

Л.35
P183031

Л. ЛАНДАУ и Е. ЛИФШИЦ

МЕХАНИКА
СПЛОШНЫХ СРЕД

ОГИЗ • ГОСТЕХИЗДАТ • 1944

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

ПОД ОБЩЕЙ РЕДАКЦИЕЙ
проф. Л. Д. ЛАНДАУ

ТОМ ТРЕТИЙ

ОГИЗ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1944 ЛЕНИНГРАД

Л. ЛАНДАУ и Е. ЛИФШИЦ

МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

ГИДРОДИНАМИКА И ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

ОГИЗ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКВА . 1944 ЛЕНИНГРАД

Редактор *Д. А. Радлов*. Подписано к печати 7/Х 1944 г. 56,6 уч.-изт. л. 30 печ. л.
57 000 тип. зн. в печ. л. Л83478. Тираж 5 000 экз. Цена книги 33 руб. Заказ № 1247.

1-я Образцовая тип. треста „Полиграфкнига“ Отгиз при СНК РСФСР. Москва, Вилловая, 78.
Печатные сл. сданы в 6-ю тип. треста „Полиграфкнига“ Отгиз при СНК РСФСР.
Москва, 1-й Самотечный, 17. Заказ 2684.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая книга представляет собой третий том курса теоретической физики. Она посвящена изложению гидродинамики и теории упругости.

В противоположность обычно краткому изложению гидродинамики и теории упругости в курсах теоретической физики мы стремились с возможной полнотой разобрать все, представляющее физический интерес, вопросы. При этом мы старались — это относится в особенности к гидродинамике — построить изложение таким образом, чтобы создать по возможности более ясную и стройную картину явлений и их взаимоотношений. В соответствии с таким характером книги мы не излагаем в ней как приближенных методов гидродинамических расчётов, так и тех из эмпирических теорий, которые не имеют более глубокого физического обоснования. Ряд идей и результатов, изложенных в книге, принадлежат Л. Д. Ландау и ранее не опубликовывались.

Что касается вопросов, вошедших в круг рассмотрения, то мы не станем останавливаться здесь на их перечислении, — его заменяет оглавление.

В книге содержится около двухсот задач, многие из которых имеют самостоятельный интерес.

Мы хотели бы выразить здесь благодарность Я. Б. Зельдовичу, дискуссии с которым помогли выяснению ряда гидродинамических вопросов.

Институт физических проблем
Академии наук СССР
Москва, август 1943 г.

Л. Ландау
Е. Лифшиц

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ I

ГИДРОДИНАМИКА

Глава I. Идеальная жидкость	9
§ 1. Уравнение непрерывности (9). § 2. Уравнение Эйлера (10). § 3. Гидростатика (14). § 4. Стационарное течение (17). § 5. Поток энергии (18). § 6. Поток импульса (19). § 7. Сохранение циркуляции скорости (21). § 8. Потенциальное движение (24). § 9. Несжимаемая жидкость (26). § 10. Сила сопротивления при потенциальном обтекании (32). § 11. Гравитационные волны (37). § 12. Давные гравитационные волны (43).	
Глава II. Вязкая жидкость	45
§ 13. Уравнения движения вязкой жидкости (45). § 14. Диссипация энергии в несжимаемой жидкости (52). § 15. Пуазейлевское течение (53). § 16. Движение жидкости между вращающимися цилиндрами (59). § 17. Закон подобия (60). § 18. Формула Стокса (63). § 19. Точные решения уравнений движения вязкой жидкости (71). § 20. Колебательное движение в вязкой жидкости (80). § 21. Затухание гравитационных волн (91).	
Глава III. Турбулентность	94
§ 22. Устойчивость стационарного движения жидкости (94). § 23. Устойчивость вращательного движения жидкости (96). § 24. Возникновение турбулентности (100). § 25. Развитая турбулентность (108). § 26. Локальная турбулентность (111). § 27. Корреляция скоростей (115). § 28. Область турбулентности и явление отрыва (120). § 29. Турбулентная струя (122). § 30. След (127). § 31. Изотропная турбулентность (136).	
Глава IV. Пограничный слой	141
§ 32. Ламинарный пограничный слой (141). § 33. Движение вблизи линии отрыва (147). § 34. Устойчивость движения в ламинарном пограничном слое (154). § 35. Турбулентное движение в трубе (158). § 36. Турбулентный пограничный слой (165). § 37. Кризис сопротивления (169). § 38. Хорошо обтекаемые тела (172).	
Глава V. Теплопроводность в жидкости	178
§ 39. Общее уравнение переноса тепла (178). § 40. Теплопроводность в несжимаемой жидкости (182). § 41. Теплопроводность в неограниченной среде (185). § 42. Теплопроводность в ограниченной среде (188). § 43. Закон подобия для теплопередачи (193). § 44. Теплопередача в пограничном слое (196). § 45. Нагревание тела в движущейся жидкости (200). § 46. Свободная конвекция (203).	
Глава VI. Звук	207
§ 47. Звуковые волны (207). § 48. Энергия и импульс звуковых волн (212). § 49. Отражение и преломление звуковых волн (217). § 50. Геометрическая акустика (220). § 51. Эффект Доплера (223). § 52. Собствен-	

ные колебания (225). § 53. Сферические и цилиндрические волны (229). § 54. Формула Пуассона (233). § 55. Излучение звука (236). § 56. Принцип взаимности (244). § 57. Распространение звука по трубе (248). § 58. Рассеяние звука (252). § 59. Поглощение звука (256). § 60. Вторая вязкость (261).

Глава VII. Разрывы 267

§ 61. Угол Маха (267). § 62. Поверхности разрыва (269). § 63. Устойчивость тангенциальных разрывов (271). § 64. Адиабата Гюгонио (275). § 65. Теорема Цейплера (281). § 66. Ударные волны в идеальном газе (286). § 67. Ширина разрывов (289). § 68. Слабые разрывы (294). § 69. Движение вблизи особой линии (296). § 70. Пересечение поверхностей разрыва (302). § 71. Пересечение разрыва с поверхностью твердого тела (303). § 72. Автомодельное движение газа (308). § 73. Разрывы в начальных условиях (313).

Глава VIII. Обтекание твердых тел сжимаемой жидкостью 318

§ 74. Стационарный поток сжимаемого газа (318). § 75. Истечение газа через сопло (321). § 76. Вязкое движение сжимаемого газа в трубе (325). § 77. Одномерные бегущие волны (327). § 78. Звуковые волны во втором приближении (333). § 79. Произвольное одномерное движение сжимаемого газа (337). § 80. Сверхзвуковой плоско-параллельный поток (341). § 81. Общая задача о двумерном стационарном движении сжимаемого газа (347). § 82. Образование разрывов при сверхзвуковом обтекании тел (349). § 83. Сверхзвуковое обтекание остроугольного тела (352). § 84. Подъемная сила при больших дозвуковых скоростях (357). § 85. Сверхзвуковое обтекание крыла (360).

Глава IX. Гидродинамика горения 363

§ 86. Медленное горение (363). § 87. Горение газа в трубе (368). § 88. Детонация (370). § 89. Распространение детонационной волны (376). § 90. Соотношение между различными режимами горения (383).

Глава X. Диффузия 386

§ 91. Уравнения гидродинамики для жидких смесей (386). § 92. Принцип симметрии кинетических коэффициентов (389). § 93. Коэффициенты диффузии и термодиффузии (392). § 94. Броуновское движение (395).

Глава XI. Поверхностные явления 399

§ 95. Формула Лапласа (399). § 96. Капиллярные волны (406). § 97. Влияние адсорбированных плёнок на движение жидкости (412). § 98. Поверхностное натяжение вблизи критической точки (415).

Глава XII. Кинетическая теория газов 420

§ 99. Принцип детального равновесия (420). § 100. Кинетическое уравнение (424). § 101. Теплопроводность газов (427). § 102. Вязкость газов (431). § 103. Диффузия в газах (434). § 104. Длина свободного пробега (440). § 105. Явления в слабо разреженных газах (444). § 106. Явления в сильно разреженных газах (451).

ЧАСТЬ II

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Глава XIII. Симметрия кристаллов 462

§ 107. Анизотропные тела (462). § 108. Элементы симметрии (464). § 109. Точечные группы (467). § 110. Решётка Браве (472). § 111. Кристаллические системы (474). § 112. Кристаллические классы (478). § 113. Пространственные группы (481). § 114. Зеркальная плоскость (486). § 115. Обратная решётка (487).

Глава XIV. Основные уравнения теории упругости	490
§ 116. Тензор деформации (490). § 117. Тензор напряжений (493). § 118. Термодинамика деформирования (497). § 119. Закон Гука (499). § 120. Однородные деформации (503). § 121. Деформации с изменением температуры (505). § 122. Уравнения равновесия изотропных тел (507). § 123. Равновесие упругой среды, ограниченной плоскостью (511). § 124. Соприкосновение твердых тел (516). § 125. Упругие свойства кристаллов (522).	
Глава XV. Равновесие стержней и пластинок	528
§ 126. Энергия изогнутой пластинки (528). § 127. Уравнение равнове- сия пластинки (530). § 128. Продольные деформации пластинок (536). § 129. Сильный изгиб пластинок (538). § 130. Деформации оболочек (543). § 131. Кручение стержней (547). § 132. Изгиб стержней (553). § 133. Энергия деформированного стержня (556). § 134. Уравнения равновесия стержней (560). § 135. Слабый изгиб стержней (567).	
Глава XVI. Упругие волны	578
§ 136. Упругие волны в изотропной среде (576). § 137. Упругие волны в кристаллах (581). § 138. Поверхностные волны (583). § 139. Коле- бания стержней и пластинок (587). § 140. Короткие волны (594). § 141. Ангармонические колебания (598).	
Глава XVII. Теплопроводность и вязкость твёрдых тел	602
§ 142. Уравнение теплопроводности в твёрдых телах (602). § 143. Теплопроводность кристаллов (604). § 144. Вязкость твёрдых тел (605). § 145. Поглощение звука в твёрдых телах (608). § 146. Очень вязкие жидкости (615).	

ГЛАВА I

ИДЕАЛЬНАЯ ЖИДКОСТЬ

§ 1. Уравнение непрерывности

Изучение движения жидкостей (и газов) представляет собой содержание так называемой гидродинамики. Поскольку явления, рассматриваемые в гидродинамике, имеют макроскопический характер, то в гидродинамике жидкость рассматривается как сплошная среда. Это значит, что всякий малый элемент объема жидкости считается всё-таки настолько большим, что содержит ещё очень большое число молекул. Соответственно этому, когда мы будем говорить о бесконечно малых элементах объема, то всегда при этом будет подразумеваться «физически» бесконечно малый объем, т. е. объем, достаточно малый по сравнению с объемом тела, но большой по сравнению с межмолекулярными расстояниями. В таком же смысле надо понимать в гидродинамике выражения «жидкая частица», «точка жидкости». Если, например, говорят о смещении некоторой частицы жидкости, то при этом идёт речь не о смещении отдельной молекулы, а о смещении целого элемента объема, содержащего много молекул, но рассматриваемого в гидродинамике как точка.

Математическое описание состояния движущейся жидкости¹⁾ осуществляется с помощью функций $v(x, y, z, t)$, $\rho(x, y, z, t)$, $p(x, y, z, t)$, определяющих соответственно распределение скоростей, плотности, давления и т. п. жидкости по её объёму. Все они являются, вообще говоря, функциями координат x, y, z и времени t . Подчеркнём, что $v(x, y, z, t)$ есть скорость жидкости в каждой данной точке x, y, z пространства в момент времени t , т. е. относится к определённым точкам пространства, а не к определённым частицам жидкости, передвигающимся со временем в пространстве; то же самое относится к величинам ρ, p и т. д.

