся электромагнитом, а ток для него включается ударяющим стержнем, который имеет для этого на своей нижней поверхности металлическую кисточку, скользящую по контакту, положение которого может регулироваться. Для точного отсчета времени применен камертон.

Наконец, к числу оптических методов регистрации движения сталкивающихся тел относится фотографирование отмечающих их деталей, например указателей или стрелок, в различные моменты удара. Негатив исследуется потом с помощью измерительного микроскопа. Само фотографирование производится в темном помещении (Бергер [11]), освещаемом в

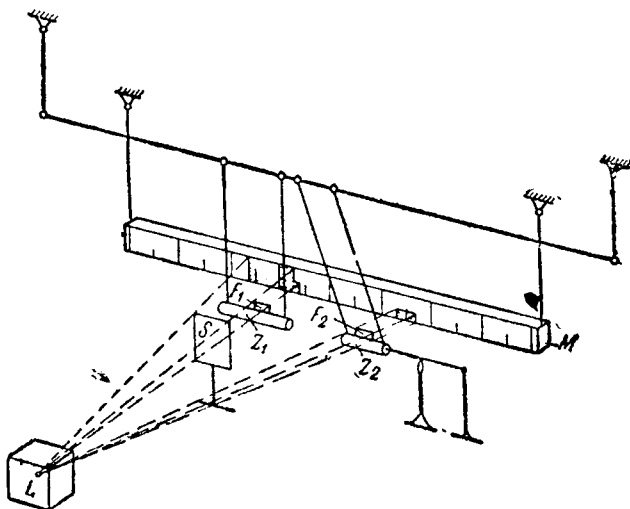
личине промежутка $M_1 M_2$ и двух небольших зазоров по обеим сторонам K_1 . Выключающий рычаг A может устанавливаться при помощи винта S по отношению к маятнику P_2 ; это приспособление служит для изменения момента проскакивания искры и, следовательно, для возможности фотографирования расположения ударяющихся тел в различные последовательные моменты протекания удара.

Этот метод Бергер находит сложным и поглощающим много времени, так как каждый снимок соответствует одному определенному моменту и для получения картины всего явления необходимо снять и обработать значительное число фотографий. Кроме того, оказывается, что точное регулирование положения шарика K_1 не дает столь же точного изменения наблюдаемого (фотографируемого) момента, так как разряд не всегда точно соответствует положению шара K_1 на кратчайших расстояниях (на линии центров) от K_2 и K_3 , а иногда происходит раньше или позже. Поэтому экспериментальная кривая показывает часто скопление точек наблюдения на некоторых участках и их отсутствие в других местах кривой, т. е. в другие моменты удара. Это требует большего числа наблюдений (снимков) для получения надежной кривой.

Рамзауер [28] определял скорости соударяющихся стержней после удара по так называемому методу тени. Фиг. 53 показывает схему



Фиг. 52. Установка Бергера.



Фиг. 53. Метод теней Рамзауера.

примененной им установки. При небольших отклонениях стержней z_1 и z_2 , колеблющихся в виде маятника, зависимость между скоростью v , подъемом y и горизонтальным отклонением x выражается уравнением:

$$v^2 = 2 gy;$$

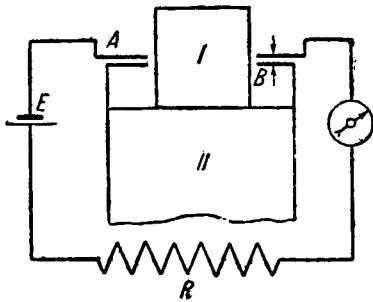
$$y (2l - y) = x^2 \text{ или, приближенно, } 2ly = x^2;$$

отсюда

$$v = x \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Следовательно, для получения скорости v нужно, кроме определения l из наблюдений над качаниями маятника, еще точное определение точек возврата колеблющегося тела, или величины x . На поверхности сталкивающихся цилиндров прикреплены небольшие прямоугольные флажки из бумаги F_1 и F_2 . Яркий источник света L заставляет их отбрасывать резкие тени на поставленный сзади экран M с делениями, служащий для измерения перемещений теней. Сами точки возврата определяются с большой точностью при помощи передвижного экрана S , сзади которого выступают тени флажков. Цилиндры ударяются друг о друга; ударяющий после этого принимается во избежание повторных столкновений, и считается число колебаний (от 2 до 4), во время которых край тени флажка F_1 выступает из-за подвижного экрана S . По числу колебаний и заранее определенным соотношениям затухания колебаний может быть вычислено действительное значение вылета x , а следовательно, и скорости.

Можно определять перемещение сечений тела при его деформации или при колебаниях и другими способами. Фиг. 54 показывает схему разработанного нами способа отметки перемещений: I и II показывают два ударяющиеся тела, а A и B — два конденсатора, обкладки которых неизменно связаны с этими телами (однако электрически изолированы от них). Электрическая цепь состоит из источника тока E , обоих конденсаторов, соединенных последовательно, сопротивления R и прибора для регистрации изменений силы тока при сближении тел и соответственном



Фиг. 54. Емкостный метод отметки перемещений.

изменении емкости; при той быстроте изменений, которая имеет место при ударе, наилучшим прибором является катодный осциллограф. Если бы нужно было записывать движение только одного из тел, нижние обкладки конденсатора нужно было бы поместить на неподвижном основании, причем во избежание их перемещений при ударе пришлось бы применить тот же подвес, как в сейсмометрах.

Давиденков [17] описывает прибор Коопа (индуктивную мессдозу), действующий измерением электродвижущей силы, индуцируемой при движении проводника (катушки) в магнитном поле. Он считает принцип работы прибора совершенно правильным и говорит только об избежании в будущем при конструировании приборов тех конструктивных недостатков, которые имел первый прибор.

Туци [15] применил для определения деформаций диаметра кольца при ударе по перпендикулярному диаметру следующий метод: тонкий стерженек из металлического магния был помещен по измеряемому диаметру; по окружности кольца концы стерженька были закреплены; в центре же две отдельных радиальных части, из которых состоял стерженек, были соединены при помощи поступательной пары. Исходящая деформация изменяла величину зазора между частями этой поступательной пары, а его изображение было спроектировано при

помощи объектива на быстро вращающуюся пленку. Фиг. 55 показывает фотографию щели при колебаниях кольца.

Масон и Рочестер [30] применяли магнитный измеритель деформаций. Относительное перемещение двух обмоток изменяло магнитное сопротивление в магнитопроводе; следовательно, изменялось кажущееся сопротивление в их катушках. Последние были включены в мостик Уитстона.

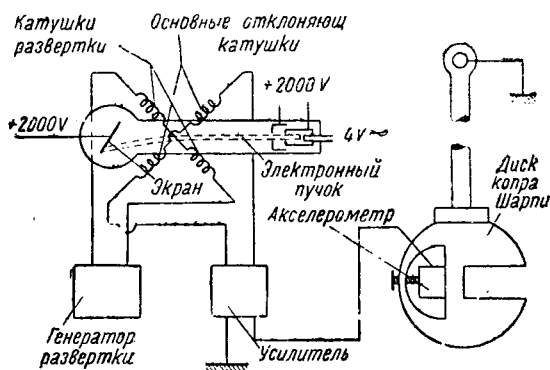
Определение действующих при ударе сил

Регистрация перемещений точек ударяющихся стержней, балок и других тел по времени часто является первой в целом ряде последовательных операций, приводящих в конечном счете к вычислению действующих в различные периоды удара сил. Двукратное дифференцирование диаграмм перемещений по времени приводит нас к ускорениям, испытываемым при ударе участвующими в нем телами. Произведение из массы ударяющего тела на его отрицательное ускорение дает реакцию второго тела, вызывающую замедление первого. Так определяется для каждого момента в течение всего времени удара сила взаимодействия соударяющихся тел. Способ этот отнимает много времени и не дает особенно надежных результатов, так как двукратное дифференцирование диаграмм приводит к накоплению ошибок. Чем крупнее масштаб начальных диаграмм перемещений по времени, тем лучшие получаются в смысле точности результаты вычисления сил, действующих между сталкивающимися телами. Вот почему оптические методы записи перемещений получили такое широкое распространение.

Далее, удобными представляются диаграммы, в которых отмечаются перемещения за малые равные между собою промежутки времени (при записи эти промежутки вносятся прерывателем светового луча). Ординаты таких диаграмм пропорциональны скоростям движущейся точки (или сечения тела), и их остается подвергнуть только одному дифференцированию. Этот прием работы считается значительно более точным.

Наиболее выгодными должны быть акселерометры — приборы, отмечающие непосредственно величину ускорения ударяющего тела. Лучшим из них Давиденков считает пьезокварцевый акселерометр. При сжатии пластинки, надлежащим образом вырезанной из кристалла кварца, на ее поверхностях возникают электрические заряды противоположных знаков. Величина этих зарядов пропорциональна силе, сжимающей пластинку, и не зависит от размеров кварцевых пластин. Появление зарядов происходит практически мгновенно, что и составляет основное преимущество этого способа измерения.

Фиг. 56 (заимствованная из книги акад. Давиденкова „Проблема удара в металловедении“) показывает схему установки акселерометра на ударяющем диске копра Шарпи. Самый акселерометр представляет стальную коробку, внутри которой свободно ходит боек,



Фиг. 56. Пьезокварцевый акселерометр.

прижимаемый пружиной к кварцевым пластинам (начальное нажатие). Пластины кварца положены в два ряда, причем поверхности, выделяющие заряды одного знака, обращены друг к другу и соединены с общим отводящим проводником. Он идет от акселерометра к двухкаскадному усилителю, развивавшему в описываемой установке мощность в 0.5 W при напряжении 50 V; напряжение от акселерометра составляло всего 0.1 V, так что коэффициент усиления в установке ЛФТИ равнялся 500. В цепь усилителя были включены отклоняющие катушки катодного осциллографа. Таким образом отклонение флюоресцирующей точки на экране осциллографа является пропорциональным электрическому импульсу пьезокварца, или силе, действующей на пластинку. Так как масса бойка неизменна, то отклонение пропорционально ускорению (отрицательному) ударного диска. Отклонение в перпендикулярной плоскости производится током „развертки“ и может быть пересчитано на время. Умножая полученные ускорения на массу диска, находим силы взаимодействия ударяющихся тел в зависимости от времени.

Тарировка прибора производилась при мгновенном снятии нагрузки с акселерометра: тяжелые гири подвешивались к его бойку при помощи бечевки, которая затем перерезалась. При таких мгновенных разгрузках кварца на величину веса гири строилась кривая зависимости между сброшенной нагрузкой и отклонением светящейся точки на экране. Таким образом тарировка включала в себя все звенья установки (акселерометр, усилитель и осциллограф). При разгрузке знак выделяющегося заряда был обратным по отношению к рабочему; поэтому кварцевые пластины перед тарировкой переворачивались.

Пьезокварцевый прибор может быть применен в виде не акселерометра, а динамометра — для непосредственного измерения действующей силы. Однако для случаев удара нагрузка кварцевых пластин оказалась бы чрезмерно высокой и потребовала бы увеличения размеров и стоимости прибора. Более выгодным является поэтому акселерометр.

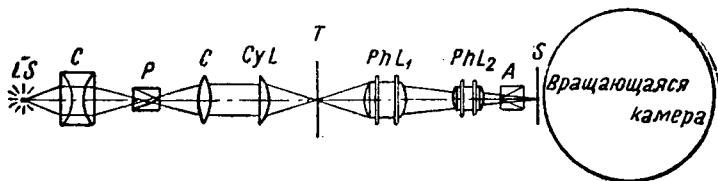
О силе удара можно далее судить по деформациям градуированных тел, упругих (например пружин) или неупругих (крешеров). К первым приходится предъявлять несовместимые требования: достаточную жесткость для передачи ударного действия и достаточную податливость для получения деформаций, по которым производится отсчет значительной, удобной для измерения величины. Поэтому неудивительно, что динамометры удовлетворяют только одной из этих задач и не дают практически пригодных результатов. Неупругие динамометры (крешеры) получают при ударе остаточные деформации. Таким образом, тарировка их ударами невозможна; тарировка же статической нагрузкой неправильна, так как сопротивление металла крешера ударной пластической деформации гораздо выше, чем статической.

В качестве максимального динамометра Мэсон и Рочестер [30] использовали сами контактные поверхности. Поверхность балочки, воспринимавшей удар, была закопчена, и ударяющий шар оставлял на ней отпечаток. Этот отпечаток сравнивали с рядом отпечатков, оставленных тем же шариком под действом статической нагрузки.

Последний путь для определения усилий в различных значениях ударяющихся тел есть исследование их моделей в поляризованном свете. Известны опыты, проведенные Туци и Низида [15] в Японии над определением напряжений в кронштейне, балочке и кольце. Фотографирование изохром при ударном нагружении деталей требует времени экспозиции порядка 1:50 000 сек.; световой луч должен быть при этом поляризованным и одноцветным. Оба последние условия

сильно сокращают интенсивность света и делают короткие выдержки весьма затруднительными. Экспериментаторам до сих пор приходилось ограничивать область своего наблюдения некоторым определенным сечением модели. Рассматриваемое сечение было освещено насколько возможно ярче; получаемая при нагружении модели и освещении ее поляризованным светом картина линий одинаковых напряжений проектировалась через узкую щель на пленку, которая двигалась пропорционально времени с высокой скоростью.

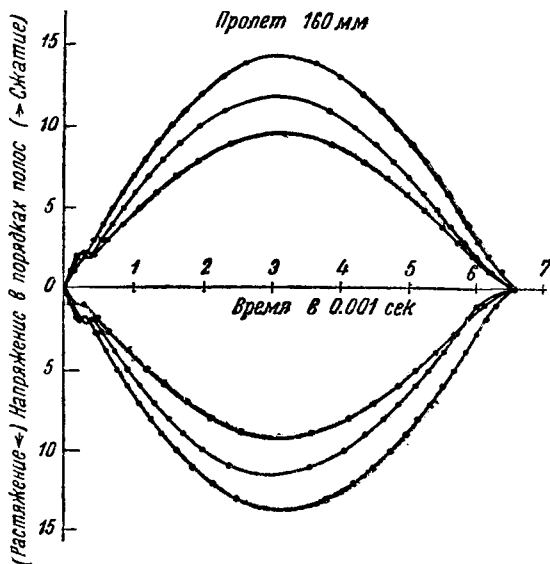
Схема установки представлена на фиг. 57. Источник света *LS* представляет обыкновенную угольную дуговую лампу с густым красным



Фиг. 57. Схема поляризационной установки.

фильтром. Хотя последний и не отличается строгой монохроматичностью, но пропускаемый им пучок лучей имеет по ширине спектра чрезвычайно малую ширину (100 μ) и практически может считаться за одноцветный луч. Система линз *C* дает параллельный пучок лучей, а цилиндрическая линза *CyL* обращает его в узкую линию на нужном сечении образца *T*. Две фотографические линзы *PhL₁* и *PhL₂* дают изображение на пленке, помещенной на вращающемся барабане. *P* и *A* обозначают поляризатор и анализатор (условно показаны призмы Николя). Ротор камеры для пленки представляет алюминиевое колесо с длиной окружности 1 м; он может получить 1400 об/мин., и окружная скорость пленки достигает 23 м/сек. Для отсчета времени на край той же пленки проектируется изображение маленькой лампочки, причём лучи пересекаются прерывателем (зубчатый диск).

В монохроматическом свете фотографировались цветные полосы, соответствующие порядкам цветов и позволяющие высчитать напряжения в соответствующих точках прозрачной модели. Фиг. 58 показывает изменение по времени напряжений в сечении фенолитовой балочки, подвергнутой в горизонтальном направлении удару маятника. Балка лежала на двух опорах с пролетом 160 мм; размеры ее сечения 23 × 6 мм; напряжения относятся не к опасному среднему сечению, по которому нанесен удар, так как в точке удара изохромы имеют сложную форму, а к сечению, отстоящему от середины на $\frac{1}{8}$ пролета, или на 20 мм. Три показанные на диаграмме кривые соответствуют трем скоростям падения: 99; 83 и 66 см/сек. В положительную сторону отложены



Фиг. 58. Напряжения фенолитовой балочки вследствие удара.

в положительную сторону отложены

напряжения сжатия. Сравнение экспериментальных кривых напряжений с результатами вычисления по классической теории удара дает разницу, не превышающую 20—25%. Соответствующая часть кинетической энергии удара пошла не на упругую деформацию балочки, как это предполагает классическая теория, а на другие расходы. Вычисленное по элементарной теории значение напряжения обладает большею надежностью.

Исследование напряжений в деталях может быть разбито на две задачи: 1) определение направления напряжений оптическим способом, 2) определение величины главного напряжения тензометром или методом фотоупругости, что весьма затруднительно. Применяя это предположение к удару деталей, можно сказать, что изохромы дадут преимущественно картину распределения напряжений, абсолютные же их значения можно определить одним из описанных приложимых к удару методов.

Первая задача может быть разрешена также наблюдением линий разрыва на поверхностном покрытии напряженной детали. Покрывающий слой должен быть хрупким, например из канифоли или лака. Эти линии разрыва перпендикулярны к направлению максимальных напряжений в детали.

Наконец, можно наблюдать с помощью лучей Рентгена местные изменения в кристаллической решетке материала детали и делать по ним заключения об испытываемых в точке наблюдения напряжениях металла.

За последние годы в Америке проведены в этой области работы рядом ученых (Дефоре [32], Фаннинг и Бассет [33], Дрепер). Они пользовались для экспериментального определения деформаций и напряжений при ударе экстенсометром ESS (electrical strain sensitive).

Измерительная полоска, называемая в их работах угольной (carbon-strip), состоит из бакелитовой смолы с графитовым заполнением, помещенной между двумя брусками из чистого изолирующего бакелита. Сама измерительная полоска является полупроводником; она приклеивается „цементом Декотинского“, нагреваемым до температуры размягчения, к поверхности исследуемой детали. При напряжении, испытываемом пластинкой вместе с деформируемой деталью, изменяется ее электрическое сопротивление (до 4%, соответственно 0,1% деформации) в зависимости от типа пластинки.

Применяемые в Массачузетском институте технологии размеры пластинок — $1 \times 0.25 \times 0.015$ дюйма ($25.4 \times 6.3 \times 0.38$ мм). Для записи весьма быстрых изменений сопротивления при изучении удара применялись соответствующие усилитель и осциллограф.

Изучение физической стороны явления удара

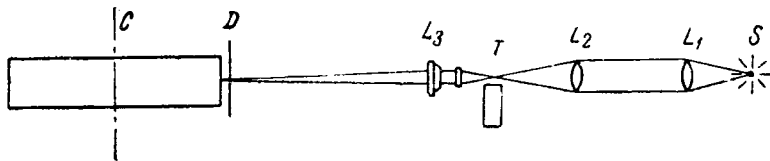
Японские экспериментаторы Туци и Низида опубликовали в октябре 1938 г. („Scientific Papers of the Institute of physical and chemical Research“) замечательные результаты своих опытов по изучению упругого поперечного удара.

Перемещения падающего груза и прогиб балочек из различных материалов фотографировались на пленке, перемещавшейся со скоростью 24 м/сек. Через узкую щель изображения были наведены на пленку, причем время экспозиции составляло $1/80\,000$ сек., т. е. достаточно малый промежуток для изучения явлений, происходящих за время удара.

Метод и аппараты опыта

а) Фотографическая установка. Схема, показанная на фиг. 59, очень проста. S есть источник света — дуговая угольная

лампа, L_1 и L_2 — линзы конденсатора и T — балочка, подвергающаяся удару, L_3 — объектив. Перед барабаном, несущим пленку, помещается световая щель D шириною 0,3 мм. Ротор C имеет диаметр 30 см и вращается в камере со скоростью 1700 об/мин.



Фиг. 59. Схема установки для съемки-рапид.

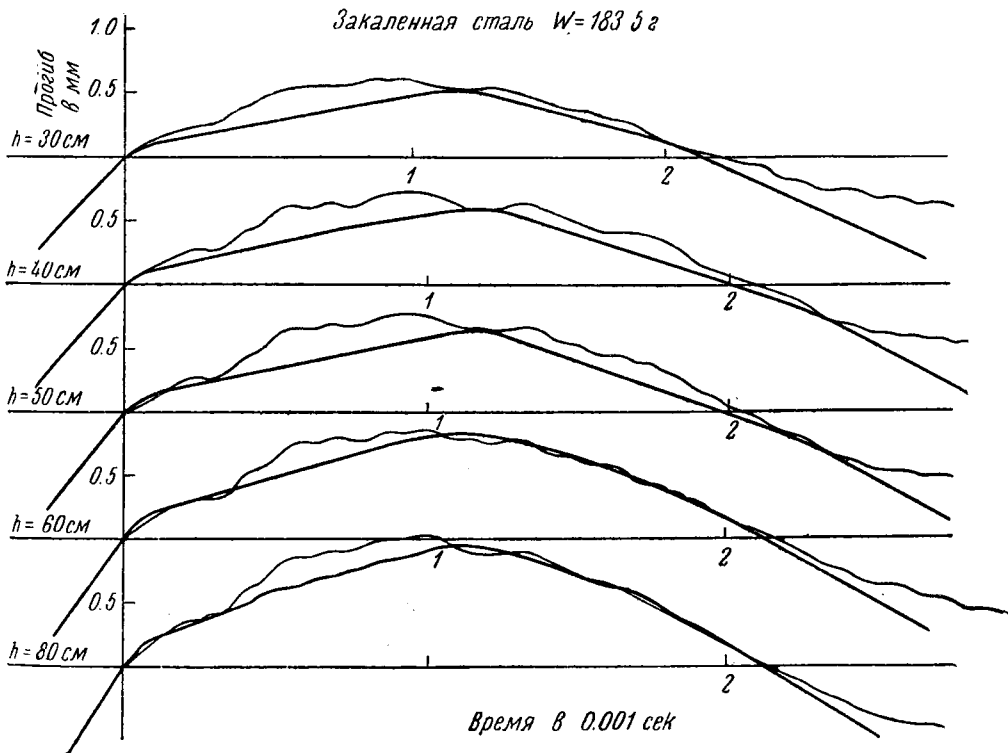
б) Образцы для испытания представляли брусья длиной 450 мм, прямоугольного сечения 10×20 мм. Брусья лежали на двух опорах с пролетом 400 мм между ними. Удар происходил в среднем сечении. К кромке бруса и к падающему грузу были прикреплены две тонких металлических пластинки, близко подведенных одна к другой. Их изображения и фотографировались.

Электромагнит, переключаемый падающим грузом, открывал заставку световой щели ровно на 1 оборот барабана с пленкой.

Максимальная высота падения была выбрана с расчетом не получить остающихся деформаций в крайних волокнах балочек.

Результаты опытов

На фиг. 60 и 61 воспроизведены фотографии некоторых опытов и диаграммы движения во время удара. В верхней части каждой



Фиг. 61. Результаты опытов Туци и Низида.

фигуры помещена кривая, относящаяся к ударяющему телу, а нижней — к движению балочки.

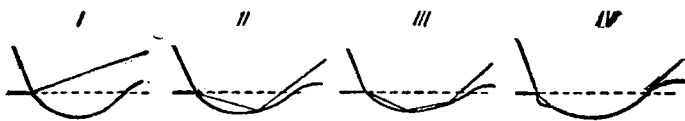
Абсциссы показывают время в тысячных секунды, а ординаты

деформации балочек или перемещения ударяющих грузов в миллиметрах.

Из фотографий и диаграмм видно, что перемещения балочек и ударяющих грузов совершенно различны, и кривые не находятся в длительном контакте, кроме случаев очень тяжелых грузов. Кривая перемещений груза в большинстве случаев имеет вид ломаной линии, а диаграмма деформаций — неправильную форму со многими волнами. Очевидно, получаются несколько мгновенных столкновений продолжительностью по малому числу тысячных секунды вместо постоянного контакта.

Характер относительного движения ударяющихся тел почти не зависит от материала балочки, т. е. кривые мало отличаются для стали и красной меди при прочих одинаковых условиях. В случае одного и того же падающего груза и различий в высотах падения кривые деформаций подобны до мельчайших волн.

Характер удара зависит от отношения весов падающего тела и балки. Относительное перемещение балки и падающей бабы может быть отнесено к одному из четырех показанных на фиг. 62 типов.



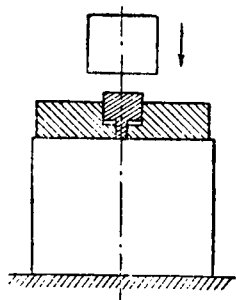
Фиг. 62. Относительные перемещения балки и ударяющего тела.

При возрастании массы падающего тела число отдельных столкновений за полное время удара становится все больше, пока удар не примет форму, показанную на фиг. 62, II. Процент, составляемый поглощенной при ударе энергией от полной кинетической энергии падающего груза, выше при малых грузах; при их возрастании он стремится к некоторому постоянному значению.

Результаты опытов были сравнены авторами с классической теорией, и совпадения не получилось. Несколько лучшее, но также не вполне точное согласование имеется с теорией Тимошенко. Полная же теория удара пока остается неизвестной.

Глава VI

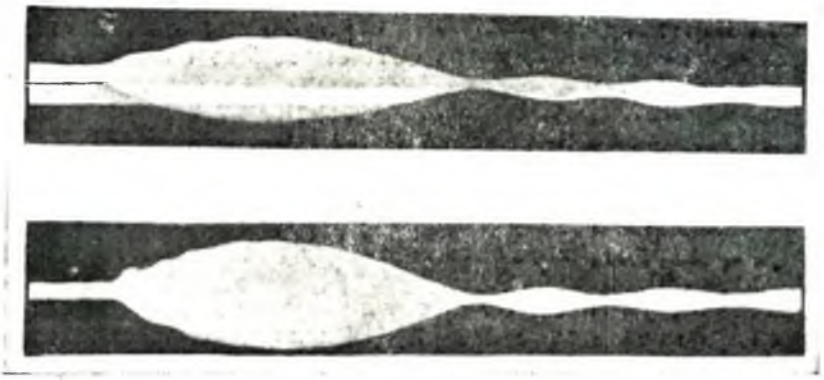
ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ФОТОУПРУГОСТИ К ИЗУЧЕНИЮ УДАРА. ОПЫТЫ ТУВЕНЕНА И ТУЦИ-НИЗИДА¹



Фиг. 63. Деталь установки Тувенена.

Одной из немногих работ, посвященных применению оптического метода исследования напряжений к удару, является работа Тувенена [25]. В этой работе автор описывает эксперимент, в котором удару подвергалась стеклянная пластина размером 120×80 и толщиной в 6 мм. Пластина опиралась по всей грани 120×6 и получала удар от падающего груза. Удар воспринимался специальным ножом, толщина нижней части которого была равна 3 мм (фиг. 63). Тувененом была применена установка с круговой поляризацией. Непосредственно за анализатором был помещен объектив, который давал изображение стеклянной модели на киноплёнке. Плёнка, примененная для фотографирования, была помещена на ободу барабана, равномерно вращающегося с окружной скоростью, равной 65 м/сек.

¹ Глава VI написана инж. В. И. Якубовичем.



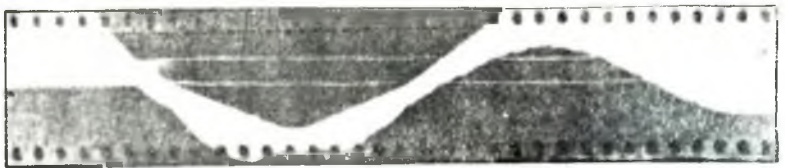
Фиг. 55.



Закаленная сталь $W=183.5г$ $h=40см$



Сталь $W=395г$ $h=20см$



Алюминий $W=183.5$ $h=40см$



Закаленная сталь $W=295г$ $h=40см$



Сталь $W=1000г$ $h=30см$

Фиг. 60.



Фиг. 64.



Фиг. 65.



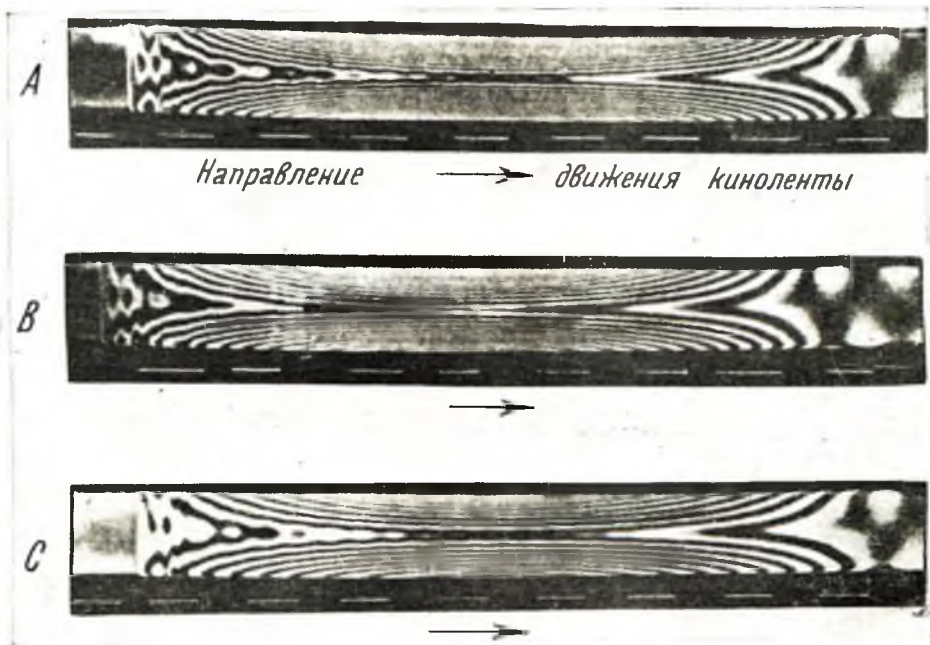
Фиг. 66.



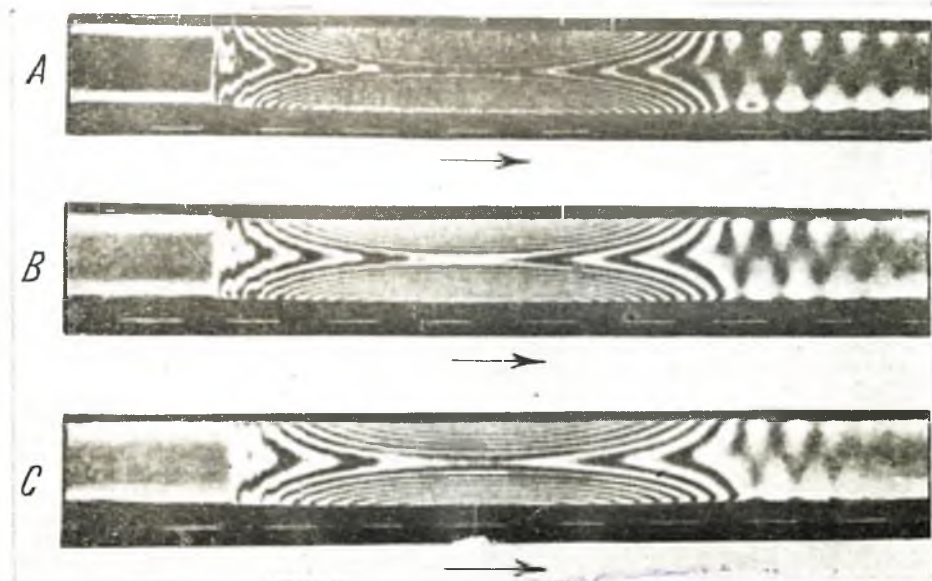
Фиг. 67.



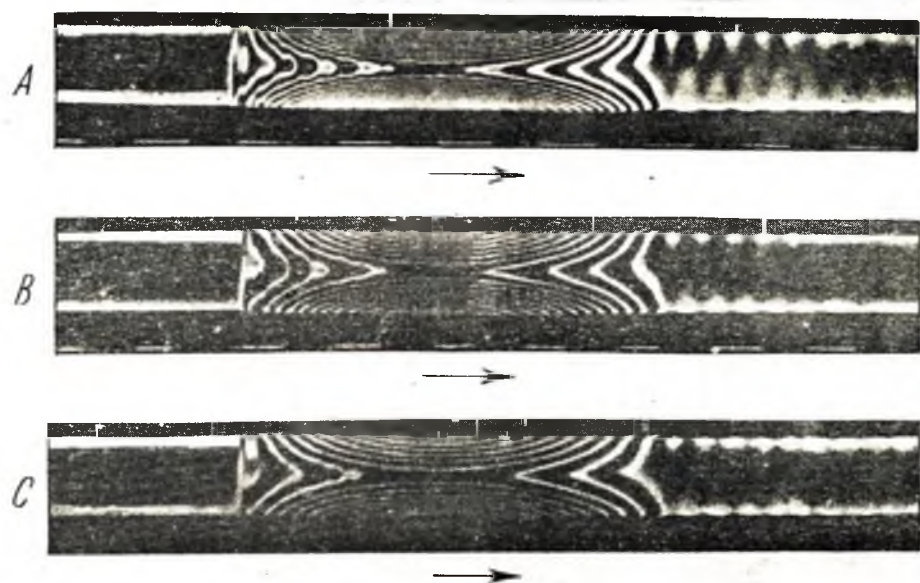
Фиг. 68.



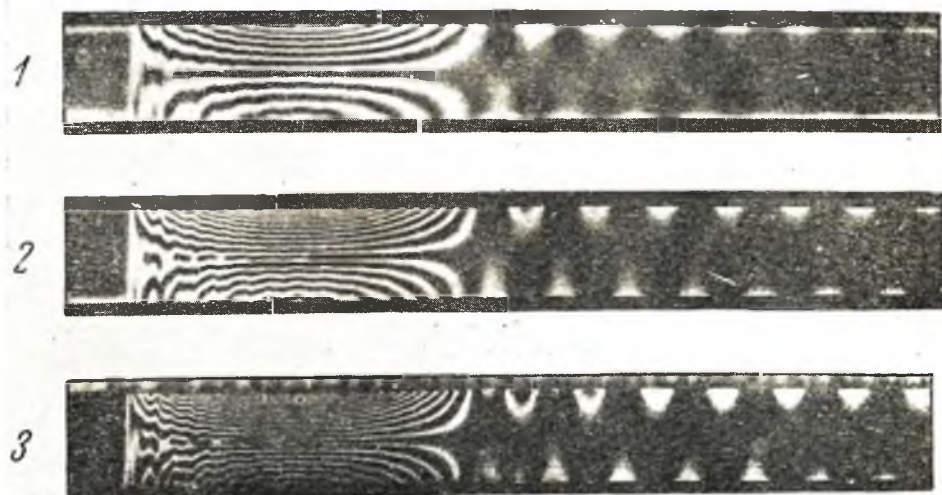
Фиг. 71.



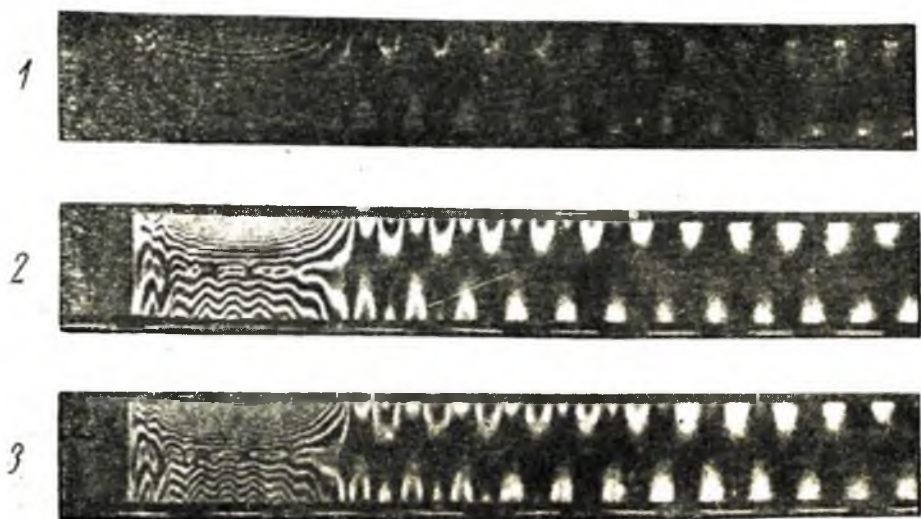
Фиг. 72.



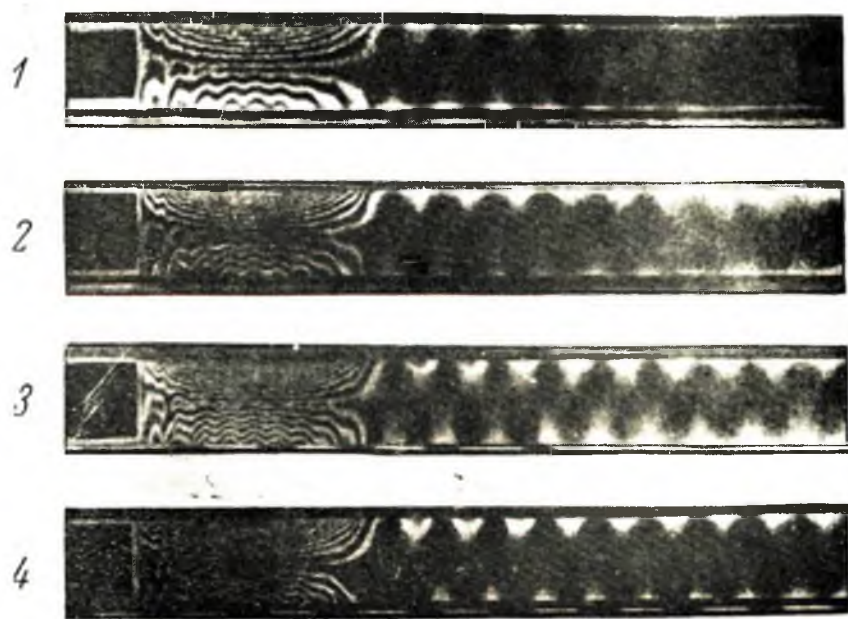
Фиг. 73.



Фиг. 78.



Фиг. 79.



Фиг. 80.



Фиг. 85.

Для того чтобы получить фотографии в виде кадров, представляющих пластину в отдельные моменты времени, Тувенен применил специальную разрядную искровую установку большой мощности, дававшую 1000 искр в секунду. Каждая искра проскакивала в течение примерно одной миллионной секунды. Так как искры, проскакивающие между цинковыми полюсами разрядника, богаты синими лучами, то для фотографирования была взята пленка, чувствительная к синему свету.

На фиг. 64 показано несколько фотокадров, снятых при ударе грузом 835 г, падающим на стальной нож с высоты 33 см. Стеклопластиковая пластина опиралась на прокладку, сделанную из двухмиллиметрового свинца и картона толщиной в 1.5 мм. Для смягчения удара между лезвием ножа и стеклом также была проложена весьма тонкая картонная прокладка. Полосы представляют собой изохромы, т. е. линии равных главных касательных напряжений. Как видно на фотографии, пластина испытала двукратный удар.

На фиг. 65 показан удар в тех же условиях, с той лишь разницей, что пластина опиралась на стальную плиту с очень тонкой картонной прокладкой.

На фиг. 66 — груз 250 г, высота падения которого равна 70 см; при этом на верхней части ножа была помещена прокладка из фибры толщиной 2 см. Пластина опиралась, как и в первом случае, на прокладку из свинца и картона.

На фиг. 67 — удар в тех же условиях, но взят груз 835 г, который падал с высоты 116 см. При этом на ноже была помещена прокладка из 2 см фибры и 1 см мягкого каучука (по толщине).

Работа Тувенена не дает даже качественного описания удара, а ограничивается лишь иллюстрацией характера изменения изохром во времени (каждый кадр отличается от последующего на $\frac{1}{1000}$ сек.).

В этом отношении работы Туци и Низида [15] являются существенным движением вперед. В своих исследованиях Туци и Низида применили так называемый метод полос, отличающийся сравнительно простой оценкой величины главных касательных напряжений. Как известно, этот метод использует монохроматический свет: световой луч должен быть поляризованным и одноцветным. Эти два обстоятельства сильно уменьшают интенсивность света, что чрезвычайно затрудняет фотографирование кратковременных явлений.

В связи с этим авторы были вынуждены отказаться от фотографирования всей картины напряжений, как это делал Тувенен, и ограничиться лишь изучением одного определенного сечения модели, в котором и был сосредоточен возможно больший поток света. Это сечение через узкую щель проектировалось на быстро движущуюся пленку. Чем больше скорость пленки и чем уже щель, тем лучше должен быть результат, так как тем менее размытыми получаются полосы. Эти полосы определяют величину и закон изменения по времени главных касательных напряжений, возникающих в данном сечении, т. е. $\frac{\partial \tau}{\partial t}$. Что касается определения главных нормальных

напряжений, то с помощью подобной фотографии полос можно определить лишь их значение на контуре, т. е. в крайних точках сечения. В самом деле, одно из главных напряжений σ_1 или σ_2 на контуре равно нулю, следовательно, главное нормальное напряжение на контуре будет:

$$\sigma_{\text{конт}} = 2\tau_{\text{макс конт.}}$$

(1)

Определение значений главных касательных напряжений τ_{\max} основано на следующем [55]:

Как известно, оптическая разность хода лучей (δ) определяется по формуле:

$$\delta = ed(\sigma_1 - \sigma_2), \quad (2)$$

где

e — коэффициент, характеризующий оптическую чувствительность данного материала для применяемого монохроматического света;
 d — толщина прозрачной модели.

Следовательно,

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{\delta}{2ed}. \quad (3)$$

Мы видим, что для определения главного касательного напряжения необходимо знать разность хода лучей в данной точке и оптическую чувствительность материала.

Темные полосы (фиг. 68) получаются в тех точках модели, где разность хода лучей δ принимает целые значения длин волн применяемого монохроматического света (т. е. там, где $\delta = 0, \lambda, 2\lambda$ и т. д.).

Поэтому формулу (3) можно переписать так:

$$\tau_{\max} = \frac{n\lambda}{2ed} = \frac{\lambda}{2e} \cdot \frac{n}{d} = \tau \frac{n}{d}. \quad (4)$$

Следовательно, зная порядок полосы, можно определить, во сколько раз значение τ_{\max} в данной точке больше значения в точке, через которую проходит полоса первого порядка.

Вопрос о том, какого порядка данная полоса, в общем случае решается наблюдением за моделью при постепенном ее нагружении от нуля. Если через данную точку за время нагружения прошло k полос, то это полоса k -того порядка.

Для случая, показанного на фиг. 68, на участке, подверженном чистому изгибу, порядок полос может быть установлен отсчетом от полосы, соответствующей нейтральной оси балки.

Кинематографический метод, примененный Туци и Низида, дает возможность проследить за появлением полос с самого начала явления, так что определение их порядка не представляет особых трудностей.

Возвращаясь к формуле (4), установим физический смысл коэффициента τ . Для этого возьмем значения τ_{\max} для двух соседних полос $\tau_{1\max} = \tau \frac{n_1}{d}$ и $\tau_{2\max} = \tau \frac{(n_1 + 1)}{d}$.

Тогда приращение главного касательного напряжения от полосы n_1 до полосы $(n_1 + 1)$ будет:

$$\Delta = \tau_{2\max} - \tau_{1\max} = \frac{\tau}{d}.$$

Таким образом, τ представляет собой приращение главного касательного напряжения на каждой полосе при толщине модели, равной единице. Принято это приращение брать для модели толщиной в 10 мм, т. е.

$$\tau_1 = \frac{\tau}{10},$$

τ_1 — градиент напряжения для десятимиллиметрового образца. Таким образом, формула (4) принимает следующий вид:

$$\tau_{\max} = \tau_1 \frac{10}{d} n. \quad (5)$$

Значение τ_1 определяется из эксперимента для данного материала и данного монохроматического света. Если подвергнуть модель, например, чистому изгибу известными по величине моментами M_0 , то, определив порядок полос на контуре (n_0), будем иметь:

$$\tau_1 = \tau_{\max \text{ конт}} \frac{d}{10n_0} = \frac{\sigma_{\max \text{ конт}}}{2} \cdot \frac{d}{10n_0}, \text{ или}$$

$$\tau_1 = \frac{M_0}{W} \cdot \frac{d}{20n_0}. \quad (6)$$

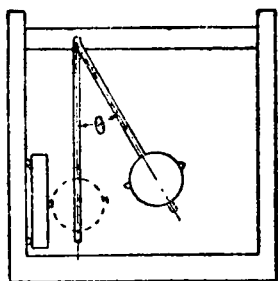
Так, для фенолита, которым пользовались Туци и Низида, при красном монохроматическом свете

$$\tau_1 \approx 16,5 \text{ кг/см}^2.$$

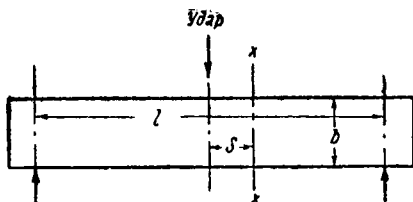
На фиг. 57 была показана схема установки Туци и Низида.

В качестве источника света для экспозиций от $\frac{1}{2000}$ до $\frac{1}{10000}$ сек. была использована ртутная дуговая лампа, дававшая зеленый монохроматический свет ($\lambda = 5461 \text{ \AA}$). При этом скорость пленки выбиралась от 1 до 3.5 м/сек. Для экспозиций от $\frac{1}{25000}$ до $\frac{1}{48800}$ сек. была использована обыкновенная дуговая лампа с угольными электродами и густым красным фильтром, дававшим достаточно малый участок красного спектра. Для получения возможно большей интенсивности света в момент фотографирования дуговую лампу кратковременно перегружали током большой силы (замыкая цепь на малое сопротивление). Скорость пленки при этом применялась от 12.5 до 23 м/сек. Для минимальной экспозиции ($\frac{1}{48800}$ сек.) ротор камеры должен был делать 1400 об/мин., а ширина щели, через которую проектировалось изображение на пленку, была около 0,5 мм. Для отметки времени точечный источник света проектировался на пленку рядом с изображением полос. Пучок лучей, идущих от источника света, перерезывался зубьями диска, приводившегося во вращение синхронным мотором; таким образом получалась пунктирная линия с интервалами времени до $\frac{1}{1200}$ сек. В качестве материала для модели во всех опытах был использован фенолит. Прежде чем приступить к изучению удара, Туци и Низида произвели для испытания метода предварительные опыты над вибрирующими стержнями. Поскольку эти опыты проливают свет на некоторые вопросы, связанные с практическим значением метода фотоупругости для удара, мы их опишем в конце.

Рассмотрим эксперимент с балкой, покоившейся на двух опорах. Как показано на фиг. 69, балка получала удар по среднему сечению с помощью маятника. Наибольший интерес, естественно, представляло изучение этого сечения, но так как в месте удара полосы изохром имели весьма сложное очертание, то изучению подвергалось сечение $x-x$, находящееся на некотором расстоянии от среднего сечения (фиг. 70).



Фиг. 69. Схема удара по фенолитовой балочке.



Фиг. 70. Размеры балочки.

Размеры испытуемых образцов были следующие:

Образец	(Пролет l)	Ширина (b)	Толщина (t)	$S = \frac{l}{8}$
	в мм	в мм	в мм	
N_1	160	23	6	20
N_2	120	23	6	15
N_3	100	23	6	12.5

Каждый образец получал удар с тремя различными импульсами A , B и C , которые определяются различными начальными углами подъема маятника θ , высотами свободного падения h и скоростями в момент удара v :

Импульсы	θ в град.	h в см	v в см/сек
A	29.2	5.08	99
B	24.2	3.52	83
C	19.2	2.23	66

Эквивалентный вес маятника равен $W = 1.631$ кг.

Результаты фотографирования сечений $x-x$ образцов 1, 2 и 3 показаны на фиг. 71, 72, 73. Пунктирные линии, которые видны у нижнего края ленты, соответствуют отметке времени, равной $\frac{1}{1200}$ сек. Скорость пленки была 22.25 — 22.56 м/сек, а экспозиция $\frac{1}{44\ 500}$ — $\frac{1}{45\ 120}$ сек.

Как видно из фотографий, в начале удара наблюдаются заметные колебания. Волнистый характер полос, повидимому, свидетельствует о наложении собственных колебаний балки. Как и следовало ожидать, продолжительность удара тем меньше, чем короче пролет балки. Интересно отметить то обстоятельство, что продолжительность удара не зависит от скорости маятника в начальный момент. Справа отчетливо видны собственные колебания балки, наступающие после окончания удара. Частоту этих колебаний легко можно получить непосредственно с фотографий.

На фиг. 74¹, 75, 76 даны кривые, характеризующие изменение величин напряжений в двух крайних точках сечений $x-x$ по времени. Здесь напряжения выражены через порядок полос для красного монохроматического света.

Далее, Туци и Низида сравнивают эти результаты с результатами, получающимися на основании теоретических формул Жаннена и Тимошенко.

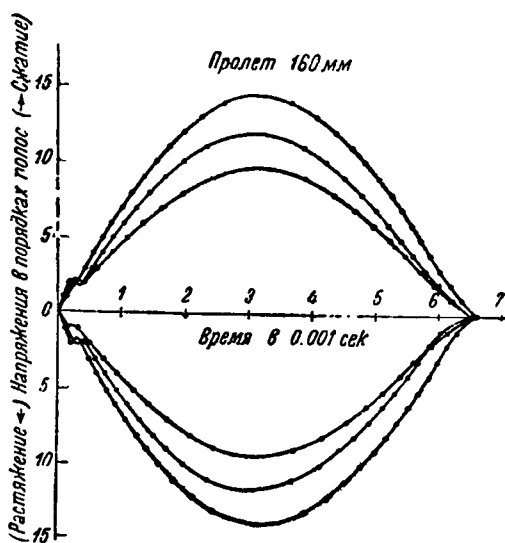
¹ Для облегчения чтения повторена фиг. 58.

Так, по Жаннену [10], продолжительность удара для данного случая равна:

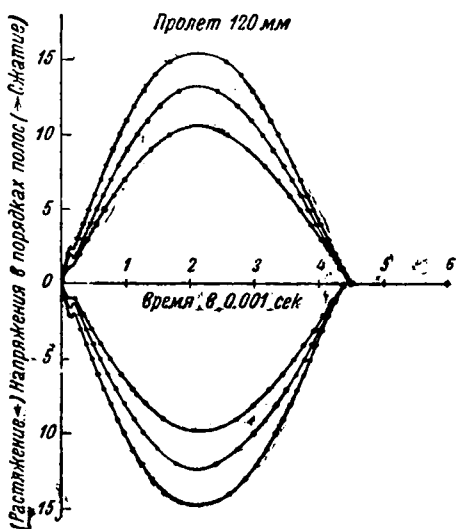
$$\tau = \pi \sqrt{\frac{ml^3}{48EI}}. \quad (7)$$

Выражение для τ не содержит высоты падения h , что подтверждается экспериментами (фиг. 74, 75, 76).