Начнём вывод основных гидродинамических уравнений с вывода уравнения, выражающего собой закон сохранения вещества в гидродинамике.

Рассмотрим некоторый объем V_0 пространства. Количество (масса) жидкости в этом объеме есть $\int \rho dV$, где ρ есть плотность жидкости, а интегрирование производится по объёму V_0 . Через элемент df поверхности, ограничивающей рассматриваемый объем, в единицу времени протекает количество $\rho v df$ жидкости; df по абсолютной величине равен

¹⁾ Мы говорим здесь и ниже для краткости только о жидкости; но то же самое относится и к газам.

площади элемента поверхности и направлен по нормали к ней. Условимся направлять df по внешней нормали. Тогда $\rho v df$ положительно, если жидкость вытекает из объема, и отрицательно, если жидкость втекает в него. Полное количество жидкости, вытекающей в единицу времени из объема V_0 , есть, следовательно,

$$\oint \rho v df,$$

где интегрирование производится по всей замкнутой поверхности, охватывающей рассматриваемый объем.

С другой стороны, уменьшение количества жидкости в объеме V_0 можно написать в виде

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV.$$

Приравняв оба выражения, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = - \oint \rho v df. \quad (1.1)$$

Интеграл по поверхности преобразуем на основании теоремы Гаусса в интеграл по объему:

$$\oint \rho v df = \int \operatorname{div} \rho v dV.$$

Таким образом,

$$\int \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho v \right) dV = 0.$$

Поскольку это равенство должно иметь место для любого объема, то должно быть равным нулю подинтегральное выражение, т. е.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho v = 0. \quad (1.2)$$

Это — так называемое уравнение непрерывности.

Раскрывая выражение $\operatorname{div} \rho v$, (1.2) можно написать также в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} v + v \operatorname{grad} \rho = 0. \quad (1.3)$$

Вектор

$$J = \rho v \quad (1.4)$$

называют *плотностью потока жидкости*. Его направление совпадает с направлением движения жидкости, а абсолютная величина определяет количество жидкости, протекающей в единицу времени через единицу площади, расположенную перпендикулярно скорости.

§ 2. Уравнение Эйлера

Выделим в жидкости некоторый объем. Пусть p — давление. Полная сила, действующая на выделенный объем жидкости, равна интегралу

$$-\oint p df,$$

взятому по поверхности рассматриваемого объёма. По теореме Гаусса мы можем написать:

$$-\oint p d\Omega = -\int \text{grad } p dV.$$

Отсюда видно, что на каждый элемент объёма dV жидкости действует со стороны окружающей его жидкости сила $-dV \text{grad } p$. Другими словами, можно считать, что на единицу объёма жидкости действует сила $-\text{grad } p$.

Мы можем теперь написать уравнения движения элемента объёма жидкости, приравняв силу $-\text{grad } p$ произведению массы ρ единицы объёма жидкости на её ускорение $\frac{dv}{dt}$:

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\text{grad } p. \quad (2,1)$$

Стоящая здесь производная $\frac{dv}{dt}$ определяет не изменение скорости жидкости в данной неподвижной точке пространства, а изменение скорости определённой передвигающейся в пространстве частицы жидкости. Эту производную надо выразить через величины, относящиеся к неподвижным в пространстве точкам. Для этого заметим, что изменение dv скорости данной частицы жидкости в течение времени dt складывается из двух частей: из изменения скорости в данном месте пространства и из изменения скорости при переходе от исходной точки пространства к точке, удалённой от неё на расстояние dr , пройденное рассматриваемой частицей жидкости в течение времени dt . Первая из этих частей равна

$$\frac{\partial v}{\partial t} dt,$$

где теперь производная $\partial v / \partial t$ берётся при постоянных x, y, z , т. е. в заданной точке пространства. Вторая часть изменения скорости равна

$$dx \frac{\partial v}{\partial x} + dy \frac{\partial v}{\partial y} + dz \frac{\partial v}{\partial z} = (dr \nabla) v.$$

Таким образом,

$$dv = \frac{\partial v}{\partial t} dt + (dr \nabla) v$$

или, разделив обе стороны равенства на dt ,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + (v \nabla) v. \quad (2,2)$$

Подставляя полученное соотношение в (2,1), находим:

$$\rho \frac{dv}{dt} + (v \nabla) v = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p. \quad (2,3)$$

Это и есть искомое уравнение движения жидкости. Оно называется уравнением Эйлера (L. Euler) и является одним из основных уравнений гидродинамики.

Если жидкость находится в поле тяжести, то на каждую единицу её объёма действует ещё сила ρg , где g есть ускорение силы тяжести. Эта сила должна быть прибавлена к правой стороне уравнения (2,1), так что (2,3) приобретает вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = - \frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g}. \quad (2,4)$$

При выводе уравнений движения мы совершенно не учитывали процессов диссипации энергии, которые могут иметь место в текущей жидкости вследствие внутреннего трения (вязкости) в жидкости и теплообмена между различными её участками. Поэтому всё излагаемое здесь и в следующих параграфах этой главы относится только к таким движениям жидкостей и газов, при которых несущественны процессы теплопроводности и вязкости; о таком движении говорят, как о движении идеальной жидкости.

Отсутствие теплообмена между отдельными участками жидкости (а также, конечно, и между жидкостью и соприкасающимися с нею окружающими телами) означает, что движение происходит адиабатически, причём адиабатически в каждом из участков жидкости. Таким образом, движение идеальной жидкости следует рассматривать как адиабатическое.

При адиабатическом движении энтропия каждого участка жидкости остаётся постоянной при перемещении последнего в пространстве.

Обозначая посредством s энтропию, отнесённую к единице массы жидкости, мы можем выразить адиабатичность движения уравнением

$$\frac{ds}{dt} = 0, \quad (2,5)$$

где полная производная по времени означает, как и в (2,1), изменение энтропии заданного перемещающегося участка жидкости. Эту производную можно написать в виде

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \text{grad } s = 0. \quad (2,6)$$

Это есть общее уравнение, выражающее собой адиабатичность движения идеальной жидкости. Заметим, что с помощью (1,2) его можно написать в виде «уравнения непрерывности» для энтропии

$$\frac{\partial (\rho s)}{\partial t} + \text{div} (\rho s \mathbf{v}) = 0. \quad (2,7)$$

Произведение $\rho s \mathbf{v}$ представляет собой «плотность потока энтропии».

Надо, однако, иметь в виду, что обычно уравнение адиабатичности принимает гораздо более простую форму. Если, как это обычно имеет место, в некоторый начальный момент времени энтропия одинакова во всех точках объёма жидкости, то она останется везде одинаковой и неизменной со временем и при дальнейшем движении жидкости. В этих случаях можно, следовательно, писать уравнение адиабатичности просто в виде

$$s = \text{const.}, \quad (2,8)$$

что мы и будем делать в дальнейшем.

Адиабатичностью движения можно воспользоваться для того, чтобы представить уравнение движения (2,3) в несколько ином виде. Для этого воспользуемся известным термодинамическим соотношением:

$$d\omega = T ds + V dp,$$

где ω — тепловая функция единицы массы жидкости, $V = \frac{1}{\rho}$ — удельный объём, а T — температура. Поскольку $s = \text{const.}$, мы имеем просто

$$d\omega = V dp = \frac{1}{\rho} dp,$$

и поэтому $\frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla \omega$. Уравнение (2,3) можно, следовательно, написать в виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\text{grad } \omega. \quad (2,9)$$

Полезно заметить ещё одну форму уравнения Эйлера. Воспользовавшись известной формулой векторного анализа

$$\frac{1}{2} \text{grad } v^2 = [\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v}] + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v},$$

можно написать (2,9) в виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad } v^2 - [\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v}] = -\text{grad } \omega. \quad (2,10)$$

Если применить к обеим строкам этого уравнения операцию rot , то мы получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{v} = \text{rot} [\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v}], \quad (2,11)$$

содержащее только скорость.

К уравнениям движения надо добавить граничные условия, которые должны выполняться на ограничивающих жидкость стенках. Для идеальной жидкости это условие должно выражать собой просто тот факт, что жидкость не может проникнуть за твёрдую поверхность. Это значит, что на неподвижных стенках должна обращаться в нуль нормальная к поверхности стенки компонента скорости жидкости:

$$v_n = 0 \quad (2,12)$$

(в общем же случае движущейся поверхности v_n должно быть равно соответствующей компоненте скорости поверхности).

На границе между двумя несмешивающимися жидкостями должны выполняться условие равенства нормальных к поверхности раздела компонент скорости и условие равенства давления в обеих жидкостях.

Состояние движущейся жидкости определяется пятью величинами: тремя компонентами скорости \mathbf{v} , давлением p и плотностью ρ (остальные термодинамические величины определяются по значениям p и ρ с помощью уравнения состояния жидкости). Соответственно этому, полная си-

стема гидродинамических уравнений должна содержать пять уравнений. Для идеальной жидкости этими уравнениями являются уравнения Эйлера, уравнение непрерывности и уравнение, выражающее адиабатичность движения.

§ 3. Гидростатика

Для покоящейся жидкости, находящейся в поле тяжести, уравнение Эйлера (2,4) принимает вид

$$\text{grad } p = \rho g. \quad (3,1)$$

Это уравнение описывает равновесное состояние жидкости.

(Если внешние силы вообще отсутствуют, то уравнение равновесия гласит просто $\nabla p = 0$, т. е. $p = \text{const.}$, — давление одинаково во всех точках жидкости.)

Уравнение (3,1) непосредственно интегрируется, если плотность жидкости можно считать постоянной вдоль всего её объема, т. е. если не происходит заметного сжатия жидкости под действием внешнего поля. Выбирая ось z вертикально вверх, имеем:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g.$$

Отсюда

$$p = -\rho g z + \text{const.}$$

Если покоящаяся жидкость имеет свободную поверхность (на высоте h), к которой приложено одинаковое во всех точках внешнее давление p_0 , то эта поверхность должна быть горизонтальной плоскостью $z = h$. Из условия $p = p_0$ при $z = h$ имеем $\text{const.} = p_0 + \rho g h$, так что

$$p = p_0 + \rho g (h - z). \quad (3,2)$$

Для больших масс жидкости или газа плотность ρ нельзя, вообще говоря, считать постоянной; это в особенности относится к газам (например к атмосфере). Предположим, что жидкость находится не только в механическом, но и в тепловом равновесии. Тогда температура одинакова во всех точках жидкости, и уравнение (3,1) может быть проинтегрировано следующим образом. Воспользуемся известным термодинамическим соотношением

$$d\Phi = -s dT + V dp,$$

где Φ — термодинамический потенциал, отнесённый к единице массы жидкости. При постоянной температуре:

$$d\Phi = V dp = \frac{1}{\rho} dp.$$

Отсюда видно, что выражение $\frac{1}{\rho} \nabla p$ можно написать в рассматриваемом случае как $\nabla \Phi$, так что уравнение равновесия (3,1) принимает вид

$$\nabla \Phi = g.$$

Для постоянного вектора \mathbf{g} , направленного вдоль оси z (в отрицательном её направлении), имеет место тождество $\mathbf{g} = -\nabla(gz)$. Таким образом,

$$\nabla(\Phi + gz) = 0,$$

откуда находим, что вдоль всего объёма жидкости должна быть постоянной сумма

$$\Phi + gz = \text{const} \quad (3.3)$$

gz представляет собой потенциальную энергию единицы массы жидкости в поле тяжести. Условие (3.3) известно уже из статистической физики, как условие равновесия системы, находящейся во внешнем поле.

Отметим здесь ещё следующее простое следствие из уравнения (3.1). Если находящиеся в поле тяжести жидкость или газ (например атмосфера) находятся в механическом равновесии, то давление в них может быть функцией только от высоты z (так как, если бы на данной высоте давление было различно в различных местах, то возникло бы движение). Тогда из (3.1) следует, что и плотность

$$\rho = -\frac{1}{g} \frac{dp}{dz}$$

тоже является функцией только от z . Но давление и плотность однозначно определяют температуру в данной точке тела. Следовательно, и температура должна быть функцией только от z . Таким образом, при механической равновесии в поле тяжести распределение давления, плотности и температуры зависит только от высоты. Если же, например, температура различна в разных местах жидкости на одной и той же высоте, то механическое равновесие в ней невозможно.

Тело может находиться в механическом равновесии (т. е. в нём может отсутствовать макроскопическое движение), не находясь при этом в тепловом равновесии. Уравнение (3.1), являющееся условием механического равновесия, может быть удовлетворено и при нестационарной вдоль тела температуре. При этом, однако, возникает вопрос о том, будет ли такое равновесие устойчивым. Оказывается, что равновесие будет устойчивым лишь при выполнении определённого условия. Если это условие не выполняется, то равновесие неустойчиво, что приводит к появлению в жидкости беспорядочных течений, стремящихся перемешать жидкость так, чтобы в ней устанавливалась постоянная температура. Такое движение носит название *конвекции*. Условие устойчивости механического равновесия является, другими словами, условием отсутствия конвекции. Оно может быть выведено следующим образом.

Рассмотрим единицу массы жидкости, находящуюся на высоте z , где давление есть p , и обладающую энтропией s и удельным объёмом $V = V(p, s)$. Предположим, что этот участок жидкости подвергается адиабатическому смещению на малый отрезок ξ вверх, и вычислим силу, действующую на него в этом новом положении. Искомая сила складывается из силы тяжести $-g$ (положительной считаем силу, направленную вверх) и из силы, действующей со стороны окружающей жидкости. По-

следняя равна $-V(p', s) \frac{dp'}{dz}$ (см. § 2), где p' есть давление на высоте $z + \xi$, а $\frac{1}{V(p', s)}$ — плотность, которую приобретает рассматриваемая порция жидкости после её смещения (при неизменной энтропии s).

С другой стороны, согласно уравнению равновесия (3,1) имеем $V(p', s') \frac{dp'}{dz} = -g$, где $\frac{1}{V(p', s')}$ есть плотность жидкости, нормально находящейся на высоте $z + \xi$. Таким образом, искомая сила равна

$$-g - V(p', s) \frac{dp'}{dz} = g \left[-1 + \frac{V(p', s)}{V(p', s')} \right].$$

Разлагая разность $V(p', s') - V(p', s)$ по степеням $s' - s = \frac{ds}{dz} \xi$, получим:

$$-\frac{g}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial s} \right)_p \frac{ds}{dz} \xi$$

Для устойчивости равновесия необходимо¹⁾, чтобы возникающая при смещении элемента жидкости сила стремилась вернуть элемент в исходное состояние; в данном случае сила должна быть, следовательно, направлена вниз, т. е. должно быть

$$\left(\frac{\partial V}{\partial s} \right)_p \frac{ds}{dz} > 0.$$

Согласно термодинамическим формулам имеем $\left(\frac{\partial V}{\partial s} \right)_p = \frac{T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p}{c_p}$ (c_p — удельная теплоёмкость при постоянном давлении); производную же $\frac{ds}{dz}$ выразим в виде

$$\frac{ds}{dz} = \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p \frac{dT}{dz} + \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T \frac{dp}{dz} = \frac{c_p}{T} \frac{dT}{dz} - \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \frac{dp}{dz} = \frac{c_p}{T} \frac{dT}{dz} + \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p g.$$

Таким образом, имеем условие отсутствия конвекции в виде

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \left\{ \frac{c_p}{T} \frac{dT}{dz} + \frac{g}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \right\} > 0. \quad (3,4)$$

Если вещество расширяется при нагревании $\left[\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p > 0 \right]$, то имеем отсюда:

$$\frac{dT}{dz} > -\frac{gT}{c_p V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p. \quad (3,5)$$

Конвекция будет происходить, если температура падает по направлению снизу вверх, причём её градиент превышает по абсолютному значению величину $\frac{gT}{c_p V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$.

¹⁾ Но, вообще говоря, недостаточно.

§ 4. Стационарное течение

Уравнения гидродинамики заметно упрощаются в случае стационарного течения жидкости. Под стационарным подразумевают такое течение, при котором в каждой точке пространства, занятого жидкостью, скорость течения остаётся со временем постоянной. Другими словами, \mathbf{v} является функцией одних только координат, но не времени, так что $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$. Уравнение (2,10) сводится теперь к равенству

$$\frac{1}{2} \text{grad } v^2 - [\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v}] = -\text{grad } \omega. \quad (4,1)$$

Введём понятие линий тока. *Линиями тока* называются линии, характеризующиеся тем, что для данного момента времени касательная к линии в любой её точке совпадает по направлению со скоростью течения жидкости в этой же точке. При стационарном движении, когда скорость в каждой точке остаётся постоянной, линии тока неизменны со временем и представляют собой просто траектории частиц жидкости. Обозначим единичный вектор касательной к линии тока в каждой её точке посредством \mathbf{l} .

Спроектируем уравнение (4,1) на направление линий тока, т. е. в каждой точке на соответствующий вектор \mathbf{l} . Проекция градиента на некоторое направление равна, как известно, производной, взятой по этому направлению. Поэтому искомая проекция от $\text{grad } \omega$ есть $\frac{\partial \omega}{\partial l}$. Что касается вектора $[\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v}]$, то он перпендикулярен скорости \mathbf{v} , и потому его проекция на направление \mathbf{l} равна нулю.

Таким образом, из уравнения (4,1) мы получаем:

$$\frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{v^2}{2} + \omega \right) = 0.$$

Отсюда следует, что величина $\frac{v^2}{2} + \omega$ постоянна вдоль линии тока. Таким образом, вдоль каждой линии тока имеет место равенство

$$\frac{v^2}{2} + \omega = \text{const.} \quad (4,2)$$

Значение const. , вообще говоря, различно для разных линий тока. Уравнение (4,2) называется уравнением Бернулли (D. Bernoulli).

Если течение жидкости происходит в поле тяжести, то к правой части уравнения (4,1) надо прибавить ещё ускорение силы тяжести \mathbf{g} . Выберем направление силы тяжести в качестве направления оси z , причём положительные значения z отсчитываются вверх. Тогда косинус угла между направлениями \mathbf{g} и \mathbf{l} равен производной $-\frac{dz}{dl}$, так что проекция \mathbf{g} на \mathbf{l} есть

$$-g \frac{dz}{dl}.$$

Соответственно этому будем иметь теперь

$$\frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{v^2}{2} + \omega + gz \right) = 0,$$

так что уравнение Бернулли приобретёт вид

$$\frac{v^2}{2} + w + gz = \text{const.} \quad (4,3)$$

§ 5. Поток энергии.

Выберем какой-нибудь неподвижный в пространстве элемент объёма и определим, как меняется со временем энергия находящейся в этом объёме жидкости. Энергия единицы объёма жидкости равна

$$\rho \frac{v^2}{2} + \rho \varepsilon,$$

где первый член есть кинетическая энергия, а второй — внутренняя энергия (ε — внутренняя энергия единицы массы жидкости). Изменение этой энергии определяется частной производной

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon \right).$$

Для вычисления этой величины пишем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho v^2}{2} = \frac{v^2}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial t}$$

или, воспользовавшись уравнением непрерывности (1,2) и уравнением движения (2,3),

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho v^2}{2} &= -\frac{v^2}{2} \text{div } \rho \mathbf{v} - \mathbf{v} \text{ grad } p - \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = \\ &= -\frac{v^2}{2} \text{div } \rho \mathbf{v} - \mathbf{v} \text{ grad } p - \rho (\mathbf{v} \nabla) \frac{v^2}{2}. \end{aligned}$$

Для преобразования производной $\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t}$ воспользуемся тем, что при постоянной энтропии¹⁾ $d\varepsilon = -p dV$ или, заменив $V = \frac{1}{\rho}$,

$$d\varepsilon = \frac{p}{\rho^2} d\rho;$$

следовательно,

$$d(\rho \varepsilon) = \rho d\varepsilon + \varepsilon d\rho = \varepsilon d\rho + \frac{p}{\rho} d\rho.$$

Но $\varepsilon + \frac{p}{\rho} = \varepsilon + pV$ есть не что иное, как тепловая функция w единицы массы, так что

$$d(\rho \varepsilon) = w d\rho.$$

Поэтому мы можем написать:

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} = w \frac{\partial \rho}{\partial t} = -w \text{div } \rho \mathbf{v}.$$

¹⁾ Тот же окончательный результат имеет место и в общем случае, когда условие адиабатичности надо брать в виде (2,6). Для упрощения вывода мы пишем здесь просто $s = \text{const.}$

Собирая полученные выражения, находим для искомого изменения энергии:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon \right) = - \left(w + \frac{v^2}{2} \right) \operatorname{div} \rho \mathbf{v} - \rho (\mathbf{v} \nabla) \left(w + \frac{v^2}{2} \right)$$

или окончательно

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon \right) = - \operatorname{div} \left\{ \rho \mathbf{v} \left(\frac{v^2}{2} + w \right) \right\}. \quad (5.1)$$

Для того чтобы выяснить смысл полученного равенства, проинтегрируем его по некоторому объёму:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon \right) dV = - \int \operatorname{div} \left\{ \rho \mathbf{v} \left(\frac{v^2}{2} + w \right) \right\} dV$$

или, воспользовавшись теоремой Гаусса:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon \right) dV = - \oint \rho \mathbf{v} \left(\frac{v^2}{2} + w \right) d\mathbf{i}. \quad (5.2)$$

Слева стоит изменение в единицу времени энергии жидкости в некотором заданном объёме пространства. Стоящий справа интеграл по поверхности представляет собой, следовательно, количество энергии, «вытекающей» в единицу времени из рассматриваемого объёма. Отсюда видно, что выражение

$$\rho \mathbf{v} \left(\frac{v^2}{2} + w \right) \quad (5.3)$$

может быть названо вектором «плотности потока энергии». Его абсолютная величина есть количество энергии, протекающей в единицу времени через единицу поверхности, расположенную перпендикулярно направлению скорости. Сумму $\frac{v^2}{2} + w$ можно рассматривать как энергию, переносимую единицей массы жидкости.

§ 6. Поток импульса.

Произведём теперь аналогичный вывод для импульса жидкости. Импульс единицы объёма жидкости есть $\rho \mathbf{v}$. Определим скорость его изменения:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{v}.$$

Будем производить вычисление в компонентах¹⁾. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v_i = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} v_i$$

¹⁾ Латинские индексы i, k, \dots пробегает всевозможные значения 1, 2, 3, соответствующие компонентам векторов и тензоров соответственно по осям x, y, z .

В дальнейшем мы будем писать суммы вроде $\mathbf{AB} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 = \sum_{i=1}^3 A_i B_i$

просто в виде $A_i B_i$, опуская знак суммирования. Аналогично мы будем поступать при всех вообще перемножениях векторов или тензоров: по всем

Воспользуемся уравнением непрерывности (1,2) (написав $\operatorname{div} \rho v$ в виде $\frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_k)$):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial (\rho v_k)}{\partial x_k},$$

и уравнение Эйлера (2,3) в форме

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = - v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}.$$

Тогда получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v_i = - \rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_i} - v_k \frac{\partial (\rho v_k)}{\partial x_k} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_k} \rho v_i v_k.$$

Первый член справа напишем в виде¹⁾

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \delta_{ik} \frac{\partial p}{\partial x_k}$$

и находим окончательно:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v_i = - \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}, \quad (6,1)$$

где тензор Π_{ik} определяется как

$$\Pi_{ik} = p \delta_{ik} + \rho v_i v_k. \quad (6,2)$$

Тензор Π_{ik} , очевидно, симметричен.