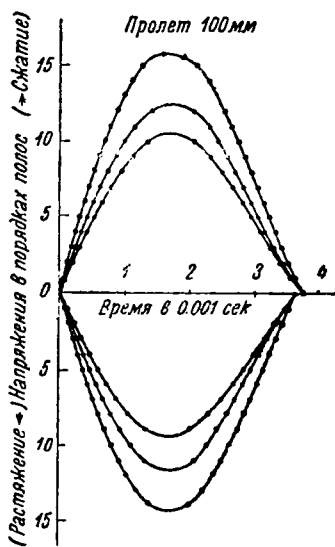
Частота собственных колебаний, возникающих после окончания удара, как уже отмечалось, может быть сравнена с колебаниями напряжений, видимых на фиг. 71, 72, 73. Это дает возможность сопоставить полученные данные с вычисленными по формуле Жаннена:



Фиг. 74. Изменение напряжений в крайних точках сечения $x-x$.



Фиг. 75.



Фиг. 76.

$$n_2 = \frac{K_2}{2\pi l'} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \quad (8)$$

где

l' — есть полная длина бруса,

A — площадь сечения,

ρ — плотность,

K_2 — постоянная, равная для данного случая 4.730.

Значения τ и n_2 , полученные из эксперимента, даны в табл. 3. Из нее видно, что экспериментальные значения хорошо совпадают с теоретическими. Так, измеренные частоты n_2 составляют 93—97% от теоретических.

Таблица 3

Номер образца	Пролет балки l в мм	h в см	Продолжит. удара τ 10-3 сек.		Частота собств. колеб. n_2			
			экспер.	расч.	экспер.	расч.		
1	160	5.08	6.31	6.23	6.59	1670	1658	1712
		3.52	6.12			1650		
		2.23	6.26			1655		
2	120	5.08	4.36	4.39	4.43	2850	2845	2925
		3.52	4.40			2835		
		2.23	4.42			2850		
3	100	5.08	3.54	3.59	3.59	3820	3820	4090
		3.52	3.63			2820		
		2.23	3.59			3820		

Как известно, значение максимальных напряжений, если пренебречь массой балки, может быть определено по следующей формуле (Тимошенко):

$$\sigma_d = \sigma_s \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{y_s}} \right),$$

где

σ_s и y_s — статические напряжения и прогиб под действием груза W ; h — высота падения груза.

В рассматриваемом случае стрела прогиба равна:

$$y_s = \frac{Wl^3}{48EI},$$

где

$W = 1.631$ кг и $E = 58.200$ кг/см² (для фенолита).

Сравнение теоретических и экспериментальных результатов дано в табл. 4, где значение напряжений также выражено через порядок полос для красного монохроматического света.

Таблица 4

Номер образца	Пролет и l/b	h в см	Расч. напряж. $\sigma_{др}$	Экспер. напряж. $\sigma_{дэ}$			$r = \frac{\sigma_{дэ}}{\sigma_{др}}$	
				растянутая сторона	сжатая сторона	среднее значение		
1	$\left\{ \begin{array}{l} 160 \text{ мм} \\ l/b=6.96 \end{array} \right.$	5.08	17.5	14.5	13.8	14.15	0.810	
		3.52	14.8	12.0	11.7	0.798		
		2.23	11.7	9.7	9.5	9.6		0.821
2	$\left\{ \begin{array}{l} 120 \text{ мм} \\ l/b=5.22 \end{array} \right.$	5.08	20.0	15.6	14.6	15.1	0.789	
		3.52	16.8	13.5	12.5	13.0		0.774
		2.23	12.2	10.6	9.8	10.2		0.837
3	$\left\{ \begin{array}{l} 100 \text{ мм} \\ l/b=4.35 \end{array} \right.$	5.08	21.5	15.6	14.5	15.15	0.693	
		3.52	18.4	12.7	11.8	12.3		0.688
		2.23	14.5	10.8	9.5	10.15		0.704

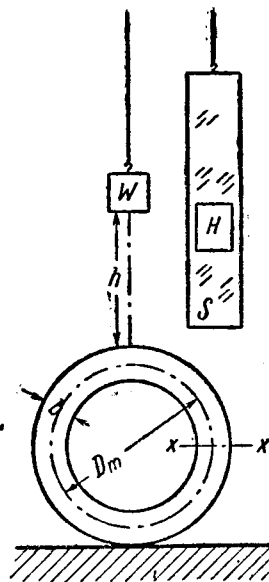
Из этой таблицы видно, что экспериментальные значения напряжений меньше теоретических и отличаются от них на 20—30%. При этом характерно то обстоятельство, что для более гибких балочек (большее l/b) экспериментальные значения напряжений ближе к теоретическим.

Удар по круговому кольцу

Как показано на фиг. 77, удар по фенолитовому кольцу осуществляется грузом, падающим с некоторой высоты. Наблюдению подвергалось горизонтальное сечение $x-x$. Для того чтобы предохранить кинолентку (которая представляет собой бесконечную ленту) от наложения последующих явлений на зафиксированные во время удара, был применен затвор S . Этот затвор, сбрасываемый одновременно с грузом W , имеет отверстие H , которое на нужный промежуток времени открывает сечение $x-x$. Таким образом, пленка получает экспозицию только в течение одного оборота ротора фотокамеры. Скорость пленки была 24.4 м/сек, ширина щели 0.5 мм, экспозиция при этом получалась равной $\frac{1}{48\ 800}$ сек.

Эксперимент был произведен над тремя образцами, имевшими одинаковый средний диаметр D_m , но различную радиальную ширину $b=26, 22$ и 18 мм. Толщина колец $t=6$ мм.

Груз, имевший во всех случаях одинаковый вес $W=500$ г, падал с различной высоты h , как это видно из табл. 5.



Фиг. 77. Удар по кольцу.

Таблица 5

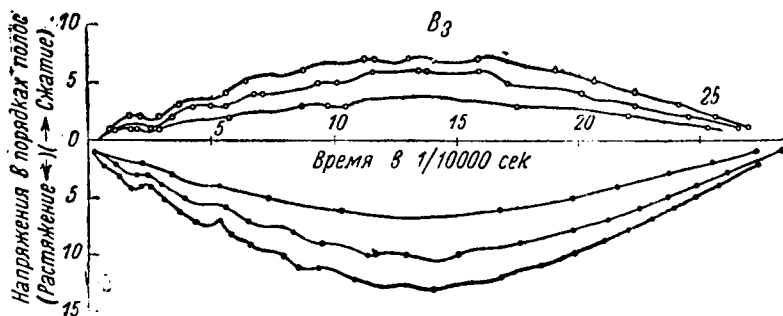
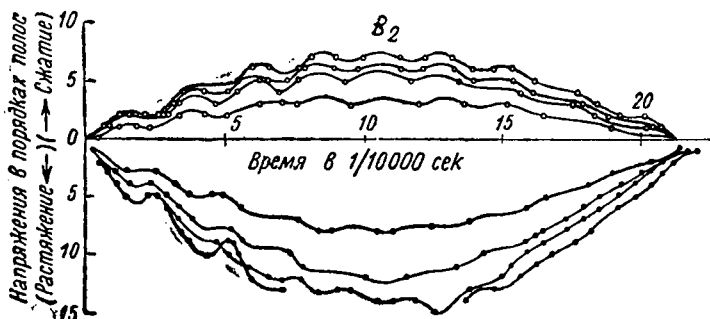
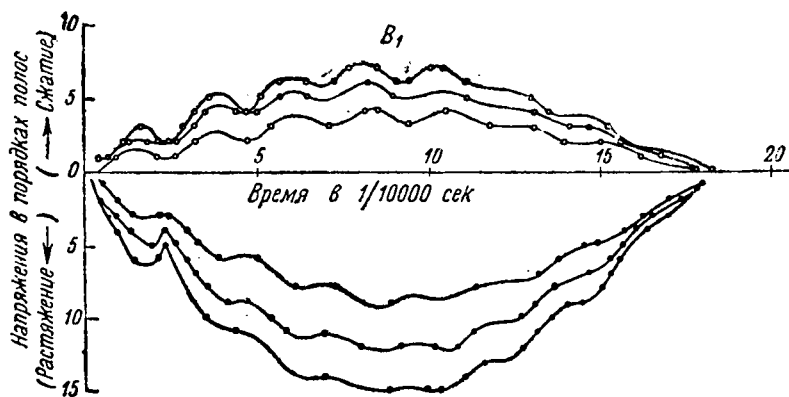
Испытуемый образец	$\frac{D_m}{b}$	№	$h_{\text{мм}}$
$b = B_1$ $b = 26$ мм	3.85	{ 1	100
		{ 2	200
		{ 3	300
$b = B_2$ $b = 22$ мм	4.54	{ 1	70
		{ 2	150
		{ 3	210
		{ 4	250
$b = B_3$ $b = 18$ мм	5.56	{ 1	45
		{ 2	100
		{ 3	150

На фиг. 78, 79 и 80 показаны фотографии, полученные при испытании образцов B_1 , B_2 и B_3 . Значения напряжений в крайних волокнах даны на фиг. 81. Все эти фотографии свидетельствуют о том, что удар сопровождается колебаниями, которые можно приписать собственным колебаниям кольца¹. Для кольца, как и для балки, экспериментальные значения частоты собственных колебаний хорошо сходятся с теоретическими, как это видно из табл. 6.

Таблица 6

Образец	Частота собственных колебаний кольца	
	теоретическая	экспериментальная
B_1	2348	2370
B_2	1987	2062
B_3	1625	1725

¹ Характерно при этом то, что фазы волны колебаний для каждого из образцов совпадают между собой при различных значениях высоты падения груза h .



Фиг. 81. Изменение напряжений в крайних точках горизонтального сечения кольца.

Здесь теоретические значения получены по формуле Тимошенко:

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{EIi^2(1-i^2)}{mAk^4(1+i^2)}}$$

где

m — плотность материала, равная 1.27 г/см^3 ;

A — площадь сечения кольца в квадратных сантиметрах;

I — момент инерции в см^4 ;

E — модуль упругости в динах на квадратный сантиметр;

i — целое число, для нашего случая равное 2.

Продолжительность удара легко определяется по фотографиям (фиг. 78, 79, 80), где пунктирные линии являются отметками времени, равными также $\frac{1}{1200}$ сек. Полученные таким образом значения Туци

и Низида сравнивают с теоретическими, подсчитанными по формуле

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{\lambda_d m}{\rho}} = \pi \sqrt{\frac{0.149 R^3 m}{EI}},$$

где R — средний радиус; m — масса груза.

Как и для случая удара балки, выражение τ не зависит от высоты падения груза h , что подтверждается фиг. 81.

Табл. 7 дает сравнение теоретических и экспериментальных значений τ .

Таблица 7

Испытуемый образец	Продолжительность удара в 10^{-4} сек.		$\frac{\tau_p}{\tau_{\text{э}}}$
	расчетн. τ_p	эксперимент. $\tau_{\text{э}}$	
B_1	15.63	18.4	0.85
B_2	20.20	22.0	0.93
B_3	27.24	28.5	0.97

Далее Туци и Низида сравнивают экспериментальные значения напряжений в крайних точках сечения $x-x$ с теоретическими. Формула, которую при этом выводят Туци и Низида, основана на известном соотношении между динамическим и статическим значениями стрел прогиба (табл. 8):

Таблица 8

Испытуемый образец	h мм	Напряжения в крайних точках				$\frac{\sigma_{i\text{э}}}{\sigma_{i\text{р}}}$	$\frac{\sigma_{o\text{э}}}{\sigma_{o\text{р}}}$
		расчетные		экспериментальные			
		$\sigma_{i\text{р}}$	$\sigma_{o\text{р}}$	$\sigma_{i\text{э}}$	$\sigma_{o\text{э}}$	(средние значения)	
B_1 $b = 26$ мм	100	11.30	4.54	9.4	4.1	} 0.789	0.907
	200	15.98	6.46	12.3	5.9		
	300	19.60	7.92	15.0	7.2		
B_2 $b = 22$ мм	70	10.50	4.85	8.2	3.5	} 0.801	0.787
	150	15.38	7.08	12.5	5.9		
	210	18.18	8.38	14.5	6.6		
B_3 $b = 18$ мм	250	19.85	9.17	16.2	7.4	} 0.814	0.824
	45	8.62	4.84	6.7	3.8		
	100	12.76	7.17	10.5	6.1		
	130	15.65	8.80	13.2	7.3		

$$\lambda_d = \lambda_s \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\lambda_s}} \right).$$

Здесь: σ_i — напряжение в сечении $x-x$ на внутренней кромке кольца, σ_o — напряжение на наружной кромке.

Как и для случая удара по балке, экспериментальные значения меньше теоретических.

О возможности перехода от напряжений в прозрачной модели к напряжениям при ударе детали

Коль скоро при изучении удара принимается справедливый основной закон метода фотоупругости, устанавливающий линейную зависимость между оптической разностью хода лучей поляризованного света и разностью главных нормальных напряжений в прозрачной модели (т. е. $\delta = k(\sigma_1 - \sigma_2)$), то значения напряжений, полученные из

эксперимента, должны оцениваться как действительные значения напряжений, возникающих в модели. Однако при ударе, как и в статической задаче, определение напряжений в модели не является самоцелью, так как в конечном счете нас интересует определение числовых значений напряжения в реальной детали, имеющей другие абсолютные размеры и изготовленной из другого материала. Может оказаться, однако, что исследователю достаточно знать лишь характер распределения напряжений, тогда необходимо быть уверенным в том, что модель нами изготовлена и нагружена таким образом, что напряжения в различных ее точках находятся в некотором масштабном соотношении с напряжениями в соответствующих точках модели. Но это и является наиболее трудной частью вопроса, так как определение самого масштаба представляется гораздо более легким. Поскольку сравниваться могут напряжения в каких-то соответствующих друг другу точках модели и детали, то наиболее естественным будет представлять модель в виде некоторого геометрического подобия. В противном случае весь вопрос существенно осложняется.

Как известно, теоремой Мориса Леви доказывается — для плоской задачи теории упругости — независимость между напряжениями и свойствами материала. Поэтому в простейших случаях статической задачи вопрос о физическом подобии разрешается соблюдением геометрического подобия модели и силового подобия нагрузки.

В силу этого в тех случаях, когда применима теорема Мориса Леви, удается сравнительно просто осуществить переход от напряжений в модели к интересующим нас напряжениям. В динамической задаче, поскольку напряжения меняются по времени, физическое подобие предполагает не только масштабное соотношение между напряжениями в соответствующих точках, но и тождество закона изменения напряжений по времени. Практически это означает, что характер явления в испытывающей удар модели должен возможно лучше соответствовать характеру явления в реальной детали.

В случае удара закон изменения напряжений по времени, т. е. то, что интересует исследователя, несомненно, будет зависеть от свойств материала (см. гл. III, например формулу 30). Поэтому явления при ударе будут отличаться тем больше, чем больше отличаются свойства материалов.

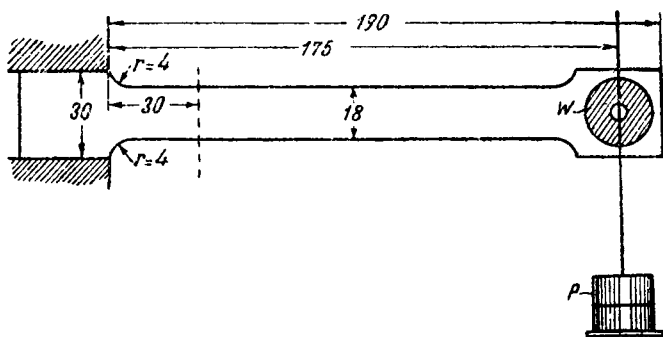
При использовании метода фотоупругости применяются материалы, отличающиеся от стали не только константами упругости, но и другими свойствами, характерными для динамических явлений.

В связи с вышеизложенным хочется обратить внимание на одно свойство фенолита, которое весьма ярко проявилось в предварительных опытах Туци и Низида. Эти опыты ставили своей целью испытание описанного фотографического метода на явлениях, протекающих сравнительно медленно. Консольная фенолитовая балочка, показанная на фиг. 82, нагруженная на своем свободном конце грузом W , приводилась в свободное колебание. Это достигалось снятием груза P , подвешенного к свободному концу балочки. Наблюдению подвергалось сечение, отстоящее от заделки на 30 мм. В результате эксперимента были определены напряжения в различные моменты времени для крайних точек этого сечения. Закон изменения напряжений по времени показан на фиг. 83. Кривые a соответствуют опыту с грузами $W = 0.417$ кг и $P = 2.735$ кг, кривые b — с грузами $W = 0.220$ кг, $P = 3.234$ кг.

Верхние жирные линии изображают изменение напряжений на стороне, первоначально сжатой, а тонкие — на растянутой.

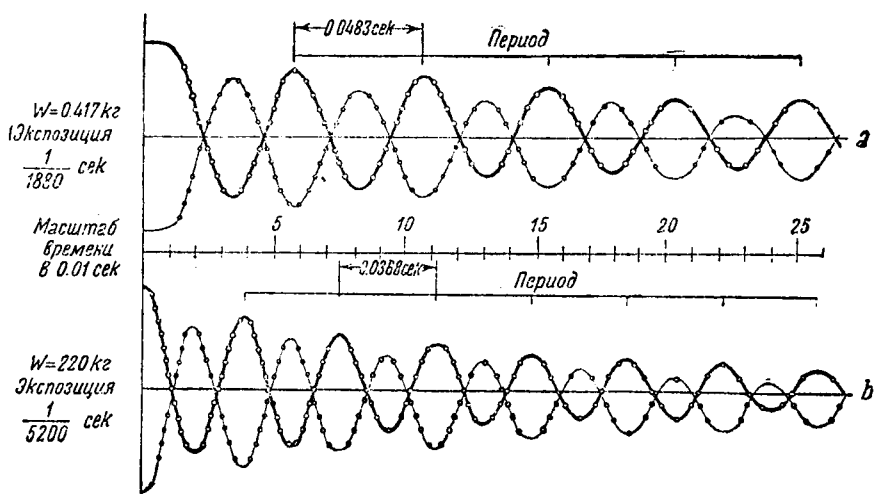
Если максимальное (т. е. первоначальное) напряжение на сжатой стороне (кривая a) принять равным единице, то через один период колебания напряжение составит 0.71. Соответственно для кривой b

будет 0.69. Столь высокое соотношение не может не обратить на себя внимания. Правда, затухание на следующих периодах дает все время уменьшающееся значение этого соотношения, однако для нас это не столь существенно. В самом деле, поскольку нас интересует



Фиг. 82. Консольная балка.

изучение удара, а не свободных колебаний, то важной является сама возможность столь заметного демпфирования, потому что нет уверенности в том, что при ударе этот фактор не действует в еще большей мере.



Фиг. 83. Изменение напряжений в крайних точках консольной балки.

В следующем эксперименте затухание проявляется еще резче.

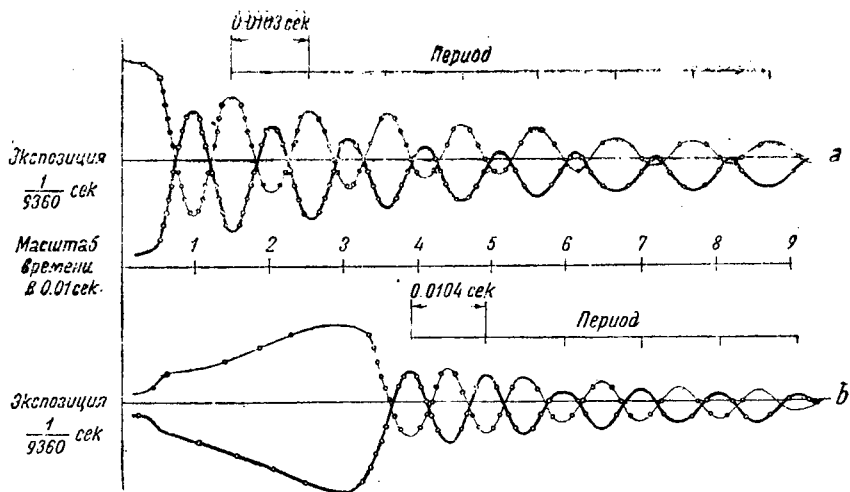
Та же самая балочка, лишенная груза W , приводилась в колебание в одном случае снятием груза P , а в другом падением груза на чашку, поддерживаемую к свободному концу балочки (при этом шнурок, поддерживавший эту чашку, был оборван).

Кривые a и b , показанные на фиг. 84, соответствуют этим двум случаям¹.

В этом случае отношение максимального напряжения к напряжению через один период равно 0.64 и 0.26 (1).

Последнее значение настолько велико, что заставляет предположить обрыв шнурка, поддерживавшего чашку, как раз в рассматриваемом промежутке времени. Иначе трудно объяснить столь значи-

¹ Тонкие линии изображают изменение напряжений на первоначально сжатой стороне.



Фиг. 84. Изменение напряжений в крайних точках сечения консольной балки.

тельную потерю энергии. Однако более внимательное рассмотрение кривой, а также соответствующей ей киноплёнки (фиг. 85), убеждает нас в том, что обрыв шнурка произошел до наступления максимума напряжений. В самом деле, резкое изменение картины наблюдается лишь в начале (фиг. 84 и 85), дальше все явление протекает довольно однообразно.

Таким образом, подобное деформирование приходится и в этом случае объяснить особенностями фенолита.

Естественно предположить, что если бы фактор затухания был исключен, то максимальные напряжения, полученные Туци и Низида, имели бы большие значения.

Если сравнивать напряжения, возникающие при ударе деталей из различных материалов, то необходимо, конечно, учитывать не только их константы упругости, но и демпфирующие свойства. Осуществить подобное сравнение тем более трудно, что фактор затухания представляет некоторую функцию и не может быть определен постоянной величиной, как модуль упругости и др.

Решение вопроса о переходе от напряжений в прозрачной модели к напряжениям в реальной детали равноценно решению задачи об ударе применительно к обоим материалам.

Еще более трудной задачей является получение прозрачного материала, который обладал бы необходимой для метода полос чувствительностью, а вместе с тем по другим интересующим нас свойствам приближался бы к металлу.

Следует отметить еще то обстоятельство, что к результатам метода фотоупругости необходимо относиться с осторожностью даже при оценке их только с качественной стороны. Например, чем существеннее демпфирующие свойства прозрачного материала, тем меньше будет проявляться в общей картине удара собственные колебания.

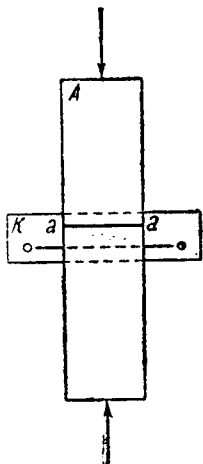
Полученные таким образом результаты не могут даже с качественной стороны характеризовать удар по стальному образцу. Значительное искажение характера явления могут внести и константы упругости прозрачного материала. Таким образом, свойства прозрачного материала определяют не только максимальные значения напряжений, возникающих при ударе, но и закон изменения напряжений, т. е. сам характер удара.

Могут обнаружиться такие соотношения между параметрами, определяющими удар, когда фактор затухания не будет иметь существенного значения. Возможно, что таким случаем окажется удар,

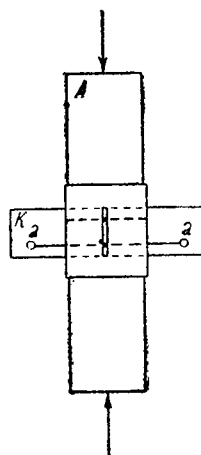
отвечающий теории Герца, т. е. случай с преобладанием местной деформации над распространяющейся в виде волн общей деформацией тела.

Методы, основанные на нагружении реальной детали

В связи с изложенным весьма интересными представляются предложения, основанные на принципе, при котором нагружению подвергается не прозрачная модель, а сама деталь с жестко встроенным

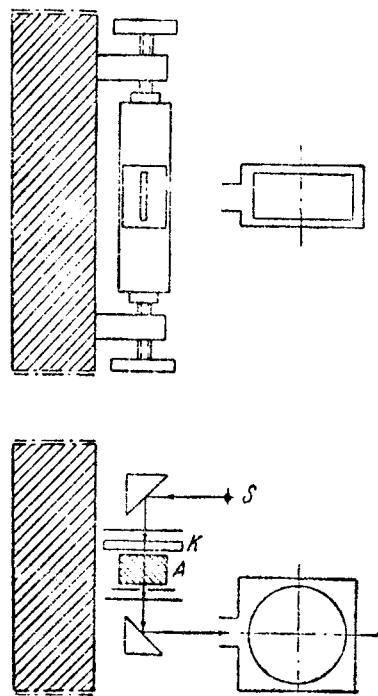


Фиг. 86. Черная полоса, наблюдаемая при нагружении стеклянной пластины.



Фиг. 87. Схема с экраном для наблюдения изучения динамических явлений.

в нее оптически чувствительным элементом. По напряжению, возникающему в этом элементе, и судят о напряжении (усилии, деформации) детали на данном ее участке. В этом случае все отмеченные ранее трудности будут в значительной мере обойдены. Подобный способ описан Тезаром в журнале „La Technique Aéronautique“ [56]. На фиг. 88 показана стеклянная пластина, прикрепленная винтами к детали, как это предлагает сделать Тезар. Схема Тезара исключает необходимость отсчета порядка полос от начала явления. Это достигается применением материала с низкой оптической чувствительностью (стекло) в соединении с компенсатором Бабине. В результате при нагружении пластины наблюдается не ряд полос, как это имело место в описанном выше методе, а лишь одна черная полоса, получающаяся благодаря тому, что к разности хода лучей, создаваемой в напряженной пластине, добавляется (путем введения компенсатора) некоторая переменная по величине и обратная по знаку разность хода. Поэтому если николи поляризационного



Фиг. 88. Схема Тезара для определения динамических напряжений, возникающих в реальной детали.

устройства установлены накрест, то в точках, в которых суммарная разность хода будет равна нулю, наблюдается полная темнота.

На фиг. 86 показана равномерно сжатая пластина A и помещенный позади нее компенсатор Бабине K , представляющий в простейшем случае две клинообразные кварцевые пластины. Положение черной линии $a-a$ по отношению к нулевой $0-0$ и определяет усилие, сжимающее пластину A . Численные значения могут быть получены на основании статической тарировки, соответственно тому, как при пользовании методом полос статически определялось значение градиента напряжения.

Если перед пластиной поместить экран с узкой щелью (фиг. 87), то данная система станет пригодной для изучения динамических явлений. В этом случае черная точка, видимая через щель экрана, будет перемещаться. Фотографируя ее на пленку ротационной камеры, можно без необходимости отсчитывать полосы, получить непосредственно закон изменения напряжений (деформаций) по времени. Для того чтобы осуществить работу измерительного устройства на напряжениях обоих знаков (сжатие — растяжение), необходимо с помощью винтов подвергнуть стеклянную пластину соответствующему предварительному нагружению.

Компенсатор Бабине прикрепляется к стеклянной пластине, что вполне осуществимо при его малом размере и весе.

На фиг. 88 дана схема экспериментального прибора Тезара. Пучок поляризованного света S отражается от посеребренной поверхности, проходит кристаллическую пластину, дающую отставание на $\frac{1}{4}$ волны (круговая поляризация), далее, пройдя через компенсатор K , стеклянную пластину A , узкую щель экрана и вторую пластину в $\frac{1}{4}$ волны, испытывает вторичное отражение и затем через николю-анализатор (не показан) проектируется на пленку ротационной камеры.

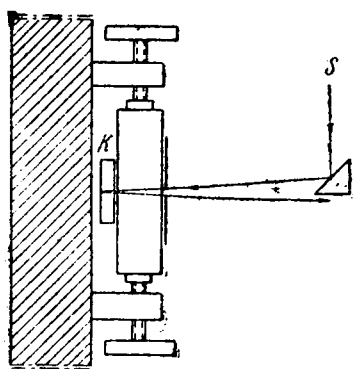
Тезар приводит также схему, основанную на применении односторонней поляризационной установки, т. е. установки, в которой все элементы схемы расположены по одну сторону от детали (фиг. 89).

В этом случае компенсатор Бабине K должен иметь со стороны, наиболее отдаленной от стеклянной пластины, посеребренную поверхность. Все остальные элементы этой схемы аналогичны элементам первой.

Описанное устройство представляет собой по существу базовый тензометр, основанный на методе фотоупругости. Достоинства его определяются, главным образом, ничтожно малой инерционностью и независимостью показаний от толчков и небольших перемещений.

В самом деле, на пленку фотографируется как перемещающаяся вдоль щели точка (линия $a-a$), так и точка отсчета (линия $0-0$). Следовательно, в известных пределах допустимо смещение всей системы относительно фотокамеры. На фиг. 90 показан примерный вид записи, которая должна в этом случае получиться.

По сравнению с креплением стеклянной пластины представляется более удобным и точным покрывать детали тонким слоем оптически чувствительного материала. В этом случае необходимо применение материала с высоким коэффициентом чувствительности (так как число полос при данном напряжении, как известно, определяется не только оптической чувствительностью материала, но и его толщиной),

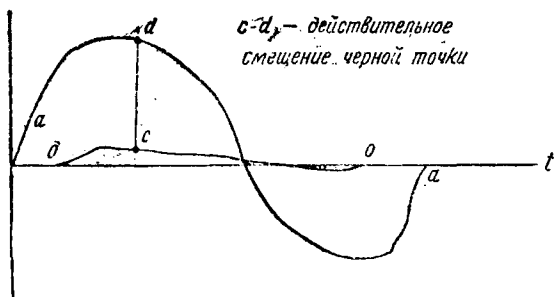


Фиг. 89. Односторонняя схема Тезара.

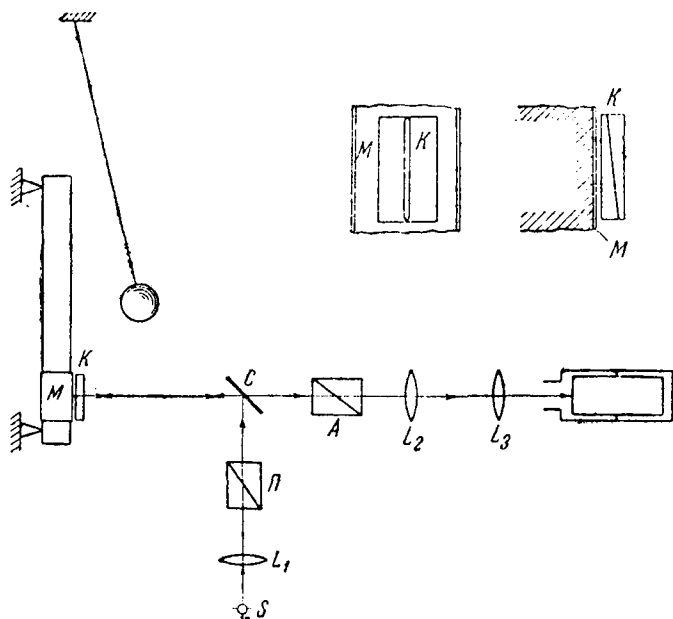
В лаборатории ВИСХОМ Н. И. Пригоровским был проведен ряд статических экспериментов, в которых применялось покрытие детали висхомлитом [57]. Масса висхомлита тонким слоем наносилась на деталь и затем вместе с ней подвергалась полимеризации. Прочность такого покрытия получалась весьма высокой.

Если в схеме поляризационной установки, примененной Н. И. Пригоровским, изменить расположение компенсатора Бабине и в соответствующих местах поместить экран с узкой щелью и ротационную камеру, то получится схема, пригодная для изучения динамических явлений.

Вместо того чтобы применить экран со щелью, гораздо проще тушью зачернить компенсатор, оставив в нужном направлении узкую щель. На фиг. 91 представлена подобная схема. Здесь S —источник



Фиг. 90. Характер записи при относительно смещении исследуемого объекта и фотокамеры.



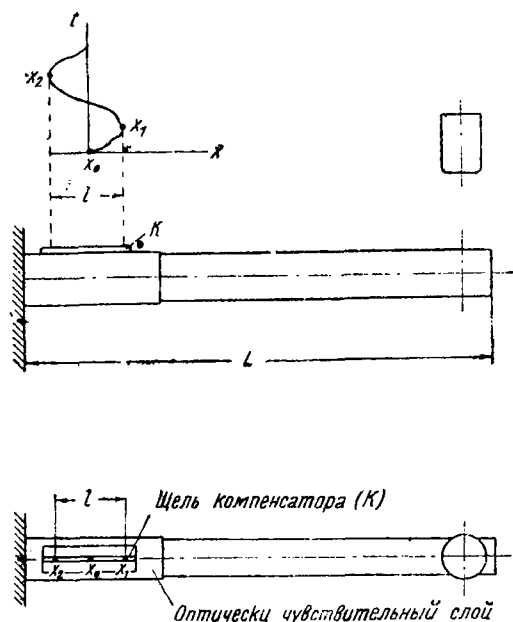
Фиг. 91. Схема для определения действительных динамических напряжений по напряжениям, возникающим в тонком слое оптически чувствительного материала, покрывающем деталь.

света, P — поляризатор, C — полупрозрачная платинированная пластина, от которой луч, частично отражаясь, проходит через щель компенсатора Бабине K и слой оптически чувствительного материала M . Далее луч отражается от зеркальной поверхности данного участка детали, проходит второй раз компенсатор, после чего, частично отражаясь, проходит пластину C и через анализатор A проектируется на пленку ротационной камеры. Линзы L_1 , L_2 и L_3 имеют вспомогательное значение.

Когда наблюдению подвергается участок детали, обладающий незначительным перемещением, как, например, участок балки, распо-

ложенный поблизости от места заделки, то компенсатор Бабине можно располагать не на детали, а независимо от нее, что упрощает проведение эксперимента.

Данный способ (и тем более первый) не дает возможности получить закон изменения напряжений в какой-либо точке, если даже изучаются напряжения при ударном сжатии или напряжения на контуре изгибаемой балки, как это имело место в опытах Туци и Низида.



Фиг. 92. Определение действительных напряжений на контуре консольной балки.

ствительным должен быть компенсатор, так как в этом случае данному изменению напряжений будет соответствовать меньшее перемещение черной точки. Однако, обращаясь к фиг. 92, мы можем видеть, что чем больше размер балки L , тем, вообще говоря, большим можно допустить величину перемещения черной точки. Таким образом, подбирая компенсатор, всегда можно получить желательное значение величины l . Необходимо заметить еще, что для получения надежных результатов желательно площадь покрытия детали делать достаточно большой, дабы исключить влияние местных напряжений, возникающих на краях покрытия. Толщина покрытия должна быть возможно меньшей, и во всяком случае не больше той, какую позволяет осуществить применяемый компенсатор.

Краткие выводы

1. Метод фотоупругости в обычном его виде (прозрачные модели) в исследовании ударных напряжений вряд ли сможет занять то большое место, которое он занимает в исследовании статических напряжений. Во всяком случае вследствие наличия ряда существенных трудностей его техническое значение представляется не очень большим.

Эксперименты, подобные блестящим экспериментам Туци и Низида, в связи с этим могут иметь, главным образом, физическое значение.

2. Гораздо большее техническое значение может иметь метод, основанный на наблюдении напряжений, возникающих в тонком слое оптически чувствительного материала, которым покрывается деталь или же на наблюдении напряжений, возникающих в жестко встроенной в деталь прозрачной пластине.

ЛИТЕРАТУРА

1. Saint-Venant. Добавления к переводу книги Клебша „Théorie de l'élasticité“ (§ 60 и 61).
2. Hertz. Von den Unstetigkeiten der Bewegung. Gesammelte Werke. Bd. I und II
3. Boussinesq. Application des Potentielles, 1885.
4. Darboux. Étude géométrique sur les percussions et le choc des corps. 1880.
5. Pöschl. Der Stoss. Handbuch der Physik, herausgegeben von Geiger und Schell. Bd. VIII.
6. Bergeron: а) Удары при остановках насосов. „La Technique Moderne“, 1935 март; б) Исследование гидравлических ударов в трубопроводах. Ibidem, 1936, № 2—3 с) Расчет деформаций и повышенный нагрузки при ударах. Ibidem, 1937, № 7; д) О падении массы на упругий стержень; „Comptes Rendus“, 1938, № 16—17.
7. Leclouр. Статьи в журнале „Revue Universelle des Mines“. 1938, № 8—9.
8. Тимошенко. Теория колебаний в инженерном деле.
9. Кирпичев. Беседы о механике.
10. Jannin. Comment tenir compte des chocs dans les calculs de résistance des matériaux.
11. Berger. Das Gesetz des Kraftverlaufes beim Stoss, 1925.
12. Линник. Удары и сжатие упругих тел, 1909.
13. Lennertz. Beitrag zur Frage der Wirkung eines Querstosses, „Ingenieur Archiv“, 1937.
14. Karras, Platten unter seitlichem Stoss, „Ingenieur Archiv“, 1938.
15. Tuzi and Nisida. а) Photographic and Kinematographic Study of Photoelasticity. Scientific Papers of the Institute of Physical and Chemical Research, Tokyo, 1928, vol. 9, № 149; б) Photoelastic Study of Stresses due to impact. Ibidem, 1935, vol. 26, № 566; с) On the impact of Beam, ibidem, 1938, october, № 826.
16. Жуковский. а) Sur la percussion des corps. 1878. Полное собрание сочинений, т. I; б) К вопросу о наибольшем ударе, 1878, там же; в) Об ударе абсолютно твердых тел, 1884, там же; 1885, там же.
17. Давиденков. а) Динамические испытания металлов; б) Проблема удара в металловедении, 1938.
18. Белаяев. Спротивление материалов, 1940.
19. Kuba. Druckwechsel und Stösse an Kolbenmaschinen.
20. Regnaud. Mémorial de l'Artillerie Française, 1939.
21. Поль. Введение в механику и акустику.
22. Hamburger. Untersuchungen über die Zeitdauer des Stosses elastischer zylindrischen Stäbe, 1885.
23. Seehase. Die experimentelle Ermittlung des Verlaufes der Stosskraft, 1915, Forschungsheft, 182.
24. Mintrop. Die Stossdauer beim Stoss einer Kugel gegen eine ebene Platte, Z. für Technische Physik, 1939, № 11.
25. Thouvenin. Application de la photoélasticité à l'étude des percussions, Comptes Rendus, 1935, № 18.
26. Boltzmann. Einige Experimente über den Stoss von Zylindern.
27. Dunn. Статья в „Journal of the Franklin Institute“, 1897.
28. Ramsauer. Experimentelle und theoretische Grundlagen des elastischen und mechanischen Stosses, Annalen der Physik, 1909.
29. Höninger. Ein Verfahren zur Ermittlung des Verlaufes der veränderlichen Stosskraft bei Stauchversuchen, 1910.
30. Mason and Rochester. Impact on beam, Journal of Applied Mechanics, 1936, vol. 3, № 2.
31. Ghosh. Application of the Hertz's theory of impact, Z. für angewandte Mathematik und Mechanik, 1934, Heft 2.
32. Deforest. The measurement of impact strains. Proceedings of the 5-th International Congress of applied Mechanics, 1938.
33. Fanning and Basset. Measurement of impact strains by a Carbon-strip extensometer, Journal of Applied Mechanics, 1940, march.
34. Arnold. Impact stresses in a freely supported beam. The Institution of mechanical Engineers, Proceedings, 1937, vol. 137.
35. Routh. Dynamic of a system of solid bodies.
36. Метелицин. Уравнения движения системы при ударе, Труды МИИТ, 1937.
37. Voigt. Annalen der Physik und Chemie, 1882.
38. Hausmanninger. Wiener Berichte, 1883.

39. Hopkinson. The effect of momentary stress in metals. Proceedings of the royal society of London, 1905, vol. 74.
 40. Sears. Proceedings of the philosophical society of Cambridge, 1908, vol. 14.
 41. Perot. Revue de metallurgie, 1904, p. 287.
 42. Moore. Proceedings of the American Society of Testing Materials, 1922.
 43. Гагарин. Приборы, дающие зависимость между усилием и деформацией во время удара, 1912.
 44. Голицын. Известия Российской Академии Наук, 1915.
 45. Welter. Z. für Metallkunde, 1924 u. 1925.
 46. Plank. VDI, 1912.
 47. Schwinning und Matthaes. Deutscher Verband für Materialprüfung, 1927, № 78.
 48. Spannungsverformungskurven beim Verdrehschlagversuch, Stahl und Eisen, 1940, № 32.
 49. Mac Adam and Clyne. The theory of Impact Testing. Proceedings ASTM, 1938, vol. 38, part 2, p. 112.
 50. Witney and Ashton. Resilience a Measure of Shock Resistance, 1939.
 51. New strain measurement method offers unusual possibilities. Steel, 1940, July.
 52. Gohlke. Messung der Eigenschwingungszahl piezoelektrischer Druckmessgeräte, VDI, 1940, September.
 53. Berg. Zur Frage der Beanspruchung beim Dauerschlagversuch. Forschungsheft, 331, 1930.
 54. Cattaneo. Sul contatto di due corpi elastici. Atti della Accademia Nazionale dei Lincei, 1938, vol. 27, Fasc. 7.
 55. Н. И. Пригоровский. Применение метода полос при поляризационно-оптическом исследовании напряжений, Вестник инженеров и техников, 1940, № 2.
 56. M. V. Tesar. Utilité pratique de la Photoélasticimétrie dans les constructions Aéronautiques, La technique aeronautique, 1934, № 139.
 57. Н. И. Пригоровский. Исследование напряжений в деталях с.-х. машин. Тсория, конструкции и производство сельскохозяйственных машин, т. V, 1910.
-

ДИНАМИЧЕСКИЕ НАГРУЗКИ НА ЗУБЬЯХ ПРЯМОЗУБЫХ КОЛЕС

1. ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на то, что применение зубчатых передач насчитывает сотни лет, до сих пор не создано достаточно обоснованных и проверенных на практике правил проектирования зубчатых колес. Наиболее неясным и неисследованным в области прочности и долговечности зубьев зубчатых колес является вопрос о величине и влиянии динамических нагрузок, возникающих при работе зубчатых передач вследствие неточностей их изготовления. Еще в прошлом столетии ведущие техники сознавали, что динамические нагрузки, возникающие при окружных скоростях порядка 5—10 м/сек, при нормальной в то время точности изготовления зубчатых колес, могут исчерпать всю сопротивляемость изгибу зубьев чугунных или стальных колес; на долю полезных нагрузок остается лишь небольшая часть тех усилий, которые зубья могут передавать при малых скоростях. По мере увеличения скоростей для повышения коэффициента использования материала оказалось необходимым значительно увеличить точность изготовления зубчатых передач.

Однако до последних лет зубчатые передачи рассчитывали по формулам, разработанным в прошлом столетии для низкокачественных материалов (чугун, углеродистая сталь обычного качества) и для низких точностей изготовления. Снижение допускаемой нагрузки с увеличением скорости производилось при помощи так называемого скоростного коэффициента, определявшегося обычно по формуле типа:

$$\varphi = \frac{a}{a + v},$$

где a — числовой коэффициент в пределах от 3 до 12, v — окружная скорость в м/сек.

Эта формула для определения скоростного коэффициента была составлена Бартом (Carl Barth) на основании таблицы допускаемых напряжений изгиба для чугунных и стальных зубчатых колес, разработанной Уокером в 1868 г. Нужно думать, что данные Уокера были основаны лишь на опыте применения необработанных чугунных колес.

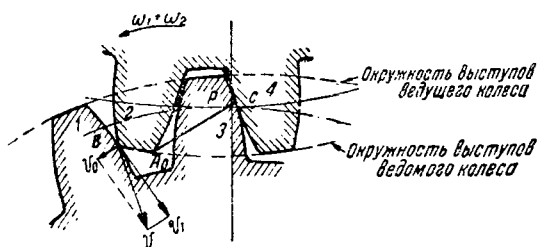
В 1911 г. Марксом и в 1915 г. Каттером в Станфордском университете впервые были проведены опыты по выявлению влияния ско-

рости на прочность и износ зубчатых колес, изготовленных с обычной точностью. Эти опыты, продолженные также в 1924 г., показали, что прочность зубьев весьма сильно зависит от их точности. В 1921 г. при Американском обществе инженеров-механиков был создан специальный исследовательский комитет для изучения вопросов прочности зубьев зубчатых передач. В результате деятельности этого комитета была спроектирована и изготовлена машина для испытания зубчатых колес на динамические нагрузки. В период между 1925 и 1929 гг. в Массачусетском технологическом институте на этой машине было произведено большое количество испытаний, которые показали, что даже при точном изготовлении прямозубых колес на зубьях возникают большие динамические нагрузки, возрастающие со скоростью в прямой пропорции и мало зависящие от приложенной извне полезной нагрузки. Вторым выводом находится в противоречии с приведенной выше формулой для скоростного коэффициента. В самом деле, если обозначить допускаемую нагрузку при скорости, близкой к нулю, через P_0 , а допускаемую нагрузку при скорости v через P , то

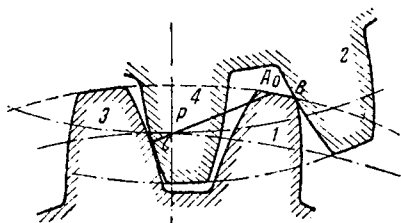
$$P = P_0 \varphi \text{ или } P = P_0 - P \cdot \frac{v}{a}.$$

Второй член в правой части последней формулы по смыслу означает динамическую нагрузку, которая зависит от допускаемой, т. е. от внешней приложенной нагрузки.

Бакингом, под руководством которого производились указанные опыты, разработан впоследствии формулу для определения динамической нагрузки. В работе автора „О расчете прямозубых колес по Бакингу“ (см. „Вестник металлопромышленности“, 1940, № 8—9) доказано, что формула Бакинга для определения динамической нагрузки на зубьях прямозубых колес выведена теоретическим путем на основании ряда допущений; приводящих, как правило, к чрезмерному преувеличению динамической нагрузки. В этой работе, при разборе теории Бакинга—Барта было установлено, что она не рассматривает важного случая удара прямых зубьев при переходе контакта с одной пары зубьев на другую, когда играет роль ошибка в основном шаге. Установлено также, что исправленная теория Бакинга—Барта достаточно точно (для целей расчета зубчатых колес) оценивает влияние ошибок в профиле. В настоящем исследовании¹ разработана теория удара прямых зубьев, вызываемого ошибками в основном шаге (ошибки в окружном шаге также сводятся к ошибкам в профиле). В этом случае могут возникнуть два вида удара зубьев: удар в начальной контактной точке — кромочный удар, когда основной шаг у ведомой пары зубьев, 2—4 (фиг. 1) больше, чем у ведущей 1—3, и удар в начале зацепления одной пары зубьев — срединный удар — в обратном случае (фиг. 2). Если разность основ-



Фиг. 1.



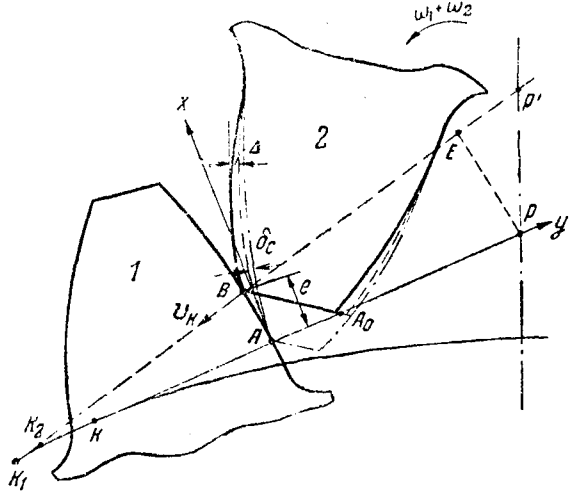
Фиг. 2.

¹ Проведенном на базе более ранних работ автора в ЦБР ЦНИИТМАШ.

ных шагов сопряженных зубчатых колес будет больше деформаций зубьев, то линии CA_0B на фиг. 1 и 2 будут линиями действительного зацепления.

2. СКОРОСТЬ КРОМОЧНОГО УДАРА

На фиг. 3 показан случай кромочного удара. В относительном движении ведомый зуб 2 по отношению к ведущему зубу 1 (как бы неподвижному) вращается против часовой стрелки с угловой скоростью $\omega_1 + \omega_2$, причем мгновенным центром вращения будет полюс зацепления P . В сравнении с показанным пунктиром теоретическим положением ведомого зуба действительное его положение определяется смещением, которое у вершины равняется суммарной ошибке в основном шаге Δ . Вследствие этой ошибки зуб 2 вступает в зацепление не в начальной контактной точке A_0 , лежащей на линии зацепления KP , а в точке B . Если в этот момент времени ведомый зуб перенести в теоретически правильное положение по отношению к ведущему зубу и в этом положении удлинить его и отклонить на величину деформации пары зубьев 3—4 (фиг. 1), которую обозначим через δ_c , то можно получить правильное зацепление в точке A этого воображаемого зуба, показанного на фигуре пунктиром с точкой. Скорость кромочного удара есть составляющая скорости движения точки B зуба 2 в нормальном к профилю зуба 1 направлении:



Фиг. 3.

Если в этот момент времени ведомый зуб перенести в теоретически правильное положение по отношению к ведущему зубу и в этом положении удлинить его и отклонить на величину деформации пары зубьев 3—4 (фиг. 1), которую обозначим через δ_c , то можно получить правильное зацепление в точке A этого воображаемого зуба, показанного на фигуре пунктиром с точкой. Скорость кромочного удара есть составляющая скорости движения точки B зуба 2 в нормальном к профилю зуба 1 направлении:

$$v_k = PE (\omega_1 \pm \omega_2).$$

Знак минус справедлив для внутреннего зацепления. Если в точке A восстановить перпендикуляр к линии зацепления и принять его за абсциссу, а линию зацепления за ординату, то прилегающие к точке A небольшие участки эвольвент можно заменить параболоми:

$$y_1 = \frac{x^2}{2\rho_{1A}} \quad \text{и} \quad y_2 = \frac{x^2}{2\rho_{2A}},$$

где ρ_{1A} и ρ_{2A} — радиусы кривизны эвольвент в точке A . Если положить $y_1 + y_2 = \Delta + \delta_c$, то $x \approx e$, или

$$e \approx \sqrt{2\rho_A \cdot (\Delta + \delta_c)},$$

где ρ_A — приведенный радиус кривизны профилей в точке A ,

$$\rho_A = \frac{\rho_{1A} \cdot \rho_{2A}}{\rho_{1A} \pm \rho_{2A}}.$$

Поскольку $\Delta + \delta_c$ мало по сравнению с размерами зуба, то и e невелико, поэтому можно заменить ρ_A приведенным радиусом кри-

визны профилей зубьев в начальной контактной точке ρ' , а также принять, при не очень малых значениях радиуса кривизны профиля зуба шестерни в начальной контактной точке ρ'_1 , что

$$PE \approx e \cdot \frac{PK_2}{AK_2} \approx e \cdot \frac{r_1 \sin \alpha}{\rho'_1},$$

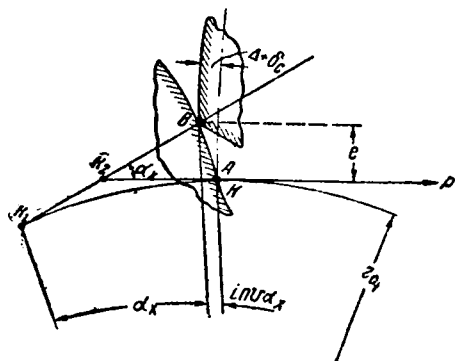
где r_1 — радиус начальной окружности ведущей шестерни, α — угол зацепления.

На основании этого имеем:

$$v_k \approx r_1 \sin \alpha (\omega_1 \pm \omega_2) \cdot \frac{\sqrt{2\rho' \cdot (\Delta + \delta_c)}}{\rho'_1},$$

или

$$v_k \approx \frac{100v(i \pm 1)}{i} \cdot \sqrt{\frac{2(\Delta + \delta_c) \cdot \sin \alpha}{A} \cdot \frac{\rho'_2}{\rho'_1}}, \quad (1)$$



Фиг. 4.

$\text{inv } \alpha_x \approx \frac{\Delta + \delta_c}{r_0}$. Вследствие малости угла α_x можно принять:

$$AK_2 \approx \frac{\alpha_x r_0}{2}, \quad e \approx AK_2 \alpha_x \quad \text{и} \quad PK_2 \approx r_1 \sin \alpha.$$

Следовательно,

$$PE = \alpha_x r_1 \sin \alpha.$$

Поэтому скорость кромочного удара не может быть больше чем:

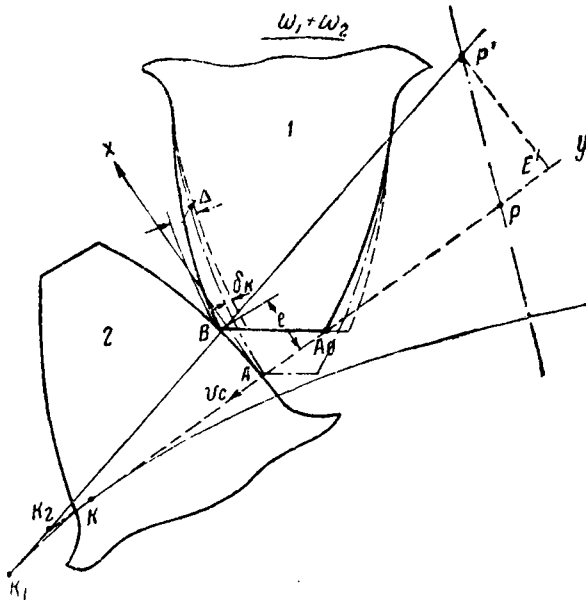
$$v_{k\max} = \frac{v(i \pm 1)}{i} \cdot \sin \alpha \quad \text{arc inv } \frac{\Delta + \delta_c}{r_{01}}, \quad (1a)$$

где $\text{arc inv } \frac{\Delta + \delta_c}{r_{01}}$ — дуга, инволюта которой равна $\frac{\Delta + \delta_c}{r_{01}}$.

3. СКОРОСТЬ СРЕДИННОГО УДАРА

На фиг. 5 изображен случай зацепления, когда основной шаг у ведущей пары зубьев больше, чем у ведомой. Ведущий зуб I в относительном движении будет вращаться по часовой стрелке с угловой скоростью $\omega_1 \pm \omega_2$, причем в последний момент зацепления вращение будет происходить вокруг полюса P' . Скорость удара зуба 2 с воображаемым удлиненным зубом (пунктир с точкой) в точке A будет такой же, что и скорость срединного удара последующей пары зубьев в точке C (фиг. 2). Следует учесть, что в данном случае де-

формация находящейся в зацеплении пары зубьев 1—2, обозначенная нами через δ_k , будет вычитаться из ошибки в шаге Δ . Повторяя пре-



Фиг. 5.

дыдущий вывод с той лишь разницей, что вместо PE подставляем $P'E'$ и вместо ρ' — приведенный радиус кривизны в конечной контактной точке ρ'' , получим:

$$v_c \approx r_2 \sin \alpha (\omega_1 \pm \omega_2) \cdot \frac{\sqrt{2\rho'' \cdot (\Delta - \delta_k)}}{\rho''_2},$$

или

$$v_c \approx 100v(i \pm 1) \sqrt{\frac{2(\Delta - \delta_k) \sin \alpha}{A} \cdot \frac{\rho''_1}{\rho''_2}}, \quad (16)$$

где ρ''_1 и ρ''_2 — радиусы кривизны профилей зубьев в конечной контактной точке.

Этот вывод основан на том допущении, что неударяющаяся пара зубьев 1—2 в течение ее кромочного контакта не разжимается до момента вступления в зацепление последующей (ударяющейся) пары зубьев.

Тем же путем, что и в предыдущем параграфе, нетрудно доказать, что скорость срединного удара не может быть больше чем

$$v_{c\max} = \frac{v(i \pm 1)}{i} \cdot \sin \alpha \operatorname{arc inv} \frac{\Delta - \delta_k}{r_{02}}. \quad (1в)$$

4. ПРИБЛИЖЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИЛЫ УДАРА

Обозначим приведенные к основным окружностям массы зубчатых колес, приходящиеся на 1 см их рабочей ширины, через m_1 и m_2 . Эластично связанные с зубчатыми колесами массы пока учитывать не будем. Кинетическая энергия относительного движения масс, связанных с ударяющейся парой зубьев 1—2 в некоторый момент времени полностью перейдет в потенциальную энергию их деформации (деформацию валов также пока не учитываем). Будем считать силу реакции профилей зубьев 1—2 состоящей в этот момент времени из

силы нормального давления $p_n = \frac{P}{b \cos \alpha}$ (где P — окружное усилие

и b — рабочая ширина зубчатых колес) и из силы удара $u = \frac{U}{b}$. По-

ка неударяющаяся пара зубьев не выйдет из зацепления, можно полагать (в первом приближении), что кинетическая энергия не превращается в энергию деформации зубьев, так как последняя за это время не изменяется и лишь происходит перераспределение деформаций пар зубьев 1—2 и 3—4 (фиг. 1 и 2), поскольку окружное усилие с неударяющейся пары зубьев передается на ударяющуюся. Поэтому в момент выхода неударяющейся пары зубьев из зацепления, когда δ_k или δ_c равны нулю, можно принять:

$$v_{ок} = 100v \cdot \frac{(i \pm 1)}{i} \cdot \sqrt{\frac{2\Delta \sin \alpha \rho'_2}{A\rho'_1}} \quad (1г)$$

и

$$v_{ос} = 100v \cdot (i \pm 1) \cdot \sqrt{\frac{2\Delta \sin \alpha \rho''_1}{A\rho''_2}} \quad (1д)$$

Скорость удара v_0 (т. е. $v_{ок}$ или $v_{ос}$) представляет собой разность составляющих v_1 и v_2 (в направлении скорости удара) от скоростей абсолютного движения точки B (или A) зубьев 1 и 2. Если ударяющаяся пара зубьев под действием силы p_n имеет деформацию δ_p , то, полагая деформацию пропорциональной силе, имеем:

$$\delta_p = \frac{p_n}{c},$$

где c — модуль упругости зубьев.

Дополнительная деформация от силы u будет $\delta_u = \frac{u}{c}$. Имея в виду, что работа внешней нагрузки на каждом зубчатом колесе равняется работе реакции профиля p_n , по закону сохранения энергии получаем:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)(v')^2}{2} = \frac{u \delta_u}{2} = \frac{u^2}{2c},$$

где v' — составляющая скорости обоих зубьев в точке B (A) в нормальном к профилю зуба 1 направлении в момент максимального сжатия зубьев.

По закону сохранения количества движения:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v'.$$

Из последних двух уравнений, имея в виду, что $v_1 - v_2 = v_0$, получаем:

$$u = v_0 \sqrt{ms}, \quad (2)$$

где m — удельная эффективная масса зубчатых колес,

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (2а)$$

Участие в зацеплении в первый момент удара неударяющейся пары зубьев, а также упругость валов ослабляет несколько силу

удара. Учтем это путем введения в формулу (2) коэффициента ослабления силы удара $\psi (\psi < 1)$; тогда

$$u = \psi v_0 \sqrt{mc}. \quad (26)$$

Поскольку коэффициенты ψ для кромочного и срединного удара можно считать в среднем одинаковыми, имеем:

$$\frac{u_k}{u_c} = \frac{v_{ок}}{v_{ос}} \sqrt{\frac{c_k}{c_c}},$$

где c_k и c_c — модули упругости зубьев при кромочном и срединном контакте.

Из сравнения формул (1г) и (1д) видно, что для редуцированных передач $v_{ок}$ всегда больше $v_{ос}$. С другой стороны, нетрудно видеть, сравнивая формулы (1а) и (1д), что

$$\left(\frac{v_{ок}}{v_{ос}}\right)_{\max} < \operatorname{arctg} \operatorname{inv} \frac{\Delta}{r_0} \sqrt{\frac{A \sin \alpha \cdot \rho''_2}{2\Delta i^2 \cdot \rho''_1}}.$$

В табл. 1 приведены значения $\frac{v_{ок}}{v_{ос}}$ для некоторых частных случаев, при некорректированном 20-градусном зацеплении.

Таблица 1

При правильном профилировании зацепления можно полагать, что приведенный радиус кривизны в начальной контактной точке ρ' не будет выбран слишком малым по сравнению с приведенным радиусом кривизны в полюсе зацепления — ρ . Принимаем, что во всяком случае $\frac{\rho}{\rho'} \leq 3$. Обозначим радиусы	$z_{ш}$	i	$\frac{v_{ок}}{v_{ос}}$
	20	2	1.441
	20	4	1.685
	20	8	1.864
	30	2	1.157
	30	4	1.216
	30	8	1.248

кривизны профилей зубьев в полюсе зацепления через ρ_1 и ρ_2 . Обозначим, далее, расстояние от полюса до начальной контактной точки через l_1 и до конечной контактной точки через l_2 ; тогда

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{1}{\left(1 - \frac{l_1}{\rho_1}\right)\left(1 + \frac{l_1}{\rho_2}\right)}$$

и

$$\frac{v_{ок}}{v_{ос}} = \frac{1}{i} \sqrt{\frac{\rho'_2 \rho''_2}{\rho'_1 \rho''_1}} = \frac{1}{i} \sqrt{\frac{(\rho_2 - l_2)(\rho_2 + l_1)}{(\rho_1 + l_2)(\rho_1 - l_1)}}.$$

Если принять $\frac{\rho}{\rho'} \leq 3$, то первое уравнение дает следующие значения $\frac{l_1}{\rho_1}$ для различных передаточных чисел:

$i \dots$	1	1.5	2	3	5	10
$\frac{l_1}{\rho_1} \leq$	0.82	0.78	0.76	0.73	0.71	0.68

Принимая $l_1 \approx l_2$ (для некорректированного зацепления) и подставляя полученные значения $\frac{l_1}{\rho_1}$ во второе уравнение, получим:

$i \dots$	1	1.5	2	3	5	10
$\frac{v_{ок}}{v_{ос}} \leq 1$	1.37	1.22	1.42	1.41	1.4	

При корригированном зацеплении, если коэффициент сдвига шестерни положителен, отношение $\frac{v_{ок}}{v_{ос}}$ будет еще меньшим. Для повышающих (число оборотов) передач $\frac{v_{ок}}{v_{ос}} < 1$.

В результате специального исследования деформации зубьев мы получили: $c_k = 125\,000$ кг/см² и $c_c = 165\,000$ кг/см². При этих значениях модулей упругости зубьев $\frac{u_k}{u_c} \leq 1.24$. Если же учесть, что при кромочном контакте кромка у вершины зуба будет деформироваться значительно больше, чем цилиндрическая поверхность с радиусом, равным радиусу кривизны профиля зуба у его вершины, то отношение $\frac{u_k}{u_c}$ будет еще меньшим.

Практика и эксперименты показывают, что разрушение рабочих поверхностей зубьев (в виде питтинга) почти всегда возникает вблизи полюса зацепления. Поэтому при расчете зубьев на поверхностные напряжения следует учитывать именно силу срединного удара. Поскольку предыдущим анализом выявлено, что сила кромочного удара если и превышает силу срединного удара, то не на много, расчет зубьев на изгиб также можно вести по силе срединного удара. Такую установку можно оправдать и ссылкой на американские опыты (Бакингема), из которых можно увидеть, что те шестерни, у которых, судя по указаниям о знаках ошибок в шаге, можно ожидать возникновения срединного удара, показали лишь немного меньшие динамические нагрузки, чем шестерни, у которых имел место кромочный удар.

Исходя из этих соображений, в дальнейшем будем рассматривать срединный удар как основной вид удара, по которому и следует рассчитывать зубчатые передачи.

Износ кромки как при кромочном, так и при срединном ударе приводит к некоторому снижению силы удара. Учитывать это обстоятельство при расчетах нельзя, так как износ а может и не быть. В подавляющем большинстве случаев на практике износ зубьев ничтожен.

5. УТОЧНЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИЛЫ УДАРА

Рассмотрим более подробно процесс срединного удара в целях определения коэффициента ψ . Рассматриваем, как и раньше, 1 см ширины зубчатых колес. Промежуток времени t_1 , в течение которого неударяющаяся пара зубьев 1—2 еще находится в зацеплении, назовем первым периодом удара. Если бы не было удара зубьев в точке С (фиг. 2), то профиль ведущего зуба 3 в этой точке имел бы нормальную скорость v_0 по отношению к ведомому зубу 4, которая за промежуток времени t_1 изменилась бы от v_c (формула 1б) до $v_{ос}$ (формула 1д). Поскольку это изменение обычно невелико (рассматриваем пока случай, когда Δ значительно больше δ , то можно в среднем принять:

$$v_0 = 100v(i \pm 1) \sqrt{\frac{2\left(\Delta - \frac{\delta_k}{2}\right) \sin \alpha}{A}} \cdot \frac{\rho''_1}{\rho''_2} \quad (3)$$

Относительный путь профилей зубьев 3 и 4 за некоторое время t ($t < t_1$) при отсутствии удара был бы таким образом равен $v_0 t$. В действительности этот путь будет меньшим вследствие удара и

будет равен деформации ударяющейся пары зубьев s за то же время t (считая от момента начала удара). Поэтому деформация предыдущей пары зубьев $1-2$ уменьшится на величину, равную $v_0 t - s$, и сила, соответствующая этой деформации, передается на ударяющуюся пару зубьев, т. е., если основываться на теории удара Герца, дифференциальное уравнение движения в течение первого периода удара будет:

$$m\ddot{s} - c_k(v_0 t - s) + c_c s = 0, \quad (4)$$

где c_k и c_c — модули упругости зубьев при кромочном и срединном контакте.

При $t = t_1$, $v_0 t_1 - s_1 = \delta_k$ (фиг. 6), и вся удельная внешняя нагрузка p_n передается на ударяющуюся пару зубьев. Поэтому при $t > t_1$ дифференциальное уравнение удара принимает следующий вид:

$$m\ddot{s} - p_n + c_c s = 0. \quad (5)$$

Имея в виду, что

$$s_{t=0} = 0 \text{ и } \dot{s}_{t=0} = v_0,$$

нетрудно получить следующее решение уравнения (4):

$$s = \frac{v_0 c_c}{2c} \cdot \sqrt{\frac{m}{2c}} \sin \sqrt{\frac{2c}{m}} t + \frac{c_k}{2c} v_0 t, \quad (6)$$

где $2c = c_c + c_k$.

Решением дифференциального уравнения (5) будет:

$$s = C_I \sin \sqrt{\frac{c_c}{m}} t + C_{II} \cos \sqrt{\frac{c_c}{m}} t + \frac{p_n}{c_c},$$

или

$$s = \sqrt{C_I^2 + C_{II}^2} \sin \left(\sqrt{\frac{c_c}{m}} t + \arctg \frac{C_{II}}{C_I} \right) + \delta_c. \quad (7)$$

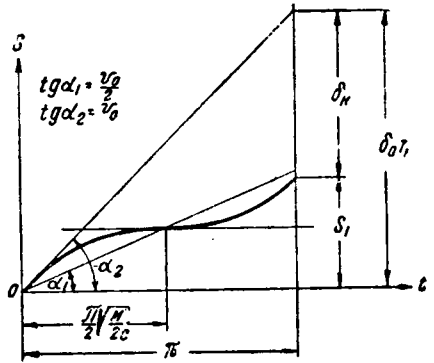
Силу, соответствующую максимальному значению деформации, дополнительной по отношению к δ_c , мы условились называть силой удара u . Таким образом,

$$u = (s_{\max} - \delta_c) c_c = c_c \sqrt{C_I^2 + C_{II}^2}. \quad (8)$$

Произвольные постоянные C_I и C_{II} определяются из следующих условий: $s_{t=t_1} = s_1$ и $\dot{s}_{t=t_1} = \dot{s}_1$, где s_1 и \dot{s}_1 — значения s и \dot{s} , получаемые из уравнения (7) при $t = t_1$. Таким образом:

$$s_1 = \sqrt{C_I^2 + C_{II}^2} \sin \left(\sqrt{\frac{c_c}{m}} t_1 + \arctg \frac{C_{II}}{C_I} \right) + \delta_c$$

$$\dot{s}_1 = \sqrt{C_I^2 + C_{II}^2} \sqrt{\frac{c_c}{m}} \cos \left(\sqrt{\frac{c_c}{m}} t_1 + \arctg \frac{C_{II}}{C_I} \right).$$



Фиг. 6.

Отсюда

$$\sqrt{C_I^2 + C_{II}^2} = \sqrt{(s_1 - \delta_c)^2 + \dot{s}_1^2 \cdot \frac{m}{c_c}}. \quad (8a)$$

Заметим здесь, что если значения v_0, m, c_c и c_k таковы, что $s_{t=t_1} = 0$, то, несмотря на наличие ошибки в шаге, сила удара также получится равной нулю, так как $\sqrt{C_I^2 + C_{II}^2} = 0$.

Если обозначить коэффициент ослабления силы удара, определенный пока без учета упругости валов, через ψ_1 , то согласно формулам (2б), (8) и (8a) имеем:

$$\psi_1 = \frac{u}{v_{oc} \sqrt{m c_c}} = \frac{\sqrt{(s_1 - \delta_c)^2 \frac{c_c}{m} + \dot{s}_1^2}}{v_{oc}}.$$

Подставляя в эту формулу значения s_1 и \dot{s}_1 , а именно

$$s_1 = v_0 t_1 - \delta_k$$

и

$$\dot{s}_1 = \frac{v_0 c_c}{2c} \cos \sqrt{\frac{2c}{m}} t_1 + \frac{c_k v_0}{2c},$$

а также, имея в виду формулы (1д) и (3), получаем:

$$\psi = \sqrt{\left[\left(t_1 - \frac{\delta_k + \delta_c}{v_0} \right)^2 \frac{c_c}{m} + \left(\frac{c_c}{2c} \cos \sqrt{\frac{2c}{m}} t_1 + \frac{c_k}{2c} \right)^2 \right] \cdot \left(1 - \frac{\delta_k}{2\Delta} \right)}. \quad (9)$$

Подставляя $s_{t=t_1} = s_1 = v_0 t_1 - \delta_k$ в уравнение (6), получаем уравнение для определения t_1 :

$$\frac{c_c}{c} T_1 - \sin T_1 = \frac{2\delta_k c}{v_0 c_c} \sqrt{\frac{2c}{m}}, \quad (10)$$

где $T_1 = \sqrt{\frac{2c}{m}} t_1$.

Отсюда T_1 находится по методу последовательных приближений. Максимальное значение ψ_1 будет при $\cos \sqrt{\frac{2c}{m}} t_1 = \cos T_1 = 1$, т. е., когда $\sin T_1 = 0$. В этом случае, согласно формуле (10),

$$T_1 = \frac{2\delta_k}{v_0} \sqrt{\frac{2c}{m}} \frac{c}{c_c}$$

и

$$t_1 = \frac{2\delta_k}{v_0} \cdot \frac{c}{c_c} = \frac{\delta_k + \delta_c}{v_0}.$$

Следовательно, при $c_k = 125\,000$ и $c_c = 165\,000$ кг/см²,

$$\psi_{1\max} = \left(\frac{c_c}{2c} + \frac{c_k}{2c} \right) \sqrt{1 - \frac{\delta_k}{2\Delta}} = \sqrt{1 - \frac{\delta_k}{2\Delta}},$$

что можно было написать и сразу из рассмотрения формул (1д) и (3).

Если в среднем принять $\frac{\delta_k}{2\Delta} = 0.25$, то $\psi_{1\max} = 0.866$.

Конкретные расчеты по формулам (9) и (10) показывают, что фактическое значение коэффициента ψ_1 изменяется в пределах от 0 до

$\psi_{1\max}$, т. е. иногда при таком подробном расчете могут получиться и весьма малые значения ψ_1 . Однако из этого нельзя сделать вывод, что фактическая величина силы удара будет малой, так как небольшое изменение параметров, от которых зависит ψ_1 , например Δ или m , с чем всегда следует считаться, может повлечь за собой значительное увеличение ψ_1 . Поэтому расчет следует производить по приближенной формуле (26); правда, при этом в среднем можно ориентироваться не на максимальное значение ψ_1 , а на несколько меньшее, например $\psi_1 = 0.6$ (см. § 10).

В табл. 2 приведены расчеты коэффициента ψ_1 в некоторых конкретных случаях.

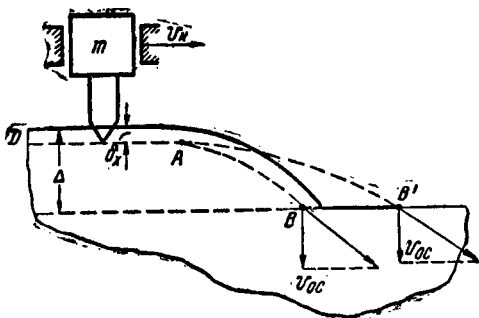
Таблица 2

i	1	1	5	5
Модуль	2	10	2	10
n_1	400	400	1000	1000
d_1	5	25	5	25
m	0,00450	0,112	0,00866	0,216
$\sqrt{\frac{2c}{m}}$	8028	1606	5789	1158
v	1,05	5,24	2,62	13,1
ρ	0,855	4,27	1,42	7,12
P_n	75,7	378	126	630
δ_k в микронах	6,05	30,3	10,1	50,4
δ_c в микронах	4,58	22,9	7,64	38,2
ρ''_2	0,285	0,285	2,85	2,85
ρ''_1	5,38	10,4	7,20	12,0
v_0	5,38	10,4	7,20	12,0
$\frac{2\delta_{kc}}{v_0 c_s} \sqrt{\frac{2c}{m}}$	1,59	0,82	1,43	0,86
T_1	1,00	0,73	0,99	0,76
t_1	0,000125	0,00046	0,00017	0,00065
ψ_1	0,431	0,363	0,352	0,297

Во всех случаях расчета принято: $z_1 = 25$, $\Delta = 50 \mu$, $\alpha = 20^\circ$, коэффициент высоты зуба $f = 1$, $c_k = 125\,000$, $c_c = 165\,000$. Внешняя нагрузка P_n определена исходя из допускаемого напряжения сдвига $R_s = 2000$ кг/см² (см. § 11).

Как уже указывалось в § 3, вывод формулы для скорости удара основан на том предположении, что неударяющаяся пара зубьев

1—2 до первого момента удара пары зубьев 3—4 не разжимается. Рассмотрим упрощенную схему срединного удара, показанную на фиг. 7. Удельная эффективная масса зубчатых колес m в относительном движении зубьев как бы падает на участке AB . В точке B происходит удар, соответствующий удару зубьев 3—4 в момент полной ликвидации зазора между ними. Зависимость между скоростью этого удара, скоростью падения и высотой падения $\Delta = \delta_k$, выраженная формулой (16), показывает, что линия AB , соответствующая процессу сближения зубьев 3 и 4 при кромочном контакте зубьев 1 и 2, является параболой.



Фиг. 7.

Если окружная скорость зубчатых колес велика, то возможно возникновение несколько иного процесса удара, а именно: внешняя сила не сможет в некоторых случаях преодолеть инерцию зубчатых

колес настолько, чтобы в течение кромочного контакта зубья 1—2 не разжимались. Если же зубья 1—2 частично или полностью разжмутся, то это значит, что удельная эффективная масса m (фиг. 7), двигаясь по некоторой кривой AB' , будет испытывать частичное или полное свободное падение с высоты, равной зазору между зубьями 3 и 4: $k = \Delta - \delta_k$. Сила удара, возникающая при ликвидации этого зазора под действием внешней нагрузки (см. работу автора „О методе расчета прямозубых колес по Бакингему“) будет при $u > p_n$:

$$u = p_n \sqrt{1 + \frac{2k}{\delta_c}} \approx p_n \sqrt{2 \frac{\Delta}{\delta_c} - 1};$$

при $u < p_n$ (когда зазор отрицателен):

$$u = p_n \left(1 + \frac{k}{\delta_c} \right) \approx p_n \frac{\Delta}{\delta_c} = c_c \Delta.$$

При проектировании зубчатых колес в большинстве случаев не допустимо ориентироваться на коэффициент использования материала

$\frac{p_n - u}{p_n} < 0.5$; такое требование при расчете нетрудно обычно вы-

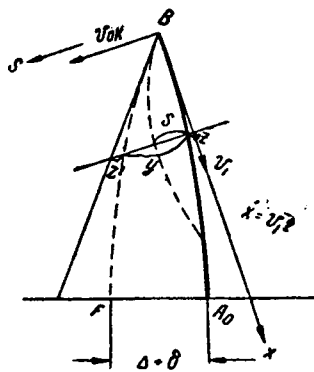
держать. Это говорит за то, что при $\Delta > \delta_c$ сколько-нибудь значительного разжатия зубьев 1—2 в процессе их кромочного контакта не происходит и, следовательно, скорость удара можно определять по использованным ранее формулам (1б), (1д) и (3).

Вывод формулы (3) был основан на предположении, что Δ значительно больше δ_k . У цементованных колес автомобильных и самолетных передач обычно наблюдается обратная картина, а именно $\delta_k > \Delta$. В этом случае расчет по формуле (2б) может привести к преувеличенным значениям u . Если $\Delta = \delta_c$, то, поскольку даже при очень большой окружной скорости сила удара не может быть больше $c_c \Delta$, следует принимать $u = c_c \Delta$, если при использовании формул (1д) и (2б) получается, что $u > c_c \Delta$.

6. УТОЧНЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИЛЫ КРОМОЧНОГО УДАРА

Построим в точке B (фиг. 3 и 8) систему декартовых координат так, чтобы ось s перемещений вершины зуба ведомого колеса в направлении скорости удара v_0 пошла по нормали к профильной линии зуба ведущего колеса в точке B . В направлении, перпендикулярном к оси s , будем откладывать путь x точки контакта по профилю ведущего зуба. A_0 — начальная контактная точка. Если бы в точке B не было удара зубьев, т. е. профиль BA_0 ведущего зуба отсутствовал бы, то линия BF представила бы собой траекторию вершины зуба ведомого колеса. Так как в действительности эта траектория идет по линии S , то предыдущая пара зубьев в некоторый момент времени t разожмется на величину $(y + z - s)$, и часть внешней нагрузки на зубья, соответствующая этому разжатию, передастся на ударяющуюся пару зубьев. На основании этих соображений дифференциальное уравнение кромочного удара в течение первого периода удара, т. е. пока ударяющаяся пара зубьев еще находится в зацеплении, будет:

$$m\ddot{s} - c_c \cdot (y + z - s) + c_k (s - z). \quad (11)$$



Фиг. 8.

Часть удельной внешней нагрузки p_n на ударяющуюся пару зубьев представлена в уравнении (11) вторым членом. Третий член уравнения представляет силу давления ударяющейся пары зубьев. На самом деле эти силы не параллельны оси s , а нормальны к профильной линии зуба в данной точке, но так как угол между осью s и теоретической линией зацепления обычно невелик, то погрешность от этого весьма мала.

При $t \geq t_1$, когда $y + z - s \geq \delta_c$, вся удельная внешняя нагрузка p_n передается на ударяющуюся пару зубьев. Поэтому при $t \geq t_1$ дифференциальное уравнение удара принимает следующий вид:

$$m\ddot{s} - p_n + c_k(s - z) = 0. \quad (12)$$

Воображаемую траекторию A_0F вершины зуба ведомого колеса приближенно можно считать дугой окружности, описанной из полюса P , как из мгновенного центра вращения. В свою очередь, заменяя эту дугу, а также участок эвольвенты BA_0 параболами, мы можем написать (фиг. 3):

$$z \approx \frac{x^2}{2KA_0} \text{ и } z' \approx \frac{x^2}{2PF} \approx \frac{x^2}{2PA_0}.$$

Вывод строим пока исходя из предположения, что Δ значительно больше δ_c . Поскольку касательная к траектории вершины зуба ведомого колеса в точке B может быть выражена уравнением $s = v_0 t$, то из фиг. 8 нетрудно видеть, что $y = v_0 t - z - z'$. Полагая, что скорость перемещения точки контакта в направлении оси x на участке BA_0 можно считать постоянной и равной $v_1 \approx PA_0 (\omega_1 + \omega_2)$, мы можем представить уравнение (11) в следующем виде:

$$\ddot{s} + \frac{2c}{m} s = \frac{2ckv_1^2}{m} t^2 + \frac{c}{m} v_{ок} t, \quad (11a)$$

где

$$k = \frac{1}{4c} \left(\frac{c_k}{KA_0} - \frac{c_c}{PA_0} \right).$$

Начальными условиями для определения произвольных постоянных дифференциального уравнения (11a) будут:

$$s_{t=0} = 0 \text{ и } \dot{s}_{t=0} = v_0.$$

Общий интеграл дифференциального уравнения (11a):

$$s = \frac{v_0 c_k}{2c} \sqrt{\frac{m}{2c}} \sin \sqrt{\frac{2c}{m}} t + \frac{kmv_1^2}{c} \cos \sqrt{\frac{2c}{m}} t + kv_1^2 t^2 + \frac{v_0 c_c}{2c} t - \frac{kmv_1^2}{c}. \quad (13)$$

Деформацию зубьев $s_d = s - z$ можно определить из следующего уравнения с сокращенно выраженными коэффициентами:

$$s_d = k_1 \sin T + k_2 \cos T - \frac{k_4}{k_2^2} T^2 + k_5 T - k_3, \quad (14)$$

где

$$T = tk_2; \quad k_1 = \frac{v_0 c_k}{2c} \sqrt{\frac{m}{2c}}; \quad k_2 = \sqrt{\frac{2c}{m}}; \quad k_3 = \frac{kmv_1^2}{c};$$

$$k_4 = k_0 v_1^2; \quad k_0 = \frac{1}{2KA_0} - k; \quad k_5 = \frac{v_0 c_c}{2c} \sqrt{\frac{m}{2c}} = \frac{k_1 c_c}{c_k}.$$

Уравнение (12) можно представить в виде:

$$\dot{s} + \frac{c_k}{m} s = \frac{c_k v_1^2 (k + k_0)}{m} t^2 + \frac{p_n}{m}. \quad (12a)$$

Общий интеграл уравнения (12a):

$$s = C_I \sin \sqrt{\frac{c_k}{m}} t + C_{II} \cos \sqrt{\frac{c_k}{m}} t + (k + k_0) v_1^2 \cdot \left(t^2 - \frac{2m}{c_k} \right) + \delta_c. \quad (15)$$

В этом уравнении C_I и C_{II} произвольные постоянные, определяющиеся из начальных условий. Так как линия деформации зубьев во втором периоде удара, т. е. когда $t > t_1$, является продолжением линии деформации зубьев первого периода удара и имеет с ней при $t = t_1$ общую касательную, то этим обстоятельством и следует воспользоваться для определения произвольных постоянных C_I и C_{II} . Скорость изменения деформации в течение первого периода удара:

$$\dot{s}_d = k_1 k_2 \cos T + k_3 k_2 \sin T - \frac{2k_4}{k_2} T + k_5 k_2. \quad (16)$$

Значения y , z , s , и s_d при $t = t_1$ обозначим через y_1 , z_1 , s_1 и s_{d1} . Из уравнений $y_1 + z_1 - s_1 = \delta_c$ и $s_{d1} = s_1 - z_1$ получаем:

$$s_{d1} = \frac{v_0}{k_2} T_1 - \left(\frac{1}{2KA_0} + \frac{1}{2PA_0} \right) \frac{v_1}{k_2^2} T_1^2 - \delta_c.$$

С другой стороны, из уравнения (14):

$$s_{d1} = k_1 \sin T_1 + k_3 \cos T_1 - \frac{k_4}{k_2^2} T_1^2 + k_5 \cdot T_1 - k_3.$$

Приравняв друг другу правые части этих уравнений, получаем:

$$k_6 T_1 - k_7 T_1^2 - k_1 \sin T_1 - k_3 \cos T_1 + k_8 = 0, \quad (17)$$

$$\text{где } k_6 = \frac{v_0}{2} - k_5, \quad k_7 = \frac{v_1^2}{k_2^2} \left(\frac{1}{2PA_0} + k \right) \text{ и } k_8 = k_3 - \delta_c.$$

Уравнение (17) трансцендентно, и его решение возможно лишь в конкретных случаях либо путем применения метода последовательных приближений, либо номографически. По определении в данном конкретном случае T_1 , подставляем найденные значения в уравнения (14) и (16) и определяем s_d и s_{d1} . Отыскивать максимальное значение деформации зубьев в течение первого периода удара не требуется, так как заранее можно сказать, что максимальная деформация зубьев во втором периоде удара будет большей, чем в первом. В самом деле, при переходе из первого периода удара во второй, т. е. при выходе из зацепления предыдущей пары зубьев, та же энергия колебаний, что и раньше, будет изменять деформацию одной пары зубьев вместо двух.

Рассмотрим теперь второй период удара.

$$s_d = s - z = C_I \sin \sqrt{\frac{c_k}{m}} t + C_{II} \cos \sqrt{\frac{c_k}{m}} t + k_9 =$$

$$= \sqrt{C_I^2 + C_{II}^2} \sin \left(\sqrt{\frac{c_k}{m}} t + \arctg \frac{C_{II}}{C_I} \right) + k_0, \quad (18)$$

$$\text{где } k_0 = \delta_k - (k + k_0) v_1^2 \frac{2m}{c_k}.$$

Уравнение (18) аналогично уравнению (7), и, не повторяя предыдущих выводов, по аналогии можем написать:

$$u = c_k \sqrt{C_I^2 + C_{II}^2} + k_{10} = \sqrt{(s_{д1} - k_0)^2 + \dot{s}_{д1}^2 \frac{m}{c_k}} + k_{10}, \quad (19)$$

где $k_{10} = k_0 - \delta_k$.

Расчеты по этому методу значений $\psi_1 = \frac{u}{v_{ок} \sqrt{mc_c}}$ для различных конкретных случаев показали, что ψ_1 не превышает 0.6—0.8.

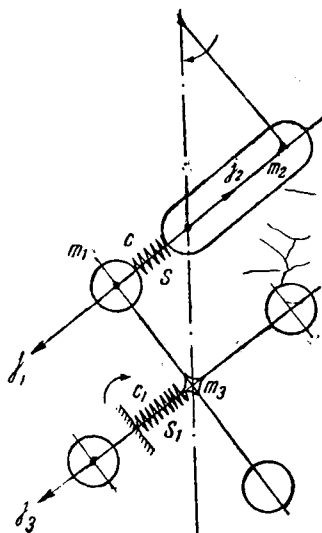
При очень больших скоростях деформация зубьев пойдет близко к линии BF , и сила удара в крайнем случае будет равной Δc_k . Следовательно, и в данном случае можно считать действительными ограничения в величине силы удара, приведенные в конце предыдущего параграфа.

7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИЛЫ УДАРА ЗУБЬЕВ С УЧЕТОМ УПРУГОСТИ ВАЛА ШЕСТЕРНИ

Схема удара показана на фиг. 9. Деформацию вала колеса не учитываем, так как масса шестерни обычно значительно меньше массы колеса и все относительные перемещения происходят в основном за счет массы шестерни (это допущение идет в запас надежности). Пусть m_1 и m_2 — массы шестерни и колеса, приведенные к основному окружностям шестерни и колеса, и m_3 — масса эластично связанной с шестерней детали, приведенная к основной окружности шестерни.

За положительное направление деформаций, сил и ускорений принимаем направления перемещений масс m_1 и m_3 , происходящих за счет деформаций в первый момент удара. Применяя принцип Даламбера, составляем уравнения равновесия для каждой из трех масс:

$$cs = m_2 j_2; \quad cs - c_1 s_1 = m_3 j_3; \quad j_3 = s_1.$$



Фиг. 9.

При положительном ускорении j_3 центра шестерни должно возникать соответствующее положительное ускорение массы m_1 . Следовательно, $cs = m_1 (j_1 + j_3)$.

Так как $j_3 = \dot{s}_1$ и $j_1 - j_2 = \ddot{s}$, то

$$\ddot{s} = -\frac{c}{m_1} s - \dot{s}_1 - \frac{c}{m_2} s, \text{ или}$$

$$\ddot{s} + \dot{s}_1 + \frac{c}{m} s = 0, \quad (20)$$

где

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{1}{m}.$$

Далее,

$$\ddot{s}_1 = \frac{c}{m_3} s - \frac{c_1}{m_3} s_1 \text{ или}$$

$$\ddot{s}_1 + \frac{c_1}{m_3} s_1 - \frac{c}{m_3} s = 0. \quad (21)$$

Из уравнения (20):

$$\ddot{s} = \frac{m_3}{c} \ddot{s}_1 + \frac{c_1}{c} \dot{s}_1.$$

Подставим это значение \ddot{s} в уравнение (21), тогда:

$$\frac{m_3}{c} \ddot{s}_1 + \frac{c_1}{c} \dot{s}_1 + \ddot{s}_1 + \frac{m_3}{m} \ddot{s}_1 + \frac{c_1}{m} s_1 = 0,$$

или

$$\ddot{s}_1 + \left(\frac{c_1}{m_3} + \frac{c}{m_3} + \frac{c}{m} \right) \dot{s}_1 + \frac{cc_1}{mm_3} = 0.$$

Обозначим

$$\left(\frac{c_1}{m_3} + \frac{c}{m_3} + \frac{c}{m} \right) = 2A$$

и

$$\frac{cc_1}{mm_3} = B,$$

тогда

$$\ddot{s}_1 + 2A\dot{s}_1 + B = 0. \quad (21a)$$

Интеграл этого уравнения:

$$s_1 = C_I \cos n_1 \cdot t + C_{II} \sin n_1 \cdot t + C_{III} \cos n_2 \cdot t + C_{IV} \sin n_2 \cdot t, \quad (22)$$

где

$$n_1 = \sqrt{A + \sqrt{A^2 - B}} \text{ и } n_2 = \sqrt{A - \sqrt{A^2 - B}}.$$

Так как

$$\ddot{s}_1 = -C_I n_1^2 \cos n_1 \cdot t - C_{II} n_1^2 \sin n_1 \cdot t - C_{III} n_2^2 \cos n_2 \cdot t - C_{IV} n_2^2 \sin n_2 \cdot t,$$

то

$$s = \left(\frac{c_1}{c} - \frac{m_3}{c} n_1^2 \right) \left(C_I \cos n_1 \cdot t + C_{II} \sin n_1 \cdot t \right) + \\ + \left(\frac{c_1}{c} - \frac{m_3}{c} n_2^2 \right) \left(C_{III} \cos n_2 \cdot t + C_{IV} \sin n_2 \cdot t \right).$$

Обозначим:

$$\frac{c_1}{c} - \frac{m_3}{c} n_1^2 = D - D_1 \text{ и } \frac{c_1}{c} - \frac{m_3}{c} n_2^2 = D + D_1,$$

тогда

$$s = (D - D_1)(C_I \cos n_1 \cdot t + C_{II} \sin n_1 \cdot t) + (D + D_1) \\ (C_{III} \cos n_2 \cdot t + C_{IV} \sin n_2 \cdot t), \quad (23)$$

Начальные условия:

$$s_{t=0} = 0; (s_1)_{t=0} = 0; \dot{s}_{t=0} = v_0; (\dot{s}_1)_{t=0} = 0;$$

$$\begin{aligned} \text{т. е. } C_I + C_{III} = 0; (D - D_1)C_I + (D + D_1)C_{III} = 0, \\ (D - D_1)n_1C_{II} + (D + D_1)n_2C_{IV} = v_0 \text{ и } n_1C_{II} + n_2C_{IV} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$C_I = C_{III} = 0; C_{II} = -\frac{v_0}{2n_1D_1} \text{ и } C_{IV} = -\frac{v_0}{2n_2D_1}$$

или

$$s = \frac{v_0}{2D_1} \left(-\frac{D - D_1}{n_1} \sin n_1 \cdot t + \frac{D + D_1}{n_2} \sin n_2 \cdot t \right) \quad (24)$$

и

$$s_1 = \frac{v_0}{2D_1} \left(-\frac{1}{n_1} \sin n_1 \cdot t + \frac{1}{n_2} \sin n_2 \cdot t \right); \quad (24a)$$

$$s_{\max} = \frac{v_0}{2D_1} \left(\frac{D + D_1}{n_2} - \frac{D - D_1}{n_1} \right).$$

Если не учитывать влияния деформации вала, то для данной схемы удара можно считать, что при ударе масс m_1 и m_2 центр шестерни неподвижен. Используя выведенную в § 3 формулу (2), справедливую и для схемы, изображенной на фиг. 9, но при абсолютно жестком вале шестерни, получим следующую величину максимальной деформации зубьев от удара:

$$s'_{\max} = v_0 \sqrt{\frac{m}{c}}.$$

Таким образом, коэффициент, учитывающий влияние деформации вала, будет:

$$\psi_2 = \frac{s_{\max}}{s'_{\max}} \frac{(D + D_1)n_1 - (D - D_1)n_2}{2D_1n_1n_2} \sqrt{\frac{c}{m}}. \quad (25)$$

Определим попутно коэффициент ψ'_2 , служащий для нахождения динамической нагрузки, передающейся на вал:

$$\psi'_2 = \frac{s_{1\max}}{s'_{\max}} = \frac{(n_1 - n_2)}{2D_1n_1n_2} \cdot \frac{c_1}{c}. \quad (26)$$

Введем обозначения: $\gamma_1 = \frac{m_3}{m}$ и $\gamma_2 = \frac{c_1}{c}$. Для сплошных шестерен:

$$\gamma_1 \approx \frac{2m_3r_{01}^2}{m_3r_1^2} \text{ при } m_2 = \infty$$

и

$$\gamma_1 = \frac{4m_3r_{01}^2}{m_3r_1^2} \text{ при } m_2 = m_1.$$

При угле зацепления $\alpha = 20^\circ$, $\gamma_1 = 1.77 \div 3.53$. Расчеты коэффициентов ψ_2 и ψ'_2 для ряда конкретных случаев приведены в табл. 3.

γ_1	γ_2	$n_1 \sqrt{\frac{m}{c}}$	$n_2 \sqrt{\frac{m}{c}}$	$-\frac{D-D_1}{n_1}$	$\frac{D+D_1}{n_2}$	ψ_2	ψ'_2
1.77	4	1.757	0.8546	0.841	3.168	0.96	1.66
1.77	2	1.496	0.6757	1.311	1.764	0.97	1.36
1.77	1	1.348	0.5573	1.647	0.8078	0.92	0.95
1.77	0.5	1.295	0.4102	1.909	0.4927	0.90	0.60
1.77	0.2	1.269	0.2651	2.085	0.2852	0.87	0.34
1.77	0.1	1.261	0.1888	2.147	0.1954	0.85	0.22
1.77	0.05	1.254	0.1338	2.184	0.1369	0.82	0.15
1.77	0.01	1.251	0.0601	2.208	0.0601	0.82	0.06
3.53	4	1.333	0.7979	1.712	2.196	0.97	1.99
3.53	2	1.209	0.6225	2.615	1.015	0.96	1.28
3.53	1	1.165	0.4568	3.256	0.4568	0.95	0.75
3.53	0.5	1.147	0.3280	3.618	0.3664	0.93	0.46
3.53	0.2	1.137	0.2092	3.848	0.2175	0.92	0.26
3.53	0.1	1.135	0.1483	3.923	0.1504	0.91	0.17
3.53	0.05	1.133	0.1034	3.963	0.1020	0.90	0.12
3.53	0.01	1.131	0.0475	3.998	0.0425	0.89	0.05

Как видно из таблицы, на силе удара зубьев деформация вала отражается мало. Поскольку валы обычно на практике имеют значительно большие деформации, чем зубья при тех же нагрузках, то можно принять значение коэффициента ψ_2 в среднем равным 0.9. Что касается коэффициента ψ'_2 , то его значение необходимо знать при расчете самих валов и подшипников. Коэффициент ψ'_2 , как видно из табл. 3, изменяется в широких пределах. В наиболее распространенных на практике случаях, когда γ_2 лежит в пределах 0.2—0.5, этот коэффициент изменяется от 0.26 до 0.6, и можно принять его в среднем равным 0.5, но при жестких валах следует повысить его до единицы.

8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОЙ МАССЫ, ПРИХОДЯЩЕЙСЯ НА ЕДИНИЦУ ШИРИНЫ ЗУБЧАТЫХ КОЛЕС

Масса цельнокованого зубчатого колеса, приведенная к радиусу основной окружности r_0 и приходящаяся на единицу рабочей ширины зубчатых колес b , равна:

$$m = \frac{I}{r_0^2 b} = \frac{I}{(r \cos \alpha)^2 b},$$

где I — момент инерции зубчатого колеса,

$$I = \frac{mr^2}{2} \approx \frac{\pi r^2 b \gamma r^2}{2}.$$

Принимаем $\alpha = 20^\circ$ (изменение угла зацепления сказывается мало), $\gamma = 0.0078$ — для стальных зубчатых колес; тогда

$$m_{1(2)} = 0.0000036 d_{1(2)}^2. \quad (27)$$

Согласно формуле (2а) для цельнокovaných шестерни и колеса:

$$m = \frac{0.0000036 d_{III}^2}{\frac{1}{j^2} + 1}. \quad (28)$$

При применении бандажированных колес или литых колес со спицами эффективная масса будет несколько меньшей.

9. ВЛИЯНИЕ ЭЛАСТИЧНО СВЯЗАННЫХ С ШЕСТЕРНЕЙ МАСС

Разберем срединный удар зубьев, когда с шестерней эластично, т.е. на том же валу, но на некотором расстоянии от шестерни, или через упругую муфту связана некоторая масса m_3 . Схема удара изображена на фиг. 10. За положительное направление деформаций и ускорений выберем направление направо. Применяем принцип Даламбера и составляем уравнения равновесия каждой из трех масс:

$$-m_2 j'_2 + cs = 0; j'_2 = \frac{c}{m_2} s;$$

$$m_1 j'_1 + cs - c_2 s_1 = 0; j'_1 = -\frac{1}{m_1} (cs - c_2 s_1),$$

$$m_3 j'_3 + c_2 s_1 = 0; j'_3 = -\frac{c_2}{m_3} s_1.$$

Так как

$$j'_1 - j'_2 = \ddot{s} \text{ и } j'_3 - j'_1 = \ddot{s}_1,$$

где \ddot{s} и \ddot{s}_1 — относительные ускорения, то

$$\ddot{s} + c \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) s - \frac{c_2}{m_1} s_1 = 0 \quad (29)$$

и

$$\ddot{s}_1 + c_2 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_3} \right) s_1 - \frac{c}{m_1} s = 0. \quad (30)$$

Введем обозначения:

$$c \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) + c_2 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_3} \right) = 2A,$$

$$c c_2 \left(\frac{1}{m_1 m_2} + \frac{1}{m_1 m_3} + \frac{1}{m_2 m_3} \right) = c c_2 \frac{m_3 + m_2 + m_1}{m_1 m_2 m_3} = B.$$

Интеграл уравнения (29):

$$s = C_I \cos n_1 \cdot t + C_{II} \sin n_1 \cdot t + C_{III} \cos n_2 \cdot t + C_{IV} \sin n_2 \cdot t, \quad (31)$$

где

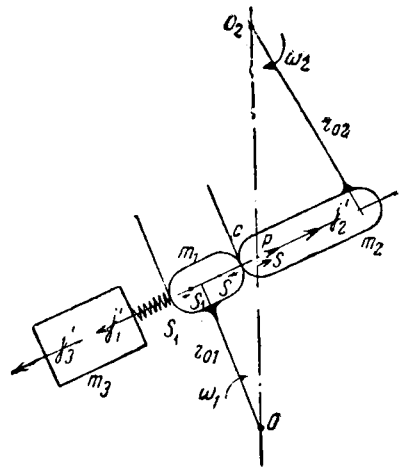
$$n_1 = \sqrt{A + \sqrt{A^2 - B}} \text{ и } n_2 = \sqrt{A - \sqrt{A^2 - B}}.$$

Обозначим:

$$\frac{m_1}{c_2} \left[c \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_1} \right) - n_1^2 \right] = D - D_1$$

и

$$\frac{m_1}{c_2} \left[c \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) - n_2^2 \right] = D + D_1;$$



Фиг. 10.