Для выяснения смысла тензора Π_{ik} проинтегрируем уравнение (6,1) по некоторому объёму:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho v_i dV = - \int \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} dV.$$

Стоящий в правой стороне равенства интеграл преобразуем по теореме Гаусса²⁾ в интеграл по поверхности:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho v_i dV = - \oint \Pi_{ik} df_k. \quad (6,3)$$

дважды повторяющимся (в данном выражении) латинским индексам везде подразумевается суммирование по значениям 1, 2, 3. Такие индексы, по которым производится суммирование, иногда называют «немыми». При манипулировании с «немыми» индексами необходимо помнить, что каждую пару таких индексов можно обозначать любыми (одинаковыми) буквами, поскольку обозначение индексов, пробегающих все возможные значения, не влияет, конечно, на значение суммы.

1) δ_{ik} обозначает так называемый единичный тензор, т. е. тензор с компонентами, равными 1 при $i=k$ и 0 при $i \neq k$. Очевидно, что $\delta_{ik} A_k = A_i$, где A_i — некоторый вектор. Аналогично, если A_{kl} есть тензор второго ранга, то имеют место соотношения $\delta_{ik} A_{kl} = A_{il}$, $\delta_{ik} A_{lk} = A_{ii}$ и т. д.

2) Теорему Гаусса можно сформулировать следующим образом: интеграл по замкнутой поверхности преобразуется в интеграл по охватываемому этой поверхностью объёму посредством замены элемента поверхности df_i оператором $dV \frac{\partial}{\partial x_i}$:

$$df_i \rightarrow dV \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Слева стоит изменение в единицу времени i -й компоненты импульса в рассматриваемом объеме. Поэтому стоящий справа интеграл по поверхности есть количество этого импульса, «вытекающего» в единицу времени через поверхность объема. Следовательно, $\Pi_{ik} df_k$ есть i -я компонента импульса, протекающего через элемент df поверхности. Если написать df_k в виде $n_k df$ (df — абсолютная величина элемента поверхности, n — единичный вектор внешней нормали к нему), то мы найдем, что $\Pi_{ik} n_k$ есть поток импульса, отнесенный к единице поверхности. Заметим, что согласно (6,2) $\Pi_{ik} n_k = \rho n_i + \rho v_i v_k n_k$; это выражение может быть написано в векторном виде как

$$\rho n + \rho v (v n).$$

Таким образом, Π_{ik} есть i -я компонента количества импульса, протекающего в единицу времени через единицу поверхности, перпендикулярную оси x_k . Тензор Π_{ik} называется *тензором плотности потока импульса*. Поток энергии, являющейся скалярной величиной, определяется вектором; поток же импульса, который сам есть вектор, определяется тензором второго ранга.

§ 7. Сохранение циркуляции скорости

Течение имеет существенно различный характер, смотря по тому, равен ли во всей жидкости ротор скорости нулю или нет. Если во всей жидкости

$$\text{rot } v = 0, \quad (7,1)$$

то движение жидкости называется *потенциальным*. Если же, по крайней мере в некоторой части рассматриваемого объема жидкости, $\text{rot } v$ отличен от нуля, то движение называется *вихревым*.

Рассмотрим некоторый замкнутый контур в жидкости. Интеграл $\oint v dl$, взятый вдоль этого контура, называется *циркуляцией скорости*. Согласно теореме Стокса

$$\oint v dl = \int \text{rot } v df,$$

где стоящий справа интеграл берётся по поверхности, охватываемой рассматриваемым контуром. Отсюда видно, что при потенциальном движении жидкости циркуляция скорости по любому замкнутому контуру равна нулю:

$$\oint v dl = 0. \quad (7,2)$$

Из этого обстоятельства следует, в частности, что при потенциальном течении не может существовать замкнутых линий тока¹⁾. Действительно, поскольку направление линии тока совпадает в каждой точке с направ-

¹⁾ Этот результат, как и (7,2), может не иметь места при движении жидкости в многосвязной области пространства. При потенциальном течении в такой области циркуляция скорости может быть отличной от нуля, если замкнутый контур, вдоль которого она берётся, не может быть стянут в точку так, чтобы нигде не пересечь границ области.

лением скорости, то циркуляция скорости вдоль такой линии во всяком случае была бы отличной от нуля.

При вихревом же движении циркуляция скорости, вообще говоря, отлична от нуля. В этом случае могут существовать замкнутые линии тока; надо, впрочем, подчеркнуть, что наличие замкнутых линий тока отнюдь не является необходимым свойством вихревого движения.

Рассмотрим некоторый замкнутый контур, проведённый в жидкости в некоторый момент времени. Будем рассматривать его как «жидкий», т. е. как составленный из находящихся на нём частиц жидкости. С течением времени эти частицы передвигаются, так что передвигается и весь контур. Выясним, что происходит при таком движении контура с циркуляцией скорости вдоль него. Другими словами, вычислим производную по времени от циркуляции скорости

$$\frac{d}{dt} \oint v \, dl.$$

Мы ищем здесь полную производную по времени соответственно тому, что ищем изменение циркуляции вдоль передвигающегося вместе с жидкостью контура, а не вдоль контура, неподвижного в пространстве.

Во избежание путаницы будем временно обозначать дифференцирование по координатам знаком δ , оставив знак d для дифференцирования по времени. Кроме того, заметим, что элемент dl длины контура можно написать в виде разности δr радиус-векторов r точек двух концов этого элемента. Таким образом, напомним циркуляцию скорости в виде

$$\oint v \, \delta r.$$

При дифференцировании этого интеграла по времени надо иметь в виду, что меняется не только скорость, но и сам контур (т. е. его форма). Поэтому, внося знак дифференцирования по времени под знак интеграла, надо дифференцировать не только v , но и δr :

$$\frac{d}{dt} \oint v \, \delta r = \oint \frac{dv}{dt} \delta r + \oint v \frac{d\delta r}{dt}.$$

Поскольку скорость v есть не что иное, как производная по времени от радиус-вектора r , то

$$v \frac{d\delta r}{dt} = v \delta \frac{dr}{dt} = v \delta v = \delta \frac{v^2}{2}.$$

Но интеграл от полного дифференциала по замкнутому контуру равен нулю. Поэтому второй из написанных интегралов исчезает и остаётся

$$\frac{d}{dt} \oint v \, \delta r = \oint \frac{dv}{dt} \delta r.$$

Теперь остаётся только подставить сюда для ускорения $\frac{dv}{dt}$ его выражение согласно (2,9):

$$\frac{dv}{dt} = -\text{grad } w.$$

Применив формулу Стокса, получаем тогда (поскольку $\text{rot grad } \omega \equiv 0$)¹⁾:

$$\oint \frac{dv}{dt} \partial r = \int \text{rot} \frac{dv}{dt} \partial l = 0.$$

Таким образом, переходя к прежним обозначениям, находим окончательно:

$$\frac{d}{dt} \oint v \, dl = 0$$

или

$$\oint v \, dl = \text{const.} \quad (7.3)$$

Мы пришли, следовательно, к результату, что (в идеальной жидкости) циркуляция скорости вдоль замкнутого контура, перемещающегося вместе с жидкостью, остаётся неизменной со временем [так называемая теорема Томсона (W. Thomson)].

Из этого, как мы будем говорить, закона сохранения циркуляции скорости можно получить некоторые простые, но важные следствия. Будем считать сначала, что движение жидкости стационарно, и рассмотрим линию тока, о которой известно, что в некоторой её точке $\text{rot } v = 0$. Проведём произвольный бесконечно малый замкнутый контур, охватывающий линию тока вокруг этой точки. В силу теоремы Стокса циркуляция скорости по всякому бесконечно малому контуру равна $\text{rot } v \cdot d\mathbf{l}$, где $d\mathbf{l}$ — элемент площади, охватываемый этим контуром, а $\text{rot } v$ — значение ротора скорости в точках этого элемента. Поскольку рассматриваемый здесь нами контур расположен в месте, где $\text{rot } v = 0$, то циркуляция скорости по нему равна нулю. С течением времени этот контур будет передвигаться вместе с жидкостью, оставаясь всё время бесконечно малым и всё время охватывая собой ту же самую линию тока. Поскольку циркуляция скорости должна оставаться неизменной, т. е. равной нулю, то ясно, что и $\text{rot } v$ должен быть равным нулю во всех точках линии тока.

Таким образом, мы приходим к результату, что если в какой-либо точке линии тока ротор скорости равен нулю, то $\text{rot } v = 0$ и во всех других её точках²⁾. Если движение жидкости не стационарно, то этот результат остаётся в силе, с той разницей, что надо говорить не о линии тока, а о траектории, описываемой с течением времени некоторой определенной частицей жидкости (напоминаем, что при нестационарном движении эти траектории не совпадают, вообще говоря, с линиями тока).

¹⁾ Этот результат сохраняет силу и при наличии поля тяжести, так как $\text{rot } g = 0$.

²⁾ Надо, впрочем, отметить, что этот результат в значительной мере теряет смысл при турбулентном движении (см. гл. III).

Кроме того, отметим уже здесь, во избежание недоразумений, что отличный от нуля ротор скорости может появиться на линии тока, в некоторой точке которой $\text{rot } v = 0$, если эта линия пересекает так называемую ударную волну (гл. VII). Мы увидим, что это связано с тем, что в таком случае не имеет места постоянство энтропии в вдоль линии тока, между тем как оно существенно для всего вывода закона сохранения циркуляции скорости (оно

даёт возможность писать в уравнении Эйлера $\nabla \psi$ вместо $\frac{\partial \psi}{\partial t}$).

§ 8. Потенциальное движение

Из закона сохранения циркуляции скорости можно было бы, на первый взгляд, сделать ещё и следующий вывод. Предположим, что в некоторый момент времени движение жидкости (во всём её объёме) потенциально. Тогда циркуляция скорости по любому замкнутому контуру в ней равна нулю¹⁾. В силу теоремы Томсона можно было бы заключить, что это будет иметь место и в течение всего дальнейшего времени, т. е. мы получили бы результат, что если движение жидкости потенциально в некоторый момент времени, то оно будет потенциальным и в дальнейшем (в частности, должно было бы быть потенциальным всякое движение, при котором в начальный момент времени жидкость вообще покоилась). Этому соответствует и тот факт, что уравнение (2,11) удовлетворяется при $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ тождественно.

В действительности, однако, не существует строго идеальных жидкостей. Поэтому закон сохранения циркуляции является фактически приближённым. Как бы мало жидкость ни отличалась от идеальной, но по истечении достаточно большого времени в ней может возникнуть заметно отличный от нуля ротор скорости. Поэтому даже если вязкость жидкости настолько мала, что жидкость (в данной задаче) можно рассматривать как идеальную, тем не менее достаточно длительное движение не должно быть везде потенциальным; практически времена, о которых идёт речь, обычно малы. В частности, стационарное обтекание твёрдых тел жидкостью (ближко к идеальной) никогда не бывает потенциальным (см. гл. III и IV).

Несмотря на это, изучение решений уравнений движения, соответствующих стационарному потенциальному обтеканию тел, тем не менее имеет в некоторых случаях смысл. Между тем как в общем случае обтекания тел произвольной формы истинная картина течения практически ничего общего с картиной потенциального обтекания не имеет, в случае тел, имеющих некоторую особую форму, движение жидкостей может очень мало отличаться от потенциального. Такие тела называются *хорошо обтекаемыми*; они должны иметь удлинённую (в направлении течения) форму и быть закруглены спереди (см. § 38).

Другим важным случаем, когда осуществляется потенциальное обтекание, являются малые колебания погружённого в жидкость тела. Легко показать, что если амплитуда a колебаний мала по сравнению с линейными размерами l тела ($a \ll l$), то движение жидкости вокруг тела будет всегда потенциальным. Для этого оценим порядок величины различных членов в уравнении Эйлера

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = - \nabla \varpi.$$

Скорость \mathbf{v} испытывает заметное изменение (порядка скорости u колеблющегося тела) на протяжении расстояний порядка размеров тела l .

¹⁾ Для краткости мы считаем здесь, что жидкость заполняет односвязную область пространства. Для многосвязной области получился бы тот же самый конечный результат, но при рассуждениях надо было бы делать специальные оговорки по поводу выбора контуров.

Поэтому производные от \mathbf{v} по координатам — порядка величины $\frac{u}{l}$. Порядок же величины самой скорости \mathbf{v} определяется (на не слишком больших расстояниях от тела) скоростью u . Таким образом, имеем $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} \sim \frac{u^2}{l}$.

Производная же $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ — порядка величины ωu , где ω — частота колебаний. Поскольку $\omega \sim \frac{u}{a}$, то имеем $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \sim \frac{u^2}{a}$. Из $a \ll l$ следует теперь, что член $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ мал по сравнению с $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ и может быть опущен, так что уравнение движения жидкости приобретает вид $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla w$. Применяя к обеим сторонам этого уравнения операцию rot , получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{v} = 0,$$

откуда $\text{rot } \mathbf{v} = \text{const}$. Но при колебательном движении среднее (по времени) значение скорости равно нулю; поэтому из $\text{rot } \mathbf{v} = \text{const}$ следует, что $\text{rot } \mathbf{v} = 0$. Таким образом, движение жидкости, совершающей малые колебания, является (в первом приближении) потенциальным.

Выведем теперь некоторые общие уравнения, справедливые при всяком потенциальном течении жидкости. Поскольку при потенциальном движении $\text{rot } \mathbf{v} = 0$, то вектор \mathbf{v} может быть выражен в виде градиента от некоторого скаляра. Этот скаляр называется потенциалом скорости; мы будем обозначать его посредством φ :

$$\mathbf{v} = \text{grad } \varphi. \quad (8,1)$$

Написав уравнение Эйлера в виде (2,10):

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad } v^2 - [\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v}] = -\text{grad } w$$

и подставив в него $\mathbf{v} = \nabla \varphi$, получаем:

$$\text{grad} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + w \right\} = 0,$$

откуда находим следующее равенство:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + w = f(t), \quad (8,2)$$

где $f(t)$ — произвольная функция времени. Это равенство представляет собой первый интеграл уравнений потенциального движения. Функция $f(t)$ в равенстве (8,2) может быть, без уменьшения общности, положена равной нулю. Действительно, поскольку скорость определяется производными от φ по координатам, то можно прибавить к φ любую функцию времени; заменив же φ на $\varphi + \int f(t) dt$, мы получим в правой стороне равенства (8,2) нуль.

При стационарном движении имеем (выбирая потенциал φ не зависящим от времени) $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$, $f(t) = \text{const.}$, и (8,2) переходит в уравнение Бернулли:

$$\frac{v^2}{2} + \varpi = \text{const.} \quad (8,3)$$

Необходимо подчеркнуть здесь следующее существенное отличие между уравнениями Бернулли в случае потенциального и непотенциального движений. В общем случае произвольного движения const. в правой части этого уравнения есть величина, постоянная вдоль каждой данной линии тока, но, вообще говоря, различная для разных линий тока. При потенциальном же движении const. в уравнении Бернулли есть величина, постоянная вообще во всём объёме жидкости. Это обстоятельство в особенности повышает роль уравнения Бернулли при исследовании потенциального движения.

§ 9. Несжимаемая жидкость

В очень многих случаях течения жидкостей (и газов) их плотность можно считать неизменяющейся, т. е. постоянной вдоль всего объёма жидкости в течение всего времени движения. Другими словами, в этих случаях при движении не происходит заметных сжатий или расширений жидкости. О таком движении говорят, как о движении *несжимаемой жидкости*.

Общие уравнения гидродинамики сильно упрощаются при применении их к несжимаемой жидкости. Правда, уравнение Эйлера не меняет своего вида, если положить в нём $\rho = \text{const.}$, за исключением только того, что в уравнении (2,4) можно внести ρ под знак градиента:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \nabla) v = - \nabla \frac{p}{\rho} + g. \quad (9,1)$$

Зато уравнение непрерывности принимает при $\rho = \text{const.}$ простой вид

$$\text{div } v = 0. \quad (9,2)$$

Поскольку плотность не является теперь неизвестной функцией, как это имеет место в общем случае, то в качестве основной системы уравнений гидродинамики несжимаемой жидкости можно выбрать уравнения, содержащие только скорость. Такими уравнениями являются уравнение непрерывности (9,2) и уравнение (2,11):

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } v = \text{rot } [v \text{ rot } v]. \quad (9,3)$$

Уравнение Бернулли также может быть написано для несжимаемой жидкости в более простом виде. Уравнение (9,1) отличается от общего уравнения Эйлера (2,9) тем, что вместо $\nabla \varpi$ в нём стоит $\nabla \frac{p}{\rho}$. Поэтому мы можем сразу написать уравнение Бернулли, заменив просто в (4,3) тепловую функцию отношением $\frac{p}{\rho}$:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{const.} \quad (9,4)$$

В несжимаемой жидкости можно писать $\frac{p}{\rho}$ вместо ω также и в выражении (5,3) для потока энергии, которое принимает тогда вид

$$\rho v \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right). \quad (9,5)$$

Действительно, согласно известному термодинамическому соотношению имеем для изменения внутренней энергии выражение $ds = T ds - p dV$; при $s = \text{const.}$ и $V = \frac{1}{\rho} = \text{const.}$ имеем $de = 0$, т. е. $e = \text{const.}$ Поскольку же постоянные члены в энергии несущественны, то можно опустить e и в $\omega = e + \frac{p}{\rho}$.

В особенности упрощаются уравнения для потенциального течения несжимаемой жидкости. Уравнение (9,3) удовлетворяется при $\text{rot } v = 0$ тождественно. Уравнение же (9,2) при подстановке $v = \text{grad } \varphi$ превращается в

$$\Delta \varphi = 0, \quad (9,6)$$

т. е. в уравнение Лапласа для потенциала φ . К этому уравнению должны быть добавлены граничные условия на поверхностях соприкосновения жидкости с твёрдыми телами. Именно, на неподвижных твёрдых поверхностях нормальная к поверхности компонента v_n скорости жидкости должна быть равна нулю, а в общем случае движущихся твёрдых тел v_n должно быть равно проекции скорости движения тела на направление той же нормали (эта скорость является заданной функцией времени). Скорость v_n равна, с другой стороны, производной от потенциала φ по направлению нормали: $v_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n}$. Таким образом, граничные условия гласят в общем случае, что $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ является на границах заданной функцией времени и координат.

При потенциальном движении скорость связана с давлением уравнением (8,2). В случае несжимаемой жидкости в этом уравнении можно писать $\frac{p}{\rho}$ вместо ω ; положив $f(t) = 0$, будем иметь в поле тяжести:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = 0. \quad (9,7)$$

Отметим здесь следующее важное свойство потенциального движения несжимаемой жидкости. Пусть через жидкость движется какое-нибудь твёрдое тело. Если возникающее при этом течение жидкости является потенциальным, то это течение зависит в каждый момент только от скорости движущегося тела в этот же момент времени, но не, например, от его ускорения. Действительно, самое уравнение (9,6) не содержит времени явно; время входит в решение только через предельные условия, содержащие только скорость движущегося в жидкости тела.

Из уравнения Бернулли $\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \text{const.}$ видно, что при стационарном движении несжимаемой жидкости (в отсутствии поля тяжести) наи-

большее значение давления достигается в точках, где скорость обращается в нуль. Такая точка обычно имеется на поверхности обтекаемого жидкостью тела (точка O на рис. 1) и называется *критической точкой*. Если u есть скорость набегающего на тело потока жидкости (т. е. скорость жидкости на бесконечности), а p_0 — давление на бесконечности, то давление в критической точке равно

$$p_{\max} = p_0 + \frac{\rho u^2}{2}. \quad (9,8)$$

Если распределение скоростей в движущейся жидкости зависит только от двух координат, скажем от x и y , причём скорость направлена везде в плоскости xy , то о таком течении говорят как о *двухмерном* или *плоском*. Для решения задач о двухмерном течении несжимаемой жидкости иногда бывает удобным выражать скорость через так называемую функцию тока. Из уравнения непрерывности $\operatorname{div} v \equiv \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$ видно, что компоненты скорости могут быть написаны в виде производных

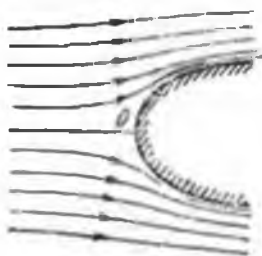


Рис. 1.

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (9,9)$$

от некоторой функции $\psi(x, y)$, называемой *функцией тока*. Уравнение непрерывности при этом удовлетворяется автоматически. Уравнение, которому должна удовлетворять функция тока, получается подстановкой (9,9) в уравнение (9,3). При этом получается:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} = 0. \quad (9,10)$$

Зная функцию тока, можно непосредственно определить форму линий тока для данного движения жидкости. Действительно, дифференциальное уравнение линий тока (при двухмерном течении) есть

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}$$

или $v_y dx - v_x dy = 0$; оно выражает собой тот факт, что направление касательной к линии тока в каждой точке совпадает с направлением скорости. Подставляя сюда (9,9), получаем:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = d\psi = 0,$$

откуда $\psi = \text{const}$. Таким образом, линии тока представляют собой семейство кривых, получающихся приравниванием функции тока $\psi(x, y)$ произвольной постоянной.

Наконец, остановимся на условиях, при выполнении которых жидкость можно считать несжимаемой. При адиабатическом изменении давления на Δp плотность жидкости изменится на

$$\Delta \rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s \Delta p.$$

Но согласно уравнению Бернулли колебания давления в стационарно движущейся жидкости — порядка величины $\Delta p \sim \rho v^2$. Поэтому

$$\Delta p \sim \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)_s \rho v^2.$$

В § 47 будет показано, что производная $\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_s$ представляет собой квадрат скорости звука c в жидкости, так что

$$\Delta p \sim \rho \frac{v^2}{\lambda}.$$

Жидкость можно считать несжимаемой, если $\frac{\Delta p}{p} \ll 1$. Мы видим, что необходимым условием для этого является малость скорости её движения по сравнению со скоростью звука:

$$v \ll c. \quad (9,11)$$

Это условие является достаточным, однако, только при стационарном движении. При нестационарном движении необходимо выполнение ещё одного условия. Пусть τ и l — величины порядка промежутков времени и расстояний, на которых скорость жидкости испытывает заметное изменение. Сравним член $\frac{\partial v}{\partial t}$ и $\frac{\tau p}{\rho}$ в уравнении Эйлера, получим, по порядку величины, $\frac{v}{\tau} \sim \frac{\Delta v}{l \tau}$ или $\Delta p \sim \frac{l}{\tau} \rho v$, а соответствующее изменение p есть $\Delta p \sim \frac{l \rho v}{\tau}$. Сравним теперь члены $\frac{\partial p}{\partial t}$ и $\rho \operatorname{div} v$ в уравнении непрерывности, найдём, что производной $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ можно пренебречь (т. е. можно считать, что $\rho = \text{const.}$) в случае, если $\frac{\Delta \rho}{\rho} \ll \rho \frac{v}{l}$ или

$$\tau \gg \frac{l}{c}. \quad (9,12)$$

Выполнение обоих условий (9,11) — (9,12) достаточно для того, чтобы можно было считать жидкость несжимаемой.