тогда

$$s_1 = (D - D_1)(C_I \cos n_1 \cdot t + C_{II} \sin n_1 \cdot t) + (D + D_1)(C_{III} \cos n_2 \cdot t + C_{IV} \sin n_2 \cdot t). \quad (32)$$

Начальные условия:

$$(s)_{t=0} = 0; (s_1)_{t=0} = 0; \dot{s}_{t=0} = v_0 \text{ и } (\dot{s}_1)_{t=0} = 0.$$

После подстановки начальных условий в соответствующие уравнения получим:

$$C_I = C_{III} = 0; C_{II} = \frac{v_0(D + D_1)}{2n_1 D_1} \text{ и } C_{IV} = -\frac{v_0(D - D_1)}{2n_2 D_1}.$$

Следовательно,

$$s = \frac{v_0}{2D_1} \left(\frac{D + D_1}{n_1} \sin n_1 \cdot t - \frac{D - D_1}{n_2} \sin n_2 \cdot t \right). \quad (33)$$

Найдем коэффициент θ , учитывающий влияние эластично связанных масс на силу удара (т. е. на величину деформации при ударе):

$$\theta = \frac{s_{\max}}{s^1_{\max}}.$$

Так как частота n_2 второй синусоиды обычно мала по сравнению с частотой n_1 первой синусоиды (табл. 4), то s_{\max} можно принять за алгебраическую сумму амплитуд, если не учитывать затухания колебаний, т. е.:

$$\theta_1 = \frac{[(D + D_1)n_2 - (D - D_1)n_1]}{2D_1 n_1 n_2} \sqrt{\frac{c}{m}}. \quad (34)$$

Однако при отношении частот $\frac{n_1}{n_2} \gg 4$ амплитуда синусоиды с частотой n_1 в результате затухания очень сильно уменьшится к моменту достижения синусоидой с частотой n_2 своего максимума. На этом основании синусоиду с частотой n_1 можно вообще не учитывать (поскольку она имеет к тому же меньшую амплитуду), т. е.

$$\theta_2 = -\frac{D - D_1}{2D_1 n_2} \sqrt{\frac{c}{m}}. \quad (34a)$$

На основании рассмотрения результатов конкретных расчетов (табл. 4) были сделаны следующие заключения:

1) масса шестерни может быть заменена условной массой

$$m' = m_1 + m_3,$$

2) модуль упругости зубьев c может быть заменен условным модулем упругости зубьев:

$$c'' = \frac{cc_2}{c + c_2}. \quad (35)$$

Тогда условная эффективная масса будет:

$$m' = \frac{(m_1 + m_3)m_2}{m_1 + m_3 + m_2} \quad (36)$$

$$\theta^2 = \frac{m'c'}{mc} = \frac{(m_1 + m_3)m_2cc_2(m_1 + m_2)}{(m_1 + m_3 + m_2)(c + c_2)m_1m_2c}$$

Если обозначим:

$$\lambda_0 = \frac{m_2}{m_1}; \lambda_1 = \frac{m_3}{m_1} \text{ и } \lambda_2 = \frac{c}{c_2},$$

ТО

$$\theta = \sqrt{\frac{1 + \lambda_1}{(1 + \lambda_1) \left(+ \frac{\lambda_1}{1 + \lambda_0} \right)}} \quad (37)$$

По формулам (34), (34а) и (37) были произведены расчеты в частных случаях, которые сведены в табл. 4.

Таблица 4

λ_0	λ_1	λ_2	$n_1 \sqrt{\frac{m}{c}}$	$n_2 \sqrt{\frac{m}{c}}$	$\frac{D + D_1}{n_1}$	$\frac{D - D_1}{n_2}$	θ_1	θ_2	θ
∞	1	1	1.618	0.6180	0.3820	2.618	1.342	1.167	1
∞	10	1	1.432	0.2214	0.6641	4.747	2.70	2.37	2.35
∞	20	1	1.423	0.1565	0.6711	6.553	3.61	3.27	3.24
∞	30	1	1.420	0.1285	0.6926	7.914	4.30	3.96	3.94
∞	100	1	1.415	0.0707	0.7032	14.212	7.46	7.10	7.11
∞	1	2	1.308	0.5418	1.081	2.610	1.31	0.92	0.82
∞	10	2	1.232	0.1828	1.569	5.651	2.43	1.90	1.92
∞	20	2	1.229	0.1285	1.600	7.917	3.19	2.65	2.65
∞	30	2	1.227	0.1065	1.611	9.493	4.13	3.17	3.21
∞	40	2	1.226	0.0892	1.618	11.310	4.32	3.78	3.70
∞	100	2	1.224	0.0592	1.628	16.950	6.20	5.64	5.81
∞	1	3	1.197	0.4824	1.924	2.701	1.28	0.75	0.71
∞	10	3	1.158	0.1561	2.528	6.579	2.16	1.66	1.66
∞	20	3	1.156	0.1096	2.564	9.252	2.97	2.33	2.29
∞	30	3	1.155	0.0906	2.576	11.140	3.44	2.79	2.79
∞	100	3	1.154	0.0485	2.594	20.680	5.82	5.17	5.03
∞	1	4	1.145	0.4376	2.826	2.824	1.26	0.63	0.63
∞	10	4	1.120	0.1414	3.500	7.213	2.17	1.46	1.48
∞	20	4	1.118	0.0998	3.542	10.120	2.75	2.04	2.05
∞	30	4	1.118	0.0785	3.555	12.860	3.29	2.58	2.49
∞	100	4	1.118	0.0475	3.571	21.080	4.94	4.22	4.49
∞	1	10	1.054	0.3002	8.633	3.661	1.21	0.36	0.43
∞	10	10	1.049	0.0938	9.449	10.790	1.85	0.99	1.00
∞	100	10	1.049	0.0245	9.532	40.990	4.59	3.72	3.03
20	20	2	1.242	0.1825	1.638	5.389	2.33	1.79	1.89
50	20	2	1.234	0.1526	1.615	6.574	2.73	2.19	2.24
10	100	1	1.435	0.2304	0.7295	4.153	2.44	2.07	2.24
8	160	1.15	1.594	0.2433	0.8793	3.856	2.19	1.78	2.00
10	30	3	1.187	0.1797	2.698	5.210	1.91	1.26	1.44

10. ВЫВОД ПРИБЛИЖЕННОЙ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СИЛЫ УДАРА

Подставляем в формулу (26) следующие значения содержащихся в ней величин: $\psi = 0.54$ ($\psi_1 = 0.6, \psi_2 = 0.9$); v_0 по формуле (1д), m для цельнокованых колес по формуле (28) (для облегченных колес m будет меньше) и $c = 165\,000$ кг/см²; тогда

$$u = 1.18 v \sqrt{\frac{A \Delta \sin \alpha \rho''_1}{\left(\frac{1}{i^2} + 1\right) \rho''_2}} \quad (38)$$

$$\rho''_1 = \sqrt{R_{01}^2 - r_{01}^2} = \sqrt{(r_1 + h'_1)^2 - r_{01}^2} = \sqrt{r_1^2 + 2r_1h'_1 + (h'_1)^2 - r_1^2 \cos^2 \alpha} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{r_1^2 \sin^2 \alpha + h'_1(2r_1 + h'_1)} = \\
 &= \frac{h'_1}{2} \sqrt{\left(\frac{d_1 \sin \alpha}{h'_1}\right)^2 + 4\left(\frac{d_1}{d'_1} + 1\right)},
 \end{aligned}$$

где h'_1 — высота головки ведущего зуба.

$$\rho''_2 = A \sin \alpha - \rho''_1;$$

$$\frac{\rho''_2}{\rho''_1} = \frac{A \sin \alpha}{\frac{h'_1}{2} \sqrt{\left(\frac{d_1 \sin \alpha}{h'_1}\right)^2 + 4\left(\frac{d_1}{h'_1} + 1\right)}} - 1. \quad (39)$$

Для понижающих передач в большинстве случаев можно принять (в среднем):

$$\frac{\sin \alpha \cdot \rho''_1}{\left(\frac{1}{i^2} + 1\right) \rho''_2} \approx \frac{0.342}{0.75i}.$$

Следовательно,

$$u \approx 0.8 v \sqrt{\frac{A\Delta}{i}}, \quad (40)$$

где Δ — в микронах.

Если для повышающих передач $\frac{\rho''_1}{\rho''_2} > \frac{\sin \alpha \cdot A}{2\Delta} \left(\arcsin \frac{\Delta}{r_{\text{ош}}}\right)^2$, то, согласно формулам (1а) и (1д), в формулу (38) следует подставлять правую часть этого неравенства.

11. СКОРОСТНОЙ КОЭФФИЦИЕНТ

При выводе формулы для скоростного коэффициента будем исходить из того предположения, что расчет прямозубых колес на поверхностные напряжения производится по следующей формуле:

$$\left(\frac{N}{n_T}\right)_{\text{расч}} = \left(\frac{R_s A i}{100\,000}\right)^2 \frac{b}{(i \pm 1)^3}, \quad (41)$$

где R_s — допускаемое напряжение изгиба в кг/см², $\left(\frac{N}{n_T}\right)_{\text{расч}}$ — расчетный крутящий момент, выраженный в $\frac{\text{л. с.}}{\text{об/мин}}$.

$$\left(\frac{N}{n_T}\right)_{\text{расч}} = \left(\frac{N}{n_T}\right)_{\text{max}} k_2 k_3 k_4, \quad (42)$$

где

$\left(\frac{N}{n_T}\right)_{\text{max}}$ — максимальный крутящий момент, выраженный в $\frac{\text{л. с.}}{\text{об/мин}}$

k_2 — коэффициент концентрации нагрузки;

k_3 — коэффициент долговечности;

k_4 — коэффициент качества.

$$k_4 = \frac{u}{p_n} + 1. \quad (43)$$

$$p_n = \frac{75 N_{\max}}{vb \cos \alpha} \approx \frac{80 N_{\max} k_2}{vb}. \quad (44)$$

Согласно формулам (41), (42), (43) и (44), имеем:

$$\left(\frac{N}{n_T}\right)_{\max} k_2 k_3 \left(\frac{v^2 b}{100 N_{\max}} \sqrt{\frac{A \cdot \Delta}{i} + 1}\right) = \left(\frac{R_s A i}{100\,000}\right)^2.$$

$$\left(\frac{N}{n_T}\right)_{\max} k_2 k_3 = \left(\frac{R_s A i}{100\,000}\right)^2 \cdot \frac{b}{(i \pm 1)^3} \cdot \frac{b}{(i \pm 1)^3} - \frac{v^2 b k_3}{100 n_{T \max}} \cdot \sqrt{\frac{A \Delta}{i}}.$$

Пусть $k_4 = \frac{1}{\varphi}$ где φ — коэффициент скорости, тогда

$$\left(\frac{N}{n_T}\right)_{\max} = \left(\frac{R_s A i}{100\,000}\right)^2 \cdot \frac{b}{(i \pm 1)^3} \cdot \frac{\varphi}{k_2 k_3}$$

и

$$\varphi = 1 - \frac{v^2 (i \pm 1)^3 k_3}{100 n_{T \max}} \left(\frac{100\,000}{R_s A i}\right)^2 \sqrt{\frac{A \Delta}{i}},$$

или

$$\varphi = 1 - \frac{110 n_T^2 k_3 (i \pm 1)}{n_{T \max} R_s^2} \sqrt{\frac{A \Delta}{i}}. \quad (45)$$

Если принять $n_T = n_{T \max}$ и $\frac{110(i \pm 1)}{\sqrt{i}} \approx 250$, то для внешнего за-

цепления:

$$\varphi \approx 1 - \frac{250 k_3 n_T}{R_s^2} \sqrt{A \Delta}. \quad (46)$$

12. СРАВНЕНИЕ СИЛ УДАРА, ВЫЗЫВАЕМЫХ ОШИБКАМИ В ОСНОВНОМ ШАГЕ И ОШИБКАМИ В ПРОФИЛЕ

В нашей работе „О расчете прямозубых колес по Бакингеуму“ мы вывели следующую формулу для определения силы удара, вызываемой ошибками в профиле:

$$u_{\text{проф}} = \frac{\Delta \cdot c' d_1 v^2}{50 \cdot 10^4 p}.$$

Из этой формулы видно, что с увеличением окружного усилия p , приходящегося на 1 см ширины зубчатых колес, удельная сила удара $u_{\text{проф}}$ уменьшается. Для сырых и нормализованных сталей можно в среднем принять $p = 7.5 d_1$ и модуль упругости зубьев (в направлении действия окружного усилия) $c' = 160\,000 \text{ кг/см}^2$, тогда

$$u_{\text{проф}} = \frac{\Delta v^2}{24}.$$

Сравнивая эту силу удара с силой удара по формуле (40), вызываемой ошибкой в основном шаге той же величины, что и ошибка в профиле зуба (которую следует подставлять в формулу для определения $u_{\text{проф}}$), после некоторых преобразований получим (при $i = 3$):

$$\frac{u_{\text{проф}}}{u_{\text{шага}}} = \frac{n_1 \sqrt{\Delta d_1}}{30\,000},$$

т. е. при ошибке в профиле зуба шестерни $\Delta \leq 20\mu$ и при диаметре шестерни $d_1 \leq 200$ мм $\frac{u_{\text{проф}}}{u_{\text{шага}}} \leq \frac{n_1}{1500}$. Следовательно, почти во всех

практических случаях при применении материалов зубчатых колес не высокого качества $u_{\text{шага}}$ больше $u_{\text{проф}}$. Поскольку для качественных материалов допускаемая нагрузка возрастает во много раз по сравнению с принятой выше, то удельная сила удара $u_{\text{проф}}$ будет во много раз меньшей (при прочих равных условиях). Таким образом, при расчете зубьев можно учитывать только силу удара, вызываемую ошибками в основном шаге.

13. СРАВНЕНИЕ ТЕОРИИ С АМЕРИКАНСКИМИ ЭКСПЕРИМЕНТАМИ

Опыты по определению динамических нагрузок на зубьях прямозубых колес, проведенные под руководством проф. Бакингема в Массачусетском технологическом институте (США) показали, что силы удара могут достигать больших значений даже при умеренных скоростях. Опыты заключались в следующем: испытываемая пара зубчатых колес с известными неточностями изготовления связывалась валами динамометра с такой же образцовой парой и путем закручивания одного из этих валов нагружалась до определенного окружного усилия и затем приводилась в движение с постепенно увеличивающейся окружной скоростью до тех пор, пока электрический ток, проходящий через зацепляющиеся в данный момент зубья, не прерывался. Момент прерывания тока определялся по наступлению треска в телефоне, также включенном в электрическую цепь. Если бы ток прерывался при наступлении сколь угодно малого зазора, то силу удара можно было бы определить легко. Так как при максимальном разжатии зубьев их деформация равнялась бы нулю, то при максимальном сжатии зубьев они имели бы деформацию, равную $2\delta_p$, где δ_p — деформация зубьев от внешней нагрузки на зуб p_n , т. е. в этом случае $u = p_n$.

В действительности ток продолжает передаваться через зубья и при некоторой величине зазора между ними, и поэтому данными эксперимента можно воспользоваться только зная величину этого зазора. Бакингом высказывается предположение, что ток во вращающейся паре зубчатых колес продолжает передаваться при значительных величинах зазоров (порядка 20 и больше микрон в зависимости от окружной скорости). Наши дальнейшие выкладки показывают, что этот зазор редко превышает 2—3 μ . Такие расхождения в оценке величины зазора приводят к расхождениям в оценке величины силы удара, доходящим до трех окружных усилий.

Если обозначить деформацию зубьев от силы удара через δ_u , то потенциальная энергия деформации зубьев, накопленная при максимальном сжатии зубьев, будет равна:

$$\frac{(p_n + u)(\delta_p + \delta_u)}{2}$$

Разжатие зубьев противодействует внешняя сила p_n на пути $\delta_p + \delta_u + x$, где x — зазор, при котором прерывается ток. Следовательно,

$$\frac{(p_n + u)(\delta_p + \delta_u)}{2} = p_n(\delta_p + \delta_u + x),$$

откуда

$$\frac{u}{p_n} = 1 + \frac{2x}{\delta_p + \delta_u},$$

$$u = p_n + \frac{\dot{\gamma} c x}{1 + \frac{u}{p_n}},$$

где c — модуль упругости зубьев.

Если исходить из предположения, что зазор мал, т. е. u не очень сильно отличается от p_n , то предыдущее уравнение можно представить в следующем виде:

$$u \approx p_n + c x. \quad (47)$$

Что такое предположение справедливо, показывают диаграммы экспериментальных зависимостей $p_n = \psi(v)$, выражающиеся в виде:

$$p_n = kv + q. \quad (48)$$

Из сравнения уравнений (47) и (48) вытекает, что

$$kv = u \text{ и } q = -cx.$$

В табл. 5 приведены отношения экспериментальных значений сил удара u_a к теоретическим u_T . По имеющимся данным об испытывавшихся шестернях: $A = 279.4$ мм; $i = 2.67$; $d_1 = 152.4$ мм;

$m \approx 0.0022 \frac{\text{кг} \cdot \text{сек}^2}{\text{см}^2}$. Дополнительные расчеты, проведенные по фор-

мулам (37) и (28), показали, что $\theta \approx 1$ и $m = 0.00073 \frac{\text{кг} \cdot \text{сек}^2}{\text{см}^2}$. Следова-

тельно, в действительности эффективная масса шестерен и жестко связанных с ними частей в 3 раза больше, чем принято при выводе формулы (40). Такое увеличение эффективной массы произошло, главным образом, за счет образцовой шестерни, насаженной на массивной втулке совместно с испытываемой шестерней. Следовательно, сила удара u_T будет в $\sqrt{3} = 1.73$ раза больше, чем по формуле (40).

Таблица 5

Опыт	$\frac{\Delta u}{\Delta v}$	$\sqrt{\Delta}$	$\frac{u_a}{u_T}$
A	1	8	1.05
B	0.58	6.2	0.79
C	1	8	1.05
D	0.84	7.3	0.97
E ₁	0.21	3.6	0.49
E ₂	0.39	4.2	0.78
F	0.31	4.5	0.57
G	0.47	5.5	0.72
H	0.31	4.5	0.57

Если учесть, что при измерении испытываемых зубчатых колес было затруднительно установить, какую же ошибку изготовления следует считать измеренной ошибкой и подставлять в расчетные формулы, и что, кроме того, сами измерительные приборы, особенно в случае измерения зубчатых колес с повышенной точностью (опыты E₁, E₂, F и H), имеют значительную относительную погрешность, то

можно прийти к заключению, что результаты разработанной здесь теории достаточно хорошо согласуются с данными экспериментов. Следует иметь в виду, что каждое значение отношения $\frac{u_3}{u_T}$ соответствует очень большому количеству опытов при различных скоростях и нагрузках.

Таким образом, выведенные на основании настоящей теории формулы (40) и (46) для определения динамической нагрузки на зубьях прямозубых колес или скоростного коэффициента при их расчете на поверхностные напряжения следует рекомендовать к внедрению в расчетную практику при проектировании прямозубых колес.

О ВЛИЯНИИ АБСОЛЮТНЫХ РАЗМЕРОВ ДЕТАЛЕЙ МАШИН НА ИХ ПРОЧНОСТЬ

I. СТАТИЧЕСКАЯ ПРОЧНОСТЬ ОБРАЗЦОВ И ПРОЧНОСТЬ МЕТАЛЛА В ДЕТАЛЯХ

1. Вопрос о влиянии абсолютных размеров на прочность является в сущности одним из вопросов общей проблемы о прочности металла в изделиях.

Оценка прочности металла, предназначенного для изготовления деталей машин, обычно устанавливается по результатам статических испытаний образцов стандартных размеров. Получаемая характеристика (предел текучести, временное сопротивление) служит затем критерием при определении допускаемых напряжений или запасов прочности деталей машин. Использование какой-либо из этих характеристик в качестве критерия прочности металла в деталях может быть оправдано (по закону Барба-Кика) лишь при геометрическом подобии и подобии в напряженном состоянии образца и детали. Независимость предела статической прочности от абсолютных размеров, устанавливаемая законом Барба-Кика, предполагает еще и сохранение однородности свойств металла с ростом абсолютных размеров. Известно, однако, что влияние механической и, особенно, термической обработки на прочность зависит и от абсолютных размеров. Так, например, на прочность металла влияет закалка с последующим отпуском. На фиг. 1 изображено изменение механических свойств стали SAE-3240 (нормализация при 885—910° С), а на фиг. 2 стали SAE-1045 в зависимости от величины заготовки при закалке в масле и воде с 815°С и отпуске при 540°С [1].

В работах Кунце [2], Драгомирова [3], Дочерти [4, 5, 6] было показано, что при наличии неравномерного распределения напряжений соблюдение только геометрического подобия недостаточно для применения закона Барба-Кика, так как и в этом случае предел статической прочности оказывается зависящим от абсолютных размеров. Опытные данные, характеризующие эту зависимость при растяжении (Кунце) и изгибе (Дочерти), приведены на фиг. 3 и 4.

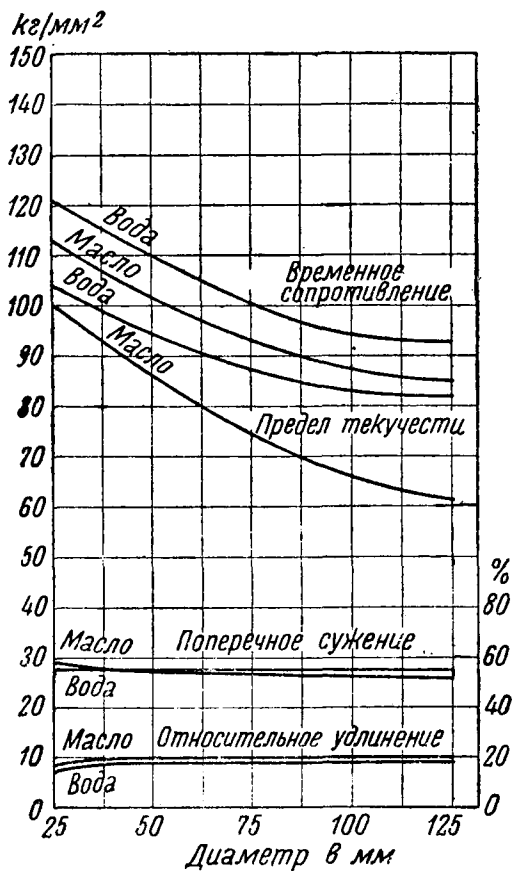
Таким образом, характеристики прочности металлов, устанавливаемые из статических испытаний образцов, не всегда могут слу-

жить показателями прочности металла в деталях, которые, как правило, отличаются от образцов и по форме и по размерам. Именно вследствие очевидного несоответствия условий работы металла в образце по сравнению с условиями работы большинства деталей машин существуют та неопределенность и затруднения, которые обнаруживаются всякий раз при назначении коэффициента запаса. Эта неопределенность практически приводит к тому, что коэффициенты запаса, как правило, назначаются с большим преувеличением. Лишь в результате многолетних наблюдений за работой детали и изучения

условий ее эксплуатации оказывается возможным вносить коррективы в запасы прочности и приближать их к действительно необходимым. Но такой путь постепенного приближения к минимальным запасам прочности, требующий значительного времени, несовместим с уровнем современного машиностроения и его основными задачами — повышения производительности машин, увеличения скоростей и уменьшения масс деталей.

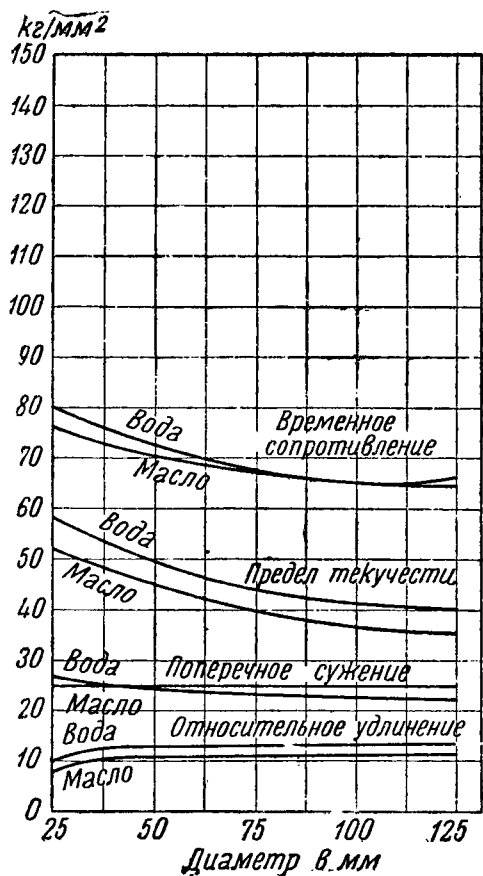
Совершенно очевидно поэтому необходимость разработки новых характеристик прочности, расширяющих представление о прочности металла в изделиях и дающих основания для расчета действительно необходимых запасов прочности во вновь создаваемых конструкциях.

2. Ограниченность характеристик статической прочности как показателей предельного напряжения, приводящего к разрушению детали машин, обнаруживается наиболее резко, если учесть преимущественно переменный характер напряжений, действующих в



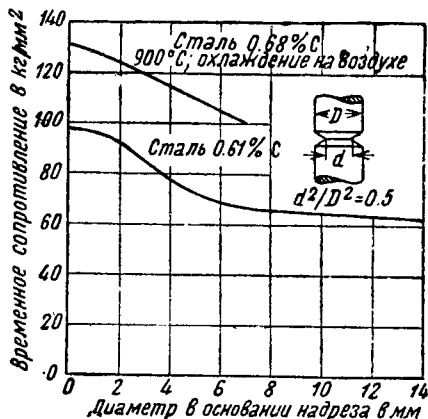
Фиг. 1.

деталях. Геометрически подобные образцы из одинакового металла имеют совершенно различные пределы прочности в случае статического нагружения и при переменных нагрузках. Это различие оказывается настолько значительным, что стала очевидной необходимость отказа от статических характеристик как показателей предельного напряжения и замены их новой характеристикой прочности — пределом усталости, устанавливаемым из испытаний при переменных напряжениях. Предел усталости, установленный на гладких образцах, например, при изгибе с вращением, составляет всего лишь 0.4—0.6 временного сопротивления. Если же сравнить предел статической прочности, установленный на образце, с тем предельным напряжением, которое приводит деталь к разрушению, то эффект совместного действия факторов, обуславливающих прочность металла в деталях, оказывается еще более значительным. Такое сравнение иллюстрирует диаграмма Луренбаума [7, 8], показанная на фиг. 5.



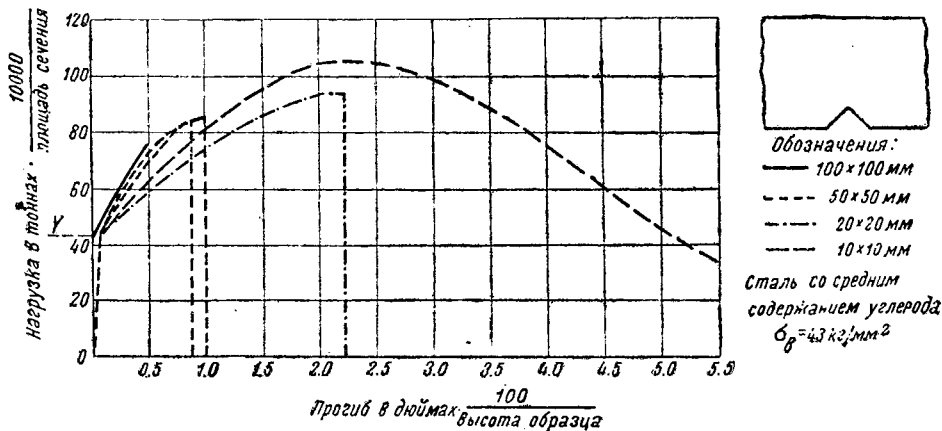
Фиг. 2.

Как показывают данные, приведенные в этой диаграмме, совместный эффект концентрации напряжений (форма), влияния абсолютных размеров и действия переменных напряжений — уменьшил прочность металла в изделии по сравнению со статической прочностью образца более чем в 8—10 раз. Рассмотрение этой диаграммы, кроме того, приводит к заключению, что наиболее достоверная характеристика прочности детали может быть установлена лишь



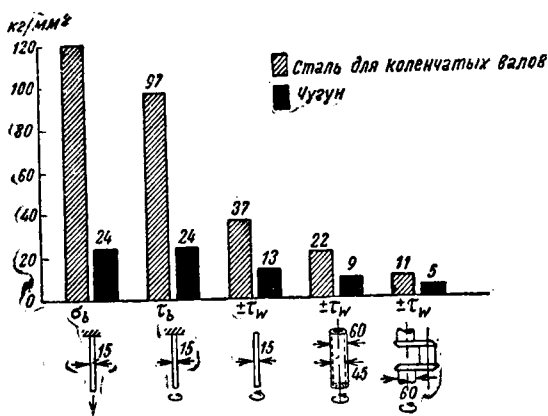
Фиг. 3.

в результате непосредственных испытаний самой детали. Постановка таких испытаний сопряжена с большими трудностями, вызывает большие расходы и не всегда доступна. Что же касается испытания моделей, то для обеспечения подобия в прочности должна быть, хотя бы в первом приближении, известна зависимость проч-



Фиг. 4.

ности от совместного эффекта концентрации напряжений и абсолютных размеров. Установление такой зависимости позволило бы, с дру-



Фиг. 5.

гой стороны, с большим основанием использовать предел усталости при определении допускаемых напряжений.

За последние годы (1933—1940) были проведены многочисленные исследования для выяснения влияния концентрации напряжений на усталость металла. Большинство имеющихся данных об эффекте концентрации напряжений (эффективные коэффициенты концентрации) получены в процессе испытаний образцов,

диаметр которых не превышал 7—10 мм. Между тем, рядом исследователей, независимо друг от друга, установлено, что эффект концентрации напряжений значительно увеличивается с увеличением размеров и что снижение прочности только из-за влияния абсолютных размеров может достигать десятков процентов. Опубликованы также данные, указывающие на наличие зависимости усталостной прочности от размеров и для гладких образцов, т. е. при отсутствии концентрации напряжений.

До последнего времени наиболее распространенным видом испытания на усталость является испытание образцов диаметром 7—10 мм. Все, что известно о пределе усталости различных марок сталей, установлено, главным образом, в результате таких испытаний. В связи с обнаруженным влиянием на прочность абсолютных размеров стала очевидной невозможность использования этих данных в расчетах при определении допускаемых напряжений без существенных поправок, учитывающих снижение прочности с увеличением размеров. Вполне определенных указаний о том, каковы должны быть эти поправки, в какой зависимости изменяется прочность с увеличением размеров при наличии и отсутствии концентрации напряжений и чем она обусловлена, пока еще в литературе не опубликовано.

Выводы по ряду работ и литературные данные чаще всего имеют предположительный характер.

Если в настоящее время не может быть дан достаточно определенный ответ на вопрос, как изменяется усталостная прочность из-за влияния размеров, то необходимо хотя бы знать, почему нужно учитывать это влияние в расчетах и насколько имеющиеся опытные данные позволяют его оценить.

II. ХАРАКТЕРИСТИКА ВЛИЯНИЯ ДИАМЕТРА НА ПРЕДЕЛ УСТАЛОСТИ ГЛАДКИХ ОБРАЗЦОВ

1. В 1930 г. Петерсон (США) опубликовал одну из первых работ, посвященных исследованию зависимости предела усталости от диаметра гладких образцов [9, 10]. Исследование было проведено при изгибе вращающегося образца. Диаметр образцов изменялся от 1.27 до 50 мм. Зависимость устанавливалась для трех сортов сталей и для чугуна; характеристика свойств сталей приведена в табл. 1.

Таблица 1

Сорт стали	Химический состав в %					Механические свойства				Примечание
	C	Mn	Si	S	P	σ_s кг/мм ²	σ_b кг/мм ²	$\delta^0/0$	$\psi^0/0$	
0.44 C	0.44	0.64	—	—	—	30.4	57.5	32.0	50.0	Специально приготовленная
0.42 C	0.42	0.62	0.15	0.028	0.017	26.2	52.0	34.0	51.0	Обыкновенная
Роторная	0.57	0.6	0.26	0.039	0.037	47.0	71.5	20.0	41.0	1) 870° 5 часов, охлаждение на воздухе 2) 700° 5 часов, охлаждение в печи 3) 800° 5 часов, закалка в воде 4) 650° 4 часа, охлаждение в печи

Результаты испытаний приведены в табл. 2, а также указаны на фиг. 6.

Таблица 2

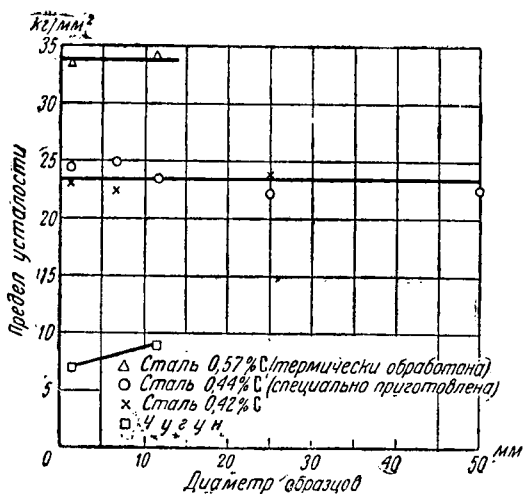
Диаметр образца в мм	Предел усталости—кг/мм ²							
	сталь 0.44 C	%	сталь 0.42 C	%	сталь 0.57 C	%	чугун (серый, хорошего качества)	%
1.27	24.5	100	23.4	100	33.6	100	7.0	100
7.0	25.1	100	22.5	96.5	—	—	—	—
11.0	23.4	96.0	23.0	98.0	34.4	103	9.15	131
25.0	22.0	90.0	23.8	102	—	—	—	—
50.0	22.3	91.2	—	—	—	—	—	—

Примечание. Испытание проведено на базе 10.10^6 циклов.

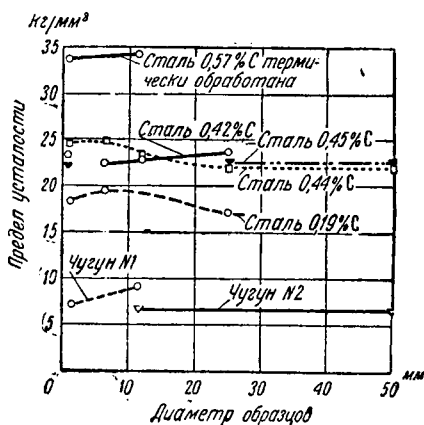
Рассмотрение данных табл. 2 и фиг. 6 приводит к совершенно определенному выводу, что усталостная прочность обыкновенных углеродистых сталей практически не зависит от диаметра образцов. Этот вывод и был сделан Петерсоном в упомянутой выше работе. Спустя три года Петерсон, произведя дополнительные исследования, подтвердил этот вывод [21]. Опубликованные им в 1933 г. результаты показаны на фиг. 7.

2. Уже в 1933 г. Фаульхабер [11] пришел к совершенно противоположному выводу. Исследуя при изгибе с вращением сталь с теми же приблизительно свойствами (например С-3), он установил уменьшение предела усталости на 10—15% при увеличении диаметра всего лишь от 7.5 до 27 мм.

Характеристика сталей, исследованных Фаульхабером, и полученные им результаты испытаний приведены в табл. 3 и 4.



Фиг. 6.



Фиг. 7.

Таблица 3

Марка стали	Химический состав в %								Термо-обработка	Механические свойства			
	C	Si	Mn	P	S	Cu	Cr	Ni		σ_s кг/мм ²	σ_b кг/мм ²	δ_{10} %	ψ %
C-1	0.1	1.25	0.45	0.03	0.03	—	—	—	900° 1 час, охл. на возд.	26.4/25.8	41.5	29.5	72
C-3	0.3	0.3	0.6	0.026	0.03	—	—	—	860° 1 час, охл. на возд.	34.0/33.1	56.5	24.0	58.0
C-10	0.98	0.18	0.27	0.012	0.025	0.16	—	—	670-700° 1 час, охл. на возд.	31.8/31.8	65.2	13.5	48.0
VCN	0.35	0.24	0.47	0.015	0.036	0.2	0.77	3.34	820° 1 час в масле; отпуск 500°, 1/2 часа	—	115.5	10.9	54.0

Таблица 4

Диаметр образца в мм	Характер обработки поверхности образцов	Предел усталости							
		C-1	%	C-3	%	C-10	%	VCN	%
7.52	Полировка	26—27	100	29—30	100	30.0	100	60.0	100
27.3		25	94.5	27—28	93.0	27.0	90.0	52.0	87.0
7.52	Шлифовка	25—26	100	28—29	100	—	—	—	—
27.3		23	90.0	25	88.0	—	—	—	—
7.52	Обточка	25	100	27.0	100	—	—	—	—
27.3		21	84.0	23	85.0	—	—	—	—

Данные табл. 4 представляют значительный интерес. Они не только устанавливают наличие зависимости усталостной прочности от абсолютных размеров, но, кроме того, указывают, что:

а) эта зависимость в значительной степени обусловлена состоянием поверхности;

б) легированные стали повышенной прочности типа VCN (хромоникелевой) более чувствительны к влиянию размера, чем, например, стали углеродистые, нормализованные.

3. Хорджер (лаборатория Тимкен, США) опубликовал в 1935 и 1936 гг. [12] результаты исследований среднеуглеродистой стали SAE-1045, на основании которых он также пришел к выводу о снижении предела усталости гладких образцов на 15% при увеличении диаметра от 7.5 до 50 мм. Исследованная Хорджером сталь SAE-1045 имела состав: C—0.45; Mn—0.67—0.77; Si—0.2—0.26; механические свойства: $\sigma_s = 34.0$ кг/мм²; $\sigma_b = 61.8$; $\delta = 32\%$; $\varphi = 48.5\%$; термообработка: нормализация 880°C, отпуск 600°C.

Полученные результаты испытаний приведены в табл. 5.

Таблица 5

Диаметр образцов в мм	Марка стали	Предел усталости		Примечание
		кг/мм ²	%	
7.6	SAE—1045	28.0	100	Полированы
25.4	„ „	25.5	91.0	„ „
51.0	„ „	24.0	86.0	Испытание проведено на базе 70·10 ⁶ циклов

4. Приведенные выше результаты исследований зависимости пределов усталости от размеров были получены в процессе испытаний вращающегося образца при изгибе.

В 1934 г. Майлендер и Бауэрсфельд опубликовали [13] данные о зависимости пределов усталости от размера при кручении. Ими была исследована Cr-Ni-W сталь с $\sigma_b = 91.0$ кг/мм². Полученные ими результаты приведены в табл. 6.

Таблица 6

Диаметр образца в мм	Марка стали	Предел усталости	
		кг/мм ²	%
14	Cr—Ni—W	28.0	100
30	„ „	23.5	86.0
45	„ „	20.0	71.0

Таким образом, и при кручении, по данным Майлендера и Бауэрсфельда, с увеличением диаметра от 14 до 45 мм наблюдалось снижение предела усталости на 29%.

5. В 1935 г. Лер и Майлендер [14], основываясь на результатах проведенного ими исследования, вновь подтвердили наличие влияния размеров на предел усталости при изгибе с вращением. Влияние диаметра ими было исследовано в интервале от 7.5 до 30 мм на двух марках сталей: St-50.11 и Cr-Ni-W.

Характеристика свойств этих сталей приведена в табл. 7, результаты испытаний в табл. 8.

Таблица 7

Марка стали	Химический состав в %						Механические свойства			
	C	Si	Mn	P	S	Cu	σ_s кг/мм ²	σ_b кг/мм ²	δ_5 %/о	ψ %/о
St-50.11	0.28	0.23	0.79	0.018	0.026	0.06	28	59	28.0	48.0
Cr-Ni-W	0.32	0.3	0.52	Ni	Cr	W	103,0	121,0	14.0	55.0
				4.1	1.2	1.0				

Таблица 8

Диаметр образца в мм	Предел усталости				Примечание
	St-50.11		Cr-Ni-W		
	кг/мм ²	%	кг/мм ²	%	
7.5	—	—	68.5	100	Поверхность образцов только отшлифована
9.5	28.6	100	—	—	
30.0	25.5	89.0	57.0	83.0	

Эти данные вновь свидетельствуют о снижении предела усталости на 11—17% при увеличении диаметра до 30 мм. Кроме того, они, так же как и данные Фаульхабера, указывают на наличие значительно большей чувствительности легированной стали (Cr-Ni-W) к влиянию размера.

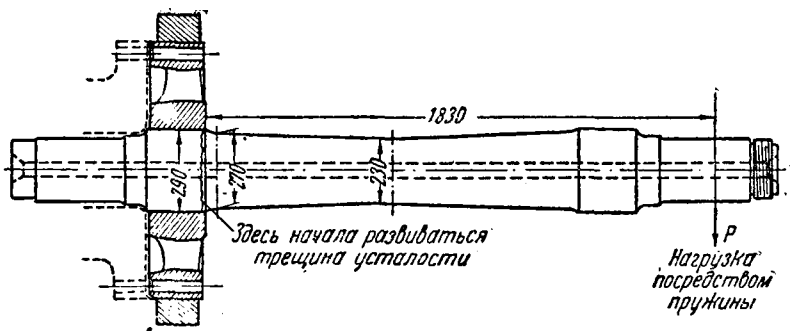
6. Дальнейшее развитие исследования зависимости усталостной прочности от абсолютных размеров связано с работами лаборатории Тимкен (США). В 1936 г. в этой лаборатории впервые было поставлено испытание на усталость электровозных и вагонных осей натуральных размеров — с диаметром от 150 до 300 мм. Работы лаборатории в этом направлении продолжают до последнего времени. Опубликованные в 1938 [15] и 1939 гг. [16] некоторые результаты испытаний натуральных электровозных и вагонных осей являются единственными и представляют значительный интерес.

Условия и результаты испытаний электровозных осей ($D = 290$ мм в подступичной части):

а) Оси изготовлены из никелевой стали со следующей характеристикой:

Химический состав в %	Механические свойства
C 0.24	Предел текучести σ_s 42.7—48.5 кг/мм ²
Ni 3.1	Временное сопротивление σ_b 64.0—66.6 кг/мм ²
S 0.02	Удлинение δ 25—30%/о
P 0.03	Поперечное сужение ψ 67.5—70.6%/о
	Предел усталости на образце $d = 7$ мм. 38.8 кг/мм ²

б) Прочность осей в подступичной части (фиг. 8) исследовалась при наличии напрессованных колес.



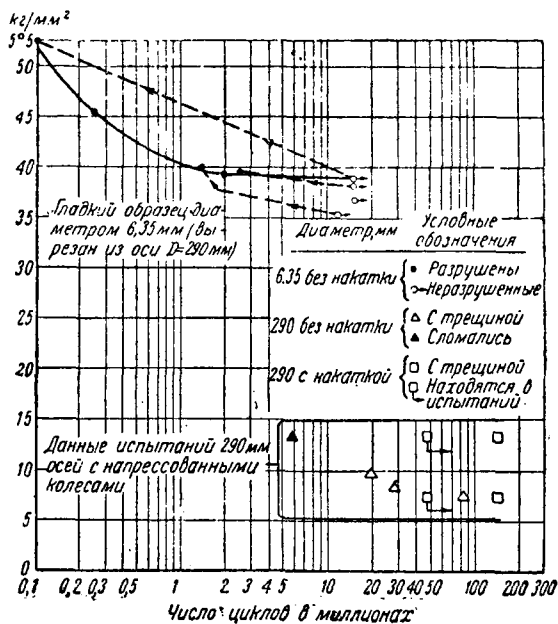
Фиг. 8.

Полученные результаты приведены в табл. 9 и на фиг. 9.

Таблица 9

№ осей	Величина натяга в мм	Напряжение в кг/мм ²	Число циклов	Примечание
Оси, без упрочнения накаткой подступичной части				
9545	0.432	13.35	5 727 000	Повреждена. Глубина трещины 116 мм
9540	0.406	9.85	19 850 000	" " " 10.3 "
9549	0.406	8.45	28 680 000	" " " 5.2 "
9550	0.406	7.3	83 730 000	" " " 1.6 "
Оси упрочненные накаткой подступичной части				
9555	0.343	13.35	143 470 000	Повреждена. Глубина трещины 11 мм
9553	0.33	7.3	140 500 000	" " " 0.4 "
9554	0.305	13.35	48 500 000	Испытание не закончено
9552	0.33	7.3	48 500 000	" " "

Рассматривая данные табл. 9, необходимо иметь в виду, что предел усталости стали, из которой были выполнены оси, установленный на образце $d = 7$ мм, оказался равным 38,8 кг/мм² (на базе $10 \cdot 10^6$ циклов). Данные табл. 9 не дают непосредственного указания на самостоятельную роль масштабного эффекта в снижении прочности осей, так как это снижение обусловлено и другими весьма существенными факторами. К их числу должны быть отнесены прежде всего концентрация напряжений в зоне стыка кромки ступицы с осью, коррозионный процесс, развивающийся при перемен-



Фиг. 9.

ных напряжениях на поверхностях контакта ступицы с осью, и др. Некоторое представление о роли масштабного фактора можно все же составить и по результатам этих испытаний, если, оценив влияние концентрации напряжений, действия контактной коррозии и др. коэффициентом $k=2.0$ [12, 18, 33], ориентировочно принять предел усталости гладкой оси того же диаметра $D=292$ мм (т. е. при отсутствии напрессовки) в соответствии с данным табл. 9: $\sigma_1=19.7$ кг/мм². По сравнению с пределом усталости гладкого образца $d=7$ мм из той же стали $\sigma_{-1}=38,8$ кг/мм² получаем снижение порядка 50%.

Лучшее представление о влиянии абсолютных размеров дают полученные той же лабораторией результаты испытаний на усталость стальных обработанных поковок диаметром 150—175 мм, предназначенных для вагонных осей [16].

Поковки были приготовлены из среднеуглеродистой стали марки М-101—36, В (по спецификации ААР—Американской ассоциации железных дорог) со следующей характеристикой:

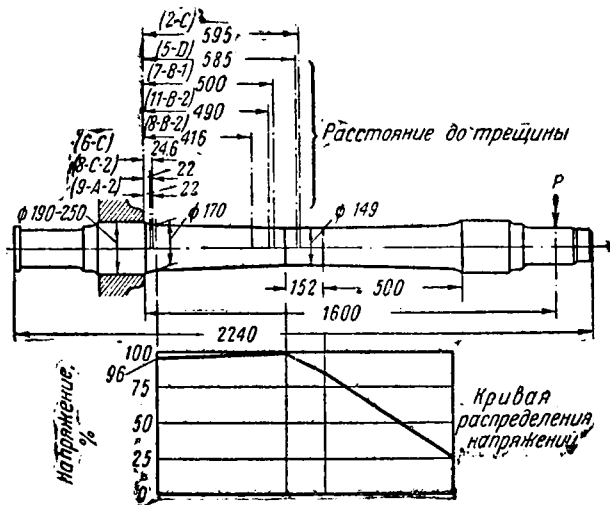
Химический состав в %

Элементы	В центре	Средняя часть	На поверхности
Углерод	0.36—0.5	0.38—0.49	0.41—0.49
Марганец	—	0.57	—
Фосфор	—	0.014	—
Сера	—	0.027	—
Кремний	—	0.24	—

Механические свойства

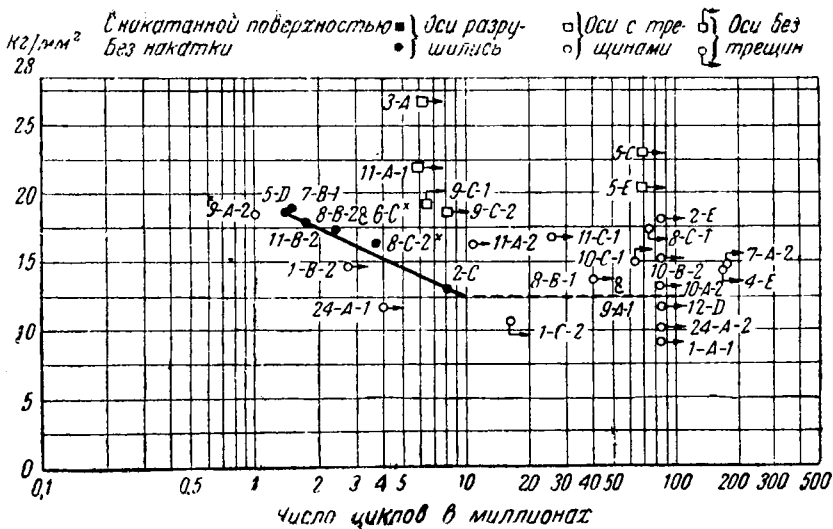
Предел текучести σ_s	30.0—45.0 кг/мм ²
Временное сопротивление σ_b	61.5—67.0 кг/мм ²
Удлинение δ	19.5—25.0%
Поперечное сужение φ	34.4—41.0%
Твердость по Бринеллю	187—197
Предел усталости на образце $d7=6$ мм	23.0 кг/мм ²

Результаты испытаний на усталость 31 поковки (фиг. 10) приведены в графике на фиг. 11.



Фиг. 10.

При рассмотрении данных, указанных на фиг. 11, обращает на себя внимание значительное их рассеяние. Представление об этом дают также данные табл. 10.



Фиг. 11.

Таблица 10

№ осей	Напряжение в кг/мм^2	Число циклов до разрушения	Число циклов, не вызвавшее трещины
7-B-1	18.6	$1.5 \cdot 10^6$	—
8-C-2	16.2	$3.75 \cdot 10^6$	—
2-C	12.7	$8 \cdot 10^6$	—
12-D	11.4	—	$85 \cdot 10^6$
10-B-2	14.8	—	$85 \cdot 10^6$
2-E	17.6	—	$85 \cdot 10^6$
4-E и 7-A-2	14.0	—	$175 \cdot 10^6$

Таким образом, при напряжении от 12.7 до 18.6 кг/мм^2 восемь осей разрушились после количества циклов, не превышающего 8 миллионов, тогда как напряжение, изменяющееся почти в том же интервале от 11.4 до 17.6 кг/мм^2 у других восьми осей после 85 миллионов циклов не вызвало даже появления трещины. На основе этих данных невозможно, конечно, установить величину предела усталости осей и определить влияние на него размера, так как очевидно влияние и ряда других факторов (и прежде всего — неоднородности свойств с изменением размеров).

Ориентируясь на нижнее значение напряжения (12.7 кг/мм^2), при котором ось 2-C разрушилась после 8 миллионов циклов, и имея в виду, что в двух осях (4-E и 7-A-2) при напряжении 14 кг/мм^2 не появились трещины и после 175 миллионов циклов — можно предположить, что величина предела усталости находится между 12.0 и 14 кг/мм^2 . Сравнение этих цифр с пределом усталости образца из той же стали, имеющего $d = 7.5$ и $\sigma_{-1} = 23.0$ кг/мм^2 , показывает, что возможное снижение прочности при переходе от диаметра $d = 7.5$ мм к $D = 150-175$ мм, составляет 40—50%.