Задачи

1. Определить форму поверхности несжимаемой жидкости в поле тяжести в цилиндрическом сосуде, вращающемся вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью Ω .

Решение. Ось z выбираем по оси цилиндра. Тогда $v_x = -\Omega y$, $v_y = \Omega x$, $v_z = 0$. Уравнение непрерывности удовлетворяется автоматически, а уравнение Эйлера (9,1) даёт:

$$x\Omega^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad y\Omega^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g = 0.$$

Общий интеграл этих уравнений есть

$$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{2} \Omega^2 (x^2 + y^2) - gz + \text{const.}$$

На свободной поверхности $p = \text{const.}$, так что эта поверхность является параболомом:

$$z = \frac{\Omega^2}{2g}(x^2 + y^2)$$

(начало координат в нижней точке поверхности).

2. Шар (радиуса R) движется в несжимаемой идеальной жидкости. Определить потенциальное течение жидкости вокруг шара.

Решение. На бесконечности скорость жидкости должна обращаться в нуль. Обращающимися на бесконечности в нуль решениями уравнения Лапласа $\Delta\varphi = 0$ являются, как известно, $\frac{1}{r}$ и производные различных порядков от $\frac{1}{r}$ по координатам (начало координат в центре шара). Ввиду полной симметрии шара в решение может войти лишь один постоянный вектор — скорость шара u , а ввиду линейности уравнения Лапласа и граничного условия к нему φ должно содержать u линейным образом. Единственным скаляром, который можно составить из u и производных от $\frac{1}{r}$, является произведение $u \nabla \frac{1}{r}$. Соответственно этому ищем φ в виде

$$\varphi = Au \nabla \frac{1}{r} = -A \frac{ur}{r^3},$$

откуда

$$v = \text{grad } \varphi = \frac{A}{r^3} [3r(ur) - ur^2].$$

На поверхности шара нормальная компонента v должна быть равна нормальной компоненте скорости шара u ($vn = un$). Отсюда получаем $A = \frac{R^3}{2}$, так что

$$\varphi = -\frac{R^3 ur}{2r^3}.$$

3. То же для бесконечного цилиндра, движущегося перпендикулярно своей оси.

Решение. Течение не зависит от координаты вдоль оси цилиндра, так что приходится решать двумерное уравнение Лапласа. Обращающимися в нуль на бесконечности решениями являются производные от $\ln r$ по координатам, начиная от первого порядка и выше (r — перпендикулярный оси цилиндра радиус-вектор). Ищем решение в виде

$$\varphi = Au \nabla \ln r = A \frac{ur}{r^2}$$

и с помощью предельных условий получаем:

$$\varphi = -\frac{R^2 ur}{r^2}.$$

4. Определить потенциальное движение идеальной несжимаемой жидкости, находящейся в цилиндрическом сосуде эллиптического сечения, вращающемся вокруг своей оси с угловой скоростью Ω ; определить полный момент импульса жидкости в сосуде.

Решение. Выбираем декартовы координаты x, y в плоскости поперечного сечения сосуда с началом на его оси. Скорость точек цилиндра Ω есть $v = [\Omega r]$, так что граничное условие $v_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = v_n$ есть

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \Omega (x n_y - y n_x).$$

Если $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ есть уравнение контура сечения цилиндра, то это условие принимает вид

$$a^2 y \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \Omega x \right) + b^2 x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \Omega y \right) = 0.$$

Удовлетворяющее этому условию решение уравнения Лапласа есть

$$\varphi = \Omega \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} xy.$$

Момент выпулса жидкости (отнесённый к единице длины вдоль оси сосуда) есть

$$M = \rho \int (xv_y - yv_x) df.$$

Интегрируя по поверхности эллипса, получаем:

$$M = \Omega \frac{\rho ab}{4} \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2 + b^2}.$$

5. Определить течение жидкости вблизи критической точки на обтекаемом теле (рис. 1).

Решение. Малый участок поверхности тела вблизи критической точки можно рассматривать как плоский. Выбираем его в качестве плоскости xu . Разлагая φ при малых x, y, z в ряд, имеем с точностью до членов второго порядка:

$$\varphi = ax + by + cz + Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz$$

(постоянный член в φ несущественен). Постоянные коэффициенты определим так, чтобы φ удовлетворяло уравнению $\Delta \varphi = 0$ и граничным условиям $v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$

при $z=0$ и всех x, y и $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$ при $x=y=z=0$ (в критической точке). Это даёт: $a=b=c=0$; $C=-A-B$, $F=F=0$. Член Dxy может быть всегда исключён соответствующим поворотом осей x и y . В результате получаем:

$$\varphi = Ax^2 + By^2 - (A+B)z^2. \quad (1)$$

Если течение обладает аксиальной симметрией вокруг оси z (симметричное обтекание тела вращения), то должно быть $A=B$, так что

$$\varphi = A(x^2 + y^2 - 2z^2).$$

Компоненты скорости равны $v_x = 2Ax$, $v_y = 2Ay$, $v_z = -4Az$. Линии тока определяются уравнениями $\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$, откуда $x^2z = c_1$, $y^2z = c_2$, т. е. линии тока являются кубическими гиперболами.

Если течение является однородным вдоль оси y (например, при обтекании в направлении оси x цилиндра с осью вдоль оси y), то в (1) должно быть $B=0$, так что

$$\varphi = A(x^2 - z^2).$$

Линиями тока являются гиперболы $xz = \text{const}$.

6. Определить движение жидкости при потенциальном обтекании угла, образованного двумя пересекающимися плоскостями.

Решение. Выбираем полярные координаты r, θ в плоскости поперечного сечения, перпендикулярной линии пересечения плоскостей, с началом в вер-

шике угла. Угол θ отсчитывается от одной из прямых, образующих сечение угла. Пусть α есть величина обтекаемого угла; при $\alpha < \pi$ течение происходит внутри угла, при $\alpha > \pi$ — вне его. Граничное условие исчезновения нормальной составляющей скорости гласит: $\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0$ при $\theta = 0$ и α . Удовлетворяющее этому условию решение уравнения Лапласа пишем в виде ¹⁾

$$\varphi = Ar^n \cos n\theta, \quad n = \frac{\pi}{\alpha},$$

так, что $v_r = nAr^{n-1} \cos n\theta$, $v_\theta = -nAr^{n-1} \sin n\theta$. При $n < 1$ (обтекание выпуклого

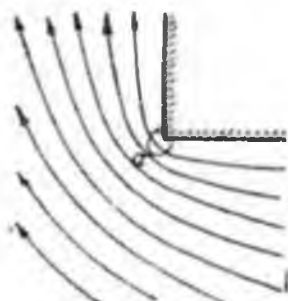


Рис. 2.

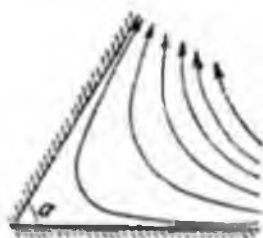


Рис. 3.

угла; рис. 2) v_r обращается в начале координат в бесконечность как $\frac{1}{r^{1-n}}$. При $n > 1$ (течение внутри вогнутого угла—рис. 3) v_r обращается при $r=0$ в нуль.

§ 10. Сила сопротивления при потенциальном обтекании

Рассмотрим задачу о потенциальном обтекании несжимаемой идеальной жидкостью какого-либо твердого тела. Такая задача, конечно, полностью эквивалентна задаче об определении течения жидкости при движении через неё того же тела. Для получения второго случая из первого достаточно перейти к системе координат, в которой жидкость на бесконечности покоится. Мы будем говорить ниже именно о движении твердого тела через жидкость.

Определим характер распределения скоростей в жидкости на больших расстояниях от движущегося тела. Потенциальное движение несжимаемой жидкости определяется уравнением Лапласа $\Delta\varphi=0$. Мы должны рассмотреть такие решения этого уравнения, которые обращаются на бесконечности в нуль, поскольку жидкость на бесконечности неподвижна. Выберем начало координат где-нибудь внутри движущегося тела (эта система координат движется вместе с телом; мы, однако, рассматриваем распределение скоростей в жидкости в некоторый заданный момент времени). Как известно, уравнение Лапласа имеет решением $\frac{1}{r}$, где r —расстояние от начала координат. Решением являются также градиент $\nabla \frac{1}{r}$ и сле-

¹⁾ Мы выбираем решение с наиболее низкой (малой n !) положительной степенью n .

дующие производные от $\frac{1}{r}$ по координатам. Все эти решения (и их линейные комбинации) обращаются на бесконечности в нуль. Поэтому общий вид искомого решения уравнения Лапласа на больших расстояниях от тела есть

$$\varphi = -\frac{a}{r} + A\nabla\frac{1}{r} + \dots,$$

где a , A не зависят от координат; опущенные члены содержат производные высших порядков от $\frac{1}{r}$. Легко видеть, что постоянная a должна быть равной нулю. Действительно, потенциал $\varphi = -\frac{a}{r}$ даёт скорость $\mathbf{v} = -\nabla\frac{a}{r} = \frac{a\mathbf{r}}{r^3}$. Вычислим соответствующий поток жидкости через какую-нибудь замкнутую поверхность, скажем, сферу с радиусом R . На этой поверхности скорость постоянна и равна $\frac{a}{R^2}$; поэтому полный поток жидкости через неё равен $\rho\frac{a}{R^2}4\pi R^2 = 4\pi\rho a$. Между тем, поток несжимаемой жидкости через всякую замкнутую поверхность должен, очевидно, обращаться в нуль. Поэтому заключаем, что должно быть $a=0$.

Таким образом, φ содержит члены, начиная с членов порядка $\frac{1}{r^2}$. Поскольку мы ищем скорость на больших расстояниях, то члены более высоких порядков можно опустить, и мы получаем:

$$\varphi = A\nabla\frac{1}{r} = -\frac{A\mathbf{n}}{r^2}, \quad (10,1)$$

а для скорости $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$:

$$\mathbf{v} = (A\nabla)\nabla\frac{1}{r} = \frac{3(A\mathbf{n})\mathbf{n} - A}{r^3} \quad (10,2)$$

(\mathbf{n} — единичный вектор в направлении \mathbf{r}). Мы видим, что на больших расстояниях скорость спадает, как $\frac{1}{r^2}$. Вектор A зависит от конкретной формы и скорости движения тела и может быть определён только путём полного решения гидродинамического уравнения $\Delta\varphi = 0$ на всех расстояниях, с учётом соответствующих граничных условий на поверхности движущегося тела.