Ознакомление с результатами испытаний на усталость крупных сечений (от 50 до 300 мм), полученными в лаборатории Тимкен, позволяет отметить следующие две характерные особенности:

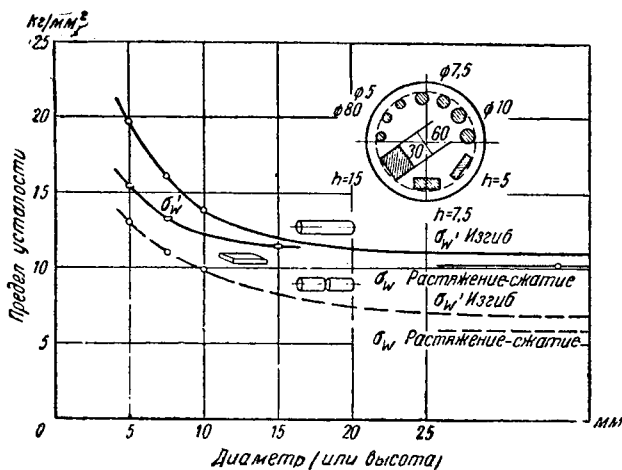
1) значительное их рассеяние (такой же характер результатов испытаний крупных сечений был установлен и в Германии [19]);

2) то, что при увеличении диаметра требуется база исключительно большого числа циклов; это видно из сравнения следующих данных:

Гладкий образец	База испытаний
$D = 7.5$ мм	$10 \cdot 10^6$ [14]
$D = 50.0$ "	$70 \cdot 10^6 - 300 \cdot 10^6$ [12,15]
$D = 175.0$ "	$175 \cdot 10^6$ [16]

Постановка опытов при базе испытаний с таким большим количеством циклов связана со значительной затратой средств и времени и не сможет, повидимому, быть принята за основу для дальнейшей работы подобного характера.

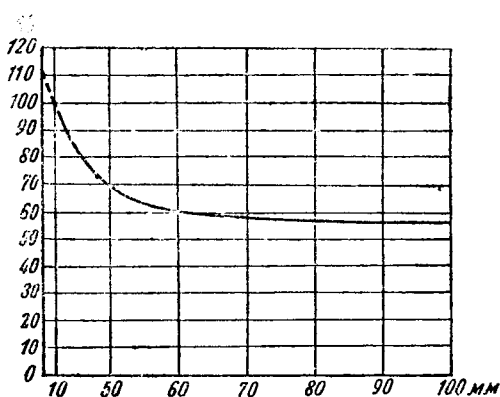
С другой стороны, данные, полученные в США, указывают, что база в $10 \cdot 10^6$ циклов, достаточная при испытаниях образцов диаметром 7—10 мм, в то же время не является достаточной при испытаниях на усталость крупных сечений, так как развитие трещины, несомненно, обусловлено величиной сечения. Повидимому, критерии предельного напряжения при испытаниях на усталость образцов, а также деталей крупных сечений должны быть иными. Выяснение этого вопроса требует специального исследования.



Фиг. 12.

Бака [20], приведенным в графике на фиг. 12, снижение предела усталости электрона А. З. М. (FIW-3510-2) достигает 40% при изменении диаметра от 5 до 25 мм (изгиб с вращением). Дальнейшее увеличение диаметра снижает предел усталости при изгибе настолько, что он приближается по величине к пределу усталости при растяжении — сжатии.

8. В 1936 г., в докладе на Конференции по вопросам расчета и конструирования деталей машин (Аахен) Лер [23] впервые предложил используемую теперь в расчетах зависимость снижения усталостной прочности при различных диаметрах образцов — от 10 до 300 мм. График этой зависимости показан на фиг. 13, где за 100% принята величина предела усталости, полученная на образце диаметром 10 мм.



Фиг. 13.

7. Интересно отметить, что влиянию размера на прочность в настоящее время придается настолько серьезное значение, что оно исследуется даже для таких специальных и сравнительно новых материалов, какими, например, являются сплавы магния.

Согласно данным

Эта зависимость была названа Лером **предположительной**. Она действительно построена лишь на предположении, как об этом можно судить по литературным данным. Никаких определенных указаний в литературе об исследовании влияния на предел усталости образцов диаметром более 50—70 мм до 1936 г. приведено не было. Лишь однажды в отчете о заседании Союза германских металлургов (1935 г.) упоминается [19] о том, что в Германии были проведены испытания образцов диаметром 200 мм, однако определенных результатов при этом получено не было вследствие их большого рассеяния. Возможно, что материалы именно этих испытаний были использованы Лером для предположений о зависимости пределов усталости от диаметра образцов выше 50 мм.

Таким образом, известная кривая изменения этой зависимости, предложенная Лером, лишь частично обоснована опытными данными (при изменении диаметра от 7 до 30 мм) и в основной своей части является предположением, нуждающимся еще в проверке и обосновании опытными данными. Вполне вероятно, что в результате такой проверки окажется возможной дифференциация этой зависимости для сталей, значительно различающихся по своим механическим свойствам. Из рассмотрения уже приведенных данных Фаульхабера и Лера видно, что легированные стали более чувствительны к влиянию размеров, чем стали углеродистые.

Несмотря на это, диаграмма Лера широко рекомендуется для использования при оценке снижения предела усталости при различных диаметрах, превышающих 10 мм, и без указания о ее предположительном характере приводится в некоторых справочных пособиях и руководствах.

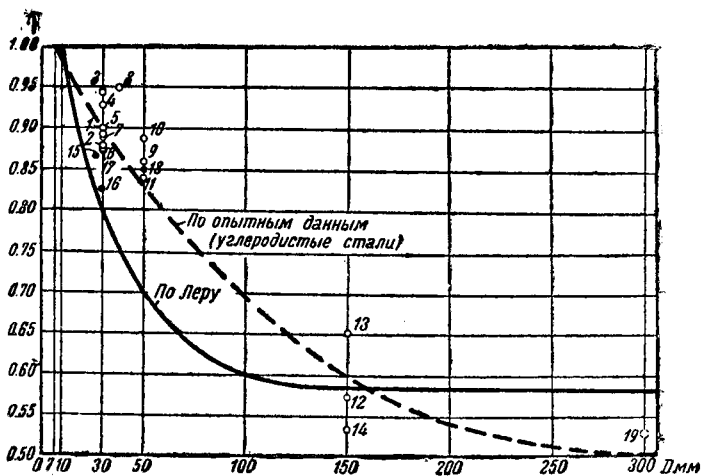
Со времени ее опубликования прошло 5 лет, в течение которых, как было указано, были получены новые данные, и в частности — об испытании поковок диаметром 150—175 мм.

Естественно поэтому поставить вопрос: насколько зависимость, предложенная Лером, соответствует уже накопленным опытными данным?

Сравнение имеющихся данных (табл. 1—10) с теми, которые указаны Лером, приведено в графике на фиг. 14. Оно показывает, что при изгибе с вращением гладких образцов из углеродистых сталей с содержанием углерода от 0.1 до 0.5% и временным сопротивлением от 40 до 65 кг/мм² кривая Лера преувеличивает снижение прочности из-за влияния размера. В интервале величин диаметров от 7—10 до 30—50 мм, согласно опытными данным, это снижение варьирует от 6 до 15%, тогда как по Леру оно должно составлять 20—30%. Опытные данные, приведенные в графике фиг. 14, хорошо согласуются между собой, несмотря на то, что они были получены в различных условиях и в разное время.

Суждение о том, насколько кривая Лера соответствует опытными данным для легированных сталей, трудно составить в виду малого количества опытов. Результаты испытаний, приведенные в табл. 4 и 8, указывают лишь на наличие большей чувствительности легированных сталей к влиянию размеров, и для них возможно большее соответствие зависимости Лера, чем для углеродистых сталей.

В настоящее время нет еще достаточного количества опытных данных, чтобы сделать вполне определенные выводы и относительно возможного снижения прочности при увеличении диаметра образца от 50 до 150 и более миллиметров. Данные лаборатории Тимкен об испытании гладких 150-мм осей из среднеуглеродистой стали и испытания электровозных осей $D=290$ мм намечают лишь порядок величины (40—50%) возможного снижения прочности из-за влияния абсолютных размеров в этих пределах.



Фиг. 14.

Легированные стали

№ точек	Сталь	σ_b км/мм ²	Автор
15	VCN	117	(11)
16	Cr - Ni - W	121	(14)
17	Ni	78	(18)
18	Ni	78	(18)

Углеродистые стали (O)

№ точек	Сталь	σ_b км/мм ²	Автор
1	SAE - 1045	62	12
2	0.44C	57	10
3	0.1 C	41.5	11
4	0.3 C	56.5	11
5	0.48C	67	11
6	0.39 — 0.49C	68.5	16
7	0.28C	59	14
8	SAE - 1020	42	17
9	SAE - 1045	62	12
10	0.44C	57	10
11	0.38 — 0.49C	68.5	16
12	0.38 — 0.49C	68.5	16
13	0.38 — 0.49C	68.5	16
14	0.38 — 0.49C	68.5	16
19	Ni	65	15

III. ХАРАКТЕРИСТИКА ВЛИЯНИЯ АБСОЛЮТНЫХ РАЗМЕРОВ НА ПРЕДЕЛ УСТАЛОСТИ ОБРАЗЦОВ С НАДРЕЗАМИ РАЗЛИЧНЫХ ФОРМ (ГАЛТЕЛИ, ОТВЕРСТИЯ, КРУГОВЫЕ НАДРЕЗЫ)

1. Опытные данные, характеризующие снижение предела усталости при увеличении абсолютных размеров надрезанных образцов различных форм, приведены в табл. 11, 12, 13, 14, 15.

Сравнение этих данных показывает, что влияние абсолютных размеров неодинаково для различных факторов формы и материала. Это иллюстрирует также и график, приведенный на фиг. 15, где показано изменение прочности образцов с галтелью при различных $\frac{r}{d}$ с увеличением их диаметра [14].

Влияние абсолютных размеров на предел усталости образцов с галтелью.
Углеродистые стали. Изгиб с вращением

№ по порядку	Источник	Характеристика материала				Диаметр образца $d \text{ мм} \frac{D}{d} = 2$	Фактор формы $r : d$	Предел усталости кг/мм ²	Изменение прочности	
		марка стали	C	σ_s	σ_b				эффект масштаба %/о	эффект масштаба и концентр. напряжения %/о
1	[14]	St.50.11	0.28	28	59	9.5	Гладкий	28.5	—	100
2			0.28	28	59	9.5	0.063	18.9	100	66.3
3			0.28	28	59	30	0.063	15.1	80.0	54.0
4	[24]		0.45	22.9	53.5	11.9	Гладкий	22.8	—	100
5			0.45	22.9	53.5	10.4	0.063	15.1	100	66.0
6			0.45	22.9	53.5	40.5	0.063	12.3	81.5	54.0
7	[14]	St.50.11	0.28	28	59	9.5	Гладкий	28.5	—	100
8			0.28	28	59	9.5	0.25	24.3	100	85.0
9			0.28	28	59	30	0.25	20.6	84.5	72.0
10	[24]		0.45	22.9	53.5	11.9	Гладкий	22.8	—	100
11			0.45	22.9	53.5	10.4	0.25	19.5	100	85.5
12			0.45	22.9	53.5	40.6	0.25	18.6	95.0	81.5
13	[10]и[21]		0.57	47.2	72.0	11.9	Гладкий	34.5	—	100
14			0.57	47.2	72.0	10.4	0.148	23	100	67.0
15			0.57	47.2	72.0	54	0.148	20	87.0	58.0
16	[24]	Ni-Mo	C—0.42	32	68	11.9	Гладкий	37.0	—	100
17			Ni—2.96	32	68	10.4	0.15	25.8	100	70.0
18			Mo—0.33	32	68	54.0	0.15	24.6	95.5	66.5

Таблица 12

Влияние абсолютных размеров на предел усталости образцов с галтелью.
Легированные стали. Изгиб с вращением

№ по порядку	Ис-точник	Характеристика материала				Диаметр образца $d \text{ мм}$	Фактор формы $r : d$	Пре-дел уста-лости кг/мм ²	Изменение прочности	
		марка стали	элементы химич. состава	σ_s	σ_b				эффект масштаба %/о	эффект масштаба и кон-центр. напряже- ния %о
1	[14]	Cr-Ni-W	Ni—4.1	103	121	7.5	Гладкий	68.5	—	100
2			Cr—1.2	103	121	7.5	0.08	38.0	100	56.0
3			W—1.0	103	121	30	0.08	25.0	66.0	36.5
4	[22]	VCN-15	—	—	—	9	Гладкий	38.25	—	100
5			—	—	—	9	0.08	26.0	100	65.0
6			—	—	—	30	0.08	21.0	81.0	54.0
7	[24]	Cr-Ni	C—0.54 Ni—1.38 Cr—0.64	64.0	84.5	25.4	0.08	23.9	—	—
8	[14]	Cr-Ni-W	Ni—4.1	103	121	7.5	Гладкий	68.5	—	100
9			Cr—1.2	103	121	7.5	0.15	48.0	100	70
10			W—1.0	103	121	30	0.15	32.0	66.7	47

Таблица 13

Влияние абсолютных размеров на предел усталости образцов с поперечным отверстием. Углеродистые стали. Изгиб с вращением

№ по порядку	Ис-точник	Характеристика материала			Диаметр образца d мм	Фактор формы $\rho : d$	Предел усталости кг/мм ²	Изменение прочности		
		марка стали	C	σ_s				σ_b	эффект масштаба % ²	эффект масштаба и концентр. напряж. % ¹
1	[21]		0.45	23.0	54	12	Гладкий	23.2	—	100
2			0.45	23.0	54	12.5	0.062	17.5	100	75.0
3			0.45	23.0	54	25.4	0.062	15.0	86.0	64.5
4			0.45	23.0	54	76.2	0.062	12.5	71	54
5			0.45	23.0	54	12.5	0.25	17.0	100	73
6			0.45	23.0	54	76.2	0.25	15.0	88.0	64.5
7			0.57			7	Гладкий	34.5	—	100
8			0.57			7	0.15	25.0	100	72
9			0.57			54	0.15	15.5	62	45
10	[14] Ni-Mo	C—0.42 Ni—2.46 Mo—0.33	32	68	11.9	Гладкий	37.0	—	100	
					12.7	0.09	19.0	100	51.3	
					51.0	0.09	17.4	91.0	47.0	
					12.5	0.25	21.5	100	58.0	
					51.0	0.25	18.4	85.5	50.0	

Таблица 14

Влияние абсолютных размеров на предел усталости образцов с круговым надрезом полукруглого профиля. Изгиб с вращением

№ по порядку	Ис-точник	Характеристика материала			Диаметр образца d мм	Фактор формы $r : d$ при $t=r$	Предел усталости кг/мм ²	Изменение прочности		
		марка стали	C	σ_s				σ_b	эф-фект масштаба % ²	эф-фект масштаба и концентр. напряжения % ¹
1	[17]	SAE-1020	0.2	24.6	42.1	6.35	Гладкий	20.4	—	100
2				24.6	42.1	7.6	0.125	13.7	100	67.0
3				24.6	42.1	25.4	0.125	12.65	92.0	62.0
4				24.6	42.1	50.8	0.125	12.3	90.0	60.0
5	[17]	SAE-2345	C—0.46 Ni—3.32	70.0	88.5	7.6	Гладкий	49.0	—	100
6				70.0	88.5	7.6	0.125	30.6	100	62.5
7				70.0	88.5	25.4	0.125	27.0	88.0	55.0
8				70.0	88.5	43.5	0.125	27.4	90.0	56.0

При рассмотрении этих данных прежде всего представляет интерес выяснение следующего вопроса: снижается ли предел усталости надрезанных образцов под влиянием только масштаба, так же как у гладких образцов, или это снижение обусловлено еще и фактором концентрации напряжений?

Для выяснения этого вопроса сравним следующие данные табл. 11 и 12 (табл. 15а).

Согласно данным, приведенным в этом графике, снижение предела усталости только под влиянием абсолютных размеров (переход от $d=9.5$ до $d=30.0$ мм) составляет для гладких образцов из углеродистой стали 10.5% и из стали Cr-Ni-W 16.8%. С изменением переходов сечений $\left(\frac{r}{d}\right)$ от плавных к более резким оно увеличивается и

Таблица 15

Влияние абсолютных размеров на предел усталости образцов с поперечным отверстием, галтелью и шпоночным пазом при кручении

№ п/п	Источник	Характеристика материала		Диаметр образца d мм	Фактор формы	Предел усталости кг/мм ²	Изменение прочности		
		марка стали	σ_s				σ_b	эффект масштаба %	эффект масштаба и концентрации напряжения %
Вал с поперечным отверстием									
1	[13]	Cr-Ni-W	78	91	14	Гладкий	28		100
2			78	91	14	$d/D=0.14$	17.5	100	62.4
3			78	91	30	$d/D=0.10$	12.5	71.5	44.7
4			78	91	45	$d/D=0.11$	11.5	65.7	41.0
5	[23]	Cr-Ni	90—100		12	$d/D=0.0833$	18.0	100	
6					30	$d/D=0.0833$	16.5	91.5	
7					60	$d/D=0.0833$	14.5	80.5	
Вал с галтелью									
8	[13]	Cr-N-W	78	91	14	Гладкий	28.0		100
9			78	91	14	$r/D=0.14$	25.5	100	91.0
10			78	91	30	$r/D=0.10$	20.0	78.5	71.5
11			78	91	45	$r/D=0.11$	19.5	76.5	69.5
Вал со шпоночным пазом									
12	[13]	Cr-Ni-W	78	91	14	Гладкий	28.0		100
13			78	91	14	$b/t=1.7$	16.0	100	57.0
14			78	91	30	$b/t=2.0$	14.5	91.0	52.0
15			78	91	45	$b/t=2.8$	13.0	81.0	46.5
Полый вал									
16	[13]	Cr-Ni-W	78	91	14	Гладкий	28		100
17					$D=14$ $d=9$		24	100	86.0
18					$D=45$ $d=30$		19	79	68.0

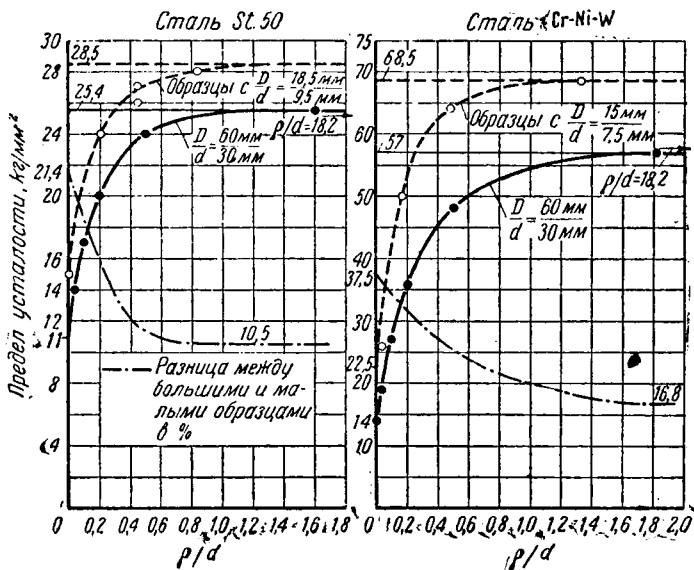
Таблица 15а

Автор	Материал и форма надреза	Интервал изменения диаметров в мм	Снижение предела усталости в %
	Углеродистые стали		
Лер [14]	Гладкий образец Галтель: $r/d=0.25$ " $r/d=0.063$	9.5—30.0	{ 10.5 15.0 20.0
Петерсон [24]	Гладкий образец Галтель: $r/d=0.25$ " $r/d=0.063$	12.0—41.0	{ 11.0 5.0 19.0
	Легированная сталь		
Лер [14]	Гладкий образец Галтель: $r/d=0.15$ " $r/d=0.08$	7.5—30.0	{ 17.0 19.0 34.0

$\frac{r}{d} = 0$ достигает 21% у образцов из углеродистой стали и 37,5% у образцов из стали Cr-Ni-W.

у образцов из стали Cr-Ni-W.

Таким образом, снижение прочности под влиянием только масштабного эффекта у надрезанных образцов тем больше, чем резче переход сечений и чем прочнее сталь.



Фиг. 15.

В связи с этим становится очевидной невозможность использования данных о влиянии абсолютных размеров на прочность полученных из испытаний гладких образцов, для точной оценки этого влияния на прочность образцов с надрезом.

Как показывают данные, приведенные в табл. 11—14, в настоящее время еще не представляется возможным оценить влияние масштаба при наличии концентрации напряжений для различных форм в широком интервале изменения абсолютных размеров.

В расчетах на прочность, например, валов с концентрацией напряжений (галтели, отверстия) предел усталости с учетом влияния масштаба рекомендуется находить из следующего уравнения:

$$\sigma_D = \frac{\sigma_d \eta}{K_f}, \quad (1)$$

где σ_D — предел усталости надрезанного образца, имеющего в месте надреза диаметр $d > 10$ мм;

σ_d — предел усталости гладкого образца диаметром $d = 7-10$ мм;

η — коэффициент снижения предела усталости гладкого образца при переходе к $d > 7-10$ мм;

K_f — эффективный коэффициент концентрации, установленный из испытаний образцов с диаметром $d \geq 30-50$ мм.

Снижение предела усталости гладкого образца из-за влияния масштаба в некоторых [26] пособиях рекомендуется на 15—20%, т. е. принимать $\eta = 0.8-0.85$; в других пособиях рекомендуется пользоваться графиком Лера (фиг. 13) и выбирать величину η соответственно диаметру рассчитываемого вала.

Анализ опытных данных, приведенных в графике фиг. 14, дает основания принимать коэффициент η для углеродистых сталей с

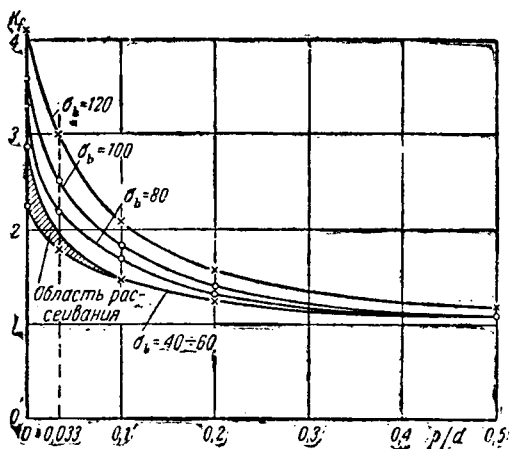
$\sigma_b = 40-60$ кг/мм², ориентируясь на верхнюю кривую (при $d=30-50$ мм), и для сталей легированных—на нижнюю.

Сведения об эффективных коэффициентах концентрации K_f , установленных при испытании образцов крупных сечений, крайне ограничены.

На фиг. 16 указаны данные Петерсона [21, 24], полученные им при испытании образцов с галтелью, а также с отверстием. Характеристика сталей, из которых были приготовлены образцы, приведена в табл. 11 и 13.

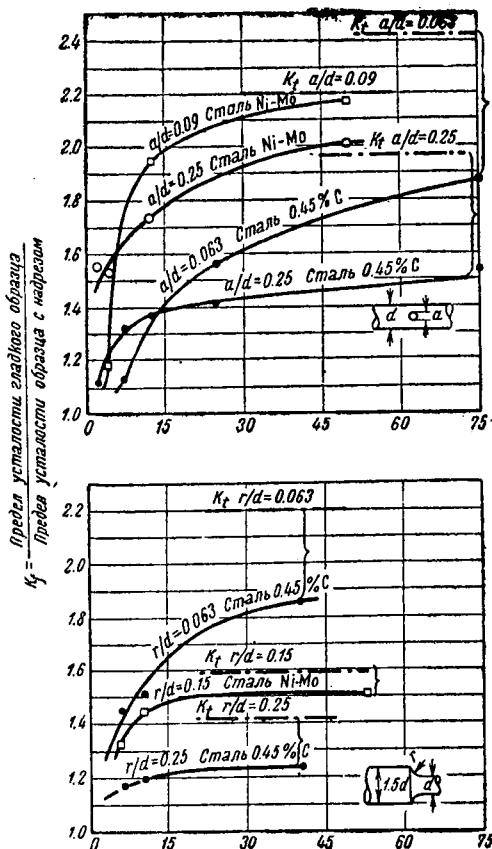
На фиг. 17 приведены значения K_f в зависимости от временного сопротивления по данным Лера [23]. Следует отметить, что эти данные получены Лером при испытании образцов с переходом сечений (галтель) от меньшего диаметра $d=30$ мм к большему $D=60$ мм (табл. 11 и 12).

Приведенные в этом графике значения K_f могут быть ориентировочно использованы в расчетах и для больших сечений, если при вычислении σ_D по уравнению (1) учесть соответствующее уменьшение



Фиг. 17.

при переходе к $d=30-50$ мм значения эффективных коэффициентов концентрации приближаются к теоретическим (полученным расчетом, оптическим методом изучения напряжений или методом измерения



Фиг. 16. K_f — коэффициент концентрации напряжений, определяемых оптическим методом или измерением деформаций; d — диаметр образца в миллиметрах.

σ_d [26]. Возможность использования данных, приведенных на фиг. 17, для расчета валов с диаметром более 30 мм основана на предположении о том, что эффект масштаба при наличии концентрации напряжений проявляется наиболее резко с увеличением диаметра образца до 30—50 мм. На это указывают также данные Петерсона, приведенные на фиг. 16, где наряду со значениями K_f для различных диаметров указаны также теоретические значения коэффициентов концентрации K_f .

Из рассмотрения этих данных следует, что уже при пе-

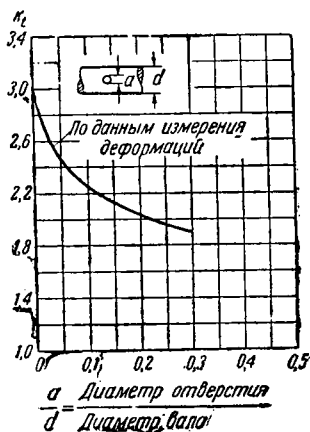
деформаций), т. е. что при увеличении диаметра до этих значений как бы исчерпывается возможность влияния масштаба на дальнейшее повышение K_f .

Указанное изменение K_f в зависимости от d нуждается еще, однако, в дальнейшем исследовании и подтверждении большим количеством опытных данных. Но и сейчас отмеченная тенденция к уменьшению разницы между K_f и K_t с увеличением масштаба представляет интерес, так как она показывает, что при отсутствии сведений о значении K_f влияние масштаба для некоторых форм может учитываться использованием в расчетах теоретических значений коэффициентов концентраций K_f .

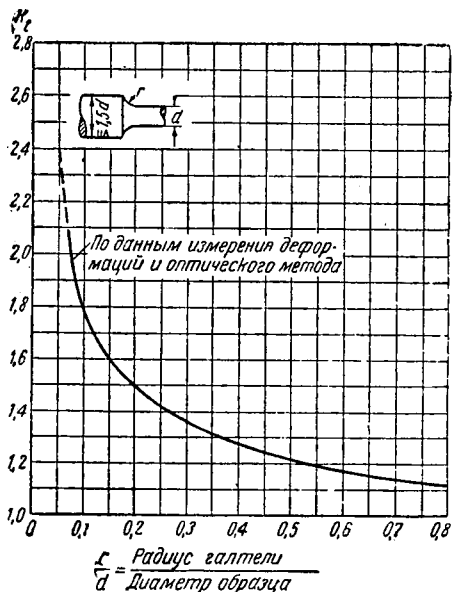
Как показывают данные, приведенные на фиг. 16, при использовании в расчетах значений K_t вместо K_f (для валов с диаметрами 30—50 мм) наименьшие отклонения от действительно необходимых запасов прочности можно ожидать в случае резких переходов сечений (малые значения $\frac{r}{d}$) и для сталей повышенной прочности.

На фиг. 18 и 19 приведены значения K_t для валов с галтелью и отверстием по данным измерения деформаций и результатам оптического метода исследования напряжений [24—25].

Для того чтобы проследить возможные отклонения опытных значений пределов усталости надрезанных образцов от вычисленных σ_D при исполь-



Фиг. 18.



Фиг. 19.

зовании имеющихся данных о K_f , η , σ_d , K_t , рассмотрим следующие примеры:

Пример 1.

Из испытаний на усталость гладких образцов малых размеров ($d=7-10$ мм) известно (табл. 11), что для углеродистой стали с 0.45% С и $\sigma_b=53.0$ кг/мм² предел усталости $\sigma_d=23.0$ кг/мм².

Рассчитывая вал, имеющий $d=40$ мм и галтель с $\frac{r}{d}=0.063$, и учитывая согласно графикам фиг. 14, 16 и 17, что $\eta=0.9$; $K_f=1.7$ (по Леру) и $K_f=1.85$ (по Петерсону), найдем:

$$\sigma_D = \frac{23.0 \cdot 0.9}{1.7} = 12.2 \text{ кг/мм}^2 \text{ (по Леру);}$$

$$\sigma_D = \frac{23.0 \cdot 0.9}{1.85} = 11.2 \text{ кг/мм}^2 \text{ (по Петерсону);}$$

$$\sigma_D = \frac{23.0 \cdot 0.9}{2.2} = 9.4 \text{ кг/мм}^2 \text{ (принимая } K_t \text{ вместо } K_f).$$

В результате испытаний такого же образца предел усталости был найден равным 12.3 кг/мм² (поверхность галтели полирована). Этот пример показывает, что использование K_t вместо K_f в данном случае дает увеличение запаса прочности на 20 — 30%.

Пример 2.

Определим теперь предел усталости образца, имеющего $d = 54$ мм и галтель с $\frac{r}{d} = 0.15$.

Образец изготовлен из никель-молибденовой стали с $\sigma_b = 70$ кг/мм². Предел усталости гладкого образца диаметром $d = 12$ мм, $\sigma_d = 37.0$ кг/мм². Учитывая опять, согласно графикам фиг. 14, 16 и 17, что $\eta = 0.8$, $K_f = 1.51$ (по Петерсону), $K_f = 1.43$ (по Леру) и $K_t = 1.59$, соответственно найдем:

$$\sigma_D = \frac{37.0 \cdot 0.8}{1.51} = 19.6 \text{ кг/мм}^2;$$

$$\sigma_D = \frac{37.0 \cdot 0.8}{1.43} = 20.7 \text{ кг/мм}^2;$$

$$\sigma_D = \frac{37.0 \cdot 0.8}{1.59} = 18.6 \text{ кг/мм}^2.$$

В действительности же в результате испытаний такого же образца предел усталости был найден равным 24.0 кг/мм² (поверхность галтели полирована). Этот пример показывает, что если при вычислении предела усталости образца с галтелью $\left(\frac{r}{d} = 0.15\right)$ диаметром 50 мм использование имеющихся для данной стали значений K_f увеличивает запас прочности на 15—20%, то использование K_t вместо K_f дает увеличение запаса прочности соответственно на 30%.

Таким образом, использование в расчетах K_t вместо K_f с целью учета влияния масштаба увеличивает запас прочности, и это увеличение для рассмотренных двух случаев составляет величину порядка 10—30%.

В настоящее время отсутствуют опытные данные, необходимые для того, чтобы установить, насколько использование в расчетах K_t вместо K_f , как способ оценки влияния масштаба, является эффективным, и прежде всего для сталей повышенной прочности, при резких переходах сечений и при значениях диаметра образцов более 30—50 мм.

IV. О ПРИЧИНАХ, ОБУСЛОВЛИВАЮЩИХ ЗАВИСИМОСТЬ ПРОЧНОСТИ ОТ АБСОЛЮТНЫХ РАЗМЕРОВ

1. Вопрос о причинах влияния абсолютных размеров на прочность не получил еще сколько-нибудь обоснованного объяснения. Анализируя различные точки зрения и предположения, высказанные по этому вопросу, можно указать две возможных причины, обуславливающие наличие масштабного эффекта:

1) влияние факторов, связанных с технологией металла (неоднородность его свойств, упрочнение поверхностных слоев в результате обработки и др.);

2) влияние градиента напряжений при их неравномерном распределении и концентрации.

По вопросу о возможном влиянии наклепа, вызванного механической обработкой, и изменения эффекта упрочнения поверхностного слоя в связи с изменением масштаба имеется весьма ограниченное количество данных. Известно, однако, что среди факторов, обуславливающих прочность при переменных напряжениях, решающее значение принадлежит свойствам поверхностного слоя.

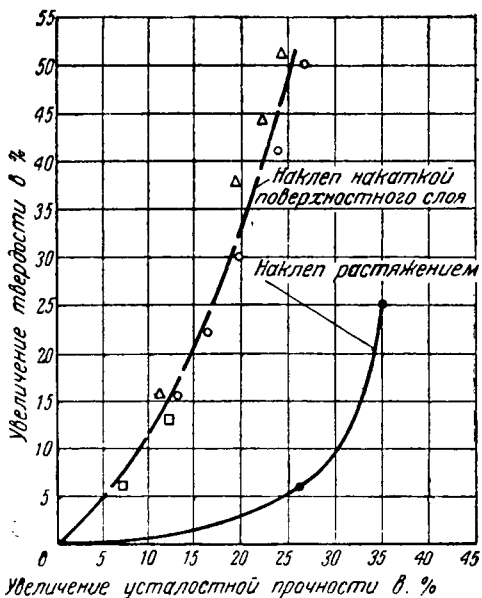
Данные о влиянии на прочность абсолютных размеров при различном состоянии поверхности уже были приведены выше (табл. 4) и приводятся в ряде других работ [34, 35]. Что же касается влияния абсолютных размеров в связи с различными свойствами поверхностного слоя, то этот вопрос почти не исследован.

Как указывает Н. Н. Давиденков [27], удаление поверхностного наклепанного слоя глубоким травлением в концентрированной азотной кислоте или рекристаллизацией путем отжига в вакууме заметно снижает хладноломкость металла.

Мур [17], произведя отжиг надрезанных образцов из мягкой стали (SAE — 1020) перед испытанием на усталость при изгибе вращающихся образцов не обнаружил снижения прочности из-за влияния масштаба.

Предел усталости, полученный на образце, имеющем $d = 12$ мм, оказался таким же (19 кг/мм^2), как и полученный на образце с $d = 47$ мм. Результаты этих испытаний как будто дают прямое указание о связи масштабного эффекта с действием поверхностного наклепа, хотя и установленным пока только на мягкой стали.

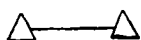
Но если снижение прочности объяснять только влиянием наклепа, то остается неясным вопрос: почему вредное влияние наклепа должно увеличиваться с ростом абсолютных размеров и не следует ли в связи с этим сделать обратное предположение о полезном влиянии наклепа на прочность при переменных напряжениях, уменьшающемся с ростом абсолютных размеров, т. е. с уменьшением отношения поверхности к объему? В пользу этого последнего предположения говорят известные факты о повышении усталостной прочности осей с помощью накатки подступичной части, т. е. с помощью искусственного упрочнения поверхностных слоев путем наклепа. Усталостная прочность наклепанных гладких образцов диаметром 2,0, 25,0 и 50,0 мм специально



Фиг. 20.

исследовалась Хорджером [12]. Наклеп поверхностных слоев создавался путем накатки. Одновременно были испытаны образцы, наклепанные растяжением. Результаты этого исследования, приведенные на фиг. 20 и 21, совершенно определенно указывают, что повышение степени наклепа увеличивает предел усталости, а также твердость.

Давление ролика при накатке в кг	Усталостная прочность		Твердость поверхностного слоя	
	кг/мм ²	%	По Виккерсу	%



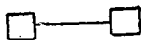
Образец диаметром 25.4 мм

0	25.2	100	149	100
96	28.0	111	172	115
510	30.2	119	205	137
725	30.9	122	215	144
985	31.3	124	225	151



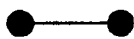
Образец диаметром 51 мм

0	24.2	100	153	100
272	27.2	113	177	115
545	28.1	116	187	122
1125	28.9	119	199	130
2040	30.0	124	216	141
2900	30.6	127	230	150



Образец диаметром 2.03 мм, вырезанный из образца диаметром 50 мм

Некатанный	27.0	100	153	100
Накатанный	30.2	112	173	113
Накатанный	28.9	107	162	106



Образец диаметром 7.5 мм из заготовки, наклепанной растяжением

Поперечное сужение			По Бриелю	
0	28.0	100	183	100
8%	35.0	126	194	126
17%	38.0	135	228	135

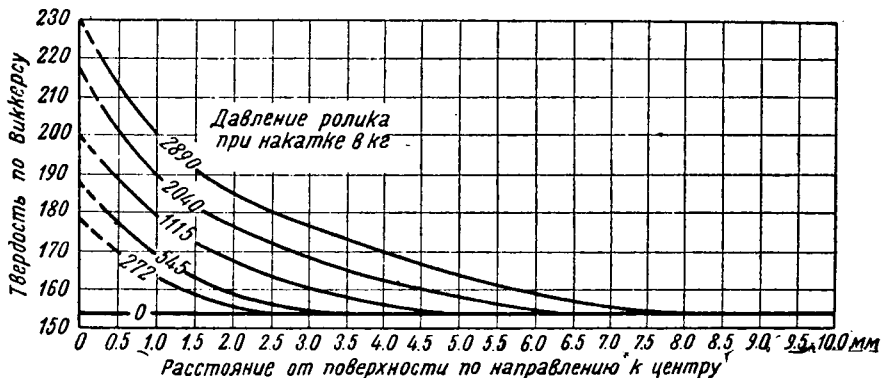
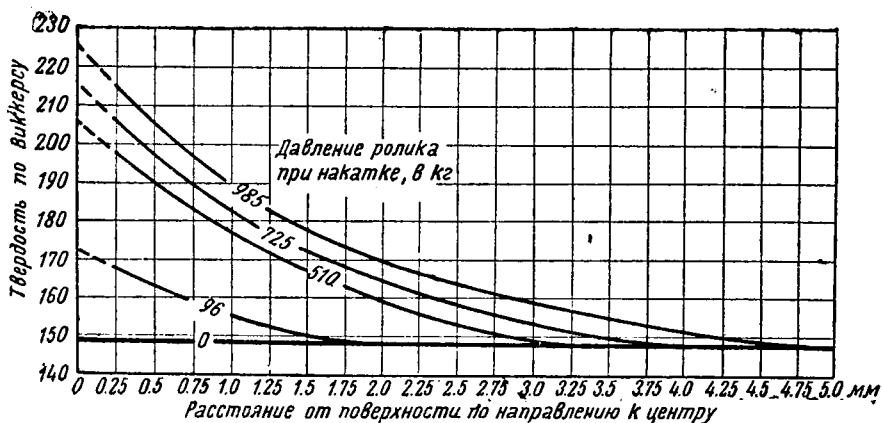
При толщине наклепанного слоя $\delta = 5$ мм (образец $d = 25$ мм) предел усталости увеличился на 24%, а при $d = 50$ мм и $\delta = 8,1$ мм — на 27%.

И если окажется справедливым предположение о том, что влияние абсолютных размеров есть в значительной степени результат искусственно повышенной прочности образцов малых размеров, то весь вопрос о связи прочности и масштаба сможет получить простое решение. Установление характеристики прочности металла, в меньшей степени зависящей от абсолютных размеров, в этом случае могло бы оказаться возможным и по испытаниям образцов малых размеров, с обязательным, однако, условием предварительного перед испытанием удаления поверхностного наклепа.

Выяснение вопроса о роли и участии поверхностного наклепа в общем влиянии масштаба на прочность требует всестороннего исследования в самое ближайшее время.

Однако объяснение причин существования масштабного эффекта, ограничивающееся рассмотрением возможного влияния только поверхностного наклепа, является односторонним и необъективным.

Моррисон [28] своими тщательно проведенными опытами совсем недавно показал существование масштабного эффекта и при отсутствии поверхностного наклепа, снятого путем длительного отжига в вакуумной печи. Полученные им результаты испытаний образцов из среднеуглеродистой стали (0.21 C) при статическом изгибе и кручении приведены в графиках на фиг. 22 и 23. Из рассмотрения этих



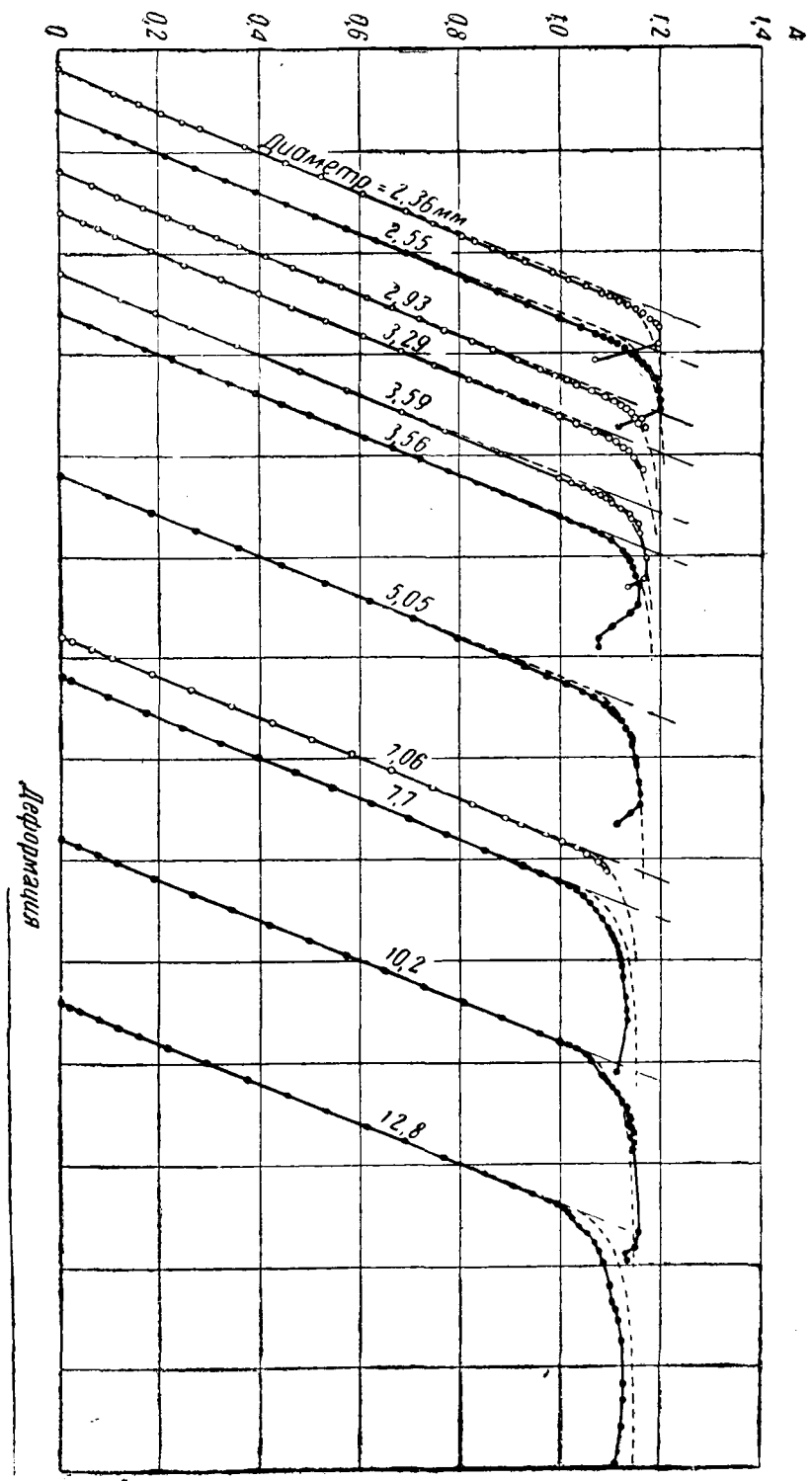
Фиг. 21.

Образцы диаметром 25 мм			Образцы диаметром 50 мм		
Давление ролика (кг)	Твердость поверхностного слоя, по Виккерсу		Давление ролика (кг)	Твердость поверхностного слоя, по Виккерсу	
	число	%		число	%
0	149	100	0	153	100
96	172	115	272	177	115
510	205	137	545	187	122
725	215	144	1115	199	130
985	225	151	2040	216	141
			2890	230	150

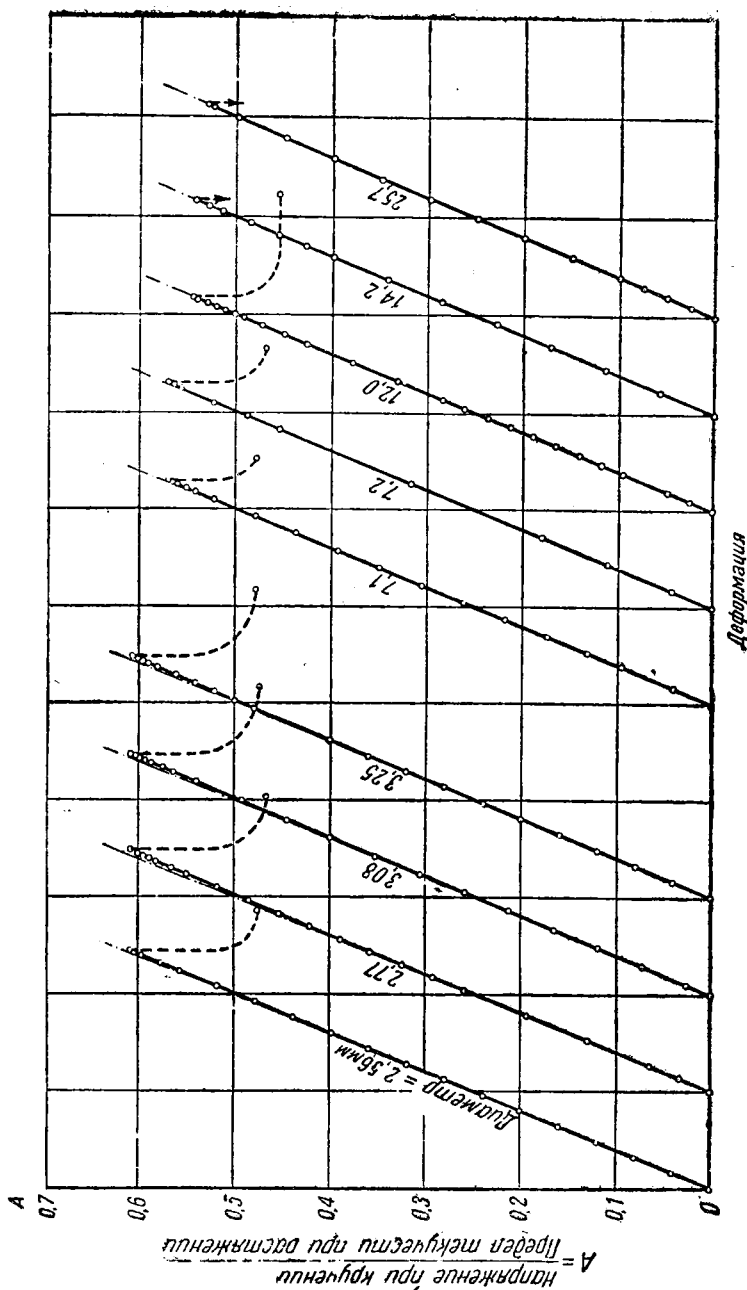
данных видно, что влияние масштаба проявляется как в области начала текучести, так и особенно в области пластических деформаций. Следовательно, существуют еще какие-то факторы, кроме наклепа поверхностного слоя, которые также способны влиять на прочность при изменении абсолютных размеров.

Изменение неоднородности свойств металла за счет вполне вероятного увеличения с ростом абсолютных размеров неметаллических включений, пустот и т. п., являющихся очагами концентрации напряжений и служащих наиболее вероятными источниками образования трещин и разрушения металла при переменных нагрузках, также не может быть оставлено без внимания. Об изменении однородности металла и его свойств с ростом абсолютных размеров можно судить хотя бы по данным, приведенным на фиг. 1, а также по результатам анализа поковок диаметром 150 мм, полученным лабораторией Тимкен и указанным на стр. 142. На это же указывает и отмеченное уже рассеяние данных на диаграмме результатов испытаний образцов и деталей крупных сечений.

Напряжение при изгибе
 $A = \frac{\text{Предел текучести при растяжении}}$



Фиг. 22.



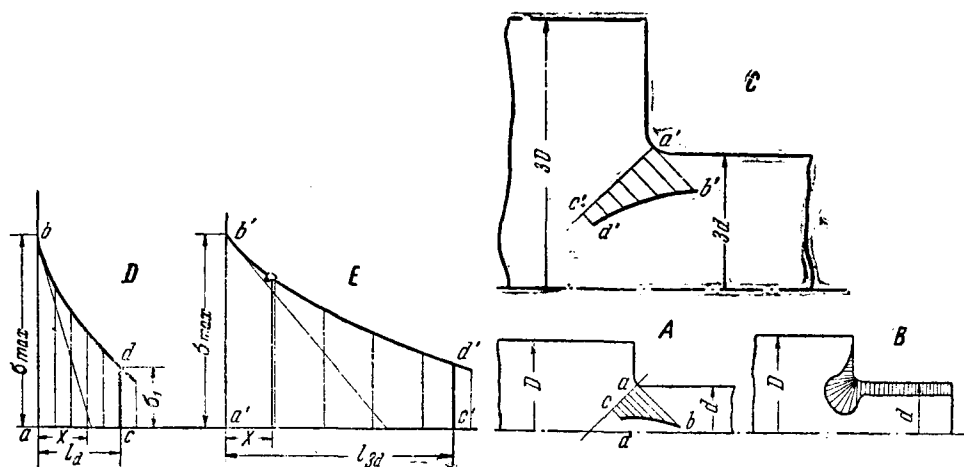
Фиг. 23.

2. Влияние масштабного эффекта наблюдалось различными исследователями преимущественно в условиях неравномерного распределения напряжений (изгиб, кручение, концентрация напряжений). В связи с этим казалось вполне естественным объяснить наблюдаемое явление возможным влиянием градиента напряжений.

Однако абсолютная величина градиента, изменяющаяся обратно пропорционально изменению размеров, не находится в прямой зависимости с наблюдаемым изменением прочности, которое, повидимому, подчинено более сложной зависимости.

Возможное влияние градиента можно проследить, рассматривая напряженность металла в каком-либо микрообъеме, расположенном на расстоянии X (фиг. 24, D и E) от крайней зоны. В двух образцах

(фиг. 24, А и С), отличающихся только масштабом, с одинаковым напряжением в крайних волокнах, — напряженность металла в этом микрообъеме будет различной.