Входящий в (10,2) вектор A оказывается связанным определённым образом с полным импульсом и с полной энергией жидкости, обтекающей движущееся в ней тело. Полная кинетическая энергия жидкости (внутренняя энергия несжимаемой жидкости постоянна) есть

$$E = \frac{\rho}{2} \int v^2 dV,$$

где интегрирование производится по всему пространству вне тела. Выделим из пространства часть V , ограниченную сферой большого радиуса R , с центром в начале координат, и будем интегрировать сначала только

по объёму V , имея в виду стремиться затем R к бесконечности. Имеем тождественно:

$$\int v^2 dV = \int u^2 dV + \int (v + u)(v - u) dV,$$

где u — скорость тела. Поскольку u есть не зависящая от координат величина, то первый интеграл равен просто $u^2(V - V_0)$, где V_0 — объём тела. Во втором же интеграле пишем сумму $v + u$ в виде $\nabla(\varphi + ur)$ и, воспользовавшись также тем, что $\operatorname{div} v = 0$ в силу уравнения непрерывности, а $\operatorname{div} u = 0$, имеем:

$$\int v^2 dV = u^2(V - V_0) + \int \operatorname{div} \{(\varphi + ur)(v - u)\} dV.$$

Второй интеграл преобразуем согласно теореме Гаусса в интеграл по поверхности S сферы и поверхности S_0 тела:

$$\int v^2 dV = u^2(V - V_0) + \oint_{S+S_0} (\varphi + ur)(v - u) df.$$

На поверхности тела нормальные компоненты v и u равны друг другу в силу граничных условий; поскольку вектор df направлен как раз по нормали к поверхности, то ясно, что интеграл по S_0 тождественно обращается в нуль. На удалённой же поверхности S подставляем для φ и v выражения (10,2) и опускаем члены, обращающиеся в нуль при переходе к пределу по $R \rightarrow \infty$. Написав элемент поверхности сферы S в виде $df = nR^2 dO$, где dO — элемент телесного угла, получим:

$$\int v^2 dV = u^2 \left(\frac{4\pi}{3} R^3 - V_0 \right) + \int \{3(A_n)(un) - (un)^2 R^3\} n dO.$$

Наконец, производя интегрирование ¹⁾ и умножая на $\frac{\rho}{2}$, получаем окончательно следующее выражение для полной энергии жидкости:

$$E = \frac{\rho}{2} (4\pi Au - V_0 u^2). \quad (10,3)$$

Как уже указывалось, точное вычисление вектора A требует полного решения уравнения $\Delta\varphi = 0$ с учётом конкретных граничных условий на поверхности тела. Общий характер зависимости A от скорости u тела можно, однако, установить уже непосредственно из факта линейности уравнения для φ и линейности (как по φ , так и по u) граничных условий к этому уравнению. Из этой линейности следует, что A должно быть

¹⁾ Интегрирование по dO эквивалентно усреднению подынтегрального выражения по всем направлениям вектора u и умножению затем на 4π . Для усреднения выражений типа $(An)(Bn) = A_l n_l B_k n_k$ (A, B — постоянные векторы) замечаем, что средние значения $n_l n_k$ составляют симметрический тензор, который может выражаться только через единичный тензор δ_{lk} , т. е. $n_l n_k = a \delta_{lk}$. Упрощая по индексам l и k и помня, что $n_l^2 = 1$, находим, что $a = \frac{1}{3}$. Поэтому

$$(An)(Bn) = \frac{1}{3} \delta_{lk} A_l B_k = \frac{1}{3} (AB).$$

линейной же функцией от компонент вектора u . Определяемая же формулой (10,3) энергия E оказывается, следовательно, квадратичной функцией компонент вектора u и потому может быть представлена в виде

$$E = \frac{m_{ik} u_i u_k}{2}, \quad (10,4)$$

где m_{ik} — некоторый постоянный симметрический тензор, компоненты которого могут быть вычислены с помощью компонент вектора A .

Зная энергию E , можно получить выражение для полного импульса P жидкости. Для этого замечаем, что бесконечно малые изменения E и P связаны друг с другом соотношением $dE = u dP$ ¹⁾; отсюда следует, что если E выражено в виде (10,4), то компоненты P должны иметь вид

$$P_i = m_{ik} u_k. \quad (10,5)$$

Наконец, сравнение формул (10,3) — (10,5) показывает, что P выражается через A следующим образом:

$$P = 4\pi\rho A - \rho V_0 u. \quad (10,6)$$

Передаваемый в единицу времени от тела к жидкости импульс есть $\frac{dP}{dt}$. Взятый с обратным знаком, он определяет, очевидно, силу реакции F , жидкости, т. е. сопротивление, испытываемое телом²⁾:

$$F = -\frac{dP}{dt}. \quad (10,7)$$

Пусть некоторое тело совершает под влиянием действующей на него внешней силы f колебательное движение. При соблюдении рассмотренных в предыдущем параграфе условий окружающая тело жидкость совершает потенциальное движение, и для вывода уравнений движения тела можно воспользоваться полученными выше соотношениями. Сила f должна быть равна производной по времени от полного импульса системы, равного сумме импульса Mu тела (M — масса тела) и импульса P жидкости:

$$M \frac{du}{dt} + \frac{dP}{dt} = f.$$

С помощью (10,5) получаем отсюда:

$$M \frac{du_i}{dt} + m_{ik} \frac{du_k}{dt} = f_i.$$

¹⁾ Действительно, пусть тело под влиянием каких-либо внешних сил ускоряется. В результате импульс жидкости возрастет. Пусть dP есть его увеличение в течение времени dt . dP можно рассматривать как импульс силы, действующей на жидкость в течение времени dt ; $u dP$ есть тогда работа этой силы, которая должна быть равна увеличению dE энергии жидкости.

²⁾ Если бы было возможно потенциальное обтекание равномерно движущегося в идеальной жидкости тела, то было бы $P = \text{const.}$ (так как $u = \text{const.}$) и $F = 0$, т. е. тело не испытывало бы при таком движении никакого сопротивления.

что можно написать также и в виде

$$\frac{du_k}{dt} (M\sigma_{ik} + m_{ik}) = f_i. \quad (10,8)$$

Это и есть уравнение движения погружённого в идеальную жидкость тела.

Рассмотрим теперь в некотором смысле обратный вопрос. Именно, пусть сама жидкость производит под влиянием каких-либо внешних (по отношению к телу) причин некоторое колебательное движение. Под влиянием этого движения погружённое в жидкость тело тоже начинает двигаться¹⁾. Выведем уравнение этого движения.

Будем предполагать, что скорость движения жидкости мало меняется на протяжении расстояний порядка величины линейных размеров тела. Пусть v есть скорость жидкости в месте нахождения тела, которую она имела бы, если бы тела вообще не было; другими словами, v есть скорость основного движения жидкости. По сделанному предположению v можно считать постоянной вдоль всего объёма, занимаемого телом. Посредством u попрежнему обозначаем скорость тела.

Силу, действующую на тело и приводящую его в движение, можно определить из следующих соображений. Если бы тело полностью увлекалось жидкостью (т. е. было бы $v = u$), то на него действовала бы такая же сила, которая бы действовала на жидкость в объёме тела, если бы тела вовсе не было. Импульс этого объёма жидкости есть $\rho V_0 v$, и потому действующая на него сила равна $\rho V_0 \frac{dv}{dt}$. Но в действительности тело не увлекается полностью жидкостью; возникает движение тела относительно жидкости, в результате чего сама жидкость приобретает некоторое дополнительное движение. Связанный с этим дополнительным движением импульс жидкости равен $m_{ik}(u_k - v_k)$ [в выражении (10,5) надо теперь писать вместо u скорость $u - v$ движения тела относительно жидкости]. Изменение этого импульса со временем приводит к наличию дополнительной силы¹⁾ реакции, действующей на тело, равной $-m_{ik} \frac{d}{dt}(u_k - v_k)$.

Таким образом, полная сила, действующая на тело, равна

$$\rho V_0 \frac{dv_i}{dt} - m_{ik} \frac{d}{dt}(u_k - v_k).$$

Эту силу надо приравнять производной по времени от импульса тела. Таким образом, мы приходим к следующему уравнению движения:

$$\frac{d}{dt} M u_i = \rho V_0 \frac{dv_i}{dt} - m_{ik} \frac{d}{dt}(u_k - v_k).$$

Интегрируя с обеих сторон по времени, получаем отсюда:

$$M u_i = \rho V_0 v_i - m_{ik}(u_k - v_k)$$

¹⁾ Речь может идти, например, о движении тела в жидкости, по которой распространяется звуковая волна с длиной волны, большой по сравнению с размерами тела.

или

$$(M\delta_{ik} + m_{ik}) u_k = (m_{ik} + \rho V_0 \delta_{ik}) v_k. \quad (10,9)$$

Постоянную интегрирования полагаем равной нулю, поскольку скорость и приводимого жидкостью в движение тела должна обратиться в нуль вместе со скоростью жидкости v . Полученное соотношение определяет скорость тела по скорости жидкости.

Задача

Получить уравнение движения для шара, совершающего колебательное движение в идеальной жидкости, и для шара, приводимого в движение колеблющейся жидкостью.

Решение. Сравнивая (10,1) с выражением для v , полученным для обтекания шара в задаче 2 § 9, видим, что

$$\Lambda = u \frac{R^3}{2}$$

(R — радиус шара). Полный импульс приводимой шаром в движение жидкости есть согласно (10,6) $P = \frac{2\pi}{3} \rho R^3 u$, так что тензор m_{ik} равен

$$m_{ik} = \frac{2\pi}{3} \rho R^3 \delta_{ik}.$$

Уравнение (10,8) движения колеблющегося в жидкости шара принимает вид

$$\frac{4\pi R^3}{3} \left(\rho_0 + \frac{\rho}{2} \right) \frac{du}{dt} = I$$

(ρ_0 — плотность вещества шара). Коэффициент при u можно рассматривать как некоторую «эффективную массу» шара.

Для скорости приводимого жидкостью в движение шара получаем из (10,9)

$$u = \frac{3\rho}{\rho + 2\rho_0} v.$$

§ 11. Гравитационные волны

Свободная поверхность жидкости, находящейся в равновесии в поле тяжести, является плоской. Если под влиянием какого-либо внешнего воздействия поверхность жидкости в каком-нибудь месте выводится из её равновесного положения, то в жидкости возникает движение. Это движение будет распространяться вдоль всей поверхности жидкости в виде волн, называемых *гравитационными*, поскольку они обуславливаются действием поля тяжести. Гравитационные волны происходят в основном на поверхности жидкости, захватывая внутренние её слои тем меньше, чем глубже эти слои расположены.

Мы будем рассматривать здесь такие гравитационные волны, в которых скорость движущихся частиц жидкости настолько мала, что в уравнении Эйлера можно пренебречь членом $(v\nabla)v$ по сравнению с $\frac{\partial v}{\partial t}$. Легко выяснить, что означает это условие физически. В течение промежутка времени порядка периода τ колебаний, совершаемых частицами жидкости в волне, эти частицы проходят расстояние порядка амплитуды a волн.

Поэтому скорость их движения — порядка $v \sim \frac{a}{\tau}$. Скорость v заметно меняется на протяжении интервалов времени порядка τ и на протяжении расстояний порядка λ вдоль направления распространения волны (λ — длина волны). Поэтому производная от скорости по времени — порядка $\frac{v}{\tau}$, а по координатам — порядка $\frac{v}{\lambda}$. Таким образом, условие $(v\nabla)v \ll \frac{\partial v}{\partial t}$ эквивалентно требованию

$$\frac{1}{\tau} \left(\frac{a}{\tau} \right)^2 \ll \left(\frac{a}{\tau} \right) \frac{1}{\lambda}$$

или

$$a \ll \lambda, \quad (11,1)$$

т. е. амплитуда колебаний в волне должна быть мала по сравнению с длиной волны. В § 8 мы видели, что если в уравнении движения можно пренебречь членом $(v\nabla)v$, то движение жидкости является потенциальным. Предполагая жидкость несжимаемой, мы можем воспользоваться поэтому уравнениями (9,6) и (9,7). В уравнении (9,7) мы можем теперь пренебречь членом $\frac{v^2}{2}$, содержащим квадрат скорости, так что остаётся

$$p = -\rho g z - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (11,2)$$

Ось z выбираем, как обычно, вертикально вверх, а в качестве плоскости x, y выбираем равновесную плоскую поверхность жидкости.