Фиг. 24.

Совершенно очевидно, что при большем градиенте (фиг. 24, А и D) отдельные кристаллы этого объема будут менее напряжены, чем в случае малого значения градиента (фиг. 24, С и E). И, следовательно, условия для разрушения кристаллов и образования трещины за счет внутрикристаллических и междукристаллических сдвигов, а также вследствие концентрации напряжений в местах посторонних включений будут более благоприятны при меньшем значении градиента (фиг. 24, E), т. е. в образце, имеющем большие абсолютные размеры.

Таким образом, влияние градиента может оказаться различным, если в рассматриваемом микрообъеме будет находиться большее или меньшее количество кристаллитов меньшей или большей величины.

С влиянием градиента может быть связано также и упрочнение металла в зоне пиков напряжений при их концентрации (Кунце). Вследствие этого максимальное напряжение почти всегда оказывается больше предела усталости, устанавливаемого при отсутствии концентрации напряжений. Градиентом в этом случае может быть обусловлена большая или меньшая способность металла, расположенного в зоне пиков, к пластическому деформированию. Однако природа упрочнения металла в зоне концентрации напряжений (или их перераспределения вследствие пластической деформации — по Туму) еще недостаточно изучена. Вполне возможно, что, кроме градиента, это явление связано также и с объемностью напряженного состояния.

V. ПОПЫТКИ УСТАНОВЛЕНИЯ ЗАВИСИМОСТИ ПРОЧНОСТИ ОТ АБСОЛЮТНЫХ РАЗМЕРОВ В СВЯЗИ С ГРАДИЕНТОМ НАПРЯЖЕНИЙ

1. Одна из первых попыток связать зависимость усталостной прочности от абсолютных размеров с градиентом напряжений принадлежит Н. Н. Афанасьеву [29], который в 1936 г. предложил выразить эту зависимость следующим образом:

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{K} \left(\frac{z}{\Lambda} + 1 \right)^{\frac{1}{b}}, \quad (2)$$

где

- σ_n — номинальное (расчетное) напряжение;
 K — коэффициент концентрации (рассчитанный теоретически или измеренный);
 σ_0 — предел усталости гладкого образца;
 A и b — константы материала, определяемые из испытаний на усталость,
 z — относительный градиент напряжений;

$$z = \frac{d\sigma}{dx} : \sigma_n;$$
$$x = r;$$

абсолютная величина градиента $z_1 = \frac{d\sigma}{dx}$ может быть получена, если

известен закон распределения напряжений по сечению.

Исходя из предположения о распределении напряжений по гиперболическому закону, Н. Н. Афанасьев получил для круглого надрезанного образца при изгибе:

$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{\sigma_n}{Pr} \left(K_0 + \frac{K_0 - 1 + e}{\alpha} \right), \quad (3)$$

где

- r — радиус образца;
 P , e и α — коэффициенты, характеризующие форму образца и надреза;
 K_0 — коэффициент концентрации для плоского растягиваемого образца¹.

Из уравнений (2) и (3) следует, что предел усталости надрезанного образца (σ_n) должен увеличиваться с увеличением относительного градиента z или с уменьшением диаметра образца при прочих равных условиях.

Анализ опытных данных, произведенный Н. Н. Афанасьевым в целях проверки предложенной зависимости, показал, что при уменьшении диаметра образца от 27 до 7.5 мм повышение прочности за счет влияния градиента напряжений не должно превышать 5%.

По данным Фаульхабера, полученным из испытаний различных марок сталей, увеличение пределов усталости при изменении диаметров в том же интервале, т. е. от 27 до 7.5 мм, составляло от 7.0 до 15.5%. Такое резкое расхождение указывает, как справедливо отмечает и сам Н. Н. Афанасьев, что зависимость прочности от абсолютных размеров должна быть поставлена в связь не только с влиянием градиента, но и другими факторами (напряженного состояния, технологии), обуславливающими прочность металла при переменных нагрузках.

2. Баквальтер и Хорджер [18] в 1937 г. также высказали предположение о связи прочности, абсолютных размеров и градиента напряжений.

Величина градиента может быть установлена для различных форм по результатам измерения напряжений оптическим методом. Данные о градиенте напряжений для стержня с галтелью (при различных $\frac{r}{d}$)

¹ В упомянутых выше работах Н. Н. Афанасьева, а также в статье Н. Н. Давиденкова [30] указан способ приближенного расчета K_0 для плоских и круглых образцов, а также способ определения коэффициентов P , e и α и констант материала A и b .

приведены в графиках на фиг. 25. Приняв величину градиента равной единице для галтели с $\frac{r}{d}=0,5$, Баквальтер и Хорджер предложили относить величины градиентов для всех других форм к градиенту, полученному на галтели с $\frac{r}{d}=0,5$. На фиг. 26 показан график

изменения относительных градиентов. В рассматриваемой зависимости предложено учитывать влияние градиента не только в направлении, перпендикулярном нейтральной оси, но и в направлении аксиальном (фиг. 24, В). При сравнении валов одинакового диаметра, но имеющих галтели с различным отношением $\frac{r}{d}$, принимается, что:

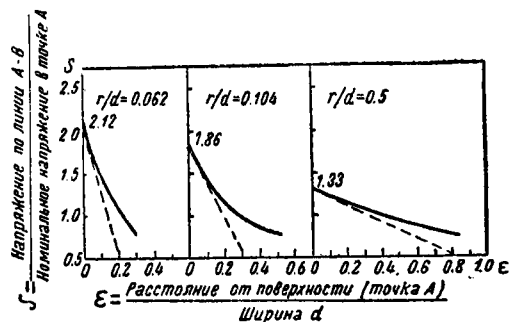
1) в направлении, перпендикулярном оси, градиент напряжений изменяется в той зависимости, которая представлена на фиг. 25;

2) в направлении аксиальном градиент изменяется таким же образом;

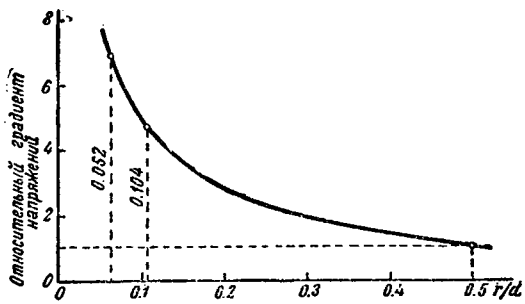
3) в направлении тангенциальном величина градиента принимается одинаковой для всех форм галтелей.

При сравнении валов с одинаковой формой галтели

($\frac{r}{d}$), но различных диаметров Баквальтер и Хорджер приняли величину относительного градиента изменяющейся пропорционально кубу отношений диаметров.



Фиг. 25.



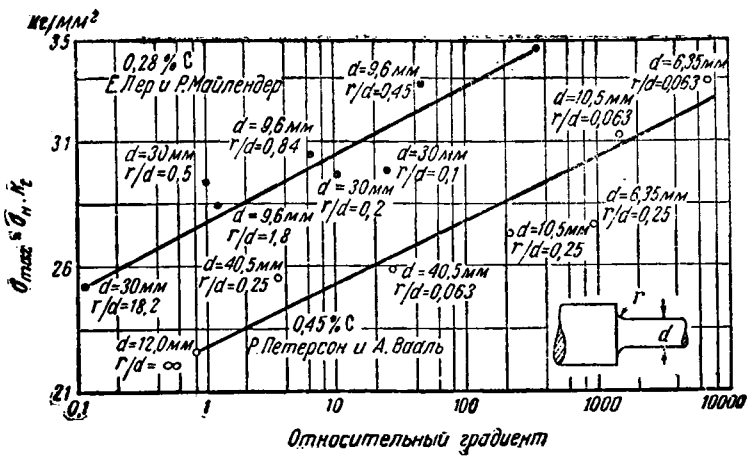
Фиг. 26.

Из рассмотрения этого графика следует, что влияние градиента на изменение прочности больше у мягкой стали ($C=0,28$) и что снижение прочности благодаря эффекту масштаба более значительно у более прочной стали.

3. Петерсон в своей недавно опубликованной работе [31] сделал попытку выразить изменение усталостной прочности в зависимости от количества зерен, заключенных в некотором объеме, определяемом участком 5%-ного снижения σ_{\max} (фиг. 28).

На фиг. 29 приведен график этой зависимости. Здесь по оси ординат отложены значения коэффициента чувствительности к надрезу

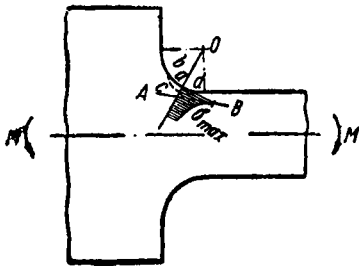
Таким образом, зависимость прочности от размеров поставлена в связь с величиной относительного градиента, изменяющейся пропорционально кубу масштаба. Основываясь на сделанных допущениях и используя опытные данные Лера [14] и Петерсона [24], авторы рассматриваемой работы построили график зависимости предельного напряжения от относительного градиента, показанный на фиг. 27.



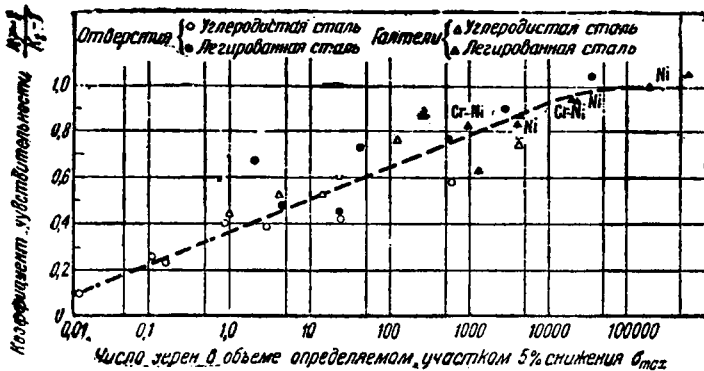
Фиг. 27.

$q = \frac{K_f - 1}{K_f - 1}$, а по оси абсцисс — количество зерен, заключенных в указанном объеме. Величина K_f (коэффициента концентрации) находится по данным измерений или теоретическим расчетом. Количество зерен подсчитывается по фотографии микршлифа.

Что же касается объема, заключенного в зоне действия напряжений от σ_{max} до $0.95 \sigma_{max}$, то его величина устанавливается по данным исследования напряжений оптическим методом и практически сводится к определению участка снижения σ_{max} в пределах 5% по направлению ac и bd (фиг. 28).



Фиг. 28.



Фиг. 29.

В представленной таким образом зависимости выражено совместное влияние на усталостную прочность эффектов формы и масштаба, как функции количества зерен, обусловленного градиентом напряжений. При прочих равных условиях, с увеличением градиента участок 5% снижения σ_{max} должен уменьшаться, а следовательно, должно уменьшаться и количество зерен в объеме, определяемом этим участком. Но уменьшению количества зерен по предложенной Петерсоном зависимости соответствует уменьшение q , или, при постоянном K_b , увеличение предела усталости надрезанного образца σ_r . Таким

образом, эта зависимость качественно согласуется с наблюдаемым в действительности повышением предела усталости при уменьшении абсолютных размеров (увеличение градиента) и уменьшении площади зерна [32].

На основании работ Баквальтера, Хорджера [18] и Валя, Петерсон видоизменил рассмотренную выше зависимость и представил ее в виде, показанном на фиг. 30, где по оси абсцисс отложена величина

$$A = \frac{G_r \Delta}{\sigma_f}, \text{ а по оси ординат величина коэффициента } q.$$

Здесь $G_r = \frac{d\sigma}{dr}$ — градиент напряжений; r — размер, характеризующий

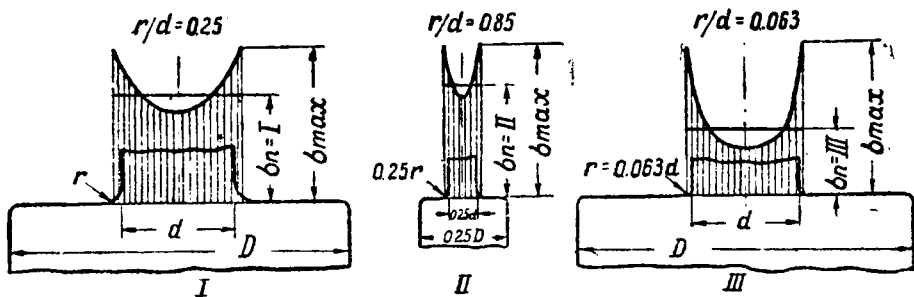
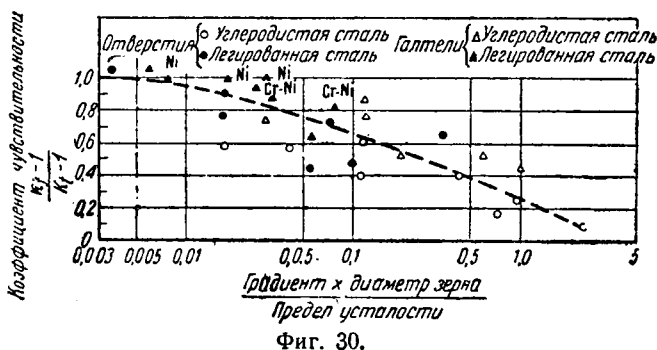
форму надреза (например радиус закругления галтели или радиус поперечного отверстия); Δ — диаметр зерна; σ_f — предел усталости надрезанного образца. Градиент напряжений для каждой формы находится оптическим методом.

Так, например, Валь установил [31]:

для валов с галтелью $\frac{d\sigma}{dr} = 2.6 \frac{\sigma_{\max}}{r}$;

для валов с поперечным отверстием $\frac{d\sigma}{dr} = 2.3 \frac{\sigma_{\max}}{r}$.

Рассмотрение приведенных графиков не позволяет еще утверждать, что предложенная зависимость является вполне определенной и что ею можно воспользоваться в расчетах для определения q или K_f (отклонения составляют $\pm 20 - 25\%$).



Фиг. 31.

Несоответствие зависимости Петерсона некоторым опытным даным видно из следующего примера. Соотношение пределов усталости образцов, выполненных из одного и того же металла и показанных на фиг. 31, может быть выражено следующим неравенством:

$$\sigma_{II} > \sigma_I > \sigma_{III},$$

или

$$q_1 < q_2 < q_3,$$

так как если σ_1 — предел усталости, полученный на образце I, то с уменьшением масштаба предел усталости, полученный на образце II, окажется $\sigma_{II} > \sigma_1$. Изменяя форму надреза в образце I так, как это показано на образце III, т. е. увеличивая концентрацию напряжений за счет изменения $\frac{r}{d}$, получим $\sigma_1 > \sigma_3$. Указанное неравенство напряжений при изменении формы и масштаба подтверждено значительным количеством опытных данных, в том числе и данными, полученными Петерсоном. Так, по результатам одной из опубликованных работ Петерсона [24] имеем (табл. 16):

Таблица 16

№ образцов	d мм	$\frac{r}{d}$	r мм	K_t	σ_f	q	σ_{\max} кг/мм ²	Примечание
I	41.0	0.25	10.25	1.42	18.6	0.58	27.0	
II	10.4	0.25	2.6	1.42	19.5	0.4	27.7	
III	41.0	0.063	2.58	2.2	12.3	0.71	27.0	

Согласно приведенной выше зависимости для градиента напряжений

$$\frac{d\sigma}{dr} = 2.6 \frac{\sigma_{\max}}{r}, \text{ соответственно, имеем:}$$

$$\text{Образец I: } \frac{d\sigma}{dr} = \frac{2.6 \cdot 27}{10.25} = 6.85,$$

$$\text{„ II: } \frac{d\sigma}{dr} = \frac{2.6 \cdot 27.7}{2.6} = 27.7,$$

$$\text{„ III: } \frac{d\sigma}{dr} = \frac{2.6 \cdot 27}{2.58} = 27.2,$$

т. е. практически градиенты напряжений в галтелях образцов II и III равны, а следовательно, будут равны и участки 5%-ного снижения σ_{\max} , определяющие объемы, по которым устанавливается количество зерен в вышеприведенной зависимости. Так как образцы II и III выполнены из металла одного и того же качества, то в равных объемах должно быть и равное количество зерен, а следовательно, согласно данным графика фиг. 29, должно быть:

$$q_{II} = q_{III}$$

Опыт этого не подтверждает, что видно из рассмотрения данных, приведенных в табл. 11, 12, 13, 14, 15.

Таким образом, ни одна из рассмотренных попыток выразить закономерность изменения прочности в связи с влиянием абсолютных размеров не дала результатов, позволяющих оценить это влияние в соответствии с данными опытов.

ВЫВОДЫ

1. Имеющиеся опытные данные, полученные из испытаний преимущественно образцов и деталей простейших форм (осей), указывают на наличие существенного влияния абсолютных размеров на прочность

при переменных напряжениях. С увеличением абсолютных размеров в интервале всего лишь от 7 до 30 мм снижение прочности может достигь 15—35%, а при дальнейшем увеличении размеров и 40—50%.

2. До последнего времени не дано обоснованного объяснения причин, вызывающих влияние абсолютных размеров на прочность. Результаты различных исследований позволяют лишь предположить наличие связи масштабного эффекта со следующими факторами:

- 1) неоднородностью свойств металла;
- 2) наклепом поверхностных слоев, вызванным механической обработкой;

- 3) влиянием градиента напряжений.

Роль и влияние каждого из перечисленных факторов в изменении прочности при переменных напряжениях до последнего времени почти не исследовались.

3. До тех пор пока не будут установлены причины существования масштабного эффекта и пока не будет найден способ его устранения, с влиянием абсолютных размеров необходимо считаться и учитывать его в расчетах при определении допускаемых напряжений.

4. Имеющиеся опытные данные позволяют с достаточной точностью оценить влияние абсолютных размеров на усталостную прочность по испытаниям гладких полированных образцов из углеродистых сталей в интервале изменения размеров (по диаметру) от 7—10 до 50 мм. Снижение прочности при этом не превышает 15%.

5. Для оценки этого влияния на прочность гладких образцов из высокопрочных сталей в том же интервале изменения размеров имеющиеся опытные данные недостаточны, но позволяют предположить, что в этом случае до накопления большего количества данных может быть использована зависимость, предложенная Лером.

6. Зависимость пределов усталости от абсолютных размеров надрезанных образцов по немногочисленным опытным данным может быть оценена лишь качественно. При надрезах, обеспечивающих плавный переход сечений, влияние абсолютных размеров оказывается таким же, как и у гладких образцов. При надрезах с резким переходом сечений увеличение абсолютных размеров образцов из углеродистых сталей вызывает снижение прочности до 30% и образцов из легированных сталей до 40%—в интервале изменения диаметров от 7 до 50 мм.

7. Имеющиеся опытные данные позволяют констатировать полное отсутствие сведений о влиянии абсолютных размеров в следующих весьма важных для практики случаях:

- а) изгиб с вращением образцов диаметром более 30 мм из легированных сталей; для образцов из углеродистой стали, превышающих по диаметру 50 мм, имеется совершенно недостаточное количество данных;

- б) кручение образцов из углеродистых сталей и образцов с диаметром более 45 мм из легированных сталей;

- в) сложное напряженное состояние (изгиб — кручение и др.);

- г) случаи сложной конфигурации (наложение эффекта концентрации от нескольких факторов формы).

Исследование влияния абсолютных размеров на прочность в этих случаях и накопление данных, особенно по пп. „а“ и „б“, должно стать задачей ближайшего времени.

8. Дальнейшее исследование причин, обуславливающих появление масштабного эффекта, должно быть связано с изучением:

- а) роли неоднородности свойств металла в изменении прочности с ростом абсолютных размеров (по диаметру — от 30 мм и выше);

- б) влияния остаточных напряжений;

в) влияния абсолютных размеров на прочность в связи со свойствами поверхностного слоя;

г) влияния зернистости структуры в связи с эффектом масштаба;

д) влияния градиента напряжений при изменении формы и масштаба.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хрущев М. М. и др. Материалы деталей автомобилей и тракторов. Машгиз стр. 215—220, 1940.
2. Kuntze W. Z. Physik, Bd. 74, S. 45, 1932.
3. Давиденков Н. Н. Динамические испытания металлов. ОНТИ, стр. 243—248, 1936.
4. Docherty I. G. Slow bending tests on large notched bars. Engineering, № 3606, p. 211, 1935.
5. Haigh B. Electric welding as an integral part of structural design. Engineering, № 3860, p. 23, 1940.
6. Соос Г. и др. Influence of size on the fracture of notched bar tests pieces. Engineering, № 3880, p. 530, 1940; Engineering, № 3882, p. 570, 1940; № 3878, p. 490, 1940; № 3609, p. 285, 1935.
7. Lurenbaum K. Stand und Ziele der Forschung zur Frage der Gestaltfestigkeit der Kurbewelle. Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung. Jahrbuch, S. 348, 1936.
8. Lehr E. Ermittlung der Dauerhaltbarkeit von Formelementen und Maschinenteilen unter Betriebsbedingungen. Prüfen und Messen, Berlin, S. 156—162, 1937.
9. Peterson R. Fatigue tests of large specimen. Proceedings ASTM, vol. 29, p. 371, 1929.
10. Peterson R. Fatigue Tests of Small specimen with particular to size effect. Transactions A. S. for Steel treating, vol. 18, p. 1041, 1930.
11. Faulhaber R. Ueber den Einfluss des Probenstabdurchmessers auf die Biegeschwingsfestigkeit von Stahl. Mitteilungen aus dem Forschungsinstitut der vereinigten Stahlwerke Aktiengesellschaft, Dortmund, vol. 3. Июнь, 1933.
12. Horger O. 1) Effect of Surface rolling on the Fatigue Strength of Steel, Journal of Appl. Mech. № 57, p. A-128, 1935.
2) Increasing the Fatigue Strength of Pressfitted Axle Assemblies by surface rolling. Journal of Appl. Mech., № 3, p. A-91, 1936.
13. Mailänder R. und Bawersfeeld W. Einfluss der Probengröße und Probenform auf die Dreh-Schwingsfestigkeit von Stahl. Technische Mitteilungen Krupp, H. 5, S. 143, Dec. 1937.
14. Lehr E. und Mailänder R. Einfluss von Hohlkohlern an abgesetzten Wellen auf die Biegewechselfestigkeit. VDI, Bd. 79, № 33, S. 1005—1011, 1935.
15. Buckwalter T. and Horger O. 1) Locomotive Axle Testing. Transactions ASME, vol. 60, № 4, 335—344, 1938.
2) Modern Locomotive and Axle testing Equipment, Transactions ASME, vol. 59, № 3, p. 225, 1937.
16. Horgen O. and Neifert. Fatigue Strength of Large Machined Forgings. Heat Heating and Forging, № 7, p. 329—339, 1939.
17. Moor H. and Jordan R. Stress concentration in Steel shafts with Semicircular notches. Proceedings of Fifth International Congress for Applied Mechanics.
18. Buckwalter and Horger O. Investigation of Fatigue Strength of Axles Press-Fits, Surface rollings and Effect of Size. Transactions of American Society for Metals, March, vol. 25, p. 229, 1937.
19. Lehr E. Archiv für das Eisenhüttenwesen № 1, S. 35, 1935.
20. Beck A. Magnesium und seine Legierungen, S. 297, 1939.
21. Peterson R. Model Testing as applied to Strength of materials. Transactions ASME, APM, p. 55—11, 1935.
22. Hoodremont E. Linien in der Entwicklung legierter Stähle, Technische Mitteilungen Krupp, № 3, S. 45, 1939.
23. Bautz W., Lehr E. Aussprache zu den Vorträgen F. Röscher, W. Kuntze und E. Lehr. Bericht über die Tagung des Fachausschusses für Maschinenelemente in Aachen, S. 29, 1935—1936.
24. Peterson R. Two and three-dimensional cases of Stress Concentration and Comparison with Fatigue tests. Journal of Appl. Mech. vol. 3, № 1, A-15—A-22, 1936.
25. Horger O. and Maulbetsch S. Discussion. Journal of Appl. Mech., № 4, p. 148, 1936.
26. Серенсен С. В. 1) Прочность металлов и расчет деталей машин, 1937; 2) Динамическая прочность в машиностроении. Машгиз, 1940.
27. Давиденков Н. Н. Проблема удара в металловедении. Изд. АН СССР, стр. 71—75, 1938.
28. Morrison J. The Jeld of Mild Steel with Particular reference to the effect of Size of Specimen. Proceedings Institute Mechanical Engineers, vol. 142. № 3, p. 193, 1940.

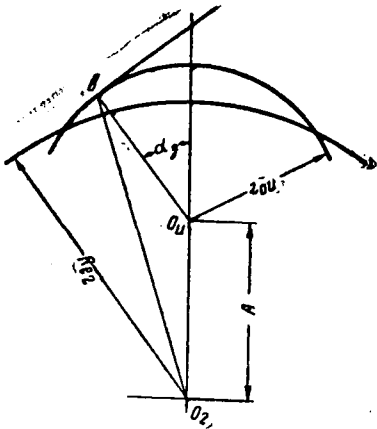
29. Афанасьев Н. Н. 1) Приближенный расчет коэффициента концентрации напряжений, Журнал технич. физики, 1936, т. VI, вып. 7, стр. 1153—1161; 2) О пределе усталости образцов с выточкой, Журнал технич. физики, т. VI, вып. 8, стр. 1393—1402, 1936.
 30. Давиденков Н. Н. Опытное определение пределов усталости валовой ст. 5 (повышенной), Нитяжмаш, Сборник трудов лаборатории исследования машин и деталей. Машгиз, стр. 20—27, 1939.
 31. Peterson R. 1) Methods correlating data from fatigue tests of Stress concentration Specimens. Contributions to the Mechanics of Solids dedicated to Stephen Timoshenko by his friends on the occasion of his Sixtieth birthday anniversary, p. 179, 1938.
2) Orton ... nominal Stress inadequate. Machine Design, № 8, p. 61, 102, 1940.
 32. Lequis W. Biegeschwingsfestigkeit und Kerbempfindlichkeit, 1934.
 33. Peterson R. and Wahl A. Fatigue of shafts at fitted members with a related photoelastic analysis. Journal of Appl Mech., vol. 3, № 1, March, 1936.
 34. Серенсен С. В. О влиянии чистоты обработки на сопротивляемость металла переменным нагрузкам. Вестник металлопромышленности, № 1, стр. 35, 1940.
 35. Peterson R. Stress concentration phenomenon in Fatigue of metals. Transactions ASME, APM, 55-19, p. 157, 1933.
-

ОСОБЕННОСТИ КОНСТРУИРОВАНИЯ И НАРЕЗАНИЯ ЗУБЧАТЫХ КОЛЕС ВНУТРЕННЕГО ЗАЦЕПЛЕНИЯ

При конструировании или выборе долбяка для обработки внутренних зубьев шестерни нужно учесть различие между нарезанием колес с внешним и внутренним зубом. Долбяк, удовлетворительно обрабатывающий колесо с внешними зубьями, может оказаться непригодным для обработки колеса с внутренними зубьями.

Во втором случае могут возникнуть явления, влекущие за собой срезание части эвольвентного профиля зубьев.

Рассмотрим некоторые из этих явлений.



Фиг. 1.

1. Если колесо нарезается малым долбяком, возможно срезание части эвольвентного профиля зубьев, прилегающей к окружности выступов колеса. Явление это может произойти в том случае, если при изготовлении (нарезании) долбяка инструментом (имеющим размеры колеса) последний подрезал бы зуб долбяка, т. е. срезал бы часть его эвольвентного профиля у корня зуба. Это будет иметь место при пересечении основной окружности долбяка окружностью выступов колеса ниже точки касания линии зацепления с основной окружностью долбяка, т. е. если $R_{e2} < O_2b$ (фиг. 1);

$$O_2b = \sqrt{r_{ou}^2 + A^2 + 2r_{ou}A \cos \alpha_3} \quad , \quad (1)$$

где:

- R_{e2} —радиус окружности выступов колеса,
- r_{ou} —радиус основной окружности долбяка,
- A —межцентровое расстояние при нарезании,
- α_3 —угол зацепления при нарезании.

Чтобы избежать срезания профиля, нужно увеличить число зубьев долбяка или применить долбяк с большим сдвигом профиля.

2. Если число зубьев долбяка не сильно разнится от числа зубьев колеса, может произойти срезание части эвольвентного профиля,

прилегающей к окружности выступов, при входе зубьев в зацепление и выходе из него. Это явление описано в книге Buckingham „Manual of gear design“, ч. II, 1935 г., и в статьях проф. В. В. Добровольского („Вестник металлопромышленности“, № 6 за 1937 г.) и Я. И. Дикера („Машиностроитель“, № 9/10 за 1937 г.). Не останавливаясь на сущности этого явления, приведем формулы, которым оно подчиняется.

Срезание профиля не произойдет, если будет выдержано следующее неравенство:

$$A (\sin \alpha_3 - \alpha_3 \cos \alpha_3) + r_{ou} \left(\arccos \frac{R_{e_2}^2 - R_{eu}^2 - A^2}{2AR_{eu}} + \right. \\ \left. + \operatorname{inv} \alpha_{eu} \right) > r_{o_2} \left(\arccos \frac{R_{e_2}^2 - R_{eu}^2 + A^2}{2AR_{e_2}} + \operatorname{inv} \alpha_{e_2} \right),$$

где

A — межцентровое расстояние при нарезании,

α_3 — угол зацепления при нарезании,

r_{ou} — радиус основной окружности долбяка,

R_{e_2} — радиус окружности выступов колеса,

R_{eu} — радиус окружности выступов долбяка,

α_{eu} — угол давления у кромки зуба долбяка,

r_{o_2} — радиус основной окружности колеса,

α_{e_2} — угол давления у кромки зуба колеса.

Если левая часть неравенства окажется меньше правой, можно рекомендовать уменьшение размеров долбяка.

3. При врезании долбяка в заготовку (подача на глубину) он может срезать кромки зубьев колеса какой-либо точкой профиля своего зуба (в частности кромкой). Инж. Грубиным доказано, что в случае отсутствия интерференции 1-го и 2-го рода¹ и срезания кромок зубьев колеса кромками зубьев долбяка никакая другая точка профиля зуба долбяка при врезании не срежет профиль зуба колеса.

Поэтому рассмотрение вопроса достаточно распространить лишь на случай срезания кромок зубьев колеса кромками зубьев долбяка при врезании последнего.

Авторы, разбиравшие этот вопрос, допускают некоторые неточности, неполно и не совсем верно решая задачу².

Срезание кромок при врезании может быть в случае пересечения основной окружности колеса хордой, соединяющей точки пересечения окружностей выступов долбяка и колеса (фиг. 2).

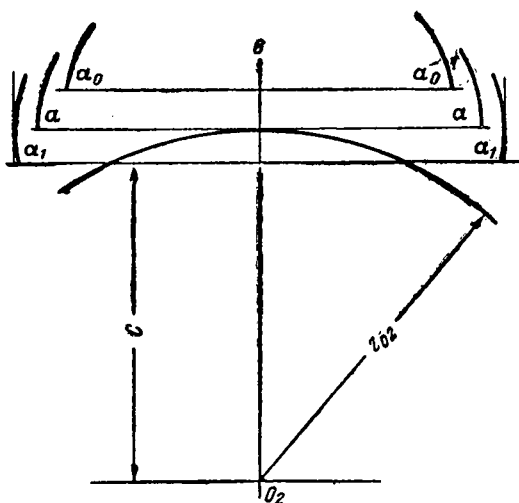
Линия O_2B является направлением подачи. Кромки зубьев долбяка при подаче движутся по прямым, параллельным O_2B (для упрощения вопроса и большей наглядности рассматриваем колесо и долбяк не вращающимися, что не внесет ошибки в рассуждения).

Прямые a_0a_0 , aa и a_1a_1 представляют собой хорды, соединяющие точки пересечения окружностей выступов. Как видно из фиг. 2, при расположении хорды за основной окружностью колеса не может иметь место срезания кромок; если хорда пересекает основную окружность, может иметь место срезание.

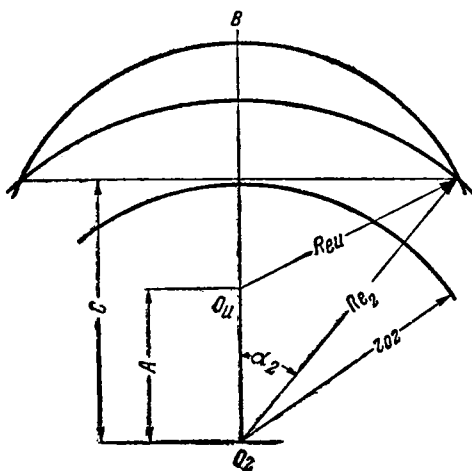
Величину C определим по фиг. 3.

¹ Во всех дальнейших выводах предполагается отсутствие интерференции 1-го и 2-го рода.

² См. Buckingham, Manual of gear design, ч. II, 1935, стр. 40—42; статью Дикера в журнале „Машиностроитель“ № 9/10 за 1937 г.; Дикер, Внутреннее зацепление прямозубов и косозубов, изд. Оргаметалла, 1938, стр. 29—33.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

$$R_{eu}^2 = A^2 + R_{e2}^2 - 2AR_{e2} \cos \alpha_2;$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{R_{e2}^2 - R_{eu}^2 + A^2}{2AR_{e2}}; \quad (3)$$

$$C = R_{e2} \cos \alpha_2; \quad C = \frac{R_{e2}^2 - R_{eu}^2 + A^2}{2A}.$$

Если C получилось меньше r_{02} , необходимо проверить, не будет ли иметь место срезание кромок при подаче. Бакингом и Дикер, решая эту задачу, говорят о двух возможных ее вариантах:

а) подача долбяка происходит по радиусу, проходящему через середину зуба долбяка,

б) подача долбяка происходит по радиусу, проходящему через середину впадины долбяка.

Затем упомянутые авторы находят расстояния от линии подачи до кромок зубьев колеса и соответствующих зубьев долбяка для каждого из вариантов. Если расстояния кромок зубьев колеса будут меньше соответствующих расстояний у долбяка, то кромки зубьев колеса при подаче будут срезаться.

Такая постановка задачи не может быть признана удовлетворительной, так как у всех современных зубодолбежных и зубострогальных станков врезание долбяка (подача на глубину) происходит не при неподвижных колесе и долбяке, а в процессе обкатки, когда колесо и долбяк непрерывно поворачиваются по отношению к линии подачи. При решении вопроса приходится делать ряд точных и длинных вычислений, например в задаче, решаемой Бакингом, 14 раз вычислять расстояния кромки зуба от линии подачи. Несмотря на всю сложность и громоздкость, решение не дает точных результатов, так как срезание кромок может произойти не при тех положениях зубьев, в которые их совершенно произвольно поставил Бакингом, а в каких-то положениях между ними.

Более строгое решение этой задачи может быть представлено в следующем виде.

На фиг. 4 показано зубчатое колесо, сопряженное с долбяком.

Дано:

z^1 и z^2 — числа зубьев колеса и долбяка,

z^2

A — межцентровое расстояние при нарезании,
 δ_2 — половина дуговой ширины впадины колеса на окружности выступов,
 δ_u — половина дуговой толщины зуба долбяка на окружности выступов,
 R_{e2} — радиус окружности выступов колеса,
 R_{eu} — " " " " долбяка,
 α_{e2} — угол давления у кромки зуба колеса.

Обозначения на фиг. 4:

O_2B — направление подачи,

δ — угол между линией подачи и радиусом, проведенным из центра колеса до середины впадины колеса,

γ — угол между направлением подачи и кромкой зуба колеса в начальный момент времени,

α_1 — разность между углом давления у кромки зуба колеса и углом λ ,

α_2 — угол между радиусом, проведенным из центра колеса до 1-й кромки зуба колеса, и радиусом, проведенным до точки пересечения окружностей выступов колеса и долбяка,

α — угол поворота колеса за период времени t ,

x_2 — расстояние от кромки зуба колеса, повернувшегося на угол α , до линии подачи,

x_u — расстояние от кромки зуба долбяка, повернувшегося на угол β до линии подачи,

EF — дуга, на которой может произойти срезание кромок зубьев колеса.

Для упрощения математических преобразований выбираем такой начальный момент времени, когда линия подачи проходит через кромку зуба долбяка.

Определяем основные величины:

$$\gamma = \delta_2 - \delta.$$

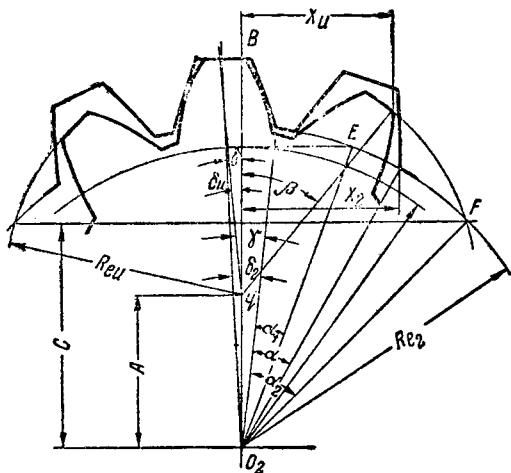
Угол λ равняется разности между углом δ_2 и углом, образованным линией подачи и радиусом, проведенным из центра колеса до середины впадины колеса.

Угол δ определим из следующих соображений: пусть в какой-то момент времени линия подачи совпадает со серединами впадины колеса и зуба долбяка; если повернуть долбяк на угол δ_u , то на линии подачи очутится кромка зуба долбяка; колесо в это время повернется на угол $\frac{\delta_u}{i}$ ($i = \frac{z_2}{z_u}$). Следовательно, угол между серединой впадины колеса и направлением подачи

$$\delta = \frac{\delta_u}{i}.$$

Углы, определяющие дугу EF :

$$\alpha_1 = \alpha_{e2} - \gamma;$$



Фиг. 4.

$$\alpha_2 = \arccos \frac{C}{R_{e_2}} - \gamma,$$

где C определяется по формуле (3).

Угол поворота долбяка $\beta = i\alpha$.

Расстояния от кромок зубьев колеса и долбяка до линии подачи:

$$x_2 = R_{e_2} \sin(\alpha + \gamma);$$

$$x_u = R_{eu} \sin \beta = R_{eu} \sin i\alpha.$$

Чтобы определить, будет ли иметь место срезание кромок, разделим x_u на x_2 ; если при каком-либо значении α , меняющемся от α_1 до α_2 , это отношение (y) будет больше единицы, можно утверждать, что кромки будут срезаться.

$$y = \frac{x_u}{x_2} = \frac{R_{eu} \sin i\alpha}{R_{e_2} \sin(\alpha + \gamma)}.$$

Обозначив $\frac{R_{eu}}{R_{e_2}}$ через μ , получим:

$$y = \frac{\mu \sin i\alpha}{\sin(\alpha + \gamma)}. \quad (4)$$

Определим значение α , при котором y будет иметь максимальную величину, для чего возьмем производную от y по α и приравняем ее нулю:

$$\frac{dy}{d\alpha} = \mu \frac{i \cos i\alpha \sin(\alpha + \gamma) - \sin i\alpha \cos(\alpha + \gamma)}{\sin^2(\alpha + \gamma)} = 0.$$

Знаменатель не может быть равным бесконечности, следовательно, числитель равен нулю:

$$i \cos i\alpha \sin(\alpha + \gamma) - \sin i\alpha \cos(\alpha + \gamma) = 0;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \gamma) = \frac{\operatorname{tg} i\alpha}{i}.$$

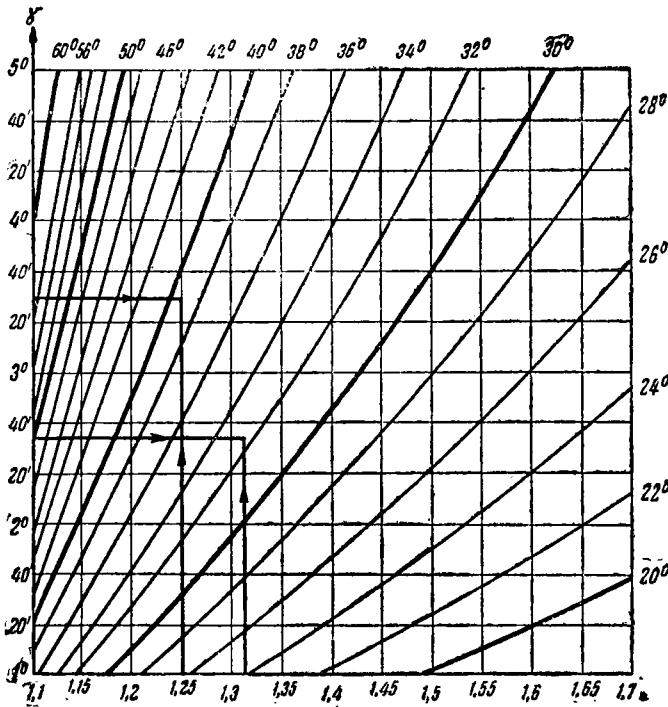
Это уравнение является трансцендентным, и точное аналитическое решение его невозможно. Приближенное же решение очень сложно и недостаточно точно. Действительно, при разложении тангенса в ряд второй член является кубическим, третий — 5-й степени и т. д. Если взять только два члена ряда, получим уравнение 3-й степени, решение которого очень громоздко; если взять три члена, получим уравнение 5-й степени. Далее, так как ряд тангенса плохо сходится, то при отбрасывании остаточных членов получается недопустимая для нашей задачи ошибка.

Однако такое уравнение можно решить при помощи номографии. Для этого дадим α ряд значений и для каждого значения составим следующую таблицу (например для $\alpha = 30^\circ$) (табл. 1).

Таблица 1

i	$i\alpha$	$\operatorname{tg} i\alpha$	$\frac{\operatorname{tg} i\alpha}{i}$	$\alpha + \gamma$	γ
1.20	36.0	0.72654	0.60545	31°11.5'	1°11.5'
1.25	37.5	0.76733	0.61386	31°32.5'	1°32.5'
1.30	39.0	0.80978	0.62290	31°55'	1°55'
1.35	40.5	0.85408	0.63265	32°19'	2°19'
1.40	42.0	0.90040	0.64314	32°45'	2°45'
1.45	43.5	0.95886	0.65445	33°12'	3°12'
1.50	45.0	1.00000	0.66667	33°41.5'	3°41.5'
1.55	46.5	1.05378	0.67985	34°12.5'	4°12.5'
1.60	48.0	1.11061	0.69413	34°46'	4°46'

По этим таблицам построена номограмма (фиг. 5). Пользоваться ею нужно следующим образом: определив i и γ из условий задачи и



Фиг. 5.

отложив их величины на соответствующих осях, восставим в этих точках перпендикуляры к осям. Если точка пересечения совпадает с одной из кривых, то на правой или верхней стороне номограммы определяем значение α , при котором u имеет максимум. Если точка пересечения не совпадает ни с одной из кривых, придется интерполировать. Для практических целей вполне вполне приемлема прямолинейная интерполяция, т. е. допустимо считать, что точка между двумя соседними кривыми делит расстояние между ними, взятое по одной из осей координат, на отрезки, прямо пропорциональные значениям угла α ¹.

Подставив найденное значение α в формулу (4), получим значение u_{\max} , сравнение которого с единицей и даст ответ на поставленную задачу.

¹ Методы более точной интерполяции приводятся в справочнике по номограммам проф. Глаголева.

Пример 1. Определить, будет ли срезание кромок зубьев колеса при нарезании зубчатого колеса внутреннего зацепления.

Дано:

Число зубьев колеса $z_2 = 25$,

„ „ „ „ „ долбяка $z_u = 20$,

Межцентровое расстояние при нарезании $A = 12.7$ мм,

Радиус основной окружности колеса . . . $r_{02} = 59.6704$ мм,

Радиус окружности выступов колеса . . . $R_{02} = 60.9605$ мм,

„ „ „ „ „ долбяка . . . $R_{eu} = 57.162$ мм,

Половина дуговой ширины впадины колеса на окружности выступов $\delta_2 = 0.07476$,

Половина дуговой толщины зуба колеса на окружности выступов $\delta_u = 0.01732$,

Угол давления у кромки зуба колеса . . . $\alpha_{e2} = 11.805^\circ$

Определяем значение C по формуле (3):

$$R_{e2}^2 = 3716.083;$$

$$R_{eu}^2 = 3266.351;$$

$$A^2 = 161.29;$$

$$C = \frac{R_{e2}^2 - R_{eu}^2 + A^2}{2N} = 24.056 \text{ мм.}$$

Так как C меньше r_{02} , нужно произвести развернутую проверку по формуле (4).

Передаточное отношение $i = \frac{z_2}{z_u} = 1.125$.

Определяем углы δ , γ , α_1 и α_2 ;

$$\delta = \frac{\delta_u}{i} = 0.01386;$$

$$\gamma = \delta_2 - \delta = 0.0609 = 3.49^\circ = 3^\circ 29.5';$$

$$\alpha_1 = \alpha_{e2} - \gamma = 8.315^\circ;$$

$$\alpha_2 = \arccos \frac{C}{R_{e2}} - \gamma; \quad \frac{C}{R_{e2}} = 0.39462; \quad \arccos 0.39462 = 66.757^\circ;$$

$$\alpha_2 = 63.267^\circ.$$

По номограмме (фиг. 5) определяем α_{\max} :

$$\alpha_{\max} = 39.3^\circ.$$

Определяем y_{\max} по формуле (4):

$$\mu = \frac{R_{eu}}{R_{e2}} = 0.93752; \quad i \alpha_{\max} = 49.125^\circ;$$

$$\sin i \alpha_{\max} = 0.75614;$$

$$\alpha_{\max} + \gamma = 42.79^\circ; \quad \sin \alpha_{\max} + \gamma = 0.67931;$$

$$y_{\max} = 1.044.$$

Следовательно, при нарезании этого колеса данным долбяком кромки зубьев колеса будут срезаться кромками зубьев долбяка.

¹ Условие примера взято из книги Buckingham, Manual of gear design, r.II.

Для уменьшения вероятности срезания кромок можно рекомендовать уменьшение размеров долбяка и увеличение диаметра окружности выступов колеса.

Все сказанное должно учитываться и при конструировании пары внутреннего зацепления, только во всех формулах вместо размеров долбяка нужно проставлять размеры шестерни. В процессе сборки агрегата при определенных соотношениях величин колеса и шестерни сборка пары путем изменения межцентрового расстояния становится невозможной, и необходимо предусмотреть возможность движения одного из элементов вдоль своей оси.

Проанализируем это явление.

Выше были определены расстояния от кромок зубьев колеса и долбяка до линии подачи:

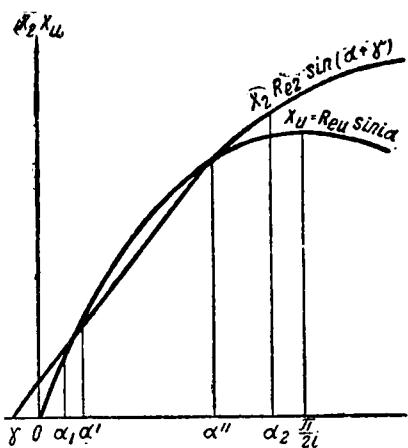
$$x_2 = R_{e2} \sin(\alpha + \gamma);$$

$$x_u = R_{eu} \sin i \alpha.$$

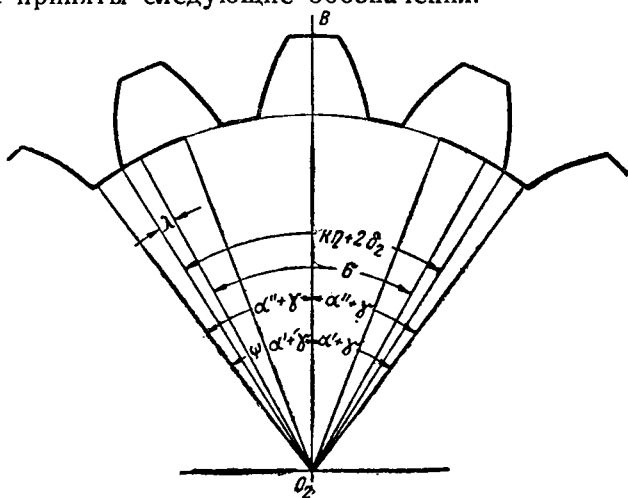
Если графически изобразить изменения x -ов при изменении α , получатся две синусоиды (фиг. 6). Углы α' и α'' определяют начало и конец дуги окружности выступов колеса, на которой происходило бы срезание зубьев колеса при подаче. При нахождении кромок зубьев сопряженного колеса на этой дуге (в дальнейшем она будет называться опасной дугой) сборка и разборка пары изменением межцентрового расстояния невозможна.

Для определения возможности сборки и разборки пары придется рассмотреть обе стороны колеса — правую и левую по отношению к линии подачи. (При исследовании нарезания мы этим вопросом не интересовались, так как положения долбяка и колеса никак не фиксируются по отношению к линии подачи, следовательно, если при каком-либо значении α и x_u больше, чем x_2 , имеется опасность срезания кромок.)

Обратимся к фиг. 7, где приняты следующие обозначения:



Фиг. 6.



Фиг. 7.

O_2B — линия подачи.

ψ — опасная дуга,

σ — угол между серединами опасных дуг,

k — целое число (число шагов),

η — угловой шаг колеса,

$2\delta_2$ — дуговая ширина впадины колеса на окружности выступов,

λ — угол между кромкой и серединой опасной дуги.

На рисунке изображено зубчатое колесо, линия подачи и две опасных дуги — правая и левая, симметрично расположенные относительно O_2B . Линия подачи располагается или посередине впадины, или посередине зуба колеса, в зависимости от того, четное или нечетное число k .

$$\sigma = \frac{2(\alpha'' + \gamma) + 2(\alpha' + \gamma)}{2} = \alpha' + \alpha'' + 2\gamma.$$

Для определения числа шагов k (при кромках, расположенных наиболее близко к серединам опасных дуг), прибегнем к следующему уравнению:

$$k'\eta + 2\delta_2 = \sigma,$$

откуда

$$k' = \frac{\sigma - 2\delta_2}{\eta}.$$

Округляя k' в ту или другую сторону до ближайшего целого числа, получим k .

Определяем угол λ :

$$2\lambda = \pm \sigma \mp (k\eta + 2\delta_2)$$

(верхние знаки для $\sigma > k\eta + 2\delta_2$; нижние знаки для $\sigma < k\eta + 2\delta_2$).

Для того чтобы и правая и левая кромки сошли с опасных дуг, нужно повернуть колесо на угол $\frac{\psi}{2} + \lambda$; ($\psi = \alpha'' - \alpha'$); в то же время соседняя кромка также не должна попасть на опасную дугу; следовательно, $\frac{\psi}{2} + \lambda + \frac{\psi}{2} + \lambda$ должно быть меньше η .

Условие возможности сборки пары посредством изменения межцентрового расстояния будет иметь вид:

$$\psi + 2\lambda < \eta. \quad (5)$$

Если λ предположить равным нулю (самое выгодное расположение опасных дуг), то сборку можно производить при $\psi < \eta$. Если λ предположить равным $\frac{\psi}{2}$ (самое невыгодное расположение дуг), то

сборку можно производить при $\psi < \frac{\eta}{2}$. Следовательно, если опасная дуга меньше $\frac{\eta}{2}$, сборку можно произвести изменением межцентрового расстояния; если $\psi > \eta$, указанную операцию произвести нельзя.

Если $\frac{\eta}{2} < \psi < \eta$, нужно проверить по формуле (5). Величины ψ , α' и α'' , казалось бы, можно определить из уравнения:

$$R_{e2} \sin(\alpha + \gamma) = R_{ea} \sin i\alpha.$$

Однако вследствие невозможности точного решения этого уравнения и сложности, а также недостаточной точности приближенного решения можно рекомендовать графическое решение этой задачи в следующем виде.

По формуле (4) определяем u для $\alpha_1 = \alpha_{\max} = \frac{\eta}{2}$ и $\alpha_{II} = \alpha_{\max} + \frac{\eta}{2}$, если u , хотя бы в одном случае, будет меньше единицы, проделать

$$\frac{R_{e_2}^2 - R_{e_1}^2 - A^2}{2AR_{e_1}} = 0.46656; \text{ arc cos } 0.46656 = 62.183^\circ = 1.08530;$$

$$\cos \alpha_{e_1} = \frac{r_{0_1}}{R_{e_1}} = 0.85726; \alpha_{e_1} = 30.99^\circ; \text{ inv } \alpha_{e_1} = 0.05974;$$

$$r_{0_1}(\text{arc cos } \frac{R_{e_2}^2 - R_{e_1}^2 - A^2}{2AR_{e_1}} + \text{inv } \alpha_{e_1}) = 55.951;$$

$$A(\sin \alpha_3 - \alpha_3 \cos \alpha_3) - r_{0_1}(\text{arc cos } \frac{R_{e_2}^2 - R_{e_1}^2 - A^2}{2AR_{e_1}} + \text{inv } \alpha_{e_1}) = 56.175;$$

$$\eta_0 = R_2 \cos \alpha_3 = 63.89892; 2AR_{e_2} = 2112;$$

$$\frac{R_{e_2}^2 - R_{e_1}^2 + A^2}{2AR_{e_2}} = 0.64536; \text{ arc cos } 0.64536 = 49.807^\circ = 0.86928;$$

$$\cos \alpha_{e_2} = \frac{r_{0_2}}{R_{e_2}} = 0.96816; \alpha_{e_2} = 14.495^\circ; \text{ inv } \alpha_{e_2} = 0.00554;$$

$$r_{0_2}(\text{arc cos } \frac{R_{e_2}^2 - R_{e_1}^2 + A^2}{2AR_{e_2}} + \text{inv } \alpha_{e_2}) = 55.9.$$

Так как $56.175 > 55.9$, интерференции 2-го рода не произойдет. Проверяем возможность сборки изменением межцентрового расстояния.

Определяем A_1 при безазорном зацеплении:

$$\text{inv } \alpha_{\alpha_3} = \frac{2\pi R_1 - z_1(T_1 + \pi m - T_2)}{2R_1(z_2 - z_1)} + \text{inv } \alpha_3;$$

α_{α_3} — угол зацепления при безазорном зацеплении.

$$2\pi R_1 = 326.72536; z_1(T_1 + \pi m - T_2) = 323.08536;$$

$$2R_1(z_2 - z_1) = 832; \text{ inv } \alpha_3 = 0.01490;$$

$$\text{inv } \alpha_{\alpha_3} = 0.019275;$$

$$\alpha_{\alpha_3} = 21.722^\circ; \cos \alpha_{\alpha_3} = 0.92899;$$

$$A_1 = \frac{A \cos \alpha_3}{\cos \alpha_{\alpha_3}} = 16.1842 \text{ мм.}$$

Определяем C по формуле (3):

$$C = \frac{R_{e_2}^2 - R_{e_1}^2 + A^2}{2A_1} = 42.323 \text{ мм.}$$

Так как C меньше r_{0_2} , произведем проверку по формуле (4).

Определяем i и углы $\delta_1, \delta_2, \delta, \gamma, \alpha_1$ и α_2 ;

$$i = \frac{z_2}{z_1} = 1.3077;$$

$$\delta_1 = \frac{T_1}{2R_1} + \text{inv } \alpha_3 - \text{inv } \alpha_{e_1};$$

$$\frac{T_1}{2R_1} = 0.06673; \operatorname{inv} \alpha_3 = 0.01490; \operatorname{inv} \alpha_{e_1} = 0.05974;$$

$$\delta_1 = 0.02189 = 1.254^\circ;$$

$$\delta_2 = \frac{T_2}{2R_2} + \operatorname{inv} \alpha_3 - \operatorname{inv} \alpha_{e_2};$$

$$\frac{T_2}{2R_2} = 0.05206; \operatorname{inv} \alpha_3 = 0.01490; \operatorname{inv} \alpha_{e_2} = 0.00554;$$

$$\delta_2 = 0.06142 = 3.519^\circ;$$

$$\delta = \frac{\delta_1}{i} = 0.959^\circ;$$

$$\gamma = \delta_2 - \delta = 2.56^\circ = 2^\circ 33' 1.6''$$

$$\alpha_1 = \alpha_{e_2} - \gamma = 11.935^\circ;$$

$$\alpha_2 = \arccos \frac{C}{R_{e_2}} - \gamma; \frac{C}{R_{e_2}} = 0.6411;$$

$$\arccos \frac{C}{R_{e_2}} = 50.125^\circ; \alpha_2 = 47.565^\circ.$$

По номограмме (фиг. 5) определяем α_{\max} :

$$\alpha_{\max} = 32.7^\circ.$$

По формуле (4) определяем y_{\max} :

$$\mu = \frac{R_{e_1}}{R_{e_2}} 0.86364; i \alpha_{\max} = 42.762^\circ;$$

$$\sin i \alpha_{\max} = 0.67895;$$

$$\alpha_{\max} + \gamma = 35.26^\circ; \sin (\alpha_{\max} + \gamma) = 0.57728;$$

$$y_{\max} = \frac{\mu \sin i \alpha}{\sin (\alpha + \gamma)} = 1.0158.$$

Так как y_{\max} больше единицы, нужно определить величину ψ :

$$\eta = \frac{360}{z_2} = 10.588^\circ; \frac{\eta}{2} = 5.294^\circ;$$

$$\alpha_1 = \alpha_{\max} - \frac{\eta}{2} = 27.406^\circ; i \alpha_1 = 35.839^\circ;$$

$$\sin i \alpha_1 = 0.58551;$$

$$\alpha_1 + \gamma = 29.966^\circ; \sin (\alpha_1 + \gamma) = 0.49949;$$

$$y_1 = 1.0123;$$

$$\alpha_{II} = \alpha_{\max} + \frac{\eta}{2} 37.994^\circ; i \alpha_{II} = 49.685^\circ;$$

$$\sin i \alpha_{II} = 0.76250;$$

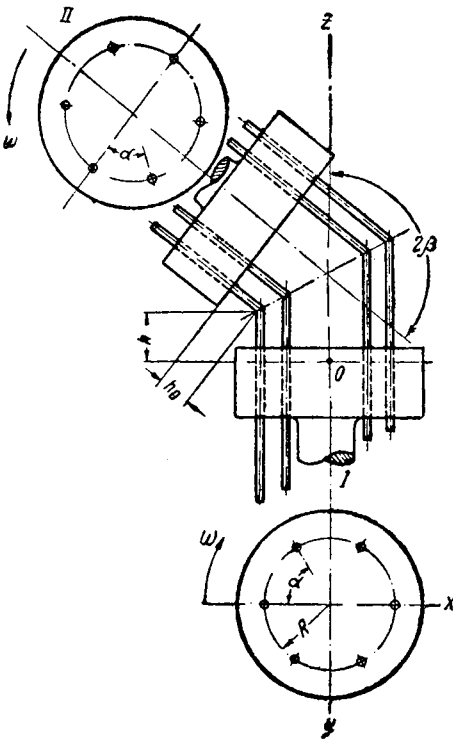
$$\alpha_{II} + \gamma = 40.554^\circ; \sin (\alpha_{II} + \gamma) = 0.65016;$$

$$y_{II} = 1.0130.$$

y_1 и y_{II} получились больше единицы: следовательно, $\psi > \eta$, и сборку можно производить только скольжением одного из элементов пары вдоль своей оси.

К РАСЧЕТУ И КОНСТРУИРОВАНИЮ ПЕРЕДАЧИ ГНУТЫМИ СПИЦАМИ

ОТ АВТОРА



Фиг. 1.

Для передачи движения и энергии двумя пересекающимися валами, при передаточном числе 1, может применяться механизм с гнутыми спицами, схема которого показана на фиг. 1. Эта передача мало известна и не изучена. Нам известна только работа инж. А. Я. Гулана [1], посвященная изучаемой передаче, но в ней допущен ряд ошибок. Цель настоящего труда — показать основные явления при работе этой передачи и определить силы, действующие на спицы, поскольку это необходимо для установления параметров передачи.

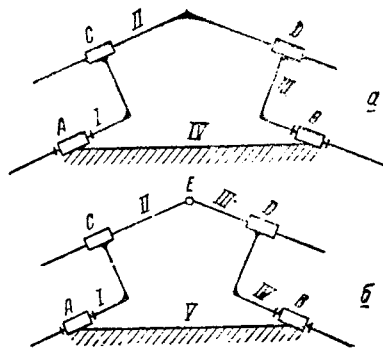
Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность проф. С. О. Доброгурскому и доктору технических наук З. Ш. Блоху за ряд ценных указаний, которыми автор воспользовался.

1. НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ КИНЕМАТИКИ ПЕРЕДАЧИ ГНУТЫМИ СПИЦАМИ

Предварительно рассмотрим некоторые вопросы кинематики изучаемой передачи, что необходимо для понимания работы механизма, особенно для понимания действия сил трения.

Передача (фиг. 2,а) представляет собой четырехзвенный шестисносный пространственный механизм с двумя вращательными парами А

и B , имеющими по одной степени свободы, и двумя парами C и D , каждая из которых допускает по две степени свободы: по одному поступательному движению и по одному вращательному. Этот механизм в общем случае, т. е. по структурной формуле механизма нулевого семейства [2] $W = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1$, имеет $W = 6 \cdot 3 - 5 \cdot 2 - 4 \cdot 2 = 0$ степеней свободы. Так как число подвижных звеньев $n = 6$, то число пар пятого класса $p_5 = 2$, число пар четвертого класса $p_4 = 2$, и число пар остальных классов $p_3 = p_2 = p_1 = 0$.



Фиг. 2.

Поэтому мы заключаем, что рассматриваемое устройство в общем случае представляет собой жесткую систему. Как механизм это устройство может работать только в частном случае, а именно для того, чтобы оно имело одну степень свободы, необходимо, чтобы оси всех вращательных пар были параллельны одной плоскости. При выполнении указанного условия движение какого-либо звена может выражаться двумя компонентами вращения и тремя компонентами скольжения, т. е. на движение всех звеньев будет наложено одно общее ограничение, а именно отсутствие вращения около оси, перпендикулярной к осям пар, и рассматриваемый механизм будет относиться к первому семейству. Структурная формула его [2]:

$$W = 5n - 4p_5 - 3p_4 = 5 \cdot 3 - 4 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 1.$$

Из выполнения указанного условия для всех положений механизма вытекают как следствия следующие требования: 1) ось каждой части спицы должна быть параллельна оси соответствующего вала, 2) оси обоих валов должны лежать в одной плоскости и 3) радиусы окружностей, по которым расположены спицы ведущего и ведомого дисков, должны быть равны между собой.

Если в точке загиба спицы имеется шарнир (фиг. 2, б), то мы получим пятизвенный семиосный механизм. Параллельность отверстий для спицы осям валов здесь уже не требуется. Этот механизм допускает изменение угла между валами.

В достаточности указанного условия для существования механизма (фиг. 2, а) можно убедиться еще следующим путем. Пусть механизм фиг. 2, б удовлетворяет условию, требуемому от механизма фиг. 2, а; в этом случае относительная угловая скорость в шарнире E равна нулю, т. е. лишняя связь, имеющаяся в механизме фиг. 2, а, является пассивной.

Легко видеть, что спицы совершают поступательное движение, т. е. все точки спицы имеют в любой момент одинаковые по величине и направлению скорости. Для этого достаточно показать, что две произвольные не параллельные между собой прямые перемещаются параллельно самим себе. Приняв за такие линии оси обеих частей спицы, мы видим, что каждая из них остается всегда параллельной оси соответствующего вала в результате воздействия направляющих пазов дисков. Таким образом, оси обеих частей спицы перемещаются параллельно самим себе, и предположение, что спицы совершают поступательное движение, оправдано.

Координаты точки перегиба спицы (фиг. 1):

$$x = R \cos \alpha; \tag{1}$$

$$y = R \sin \alpha; \quad (2)$$

$$z = R(1 - \cos \alpha) \operatorname{ctg} \beta + h. \quad (3)$$

Проекция скорости любой точки спицы при равномерном вращении вала:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= -\omega R \sin \alpha; \\ \dot{y} &= \omega R \cos \alpha; \\ \dot{z} &= \omega R \operatorname{ctg} \beta \sin \alpha; \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где ω — угловая скорость вала.

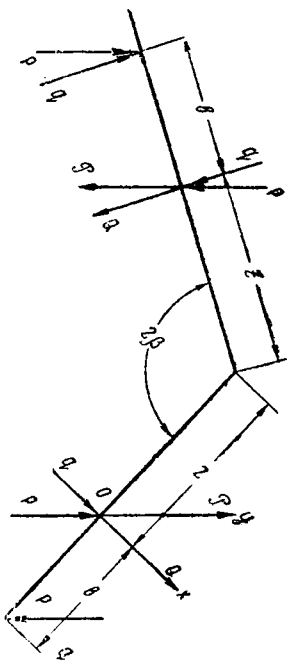
Относительное движение части спицы относительно соответствующего жестко связанного с валом диска состоит из равномерного вращения с угловой скоростью $\omega_0 = -\omega$ и поступательного движения со скоростью

$$v_0 = \dot{z} = \omega R \operatorname{ctg} \beta \sin \alpha. \quad (5)$$

В заключение отметим, что при равномерном вращении ведущего вала ведомый вал также вращается равномерно, т. е. передача, в этом смысле, равносильна передаче коническими шестернями.

2. РАСЧЕТНАЯ СИСТЕМА СИЛ

Для расчета передачи необходимо знать распределение давления по поверхности рабочей части спицы. Ввиду сложности этого вопроса приходится идти на некоторые допущения. Заменяем действительную систему сил, распределенных по поверхности каждой части спицы, расчетной системой сил, состоящей из четырех сил. Все эти четыре силы перпендикулярны оси соответствующей части спицы. Две из них (p и $P+p$) лежат в плоскости yOz (фиг. 3) и две (q и $Q+q$) в плоскости xOz . Выберем расчетную систему сил, так чтобы она удовлетворяла следующим условиям:



Фиг. 3.

$$\left. \begin{aligned} p &= -r \int_{l_1}^B dl \int_0^{2\pi} p_0 \sin \gamma d\gamma, & q &= -r \int_{l'_1}^B dl \int_0^{2\pi} p_0 \cos \gamma d\gamma, \\ p + P &= r \int_0^{l_1} dl \int_0^{2\pi} p_0 \sin \gamma d\gamma, & q + Q &= r \int_0^{l'_1} dl \int_0^{2\pi} p_0 \cos \gamma d\gamma, \\ b + b_1 &= -\frac{r}{P} \int_{l_1}^B l dl \int_0^{2\pi} p_0 \sin \gamma d\gamma, & b' + b'_1 &= -r \int_{l'_1}^B l dl \int_0^{2\pi} p_0 \cos \gamma d\gamma \\ b_1 &= \frac{r}{p + P} \int_0^{l_1} l dl \int_0^{2\pi} p_0 \sin \gamma d\gamma, & b'_1 &= \frac{r}{q + Q} \int_0^{l'_1} l dl \int_0^{2\pi} p_0 \cos \gamma d\gamma, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где

l_1 — координата l для сечения, в котором $\int_0^{2\pi} p_0 \sin \gamma d\gamma = 0$,

l'_1 — координата l сечения, в котором $\int_0^{2\pi} p_0 \cos \gamma d\gamma = 0$,

p_0 — функция от координат l и γ , выражающая давление на единице поверхности спицы,

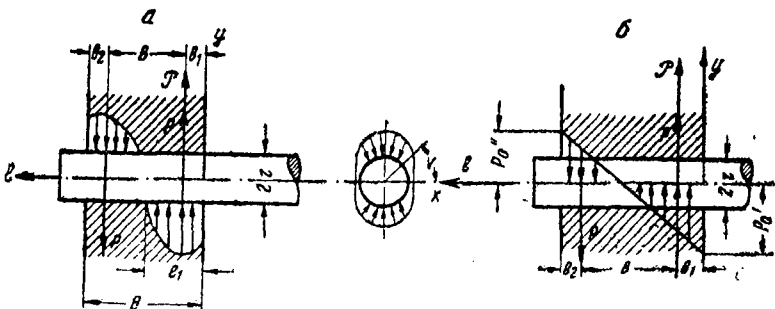
r — радиус сечения спицы,

B — ширина дисков.

Простая подстановка показывает, что условия статической эквивалентности, т. е. уравнения

$$\left. \begin{aligned} P &= r \int_0^B dl \int_0^{2\pi} p_0 \sin \gamma d\gamma, \\ Q &= r \int_0^B dl \int_0^{2\pi} p_0 \cos \gamma d\gamma, \\ -b_1 P + bp &= -r \int_0^B l dl \int_0^{2\pi} p_0 \sin \gamma d\gamma, \\ -b'_1 Q + b'q &= -r \int_0^B l dl \int_0^{2\pi} p_0 \cos \gamma d\gamma, \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

при этом не нарушаются, а превращаются в следствие. Условия (I), накладываемые на расчетную систему сил, дают возможность точнее определить деформацию, чем при помощи системы сил, удовлетворяющей только условиям (II), и, как увидим ниже, дают возможность определить силу трения. Система, обладающая только свойством статической эквивалентности, имела бы в нашем случае 4 параметра. Расчетная система имеет 8 параметров. Четыре параметра расчетной системы сил (b_1 , b'_1 , b , b') надо определить на основании закона распределения давления (фиг. 4). Определим эти параметры, исходя из допущения:



Фиг. 4.

$$r \int_0^{2\pi} p_0 \sin \gamma d\gamma = k_1 \left(p'_0 - \frac{p''_0 - p''_0 l}{B} \right)$$

$$r \int_0^{2\pi} p_0 \cos \gamma d\gamma = k_2 \left(q'_0 - \frac{q'_0 - q''_0}{B} l \right),$$

т. е. считая, что проекции давлений меняются вдоль l по прямой (фиг. 4 а и б). При этом допущении имеем:

$$l_1 = B \frac{p'_0}{p'_0 - p''_0};$$

$$l'_1 = B \frac{q'_0}{q'_0 - q''_0}.$$

Точка приложения силы $p + P$

$$l_1 = \frac{k_1 \int_0^{l_1} l \left(p'_0 - \frac{p'_0 - p''_0}{B} l \right) dl}{k_1 \int_0^l \left(p'_0 - \frac{p'_0 - p''_0}{B} l \right) dl} = \frac{p'_0}{3(p'_0 - p''_0)} B.$$

Аналогичным путем получаем:

$$b_2 = -\frac{p''_0}{3(p'_0 - p''_0)} B, \quad b'_1 = \frac{q'_0}{3(q'_0 - q''_0)} B, \quad b'_2 = -\frac{q''_0}{3(q'_0 - q''_0)} B,$$

откуда:

$$\left. \begin{aligned} b &= B - (b_2 + b_1) = \frac{2}{3} B; \\ b' &= B - (b'_2 + b'_1) = \frac{2}{3} B. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

На основании уравнений условия (1) имеем:

$$p = -k_1 \int_{l_1}^B \left(p'_0 - \frac{p'_0 - p''_0}{B} l \right) dl = \frac{k_1 B p''_0^2}{2(p'_0 - p''_0)},$$

$$P = k_1 \int_0^B \left(p'_0 - \frac{p'_0 - p''_0}{B} l \right) dl = \frac{k_1 B}{2} (p''_0 + p'_0).$$

Подставляя значения для p'_0 и p''_0 из последних двух уравнений в выражение для b_1 и пользуясь уравнением $p = \frac{Pz}{b}$, которое будет доказано ниже¹, получаем:

$$b_1 = \frac{b + z + \sqrt{z^2 + zb}}{3[b + 2(z + \sqrt{z^2 + zb})]} B.$$

Величина z показана на фиг. 3.

Следовательно, b_1 а поэтому и b_2 зависят от конструкции пере-

¹ См. уравнение (10), § 3.

дачи и угла α (фиг. 1), характеризующего положение спицы; но легко доказать, что b_1 меняется только в узких пределах. В самом деле, b_1 монотонно уменьшается с увеличением z . Поэтому $b_{1\max}$ будет иметь место при z_{\min} . Подставляя в полученное выше уравнение $z = z_{\min} = b$ (так как $z > b$), получаем:

$$b_{1\max} < \frac{2 + \sqrt{2}}{3(3 + \sqrt{2})} B \approx \frac{B}{4}.$$

Подставляя в это же самое уравнение $z = z_{\max} = \infty$, получаем:

$$b_{1\min} > \frac{B}{6}.$$

Таким образом $\frac{B}{6} < b_1 < \frac{B}{4}$, т. е. мы получили то, что требовалось доказать. На этом основании можно считать, что b_1 остается постоянной величиной, а именно мы будем считать

$$b_1 = 0.2B; \quad b_2 = B - (b + b_1) = 0.13B. \quad (7)$$

Аналогичным путем получаем:

$$b'_1 = 0.2B; \quad b'_2 = 0.13B. \quad (8)$$

3. ПЕРЕДАЧА КРУТЯЩЕГО МОМЕНТА ПРИ ИДЕАЛЬНЫХ СВЯЗЯХ И НЕВЕСОМЫХ СПИЦАХ

Пренебрегая трением и силами инерции спиц, получаем кососимметричную задачу (фиг. 3), так как в этом случае крутящие моменты, действующие на ведущем и ведомом дисках, равны по модулю и различны по направлению. Уравнения равновесия спиц дают:

$$Q - Q \cos(180 - 2\beta) = 0,$$

т. е.

$$Q = 0; \quad (9)$$

$$pb - P[z + z \sin(2\beta + 90)] + pb \sin(2\beta - 90) = 0,$$

откуда

$$p = \frac{Pz}{b}. \quad (10)$$

Остальные уравнения равновесия удовлетворяются тождественно.

Следовательно, при отсутствии в точке загиба спицы шарнира с осью, перпендикулярной плоскости осей валов, уравнения равновесия спицы дают нам только две зависимости. Силы q не могут определяться из условий равновесия. Но это не мешает вести дальнейшее исследование, поскольку силы q не создают момента относительно осей валов. Если вышеупомянутый шарнир существует, т. е. если механизм пятизвенный, то мы получаем добавочное уравнение равновесия:

$$-qb + Qz = 0,$$

откуда

$$q = 0.$$

Крутящий момент, передаваемый одной спицей i :

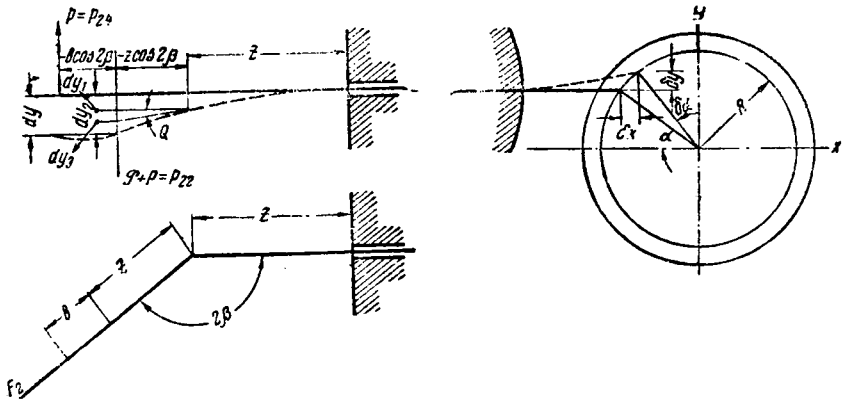
$$M = P_i R \cos \alpha_i \quad (11)$$

Крутящий момент, передаваемый всеми n спицами:

$$M = R \sum_{i=1}^n P_i \cos \alpha_i. \quad (12)$$

Для определения распределения нагрузки между спицами рассмотрим их деформацию. При этом будем пренебрегать деформацией дисков по сравнению с деформацией спиц.

При повороте ведущего диска относительно ведомого на угол $\delta\alpha$ (фиг. 5) за счет деформации спиц последние получают в направле-



Фиг. 5.

ние оси y деформацию $\delta y = R\delta\alpha \cos \alpha$. Перемещение δx не связано с деформацией. Оно произойдет свободно, если только имеется соответствующая деформация δy .

Из фиг. 5 имеем:

$$\delta y = \delta y_1 + \delta y_2 + \delta y_3,$$

где

δy_1 — перемещение точки загиба спицы относительно ведомого диска в направлении оси OY ;

$\delta y_2 = z \operatorname{tg} \theta$ — перемещение части спицы, защемленной в ведущем диске за счет наклона упругой линии в точке загиба спицы на угол θ ;

δy_3 — перемещение части спицы, защемленной в ведущем диске относительно плоскости, проходящей через касательную к упругой линии в точке загиба спицы.

По уравнению сопротивления материалов получаем:

$$\begin{aligned} \delta y = & \frac{P_i z^3}{6EI} (2 - 3 \cos 2\beta) + \frac{p_i b z^2}{2EI} \cos 2\beta + \frac{P_i z^3}{2EI} (1 - 2 \cos 2\beta) + \\ & + \frac{p_i b z^2}{EI} \cos 2\beta + \frac{P_i z^3}{3EI} - \frac{p_i b z^2}{2EI}, \end{aligned}$$

Откуда

$$\delta y = \frac{P_i z^3}{6EI} (7 - 9 \cos 2\beta) - \frac{p_i b z^2}{2EI} (1 - 3 \cos 2\beta), \quad (13a)$$

где E — модуль упругости материала спиц и I — момент инерции сечения.

Пользуясь уравнением (10), получаем:

$$\delta y = \frac{2P_i z^3}{3EI};$$

так как

$$\frac{\delta y_i}{\cos \alpha_i} = R \delta \alpha = \text{const.}, \text{ то } \frac{P_i z_i^3}{\cos \alpha_i} = \frac{2}{3} R E I \delta \alpha = \text{const.}, \quad (13)$$

т. е.

$$\frac{P_i z_i^3}{\cos \alpha_i} = \frac{P_k z_k^3}{\cos \alpha_k}; P_i = P_k \frac{z_k^3}{\cos \alpha_k} \cdot \frac{\cos \alpha_i}{z_i^3}. \quad (14)$$

После этого уравнение (12) принимает вид:

$$M = \frac{P_k z_k^3}{\cos \alpha_k} R \sum_{i=1}^n \frac{\cos^2 \alpha_i}{z_i^3}.$$

Здесь α_k , P_k и z_k — угол, сила и координаты точки загиба одной из спиц.

Полагая

$$a = \frac{R \operatorname{ctg} \beta + h}{R \operatorname{ctg} \beta}, \quad (15)$$

получаем на основании уравнения (3):

$$M = \frac{P_k z_k^3}{\cos \alpha_k R^2 \operatorname{ctg}^3 \beta} \sum_{i=1}^n \frac{\cos^2 \alpha_i}{(a - \cos \alpha_i)^3}. \quad (16)$$

Для краткости обозначим:

$$S = \sum_{i=1}^n \frac{\cos^2 \alpha_i}{(a - \cos \alpha_i)^3}. \quad (17)$$

Окружное усилие на спице k :

$$P_k = \frac{M \cos \alpha_k}{R S (a - \cos \alpha_k)^3}, \quad (18)$$

где M — передаваемый крутящий момент. Рассмотрим частные случаи. Пусть число спиц $i = 1$. Тогда

$$P_{k_1} = \frac{M \cos \alpha_k (a - \cos \alpha_k)^3}{R (a - \cos \alpha_k)^3 \cos^2 \alpha_k} = \frac{M}{R \cos \alpha_k}.$$

При $i = 2$ получаем:

$$P_{k_2} = \frac{M \cos \alpha_k}{R (a \cos \alpha_k)^3 \left\{ \frac{\cos^2 \alpha_k}{(a - \cos \alpha_k)^3} + \frac{\cos^2 (\alpha_k + 180)}{[a - \cos (\alpha_k + 180)]^3} \right\}};$$

$$P_k = \frac{M (a + \cos \alpha_k)}{2 R a (a^2 + 3 \cos \alpha_k) \cos \alpha_k}.$$

Из последних двух уравнений видно, что при работе одной или двумя спицами в момент времени, когда $\cos \alpha_k = 0$, т. е. $\alpha_k = \frac{\pi}{2}$ и $\alpha_k = \frac{3}{2} \pi$, сила на спицах получается бесконечно большой или, дру-

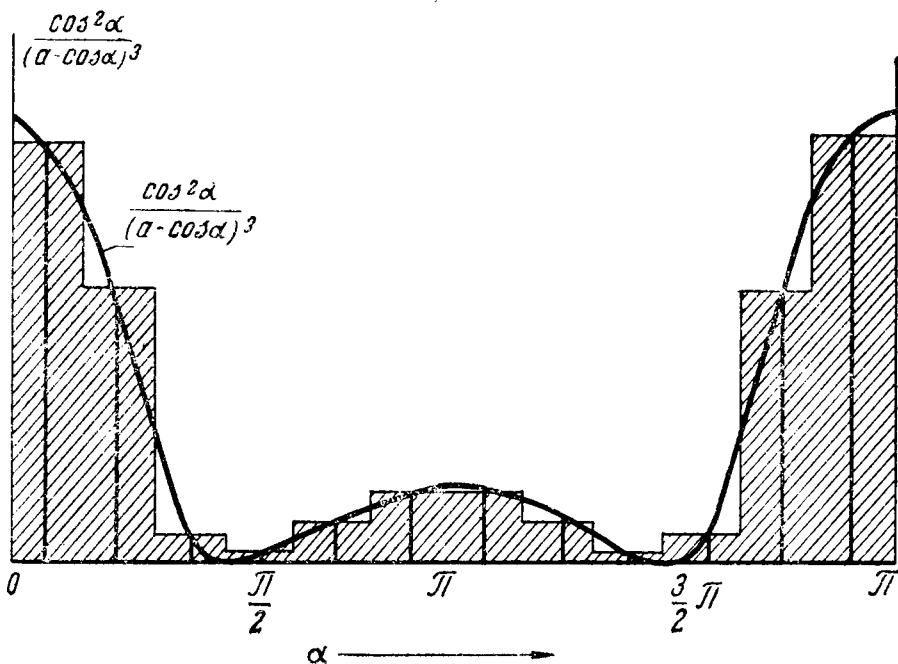
гими словами, в этом положении спицы не могут передать крутящего момента.

При большом количестве спиц определение суммы S по формуле (17) требует много времени. Поэтому заменим ее интегралом.

После умножения обеих сторон уравнения (17) на $\frac{2\pi}{n}$, т. е. на величину угла между спицами, получаем:

$$S \frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\cos^2 \alpha_i}{(a - \cos \alpha_i)^3} = \sum_{i=1}^n \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{\cos^2 \alpha_i}{(a - \cos \alpha_i)^3}.$$

Это выражение представляет собой заштрихованную площадь на фиг. 6. Ординаты ломаной линии, ограничивающей эту площадь сверху



Фиг. 6.

равняются $\frac{\cos^2 \alpha_i}{(a - \cos \alpha_i)^3}$. При достаточном количестве спиц можно эту площадь приблизительно выразить интегралом:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \alpha}{(a - \cos \alpha)^3} d\alpha,$$

следовательно,

$$S \frac{2\pi}{n} \approx \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \alpha}{(a - \cos \alpha)^3} d\alpha,$$

откуда

$$S \frac{n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \alpha}{(a - \cos \alpha)^3} d\alpha. \quad (19)$$

Определим интеграл, входящий в приближенное уравнение (19). Воспользуемся подстановкой $x = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, тогда $\cos \alpha = \frac{1-x^2}{1+x^2}$, $d\alpha = 2 \frac{dx}{1+x^2}$. Подставляя эти данные, получаем несобственный интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \alpha}{(a - \cos \alpha)^3} d\alpha = 4 \int_0^{\infty} \frac{\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}{\left(a - \frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^3 (1+x^2)^2} dx =$$

$$= \frac{4}{(a+1)^3} \int_0^{\infty} \frac{(1-x^2)^2}{(b^2+x^2)^3} dx,$$

$$\text{где } b = \frac{a-1}{a+1}.$$

Разлагая рациональную дробь, входящую в подинтегральное выражение, на простейшие, получаем:

$$\int_0^{\infty} \frac{(1-x^2)^2}{(b^2+x^2)^3} dx = \int_0^{\infty} \frac{dx}{b^2+x^2} - 2(b^2+1) \int_0^{\infty} \frac{dx}{(b^2+x^2)^2} +$$

$$+ (b^2+1)^2 \int_0^{\infty} \frac{dx}{(b^2+x^2)^3}.$$

Решаем каждый из этих интегралов в отдельности:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{b^2+x^2} = \frac{1}{b} \int_0^{\infty} \frac{d\left(\frac{x}{b}\right)}{1+\left(\frac{x}{b}\right)^2} = \frac{1}{b} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{b} \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2b}.$$

Для решения второго и третьего интегралов воспользуемся рекуррентной формулой:

$$-2(b^2+1) \int_0^{\infty} \frac{dx}{(b^2+x^2)^2} = -\frac{2(b^2+1)}{b^3} \int_0^{\infty} \frac{d\left(\frac{x}{b}\right)}{\left[1+\left(\frac{x}{b}\right)^2\right]^2} =$$

$$= -\frac{2(b^2+1)}{b^3} \cdot \left[\frac{xb}{x^2+b^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{b} \right] \Big|_0^{\infty} = -\frac{\pi}{2} \frac{b^2+1}{b^3}, \text{ так как } b \neq 0;$$

$$(b^2+1)^2 \int_0^{\infty} \frac{dx}{(b^2+x^2)^3} = \frac{(b^2+1)^2}{b^5} \int_0^{\infty} \frac{d\left(\frac{x}{b}\right)}{\left[1+\left(\frac{x}{b}\right)^2\right]^3} =$$

$$= \frac{(b^2 + 1)^2}{b^5} \left[\frac{bx}{4(x^2 + b^2)^2} + \frac{3}{4} \frac{xb}{x^2 + b^2} + \frac{3}{8} \operatorname{arctg} \frac{x}{b} \right]_0^{\infty} = \frac{3\pi}{16} \frac{(b^2 + 1)^2}{b^5}$$

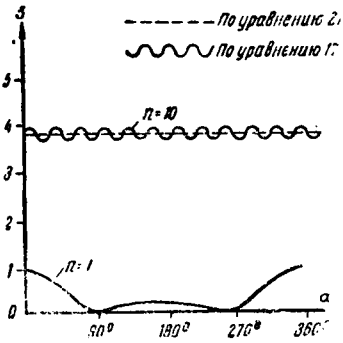
Суммируя все полученные величины, получаем:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \alpha}{(a - \cos \alpha)^3} dx = \frac{4}{(a+1)^3} \left[\frac{\pi}{2b} - \frac{\pi}{2b^3} (b^2 + 1) + \frac{3\pi}{16} \frac{(b^2 + 1)^2}{b^5} \right];$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \alpha}{(a - \cos \alpha)^3} dx = \pi \frac{a^2 + 2}{(a^2 - 1)^{3/2}}, \quad (20)$$

и, наконец,

$$S = \frac{n}{2\pi} \pi \frac{a^2 + 2}{(a^2 - 1)^{3/2}} = \frac{n}{2} \frac{a^2 + 2}{(a^2 - 1)^{3/2}}. \quad (21)$$



Фиг. 7.

Мы не будем останавливаться на детальной оценке степени точности этого приближенного уравнения, а ограничимся следующими замечаниями: 1) в действительности S является функцией угла поворота α и только при значительном числе спиц и $a \neq 1.5$ можно считать, что $S = \text{const}$ (фиг. 7); 2) точность уравнения (21) тем выше, чем больше число спиц и больше величина a . При 10 спицах и $a = 2$ ошибка достигает 3%.

Изгибающий момент в сечении спицы, определяемом текущей координатой z' (фиг. 3):

$$M_k = p_k b - P_k z' = P_k (z - z').$$

Максимальное значение момента будет (в сечении $z' = 0$):

$$M_{k_0} = P_k z.$$

Пользуясь уравнениями (18) и (3), получаем:

$$M_{k_0} = P_k z = \frac{M \cos \alpha_k \operatorname{ctg} \beta}{(a - \cos \alpha_k)^2 S}. \quad (22)$$

Определим, при каком угле α_k изгибающий момент в сечении $z' = 0$ достигает максимального значения

$$\frac{dM_{k_0}}{d\alpha_k} = -C \frac{a + \cos \alpha_k}{(a - \cos \alpha_k)^3} \sin \alpha_k.$$

Так как $a > 1$, то результат $a = -\cos \alpha_k$ не может быть решением уравнения $-\frac{a + \cos \alpha_k}{(a - \cos \alpha_k)^3} \sin \alpha_k = 0$, и мы получим $\sin \alpha_k = 0$, т. е. $\alpha_k = 0$, или $\alpha_k = \pi$.

$$\frac{d^2 M_{k_0}}{d\alpha_k^2} = -C \frac{\cos \alpha_k (a + 2 \sin \alpha_k)}{(a - \cos \alpha_k)^3}.$$

При $\alpha_k = 0$

$$\frac{d^2 M_{k_0}}{d\alpha_k^2} < 0.$$

т. е. изгибающий момент в спице имеет максимальное значение. При $\alpha_k = \pi \frac{d^2 M_{k_0}}{d\alpha_k} > 0$ и изгибающий момент в спицах имеет минимальное значение. Следовательно, требуется сравнить абсолютные величины изгибающих моментов только для двух положений: $\alpha_k = 0$ и $\alpha_k = \pi$. Простой подсчет показывает, что первый момент больше также и по абсолютной величине. Вставляя в равенство (22) $\alpha_k = 0$, получаем окончательное уравнение для определения изгибающего момента в спицах:

$$M_{k_{\max}} = \frac{M \operatorname{ctg} \beta}{(a-1)^2 S}, \quad (23)$$

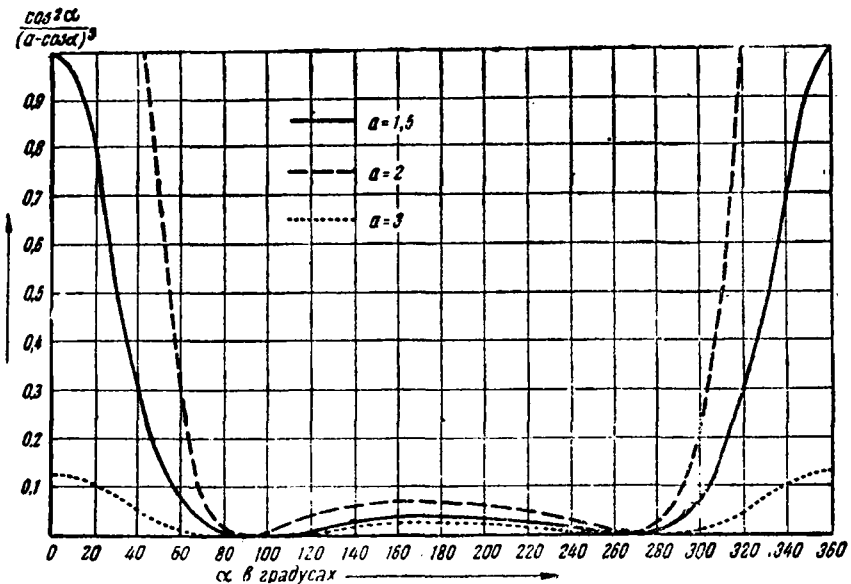
или, пользуясь уравнением (15) и (21),

$$M_{k_{\max}} = \frac{MR(a-1) \operatorname{ctg} \beta}{R} \cdot \frac{2(a^2-1)^{3/2}}{n(a-1)^3(a^2+2)},$$

$$M_{k_{\max}} = \frac{Mh}{R} \cdot \frac{2(a+1)^{3/2}}{n(a^2+1)(a-1)^{1/2}}. \quad (24)$$

$$\text{На величину } n_{\text{расч}} = \frac{n(a^2+2)(a-1)}{2(a+1)^{3/2}} \quad (25)$$

можно смотреть, как на расчетное число спиц. Мы видим, что расчетное число спиц тем больше, чем больше a , т. е. чем угол 2β ближе к 180° , и размер h имеет большую величину. При этих условиях нагрузка распределяется между спицами равномернее (фиг. 8). В пре-



Фиг. 8.

деле при $2\beta = 180^\circ$ мы получаем расчетное число спиц $n_{\text{расч}} = \frac{n}{2}$, а не n , как этого можно было ожидать. Это расхождение объясняется тем, что при $2\beta = 180^\circ$ уравнение равновесия (9) не имеет места и передача момента происходит как силой P , так и силой Q . Мы же считаем (как это имеет в действительности место при $2\beta < 180^\circ$), что момент передается только силой P .

Зная силы, действующие между спицами и дисками, легко определить силы, действующие на вал. В месте посадки дисков на валу действует также изгибающий момент. Важно заметить, что силы и изгибающий момент вала периодически меняются с периодом $\frac{2\pi}{n}$.

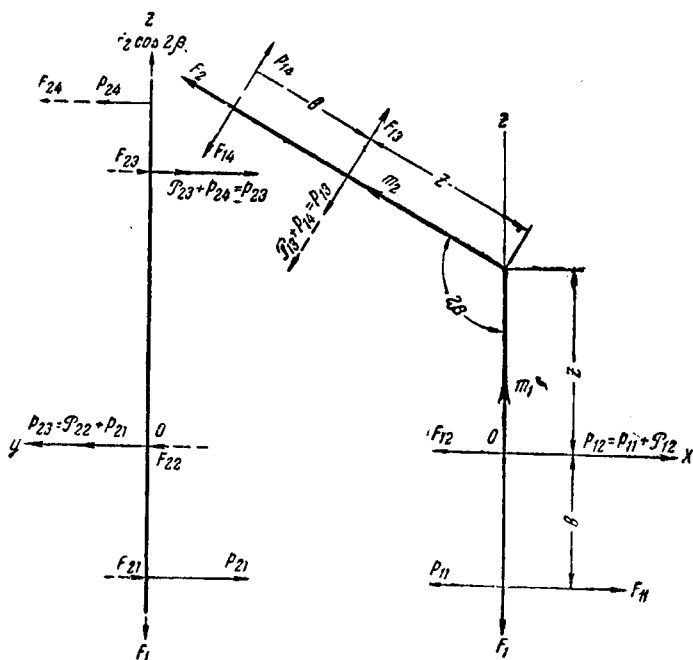
Поэтому ни один из периодов собственных поперечных колебаний валов не должен равняться $\frac{2\pi}{n}$ для избежания сильных колебаний.

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА СПИЦАХ, С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ

В этом параграфе, как и в предыдущем, мы будем пренебрегать силой инерций спиц (что, конечно, ограничивает применение наших выводов), но учтем трение. Под влиянием сил трения нарушается кососимметричность задачи, так как крутящий момент на ведущем валу больше крутящего момента на ведомом. Поэтому уже нельзя утверждать, что модули соответствующих сил равны между собой, как мы это делали в предыдущем параграфе. Теперь $p_{11} \neq p_{14}$; $p_{22} \neq p_{23}$ и т. д. (фиг. 9).

Для краткости будем писать два индекса при обозначениях сил, направленных перпендикулярно оси части спицы: первый индекс будет отмечать плоскость, в которой лежит данная сила, а именно: индекс 1 будет означать, что сила лежит в плоскости zOx , а индекс 2 — что сила лежит в плоскости yOz . Второй индекс будет определять место, в котором приложена данная сила (фиг. 9).

В § 1 мы видели, что движение спицы по отношению к диску состоит из равномерного вращения с угловой скоростью ω и поступательного движения со скоростью v_0 . Полная относительная скорость в любой точке O спицы показана на фиг. 10, где $v_T = \omega r$. Результирующая удельная сила трения F_{p0} , т. е. полная сила трения на



Фиг.

единице площади в точке O , направлена против полной относительной скорости в данной точке. Разложим удельную силу трения F_{p_0} на силу трения F_{i_0} , направленную параллельно оси соответствующей части спицы, и на силу трения F_{T_0} , перпендикулярную F_{i_0} :

$$F_{i_0} = F_{p_0} \frac{v_0}{v} = n F_{p_0} = n \mu p_0, \quad (26)$$

где

$$n = \frac{R \operatorname{ctg} \beta \sin \alpha}{\sqrt{(R \operatorname{ctg} \beta \sin \alpha)^2 + r^2}}; \quad (27)$$

μ — коэффициент трения

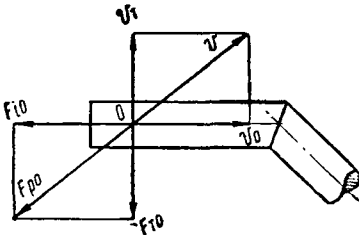
и

$$F_{T_0} = \frac{v_T}{v_0} F_{p_0} = m F_{p_0} = m \mu p_0, \quad (28)$$

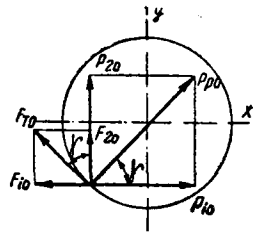
где

$$m = \frac{r}{\sqrt{(R \operatorname{ctg} \beta \sin \alpha)^2 + r^2}}. \quad (29)$$

Разлагая силу F_{T_0} на F_{1_0} и F_{2_0} (фиг. 11), мы можем писать (фиг. 9):



Фиг. 10.



Фиг. 11.

$$F_{1z} = r \int_i^\lambda dz \int_0^{2\pi} F_{i_0} d\gamma = r \int_i^\lambda dz \int_0^{2\pi} F_{T_0} \cos \gamma d\gamma = r m \mu \int_i^\lambda dz \int_0^{2\pi} (p_0) \cos \gamma d\gamma.$$

Пользуясь формулами II § 2, имеем:

$$F_{1z} = m \mu p_{2z}. \quad (30)$$

Таким же образом получаем:

$$F_{2z} = m \mu p_{1z}. \quad (31)$$

Мы считаем, что коэффициент трения остается одинаковым по всей рабочей поверхности спицы.

Проекция сил трения, действующих на ведущей части спицы, на направление оси спицы

$$F_1 = r \int_0^B dz \int_0^{2\pi} F_{i_0} d\gamma = n \mu r \int_0^B dz \int_0^{2\pi} |p_0| d\gamma.$$

Для получения системы линейных уравнений относительно сил P_{ji} полагаем, что

$$\int_0^B dz \int_0^{2\pi} |p_0| d\gamma = k \int_0^B dz \int_0^{2\pi} |p_0| \sin \gamma d\gamma,$$

где коэффициент $|k| \gg 1$ считается независимым от нагрузки, аналогично тому, как это предполагается в элементарной теории подшипников скольжения. Можно приближенно считать, по аналогии с подшипниками скольжения $|k| = 1, 2$.

Пользуясь формулой I § 2, имеем:

$$F_1 = kn\mu r \int_0^B dz \int_0^{2\pi} |p_0| \sin \gamma d\gamma = kn\mu (2p + P) = kn\mu (p_{11} + p_{12}). \quad (32)$$

Таким же образом

$$F_2 = kn\mu (p_{13} + p_{14}). \quad (33)$$

Силы трения F_{T_0} вызывают моменты трения относительно оси части спицы:

$$m_i = r^2 \int_0^B dz \int_0^{2\pi} F_{T_0} d\gamma = \mu mr^2 \int_0^B dz \int_0^{2\pi} |p_0| d\gamma.$$

Откуда, при сделанном выше допущении:

$$m_1 = rkm\mu (p_{11} + p_{12}), \quad (34)$$

$$m_2 = rkm\mu (p_{13} + p_{14}). \quad (34a)$$

Для того чтобы увязать знаки моментов m_1, m_2 и сил F_1, F_2 со знаком сил p_{1i} , необходимо приписать коэффициенту k знак плюс (+) в I и IV квадрантах и знак минус (-) во II и III квадрантах.

Учитывая, что силы p_{1i} значительно меньше сил p_{2i} ¹, пренебрежем трением, вызываемым силами p_{1i} . Кроме этого, будем считать, что силы трения от сил p_{21} и p_{22} равны соответственно силам трения от сил p_{24} и p_{23} .

Неточность, связанная с этими новыми допущениями, тем меньше, чем больше к. п. д. передачи. Поскольку передача сил интересует только при значительных к. п. д., сделанные допущения законны. Отметим, что, если не делать этих допущений, дальнейшее исследование принципиально не изменилось бы, но потребовало бы ббльшей расчетной работы.

Введем следующие новые обозначения:

$$P_{22} = p_{22} - p_{21}; P_{12} = p_{12} - p_{11}; P_{13} = p_{13} - p_{14}; P_{23} = p_{23} - p_{24}; f = \mu m, f' = \mu n; f_1 = k\mu m; f'_1 = k\mu n \quad (35a).$$

На основании сделанных допущений получаем из уравнений (30) ÷ (34a):

$$F_{11} = F_{14} = fp_{21}; \quad (35)$$

$$F_{12} = F_{13} = fp_{22} = f(P_{22} + p_{21}); \quad (36)$$

$$F_1 = F_2 = f'_1 (p_{21} + f_{22}) = f'_1 (P_{22} + 2p_{21}); \quad (37)$$

$$m_1 = m_2 = rf_1 (p_{21} + f_{22}) = rf_1 (P_{22} + 2p_{21}). \quad (38)$$

Напишем уравнение равновесия одной спицы (фиг. 11):

$$1) \sum x = -p_{11} + F_{11} - F_{12} + p_{12} + (-p_{13} + F_{13} - F_{14} + p_{14}) \cos (180 - 2\beta) - F_2 \cos (2\beta - 90) = 0;$$

¹ При отсутствии трения $p_{1i} = 0$.

откуда

$$P_{12} + P_{13} \cos 2\beta - P_{22} (f + f \cos 2\beta + f'_1 \sin 2\beta) - 2p_{21} f'_1 \sin 2\beta = 0. \quad (39)$$

$$1a) \Sigma y = -p_{21} + p_{22} - p_{23} + p_{24} = 0; \\ P_{22} - P_{23} = 0. \quad (40)$$

$$2) \Sigma z = -F_1 - (p_{13} - F_{13} + F_{14} - p_{14}) \sin (180 - 2\beta) + F_2 \cos (180 + 2\beta) = 0;$$

$$-P_{13} \sin 2\beta + P_{22} (f \sin 2\beta - f'_1 - f'_1 \cos 2\beta) - 2p_{21} f'_1 (1 + \cos 2\beta) = 0. \quad (41)$$

$$3) \Sigma M_x = -m_2 \cos (2\beta - 90) + p_{24} b \sin (2\beta - 90) - \\ - P_{23} z [1 + \sin (2\beta - 90)] + p_{21} b = 0.$$

Пользуясь уравнением (40),

$$P_{22} (-rf_1 \sin 2\beta - z + 2 \cos 2\beta) + p_{21} (b - 2rf_1 \sin 2\beta) - \\ - p_{24} b \cos 2\beta = 0. \quad (42)$$

$$4) \Sigma M_y = (F_{11} - p_{11}) b + (P_{13} + p_{14} - F_{13}) [z + z \sin (2\beta - 90)] + \\ + (F_{14} - p_{14}) [z + b + z \sin (2\beta - 90)] + F_2 z \cos (2\beta - 90) = 0; \\ P_{13} z (1 - \cos 2\beta) + P_{22} z [f'_1 \sin 2\beta - f (1 - \cos 2\beta)] - p_{11} b - \\ - p_{14} b + 2p_{21} (fb + f'_1 z \sin 2\beta) = 0. \quad (43)$$

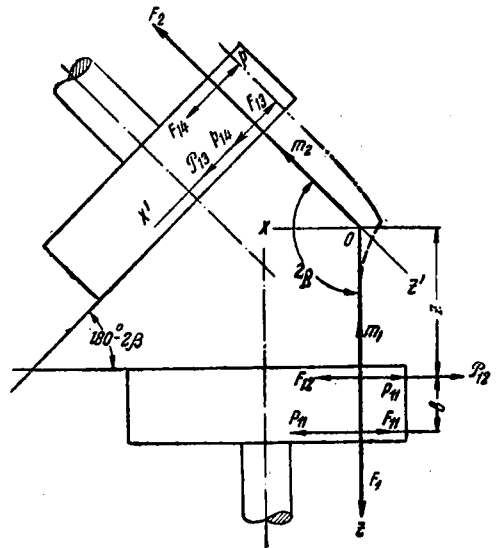
$$5) \Sigma M_z = m_1 + m_2 \cos (180 - 2\beta) - (P_{22} + p_{24}) z \sin (180 - 2\beta) + \\ + p_{24} (z + b) \sin (180 - 2\beta) = 0; \quad (44)$$

$$P_{22} [z \sin - 2\beta - rf_1 (1 - \cos 2\beta)] - p_{21} 2rf_1 (1 - \cos 2\beta) - p_{24} b \sin 2\beta = 0.$$

Эти уравнения недостаточны для определения всех 8п сил. Когда в точке загиба спицы имеется шарнир с осью, перпендикулярной плоскости спицы, мы получаем добавочное уравнение статики для каждой спицы:

$$6) \Sigma M_0 = (F_{14} - p_{14}) (b + z) + (P_{13} + p_{14} - F_{13}) z = 0; \\ P_{13} z - P_{22} fz - p_{14} b - p_{21} fb = 0. \quad (45)$$

Если такого шарнира нет, то добавочные уравнения получаются из рассмотрения деформации спиц. Определим их из условия, что оси обеих частей каждой спицы в месте их заделки в диске остаются параллельными осям валов. В плоскости изгиба спицы (zOy на фиг. 1) эта параллельность устанавливается независимо от защемляющего момента за счет соответствующей кинематической свободы спицы; в плоскости же zOx (фиг. 1) загиба спиц эта параллельность устанавливается под действием соответствующих защемляющих моментов (фиг. 12). Условие параллельности защемленной части спицы оси вала можно выражать уравнением:



Фиг. 12.

$$\alpha = \int_i \frac{\mu}{EJ} dx = 0.$$

Подставляя значения изгибающих моментов и интегрируя в отдельности для каждой части спицы, получаем:

$$\alpha = \int_0^z \frac{(p_{14} - F_{14})b - (P_{13} + F_{14} - F_{13})z^1}{EY} dz' +$$

$$+ \int_0^z \frac{(p_{14} - F_{14})b - [P_{13} + F_{14} - F_{13}](z - z \cos 2\beta) - F_2 \sin 2\beta}{EY} \cdot dz = 0,$$

откуда

$$6a) P_{14}z(3 - \cos 2\beta) - P_{22}z[f(3 - \cos 2\beta) - f'_1 \sin 2\beta] -$$

$$- 4p_{14}b + 4p_{21}(fb + f'_1 z \sin 2\beta) = 0. \quad (46)$$

Условия жесткости дисков по сравнению со спицами дают на основании уравнения (13a)¹ $n - 1$ уравнения:

$$7) \frac{P_{22i} z_i^3 (7 - 9 \cos 2\beta) - 3p_{24i} b z_i^2 (1 - 3 \cos 2\beta)}{\cos \alpha_i} =$$

$$= \frac{P_{22i+1} z_{i+1}^3 (7 - 9 \cos 2\beta) - 3p_{24i+1} b z_{i+1}^2 (1 - 3 \cos 2\beta)}{\cos \alpha_{i+1}}. \quad (47)$$

Последним уравнением нашей системы будет уравнение, выражающее крутящий момент относительно оси ведущего вала:

$$8) \sum_{i=1}^n P_{22i}(R \cos \alpha_i - fR \sin \alpha_i + rf_1) + P_{12} R \sin \alpha_i + 2p_{21} rf_1 + M_1, \quad (48)$$

или равносильное уравнение, выражающее крутящий момент относительно оси ведомого вала:

$$8a) \sum_{i=1}^n P_{22i}(R \cos \alpha_i - rf_1 - fR \sin \alpha_i) - 2p_{21} rf_1 +$$

$$+ P_{13i} R \sin \alpha_i = M_2. \quad (48a)$$

Для краткости обозначим посредством a_{kji} коэффициент в уравнении k при силе j (табл. 1), действующей на спице i . При этом $j=1$ соответствует силе p_{11} ; $j=2$ соответствует силе P_{12} ; $j=3$ — силе P_{13} ; $j=4$ — силе p_{14} ; $j=5$ — силе p_{21} ; $j=6$ — силе p_{24} и $j=7$ силе P_{22} .

При этих обозначениях получаем как для пятизвенного, так и для четырехзвенного вариантов следующую матрицу, составленную из коэффициентов левой части нашей системы линейных уравнений:

¹ Уравнение (13a) остается справедливым при учете трения, если пренебрегать влиянием момента m_2 (фиг. 5) на деформацию.

Коэффициенты a_{kji}

κ (№ уравнения)	j (силы)						
	1 (P_{11})	2 (P_{12})	3 (P_{13})	4 (P_{14})	5 (P_{21})	6 (P_{24})	7 ($P_{23} = P_{23}$)
1	0	1	$\cos 2\beta$	0	$-2f'_1 \sin 2\beta$	0	$-(f + f \cos 2\beta + f'_1 \sin 2\beta)$
2	0	0	$-\sin 2\beta$	0	$-2f'_1 (1 + \cos 2\beta)$	0	$f \sin 2\beta - f'_1 - f'_1 \cos 2\beta$
3	0	0	0	0	$b - 2rf_1 \sin 2\beta$	$-b \cos 2\beta$	$z \cos 2\beta - z - rf_1 \sin 2\beta$
4	$-b$	0	$z(1 - \cos 2\beta)$	$-b$	$2(fb + f'_1 z \sin 2\beta)$	0	$z[f'_1 \sin 2\beta - f(1 - \cos 2\beta)]$
5	0	0	0	0	$-2rf_1 (1 - \cos 2\beta)$	$-b \sin 2\beta$	$z \sin 2\beta - rf_1 (1 - \cos 2\beta)$
6a (четырёхзвенный вариант)	0	0	$z(3 - \cos 2\beta)$	$-4b$	$4(fb + f'_1 z \sin 2\beta)$	0	$-z[f(3 - \cos 2\beta) - f'_1 \sin 2\beta]$
6 (пятизвенный вариант).	0	0	z	$-b$	$-fb$	0	$-fz$
7	0	0	0	0	0	$\frac{-bz^2}{\cos \alpha} [1 - 3 \cos 2\beta]$	$\frac{z^3}{\cos \alpha} [7 - 9 \cos 2\beta]$
8a	0	0	$R \sin \alpha$	0	$-2rf_1$	0	$R \cos \alpha - rf_1 - f R \sin \alpha$
8	0	$R \sin \alpha$	0	0	$2rf_1$	0	$R \cos \alpha + rf_1 - f R \sin \alpha$

$$\begin{array}{r}
a_{11_1} a_{17_1} \dots a_{17_1} \\
a_{21_1} a_{22_1} \dots a_{27_1} \\
\dots \\
\dots \\
a_{71_1} a_{72_1} \dots a_{77_1} - a_{71_2} - a_{72_2} \dots - a_{77_2} \\
\quad a_{11_2} a_{12_2} \dots a_{17_2} \\
\quad a_{21_2} a_{22_2} \dots a_{27_2} \\
\quad \dots \\
\quad \dots \\
\quad a_{71_2} a_{72_2} \dots a_{77_2} \dots \\
\quad \dots \\
\quad \dots - a_{71_{n-1}} - a_{72_{n-1}} \dots - a_{77_{n-1}} \\
\quad a_{11_{n-1}} a_{12_{n-1}} \dots a_{17_{n-1}} \\
\quad \dots \\
\quad \dots \\
a_{71_{n-1}} a_{72_{n-1}} \dots a_{77_{n-1}} - a_{71_n} - a_{72_n} \dots - a_{77_n} \quad (49) \\
\quad a_{11_n} a_{12_n} \dots a_{17_n} \\
\quad a_{21_n} a_{22_n} \dots a_{27_n} \\
\quad \dots \\
\quad \dots \\
\quad a_{71_n} a_{72_n} \dots a_{77_n} \\
a_{81_1} a_{82_1} \dots a_{87_1} a_{81_2} a_{82_2} \dots a_{87_2} \dots a_{81_{n-1}} a_{82_{n-1}} \dots a_{87_{n-1}} a_{81_n} a_{82_n} \dots a_{87_n}
\end{array}$$

Развертывая определитель этой матрицы каждый раз по минорам 7-го порядка, образованным из первых семи вертикалей, получаем, что он определяется уравнением:

$$\Delta = D_1 D'_2 D'_3 \dots D'_n + D'_1 D_2 D'_3 \dots D'_n + D'_1 D'_2 \dots D'_{n-1} D_n, \quad (50)$$

или

$$\Delta = D'_1 D'_2 \dots D'_n \left(\frac{D_1}{D'_1} + \frac{D_2}{D'_2} + \dots + \frac{D_n}{D'_n} \right),$$

где

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11_i} a_{12_i} \dots a_{17_i} \\ a_{21_i} a_{22_i} \dots a_{27_i} \\ \dots \\ a_{61_i} a_{62_i} \dots a_{67_i} \\ a_{81_i} a_{82_i} \dots a_{87_i} \end{vmatrix} \quad (51)$$

и

$$D'_i = \begin{vmatrix} a_{11_i} a_{12_i} \dots a_{17_i} \\ a_{21_i} a_{22_i} \dots a_{27_i} \\ \dots \\ a_{71_i} a_{72_i} \dots a_{77_i} \end{vmatrix} \quad (52)$$

Обозначим через Δ_{ij} ($j = 1, 2, 3, \dots, 7$) результат замены в определителе Δ столбца j свободными членами нашей системы уравнений. Легко видеть, что

$$\Delta_{ij} = D'_1 D'_2 \dots D'_{i-1} D_i D'_{i+1} \dots D'_n M,^1 \quad (53)$$

где D_{ij} — определитель, который получается от определителя D_i (50) взят его со знаком $(-1)^{j+1}$ после вычеркивания j вертикали и седьмой, горизонтали. Например:

$$D_{i7} = \begin{vmatrix} a_{11i} a_{12i} \dots a_{16i} \\ a_{21i} a_{22i} \dots a_{26i} \\ \dots \dots \dots \\ a_{61i} a_{62i} \dots a_{66i} \end{vmatrix}, \quad D_{i6} = - \begin{vmatrix} a_{11i} a_{12i} a_{13i} a_{14i} a_{15i} a_{17i} \\ a_{21i} a_{22i} a_{23i} a_{24i} a_{25i} a_{27i} \\ \dots \dots \dots \\ a_{61i} a_{62i} a_{63i} a_{64i} a_{65i} a_{67i} \end{vmatrix}.$$

По теореме Крамера получаем величину любой силы:

$$p_{ij} = \frac{\Delta_{ij}}{\Delta} = \frac{D_{ij} M}{D'_i \left(\frac{D_1}{D'_1} + \frac{D_2}{D'_2} + \dots + \frac{D_n}{D'_n} \right)}. \quad (54)$$

Например:

$$P_{22i} = p_{i7} = \frac{D_{i7} M}{D'_i \left(\frac{D_1}{D'_1} + \frac{D_2}{D'_2} + \dots + \frac{D_n}{D'_n} \right)},$$

$$p_{21i} = p_{i6} = \frac{D_{i6} M}{D'_i \left(\frac{D_1}{D'_1} + \frac{D_2}{D'_2} + \dots + \frac{D_n}{D'_n} \right)}.$$

Для того чтобы одна из сил обратилась в бесконечность, т. е. чтобы механизм заедал, достаточно, чтобы

$$\left. \begin{array}{l} \Delta = 0, \\ \Delta_{ij} \neq 0, \text{ хотя бы при одном значении } j. \end{array} \right\}^2 \quad (55)$$

Для выполнения условия $\Delta = 0$ достаточно удовлетворить одному из уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Хотя бы для одной спицы } i = k \ D_k = D'_k = 0 \\ \text{или} \quad \frac{D_1}{D'_1} + \frac{D_2}{D'_2} + \dots + \frac{D_n}{D'_n} = 0 \end{array} \right\}. \quad (56)$$

Заедание механизма надо понимать в том смысле, что при любом отличном от нуля крутящем моменте на ведомом валу какая-нибудь сила (или несколько сил) в механизме равняется бесконечности. Крутящий момент на ведущем валу может при этом достигнуть бесконечности. Чтобы не получить (в случае заедания) в числителе бесконечности, желательно воспользоваться уравнением (48а), выражающим крутящий момент на ведомом валу, а не уравнением (48) крутящего момента на ведущем валу и, конечно, взять соответствующее значение определителя D_i (табл. 2).

¹ В это уравнение, как и в приводимое ниже уравнение (54), можно подставить крутящий момент на ведущем валу $M = M_1$ или крутящий момент на ведомом валу $M = M_2$. При этом необходимо только взять соответствующие значения элементов a_{8ji} определителя D_i (уравнение 51).

² Поставленные условия означают, что ранг расширенной матрицы равен $7n$, а ранг матрицы системы (49) меньше $7n$.

$D_i = -a_{41}a_{64} [(a_{23}a_{87} - a_{27}a_{83}) (a_{35}a_{56} - a_{33}a_{55}) + (a_{23}a_{85} - a_{25}a_{83}) (a_{36}a_{57} - a_{37}a_{56})]$, исходя из крутящего момента на ведомом валу

$D'_i = a_{23}a_{41}a_{64} [a_{35} (a_{57}a_{76} - a_{56}a_{77}) + a_{55} (a_{36}a_{77} - a_{37}a_{76})]$.

$D_{i_1} = a_{44} [(a_{63}a_{25} - a_{23}a_{63}) (a_{36}a_{57} - a_{37}a_{56}) + (a_{64}a_{23} + a_{27}a_{63} - a_{23}a_{67}) (a_{35}a_{56} - a_{36}a_{55})]$.

$D_{i_2} = a_{41}a_{64} [(a_{13}a_{25} - a_{23}a_{13}) (a_{36}a_{57} - a_{37}a_{56}) + (a_{13}a_{27} - a_{23}a_{17}) (a_{35}a_{56} - a_{36}a_{55})]$.

$D_{i_3} = -a_{41}a_{64} [a_{25} (a_{36}a_{57} - a_{37}a_{56}) + a_{27} (a_{35}a_{56} - a_{36}a_{55})]$.

$D_{i_4} = a_{41}a_{23} [a_{65} (a_{36}a_{57} - a_{37}a_{56}) + a_{67} (a_{35}a_{56} - a_{36}a_{55})]$.

$D_{i_5} = -a_{41}a_{64}a_{23} (a_{36}a_{57} - a_{37}a_{56})$.

$D_{i_6} = a_{41}a_{23}a_{64} (a_{35}a_{57} - a_{37}a_{55})$.

$D_{i_7} = -a_{41}a_{23}a_{64} (a_{35}a_{56} - a_{36}a_{55})$.

$D_i = -a_{41}a_{64} [(a_{23}b_{87} - a_{27}b_{83}) (a_{35}a_{56} - a_{36}a_{55}) + (a_{23}b_{85} - a_{25}b_{83}) (a_{36}a_{57} - a_{37}a_{56})]$, исходя из крутящего момента на ведомом валу, где

$b_{83} = -a_{82}a_{13}$; $b_{85} = a_{85} - a_{82}a_{15}$; $b_{87} = a_{87} - a_{82}a_{17}$.

Поставленные условия ($\Delta = 0$; $\Delta_j \neq 0$) разделяют все значения r , b , z , β , α , μ на две области и определяют границу между обеими областями. Достаточно одной из указанных величин несколько измениться в сторону увеличения или в сторону уменьшения, чтобы наши уравнения дали конечное значение для сил. Так как отношение сил трения к нормальному давлению μ_1 может принимать все значения в пределах, определяемых неравенством $0 < \mu_1 < \mu$, где μ — коэффициент трения, то мы получаем целую область заедания механизма.

Для решения вопроса, может ли механизм при данных параметрах работать, можно поступить следующим путем.

Решим условие (55) относительно коэффициента трения, т. е. определим граничное значение его μ_k . Если окажется, что $\mu_k \leq \mu$, то механизм заедает. Если же $\mu_k > \mu$, то механизм может работать.

Напомним, что коэффициенты a_{kji} (табл. 1) определены, исходя из предположения, что $p_{1i} \ll p_{2i}$. Неточность, связанная с этим, тем выше, чем меньше к. п. д. передачи. Для уточнения расчета в случае малых к. п. д. можно составить таблицу, аналогичную табл. 1, не делая указанного предположения.

5. КОЭФФИЦИЕНТ ПОЛЕЗНОГО ДЕЙСТВИЯ И УСЛОВИЯ САМОТорможения ПЕРЕДАЧИ

Для определения мгновенного коэффициента полезного действия передачи $\eta_{\mu} = \frac{M_2}{M_1}$ воспользуемся следующим приемом: сравним уравнение (54), исходя из величины крутящего момента на ведомом валу, т. е. уравнение

$$p_{ij} = \frac{D_{ij}M_2}{D'_i \left(\frac{D_1}{D'_1} + \frac{D_2}{D'_2} + \dots + \frac{D_n}{D'_n} \right)},$$

с этим же уравнением, исходя из крутящего момента на ведущем валу

$$p_{ij} = \frac{D_{ij}M_1}{D'_1 \left(\frac{D_1}{D'_1} + \frac{D_2}{D'_2} + \dots + \frac{D_n}{D'_n} \right)}, \quad (57)$$

где D_i — определитель, который, так же как D_p , вычисляется по уравнению (51); при этом надо только вставить значения коэффициентов a_{8j} , соответствующие уравнению крутящего момента на ведущем валу (уравнение 48). Так как оба написанные уравнения определяют одинаковые силы, то

$$\eta_{\mu} = \frac{M_2}{M_1} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{D_i}{D'_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{D_i}{D'_i}} = \frac{S_2}{S_1}, \quad (58)$$

где, для краткости, введено обозначение

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \sum_{i=1}^n \frac{D_i}{D'_i} \\ S_2 &= \sum_{i=1}^n \frac{D_i}{D'_i} \end{aligned} \right\}. \quad (59)$$

Средний коэффициент полезного действия передачи

$$\eta = \frac{\int_0^{2\pi} M_2 d\alpha}{\int_0^{2\pi} M_1 d\alpha}.$$

Полагая, что $M_2 = \text{const}$, получаем:

$$\eta_2 = \frac{\int_0^{2\pi} M_2 d\alpha}{\int_0^{2\pi} M_2 \frac{S_1}{S_2} d\alpha} = \frac{2\pi}{\int_0^{2\pi} \frac{1}{\eta_{\mu}} d\alpha}. \quad (60)$$

Полагая, что $M_1 = \text{const}$, получаем:

$$\eta_1 = \frac{\int_0^{2\pi} M_1 \frac{S_2}{S_1} d\alpha}{\int_0^{2\pi} M_1 d\alpha} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta_{\mu} d\alpha. \quad (61)$$

Так как мгновенный к. п. д. является периодической функцией от угла поворота с периодом $\frac{2\pi}{n}$, где n — число спиц, то можно вместо пределов интегрирования $\alpha = 0, \alpha = 2\pi$ взять соответственно $\alpha = 0$ и $\alpha = \frac{2\pi}{n}$, подставляя вместо коэффициента $2\pi - \frac{2\pi}{n}$ и вместо

$$\frac{1}{2\pi} - \frac{n}{2\pi}.$$

Мы воспользуемся приближенной заменой интеграла суммой. Разделяя каждый интервал между спицами на m частей, имеем по уравнению (60) и (61):

$$\frac{1}{\eta_2} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{S_1}{S_2}, \quad (60a)$$

и

$$\eta_1 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{S_2}{S_1}. \quad (61a)$$

Как известно, условие самоторможения механизма, в смысле невозможности движения его в заданном направлении, является $\eta_1 < 0$. Указанное условие, являясь достаточным, не является необходимым. Наоборот, необходимым, но недостаточным условием самоторможения является $\eta_\mu < 0$, хотя бы в некоторой зоне угла α . Следовательно, возможны следующие три случая:

1) $\eta_\mu > 0$ при любом угле α ;

$$\eta_1 > 0;$$

2) $\eta_\mu < 0$, хотя бы в некоторой зоне угла α ;

$$\eta_1 < 0$$

и 3) $\eta_\mu < 0$ в некоторой зоне угла α ;

$$\eta_1 > 0.$$

В первом случае получим несамотормозящийся механизм, во втором случае — самотормозящийся. Может ли он работать в третьем случае, — нельзя выявить на основании только статического расчета. В этом случае необходимо исследовать дифференциальные уравнения движения системы. Но можно утверждать, что без поглощения кинетической энергии в зоне $\eta_\mu < 0$ механизм не может работать. Поэтому невозможно, например, трогание с места, если механизм находится в таком положении, в котором $\eta_\mu < 0$.

Влияние параметров r и B на к. п. д. и на величину области самоторможения легко понять, имея в виду физический характер рассматриваемого явления. Труднее установить, как влияет число спиц, угол 2β и параметр h . Поэтому мы рассмотрим влияние этих трех факторов.

Расчет по уравнению (58) показывает, что при одной или двух спицах, расположенных под углом 180° , при углах α достаточно близких к 90° и 270° , всегда имеет место неравенство $\eta_\mu < 0$. Следовательно, в передаче одной или двумя спицами возможны только случаи 2 и 3 (стр. 202). Увеличение числа спиц дает возможность, не уменьшая прочности и долговечности их, уменьшить радиус r и этим самым увеличить к. п. д.

С уменьшением угла 2β увеличивается относительная скорость между спицей и дисками вдоль оси направляющей v_0 (уравнение 7), и в пределе, при $2\beta = 0$, $v_0 = \infty$. Поскольку силы трения остаются отличными от нуля, то работа сил трения в единицу времени также стремится к бесконечности, т. е. $\eta \rightarrow 0$. Следовательно, начиная с некоторого угла 2β , механизм заедает. Любопытно и важно отметить, что в другом крайнем случае, при угле 2β , близком к 180° , механизм также заедает. Правда, эта область заедания весьма узка, т. е. заедание происходит при углах, очень близких к 180° . На первый взгляд,

это кажется парадоксальным, но причину этого явления можно понять, замечая (фиг. 9), что моменты m_1 и m_2 могут уравновеситься, когда $2\beta \rightarrow \infty$, если только по крайней мере одна сила стремится к бесконечности. Поскольку относительная скорость остается при этом конечной, то работа силы трения стремится к бесконечности, и $\eta \rightarrow 0$.

Размер h увеличивает к. п. д. не столько за счет уменьшения момента, вызывающего трение между диском и спицей, сколько за счет того, что при этом спицы, имеющие большой размер z , воспринимают меньшую часть общей нагрузки.

6. ЧИСЛОВОЙ ПРИМЕР

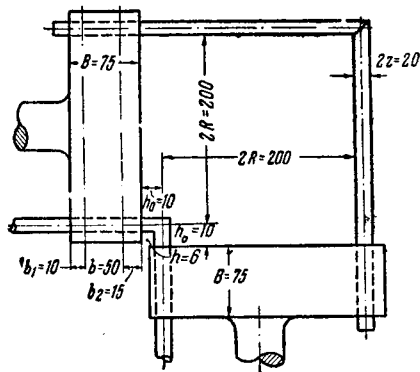
Для иллюстрации применения изложенного расчета определим силы на ведомом валу и к. п. д. следующей передачи: $2r = 20$ мм, $2R = 200$ мм, $B = 75$ мм, $h_0 = 10$ мм, $2\beta = 90^\circ$ и $h = 6$, считая коэффициент трения $\mu = 0,1$ и крутящий момент на ведомом валу $M_2 = 500$ кг/см (фиг. 13).

По уравнениям (8) получаем:

$$b = \frac{2}{3} B = \frac{2}{3} \cdot 75 = 50 \text{ мм};$$

$$b_1 = 0.2B = 0.2 \cdot 75 = 15 \text{ мм};$$

$$b_2 = 0.13B = 0.13 \cdot 75 = 10 \text{ мм}.$$



Фиг. 13.

Пользуясь величиной угла 2β и уравнением (35а), получаем (табл. 2):

$$D_i = -a_{41}a_{64}[(a_{23}a_{87} - a_{27}a_{83})(a_{35}a_{36} - a_{56}a_{55}) + (a_{23}a_{85} - a_{25}a_{83}) \cdot (a_{36}a_{57} - a_{37}a_{56})] = -a_{41}a_{56}a_{64}[a_{35} \cdot (a_{87} + a_{25}a_{83}) - a_{37}(a_{85} + a_{25}a_{83})] = -4b^3[R \cos \alpha (b - 2krf) - k(2z + b)(Rf' \sin \alpha + rf)].$$

Исходя из выражения крутящего момента ведущего вала, получаем таким же путем:

$$D_i = -4b^3[R(\cos \alpha + kf' \sin \alpha)(b - 2krf) - 2krf' \sin \alpha(z + krf) + krf(b + 2z)]$$

и

$$D'_i = -\frac{4b^3z^2}{\cos \alpha} [(b - 2krf)(6z + krf) + 2krf(z + krf)].$$

Полагая $k = \pm 1,2$ и учитывая, что знак плюс (+) относится к спицам, находящимся в I и II квадрантах, а знак минус (-) к спицам, находящимся во II и III квадрантах, составляем таблицу значений величин D_i , D'_i и D''_i для различных углов α (табл. 3).

Мгновенные к. п. д. при $\alpha_1 = 0$ (уравнение 58):

$$\eta_{\text{по}} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{D_i}{D'_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{D_i}{D''_i}} = \frac{103 + 0.267 + 0.042 + 0.132 - 0.042 + 0.268}{108 + 1.13 + 0.065 + 0.164 + 0.051 + 0.722} = \frac{104}{110} = 0.945.$$

Мгновенный к. п. д. при $\alpha_1 = 10^\circ$, т. е. когда $\alpha_1 = 10 + \frac{360}{i}$,

$$\eta_{\mu_{10}^{\circ}} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{D_i}{D'_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{D_i}{D'_i}} = \frac{82.5 - 0.280 - 0.017 + 0.127 - 0.06 + 1.81}{88 + 0.915 + 0.073 + 0.151 + 0.024 + 2.82} = \frac{84.1}{94.0} = 0.90.$$

Таким же образом:

$$\eta_{\mu_{20}^{\circ}} = \frac{45.5 - 0.06 + 0.022 + 0.096 + 0.056 + 6.65}{51.5 + 0.058 + 0.111 + 0.151 + 7.67} = \frac{52.3}{59.5} = 0.87.$$

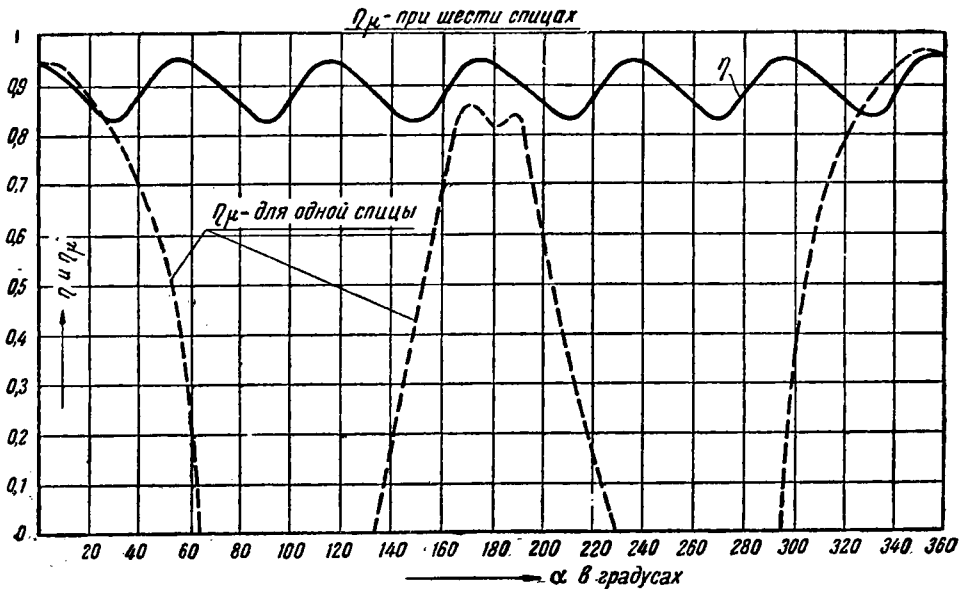
$$\eta_{\mu_{30}^{\circ}} = \frac{18.8 + 0 + 0.057 + 0.057 + 0 + 18.8}{23.7 + 0 + 0.126 + 0.142 + 0 + 21.7} = \frac{37.7}{45.7} = 0.825.$$

$$\eta_{\mu_{40}^{\circ}} = \frac{6.63 - 0.054 + 0.096 + 0.022 - 0.060 + 45.5}{9.35 + 0.023 + 0.144 + 0.120 + 0 + 49.2} = \frac{52.1}{58.8} = 0.89.$$

$$\eta_{\mu_{50}^{\circ}} = \frac{1.81 - 0.06 + 0.127 - 0.016 - 0.283 + 82.5}{3.12 + 0.038 + 0.148 + 0.078 + 85.6} = \frac{84.3}{89} = 0.95.$$

$$\eta_{\mu_{60}^{\circ}} = \eta_{\mu_{0}^{\circ}}.$$

После 60° начинается периодическое повторение уже определенных величин (фиг. 14).



Фиг. 14.

По формуле (60а)

$$\frac{1}{\eta_2} = \frac{1}{6} \left(\frac{110}{104} + \frac{92}{84.1} + \frac{59.5}{52.3} + \frac{45.7}{37.7} + \frac{58.8}{52.1} + \frac{89.3}{84.4} \right) = 1.12.$$

Средний к. п. д. при постоянном крутящем моменте на ведомом валу

$$\eta_2 = \frac{1}{1.12} = 0.9.$$

Силы, действующие на спицы. Мы ограничимся определением только сил на ведомой части спицы. По формулам табл. 2 находим:

$$D_{i_3} = -a_{41}a_{64}[a_{25}(a_{36}a_{57} - a_{37}a_{56}) + a_{27}(a_{35}a_{56} - a_{36}a_{55})] = a_{41}a_{56}a_{64}(a_{27}a_{55} - a_{25}a_{57}),$$

откуда

$$D_{i_3} = -4b^3[z(f - 3kf') - krf(f - kf')].$$

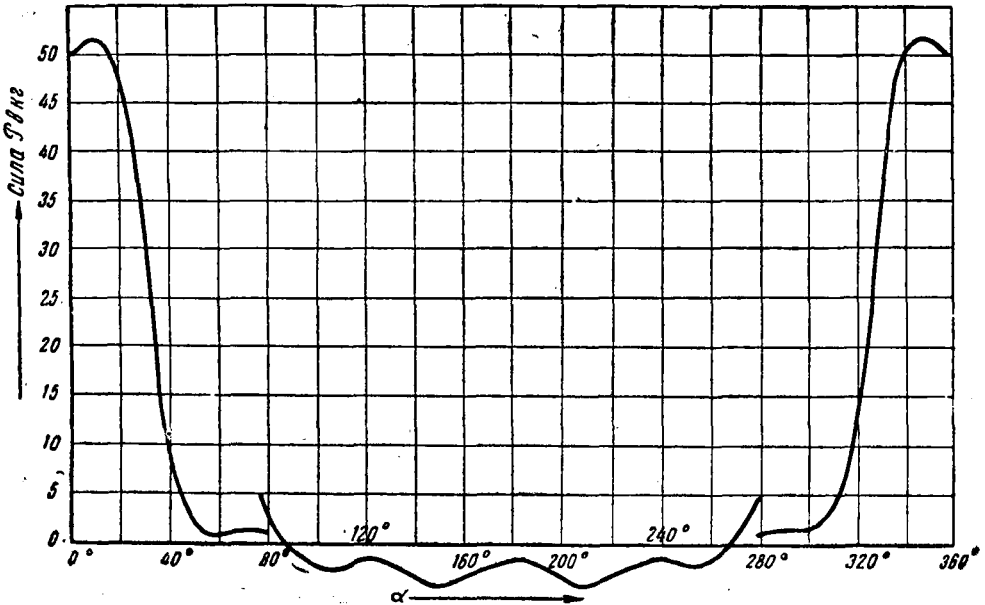
Таким же образом получаем:

$$D_{i_6} = -4b^3[z - \frac{krf}{b}(4z + b)],$$

$$D_{i_7} = -4b^3(b - 2krf).$$

Определенные по этим формулам величины приведены в табл. 3 для углов $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ с интервалом в 10° .

После этого определяем по формуле (54) силы $P_{23} = P_{22}$, P_{24} и P_{13} (табл. 3). На фиг. 15 показана кривая $P_{22} = f(\alpha)$, на которой четко видна гармоника с периодом $\frac{2\pi}{n}$ (сила, действующая под углом $80^\circ < \alpha < 280^\circ$, отложена в увеличенном масштабе).



Фиг. 15.

7. О ЗОНАХ КРИТИЧЕСКИХ СКОРОСТЕЙ

Пусть момент инерции массы ведущего диска будет I_1 , момент инерции¹ ведомого диска I_2 ; α_1 и α_2 — углы, характеризующие положение каждого диска. При передаче постоянного крутящего момента M имеем следующие дифференциальные уравнения движения дисков:

$$\begin{aligned} -I_1\ddot{\alpha}_1 + M - k(\alpha_1 - \alpha_2) &= 0, \\ -I_2\ddot{\alpha}_2 - M + k(\alpha_1 - \alpha_2) &= 0, \end{aligned}$$

¹ Если на валу находятся другие массы или если вал соединен с другим валом, то I_1 и I_2 представляют собой приведенные моменты инерции.

К определению К. П. Д. и сил, действующих на спицы при углах 180°

α (градусы)	$-\frac{D_i}{4b^3}$ (мм ²)	$-\frac{D_i}{4b^3}$ (мм ²)	$-\frac{D'_i}{4b^3 \cdot 10^5}$ (мм)	$\frac{D_i \cdot 10^5}{D'_i}$ (мм ⁻²)	$\frac{i \cdot D_i}{D'_i} \cdot 10^5$ (мм ⁻²)	$\sum \frac{D_i}{D'_i} \cdot 10^5$ (мм ⁻²)	$\sum \frac{D_i}{D'_i} \cdot 10^5$ (мм ²)	$-\frac{D_{i_1}}{4b^3}$ (мм)	$-\frac{D_{i_2}}{4b^3}$ (мм)	$-\frac{D_{i_k}}{4b^3}$ (мм)	$P_{22} = P_{33}$ (кг)	P_{24} (кг)	P_{13} (кг)
0	4670	4850	45.2	103	108	104	110	47.6	21.4	- 3.4	50.5	22.8	-2.5
10	4620	4940	56.0	82.5	88.0	84.1	92.0	48.8	24.7	- 6.9	52.8	26.7	-7.5
20	4270	4830	94.0	45.5	51.5	52.3	59.5	49.3	29.8	- 9.9	50.3	30.3	-10
30	3650	4620	194	18.8	23.7	37.7	45.5	49.5	37.5	-12.5	34	25.6	-8.5
40	2920	4120	440	6.63	9.35	52.1	58.8	49.6	47.5	-16.0	10.8	10.3	-3.5
50	1930	3160	1010	1.81	3.12	84.4	89.3	49.7	59.8	-20.7	2.9	3.5	-1.2
60	670	2870	2520	0.267	1.13	104	110	49.7	74	-25.5	0.95	1.14	-0.49
70	- 6.0	2070	2260	-0.280	0.915	84.1	92.0	49.7	89.8	-31.0	1.3	2.35	-0.80
80	-1260	1230	21 200	-0.06	0.06	52.3	59.5	49.8	106	-37.5	0.22	0.48	-0.17
90	+3260	300±30	±∞	0	0	37.7	45.5	50±0.2	125±1	±45.0	0	0	0
100	2770	-1150	-50 000	-0.054	0.023	52.1	58.8	50.2	144	52.6	-0.10	-0.27	-0.10
110	2110	-1340	-35 600	-0.060	0.038	84.4	89.3	50.3	161	58.6	-0.08	-0.27	-0.10
120	1340	-2140	-32 300	-0.042	0.065	104	110	50.3	177	64.6	-0.08	-0.27	-0.10
130	520	-2310	-31 600	-0.017	0.073	84.1	92.0	50.3	192	70.0	-0.09	-0.36	-0.13
140	- 710	-3590	-32 300	0.022	0.111	52.3	59.5	50.4	205	74.6	-0.15	-0.60	-0.22
150	-1870	-4180	-33 000	0.057	0.126	37.7	45.5	50.5	215	78.0	-0.20	- 0.86	-0.31
160	-3250	-4880	-34 000	0.096	0.144	52.1	58.8	50.7	225	81.0	-0.14	-0.63	-0.23
170	-4470	-5210	-35 200	0.127	0.148	84.4	89.3	51.2	235	70.0	-0.09	-0.40	-0.12
180	-4630	-5810	-35 500	0.132	0.164	104	110	52.4	248	22.5	-0.07	-0.33	-0.03

где k — гибкость передачи.

$$\text{Обозначив } \alpha_1 - \alpha_2 = \alpha, \quad k \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} = \theta,$$

имеем:

$$\ddot{\alpha} + \theta \alpha = 0.$$

Определим величину θ . На основании уравнения (13) получим угол отставания ведомого диска при статической передаче момента:

$$d\alpha = \frac{P_i z_i^3}{6REI} = \frac{P_k z_k^3}{6REI}.$$

Пользуясь уравнением (18), получаем:

$$d\alpha = \frac{M \cos \alpha_k z_k^3}{6REI (a - \cos \alpha_k)^3 S}.$$

Гибкость передачи

$$k = \frac{M}{d\alpha} = \frac{6REI (a - \cos \alpha_k)^3 S}{\cos \alpha_k},$$

и, наконец,

$$\theta = \frac{6REI (a - \cos \alpha_k)^3 S}{\cos \alpha_k} \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2}. \quad (60)$$

Следовательно, уравнение (59) есть дифференциальное уравнение с переменным коэффициентом. Этот коэффициент является периодической функцией угла поворота и при равномерном вращении также периодической функцией времени. Период этой функции

$$T = \frac{60}{nn_1}, \quad \text{где } n_1 \text{ — число оборотов передачи в минуту, } n \text{ — число спиц.}$$

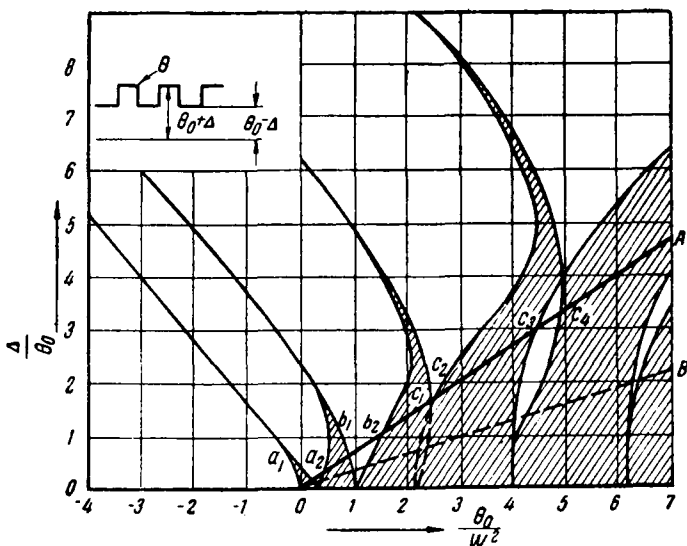
Такие колебательные системы хорошо известны в технике [3]. Здесь мы укажем только на некоторые свойства этих систем, которые необходимо иметь в виду при проектировании рассматриваемой передачи. Дифференциальное уравнение (59) имеет два периодических решения: одно периодическое решение с периодом T (периодическое решение) и одно решение с периодом $2T$ (полупериодическое решение). Между этими решениями находятся области критических частот изменений жесткости и области критических скоростей вращения.

Иллюстрируем сказанное графиком, заимствованным у В. Van der Pol [4] (фиг. 16). График построен только для указанного на нем закона изменения жесткости, но характер его остается и при других периодических изменениях жесткости. По горизонтальной оси отложены $\frac{\theta_0}{\omega^2}$, а по вертикальной оси $\frac{\Delta}{\omega^2}$, где θ_0 — постоянная часть коэф-

фициента θ , Δ — переменная часть коэффициента θ , $\omega = \frac{2\pi nn_1}{60}$ — час-

тота изменения жесткости. Заштрихованные зоны дают зоны устойчивого движения, а незаштрихованные показывают зоны неустойчивого движения. Пусть $\frac{\Delta}{\theta_0} = \text{const.}$; тогда прямая OB , данная этим урав-

нением, пересекает неустойчивые зоны в точках a_1, a_2 и b_1, b_2 и т. д. Из чертежа видно, что для уменьшения неустойчивой зоны необходимо уменьшать колебания жесткости, т. е. увеличить параметр a (уравнение 15) и число спиц. Для спокойной работы передачи необ-



Фиг. 15.

ходимо, чтобы скорость была возможно дальше от критических областей.

Если $\frac{\Delta}{\theta_0} < 1$, то можно считать, что вместо зоны $a_1 a_2$ мы имеем определенную критическую скорость, вычисляемую по уравнению $\frac{\theta_0}{\omega^2} = 4$, т. е. $\omega = \frac{1}{2} \sqrt{\theta_0}$, откуда критическое число оборотов

$$n_{1кр1} = \frac{60}{4\pi n} \sqrt{\theta_0}, \quad (62)$$

а вместо зоны $b_1 b_2$ — критическую скорость, определяемую уравнением $\frac{\theta_0}{\omega^2} = 1$, т. е.

$$n_{1кр2} = \frac{60}{2\pi n} \sqrt{\theta_0} = 2n_{1кр1}. \quad (63)$$

Вообще вместо i — критической зоны

$$n_{iкрi} = i n_{1кр1}. \quad (64)$$

Важно отметить, что, так как число спиц входит в знаменатель, первая критическая зона (уравнение 62) имеет частоту приблизительно в $2n$ раз меньше частоты собственных колебаний, определенных по средней жесткости, т. е. является низкой частотой и соответствует сравнительно низким скоростям вращения передачи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты настоящей работы:

1. Выведены уравнения для определения сил, действующих на спицах, на основании которых можно рассчитывать спицы на прочность и удельное давление. Максимальный изгибающий момент в спицах получается при $\alpha = 0$. При том же положении получается максимальное удельное давление.

2. В § 4 и 5 рассмотрены влияние трения, к. п. д. передачи на осно-

вании закона сухого трения и выведены условия заедания механизма.

3. Указано на существование критических областей вращения (§ 8), при которых передача не может работать спокойно. Даны формулы для определения этих критических скоростей при малых изменениях жесткости передачи и методы суживания областей критической скорости.

4. Показано, что увеличение числа спиц дает:

1) увеличение к. п. д. передачи, благодаря возможности уменьшить радиус спиц r ;

2) уменьшение колебания жесткости передачи, что расширяет область устойчивого движения; критические скорости при этом понижаются;

3) более равномерное распределение нагрузки между спицами.

5. Увеличение размера h (фиг. 1) вызывает:

1) увеличение потери на трение в виду увеличения защемляющего момента, необходимого увеличения диаметра спиц и более невыгодного с точки зрения наименьшего к. п. д. распределения нагрузки;

2) уменьшение колебания жесткости передачи;

3) увеличение удельного давления;

4) более равномерное распределение нагрузки между спицами.

Увеличение размера R дает:

1) увеличение к. п. д.;

2) уменьшение удельного давления. Это, конечно, верно до тех пор, пока ошибка в изготовлении, возрастающая с увеличением R , не вызывает обратного эффекта.

Увеличение угла 2β вызывает:

1) увеличение к. п. д., но при углах, очень близких к 180° , к. п. д. резко падает;

2) более равномерное распределение нагрузки между спицами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гу л а н А. Я. Расчет и конструирование передачи мощности пальцами или гнутыми спицами. „Вестник инженеров и техников“, № 2, 1940.
2. Ар то бо л е в с к и й И. И. Теория механизмов и машин, гл. II и VIII, 1940.
3. Т и м о ш е н к о С. П. Теория колебания в инженерном деле, § 22, 1934.
4. Van der Po l B., Strutt E. I. On the stability of the solutions of Mathiew's equation, „Phil. Mag.“, ser. 7, vol. 5, p. 18, 1928.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	<i>Стр.</i>
Проф. С. О. Доброгурский. К вопросу о напряжениях и усилиях при ударе	3
Введение	3
Г л а в а I. Классическая теория удара	8
Приложение классической теории удара к расчетам прочности	13
Расчет продолжительности удара (Жаннен)	18
Г л а в а II. Волновая теория удара	18
А. Продольный удар	20
Графический метод проф. Бержерона	35
Б. Поперечный удар	50
Г л а в а III. Теория Герца	51
Экспериментальная проверка расчета по Герцу	59
Поперечный удар по балке	63
Г л а в а IV. Характерные свойства металлов при ударе	68
Г л а в а V. Экспериментальные исследования удара	73
Измерение времени удара	74
Измерение перемещений и деформаций при ударе	78
Определение действующих при ударе сил	83
Изучение физической стороны явления удара	86
Г л а в а VI (написана инж. В. И. Якубовичем). Применение метода фотоупругости к изучению удара. Опыт Тувенена и Туци-Низиды	88
Удар по круговому кольцу	95
О возможности перехода от напряжений в прозрачной модели к напряжениям при ударе детали	97
Методы, основанные на нагружении реальной детали	101
Краткие выводы	104
Литература	105
А. И. Петрусевич. Динамические нагрузки на зубьях прямозубых колес	107
1. Введение	107
2. Скорость кромочного удара	109
3. Скорость срединного удара	110
4. Приближенное определение силы удара	111
5. Уточненное определение силы удара	114
6. Уточненное определение силы кромочного удара	118
7. Определение силы удара зубьев с учетом упругости вала шестерни	121
8. Определение эффективной массы, приходящейся на единицу ширины зубчатых колес	124
9. Влияние эластично связанных с шестерней масс	125
10. Вывод приближенной формулы для определения силы удара	127
11. Скоростной коэффициент	128
12. Сравнение сил удара, вызываемых ошибками в основном шаге и ошибками в профиле	129
13. Сравнение теории с американскими экспериментами	130
Г. В. Ужик. О влиянии абсолютных размеров деталей машин на их прочность	133
I. Статическая прочность образцов и прочность металла в деталях	133
II. Характеристика влияния диаметра на предел усталости гладких образцов	136
III. Характеристика влияния абсолютных размеров на предел усталости образцов с надрезами различных форм	146

IV. О причинах, обуславливающих зависимость прочности от абсолютных размеров	153
V. Попытки установления зависимости прочности от абсолютных размеров в связи с градиентом напряжений	159
Выводы	164
Литература	166
<i>И. Ж. Милейковский. Особенности конструирования и нарезания зубчатых колес внутреннего зацепления</i>	<i>168</i>
<i>Д. М. Комаров. К расчету и конструированию передачи гнутыми спицами</i>	<i>180</i>
От автора	180
1. Некоторые вопросы кинематики передачи гнутыми спицами	180
2. Расчетная система сил	182
3. Передача крутящего момента при идеальных связях и невесомых спицах	185
4. Определение сил, действующих на спицах, с учетом трения	192
5. Коэффициент полезного действия и условия самоторможения передачи	200
6. Числовой пример	203
7. О зонах критических скоростей	205
Заключение	208
Литература	209

Редактор издательства *З. Н. Перля*

Подписано к печати 9. III 1942 г. Тираж 2000 экз. 13¹/₄ п. л. 19,3 уч.-издат. л.
Заказ № 0557. ПФ 1215. Цена 11 р. 50 к.

Татполиграф при НКМП ТАССР * Казань, ул. Миславского, 9. 1942 г.