Будем обозначать z -координату точек поверхности жидкости посредством ζ ; ζ является функцией координат x, y и времени t . В равновесии $\zeta = 0$, так что ζ есть вертикальное смещение жидкой поверхности при её колебаниях. Пусть на поверхность жидкости действует некоторое постоянное давление p_0 (например атмосферное). Тогда имеем на поверхности согласно (11,2):

$$p_0 = -\rho g \zeta - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Но вместо потенциала φ можно ввести потенциал $\varphi' = \varphi + \frac{p_0}{\rho} t$; такая замена ничего не изменит, так как $v = \text{grad } \varphi = \text{grad } \varphi'$. В написанном уравнении выпадает тогда член p_0 , и, обозначая ниже φ' просто как φ , получаем условие на поверхности жидкости в виде

$$g\zeta + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=\zeta} = 0. \quad (11,3)$$

Малость амплитуды колебаний в волне означает, что смещение ζ мало. Поэтому можно считать, в том же приближении, что вертикальная компонента скорости движения точек поверхности равна просто производной по времени от смещения ζ :

$$v_z = \frac{\partial \zeta}{\partial t}.$$

Но $v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$, так что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=\zeta} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}.$$

Подставляя сюда ζ из (11,3), получаем:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)_{z=\zeta} = 0.$$

В силу малости колебаний можно в этом условии брать значение стоящего в скобках выражения при $z=0$ вместо $z=\zeta$. Таким образом, получаем окончательно следующую систему уравнений, определяющих движение в гравитационной волне:

$$\Delta \varphi = 0, \quad (11,4)$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)_{z=0} = 0. \quad (11,5)$$

Мы будем рассматривать здесь волны на поверхности жидкости, считая эту поверхность неограниченной по своей площади. Мы будем также считать, что длина волны мала по сравнению с глубиной жидкости; тогда можно рассматривать жидкость как бесконечно глубокую. Поэтому мы не пишем граничных условий на боковых границах и на дне жидкости.

Рассмотрим гравитационную волну, распространяющуюся вдоль оси x и однородную вдоль оси y ; в такой волне все величины не зависят от координаты y . Будем искать решение, являющееся простой периодической функцией времени и координаты x , т. е. положим

$$\varphi = \cos(kx - \omega t) f(z).$$

ω есть так называемая циклическая частота (мы будем говорить о ней просто как о частоте) волны; $\frac{2\pi}{\omega}$ есть период изменения движения со временем в данной точке пространства; k есть так называемый волновой вектор волны; $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ есть длина волны, т. е. период изменения движения вдоль оси x (в заданный момент времени). Подставляя написанные выражения в уравнение

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0,$$

получаем:

$$\frac{d^2 f}{dz^2} - k^2 f = 0.$$

Это уравнение имеет решения e^{kz} и e^{-kz} . Из них надо выбрать первое, поскольку второе приводит к неограниченному возрастанию φ по направлению в глубь жидкости. (Напоминаем, что область жидкости есть $z < 0$.) Таким образом, получаем для потенциала скорости выражение

$$\varphi = A e^{kz} \cos(kx - \omega t). \quad (11,6)$$

Мы должны ещё удовлетворить граничному условию (11,5). Подставляя в него (11,6), получаем:

$$k - \frac{\omega^2}{g} = 0,$$

или

$$\omega^2 = kg. \quad (11,7)$$

Этим определяется связь между волновым вектором и частотой гравитационной волны.

Распределение скоростей в движущейся жидкости получается непосредственно взятием производных от φ по координатам:

$$v_x = -Ake^{kz} \sin(kx - \omega t); \quad v_z = Ake^{kz} \cos(kx - \omega t). \quad (11,8)$$

Мы видим, что скорость экспоненциально падает по направлению в глубину жидкости. В каждой заданной точке пространства (т. е. при заданных x, z) вектор скорости равномерно вращается в плоскости x, z , оставаясь постоянным по своей величине (равной Ake^{kz}).

Определим ещё траекторию частиц жидкости в волне. Обозначим временно посредством x, z координаты движущейся частицы жидкости (а не координаты неподвижной точки в пространстве), а посредством x_0, z_0 — значения x, z для равновесного положения частицы. Тогда $v_x = \frac{dx}{dt}$, $v_z = \frac{dz}{dt}$, а в правой части (11,8) можно приближённо написать x_0, z_0 вместо x, z , воспользовавшись малостью колебаний. Интегрирование по времени даёт тогда:

$$\begin{aligned} x - x_0 &= -A \frac{k}{\omega} e^{kz_0} \cos(kx_0 - \omega t); \\ z - z_0 &= -A \frac{k}{\omega} e^{kz_0} \sin(kx_0 - \omega t). \end{aligned} \quad (11,9)$$

Таким образом, частицы жидкости описывают окружности вокруг точек x_0, z_0 с радиусом $A \frac{k}{\omega} e^{kz_0}$, экспоненциально падающим по направлению в глубину жидкости.

Скорость U распространения волны равна, как будет показано в § 50, $U = \frac{\partial \omega}{\partial k}$. Подставляя сюда $\omega = \sqrt{kg}$, находим, что скорость распространения гравитационных волн на неограниченной поверхности бесконечно глубокой жидкости равна

$$U = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}. \quad (11,10)$$

Она растёт при увеличении длины волны.

Задачи

I. Определять скорость распространения гравитационных волн на неограниченной поверхности жидкости, глубина которой равна h .

Решение. На дне жидкости нормальная составляющая скорости должна быть равна нулю, т. е.

$$v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = -h.$$

Из этого условия определяется отношение между постоянными A и B в общем решении

$$\varphi = \cos(kx - \omega t) \{Ae^{kz} + Be^{-kz}\}.$$

В результате находим:

$$\varphi = A \cos(kx - \omega t) \operatorname{ch} k(z + h).$$

Из предельного условия (11,5) находим соотношение между k и ω в виде

$$\omega^2 = gk \operatorname{th} kh.$$

Скорость распространения волны

$$U = \frac{\sqrt{g}}{2\sqrt{k \operatorname{th} kh}} \left\{ \operatorname{th} kh + \frac{kh}{\operatorname{ch}^2 kh} \right\}.$$

При $kh \gg 1$ получается снова результат (11,10), а при $kh \ll 1$ — результат (12,10).

2. Определить связь между частотой и длиной волны для гравитационных волн на поверхности раздела двух жидкостей, причём верхняя жидкость ограничена сверху, а нижняя — снизу горизонтальными неподвижными плоскостями. Плотность и глубина слоя нижней жидкости ρ и h , а верхней ρ' и h' (причём $\rho > \rho'$).

Решение. Плоскость x, y выбираем по плоскости раздела обеих жидкостей в равновесии. Ищем решение в обеих жидкостях соответственно в виде

$$\begin{cases} \varphi = A \operatorname{ch} k(z + h) \cos(kx - \omega t), \\ \varphi' = B \operatorname{ch} k(z - h') \cos(kx - \omega t) \end{cases} \quad (1)$$

(так, чтобы удовлетворялись условия на верхней и нижней границах, — см. решение задачи 1). На поверхности раздела давление должно быть непрерывным; согласно (11,2) это приводит к условию

$$\rho g \zeta + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \rho' g \zeta + \rho' \frac{\partial \varphi'}{\partial t}$$

(при $z = 0$) или

$$\zeta = \frac{1}{g(\rho - \rho')} \left(\rho' \frac{\partial \varphi'}{\partial t} - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right). \quad (2)$$

Кроме того, скорости v_z обеих жидкостей на поверхности раздела должны быть одинаковыми. Это приводит к условию (при $z = 0$)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi'}{\partial z}. \quad (3)$$

Далее, $v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}$ и, подставляя сюда (2), получаем:

$$g(\rho - \rho') \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \rho' \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2} - \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (4)$$

Подставляя (1) в (3) и (4), получим два однородных линейных уравнения для A и B , из условия совместности которых получаем:

$$\omega^2 = \frac{kg(\rho - \rho')}{\rho \operatorname{cth} kh + \rho' \operatorname{cth} kh'}.$$

При $kh \gg 1$, $kh' \gg 1$ (обе жидкости очень глубоки):

$$\omega^2 = kg \frac{\rho - \rho'}{\rho + \rho'}$$

а при $kh \ll 1$, $kh' \ll 1$ (длинные волны):

$$\omega = k \sqrt{\frac{g(\rho - \rho') h h'}{\rho h' + \rho' h}}$$

3. Определить связь между частотой и длиной волны для гравитационных волн, распространяющихся одновременно по поверхности раздела и верхней поверхности двух слоев жидкости, из которых нижняя (плотность ρ) бесконечно глубока, а верхняя (плотность ρ') имеет толщину h' и свободную верхнюю поверхность.

Решение. Выбираем плоскость x, y в плоскости раздела обеих жидкостей в равновесии. В нижней и верхней жидкости ищем решение соответственно в виде

$$\varphi = A e^{kx} \cos(kx - \omega t); \quad \varphi' = [B e^{-kz} + C e^{kz}] \cos(kx - \omega t). \quad (1)$$

На поверхности раздела обеих жидкостей (т. е. при $z=0$) имеют место условия (см. задачу 2):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi'}{\partial z}; \quad g(\rho - \rho') \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \rho' \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2} - \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (2)$$

а на верхней свободной границе (т. е. при $z=h'$):

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2} = 0. \quad (3)$$

Первое из уравнений (2) при подстановке (1) даёт $A=C-B$, а два остальных условия дают два уравнения для B и C , из условия совместности которых получаем:

$$\left(\frac{\omega^2}{kg}\right)^2 \left\{1 + \frac{\rho + \rho'}{\rho - \rho'} e^{2kh'}\right\} + 2 \frac{\omega^2}{kg} \left\{1 - \frac{\rho'}{\rho - \rho'} e^{2kh'}\right\} + 1 - e^{2kh'} = 0$$

— квадратное уравнение для ω^2 , корни которого определяют искомую зависимость ω от k . При $h' \rightarrow \infty$ эти корни переходят в $\omega^2 = kg$ и $\omega^2 = kg \frac{\rho - \rho'}{\rho + \rho'}$, что соответствует волнам, распространяющимся независимо по поверхности раздела и по верхней поверхности жидкости.

4. Определить возможные частоты колебаний ¹⁾ (стоячих волн) жидкости глубины h , находящейся в прямоугольном бассейне ширины a и длины b .

Решение. Оси x и y выбираем по двум боковым сторонам бассейна. Ищем решение в виде стоячей волны:

$$\varphi = \cos \omega t \operatorname{ch} k(z+h) \cdot f(x, y).$$

Для f получаем уравнение:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + k^2 f = 0,$$

а условие на свободной поверхности приводит, как и в задаче 1, к соотношению

$$\omega^2 = gk \operatorname{th} kh.$$

¹⁾ См. § 52.

Решение уравнения для f берём в виде

$$f = \cos px \cos qy, \quad p^2 + q^2 = k^2.$$

На боковых сторонах сосуда должны выполняться условия:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \text{ при } x=0, a; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \text{ при } y=0, b.$$

Отсюда находим:

$$p = \frac{m\pi}{a}, \quad q = \frac{n\pi}{b},$$

где m, n — целые числа. Поэтому возможные значения k равны:

$$k^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right).$$

§ 12. Длинные гравитационные волны

Рассмотрев гравитационные волны, длина которых мала по сравнению с глубиной жидкости, остановимся теперь на противоположном предельном случае волн, длина которых велика по сравнению с глубиной жидкости. Такие волны называются *длинными*.

Рассмотрим сначала распространение длинных волн в канале. Длину канала (направленную вдоль оси x) будем считать неограниченной. Сечение канала может иметь произвольную форму и может меняться вдоль его длины. Площадь поперечного сечения жидкости в канале обозначим посредством $S = S(x, t)$. Глубина и ширина канала предполагаются малыми по сравнению с длиной волны.

Мы будем рассматривать здесь продольные длинные волны, в которых жидкость движется вдоль канала. В таких волнах компонента v_x скорости вдоль длины канала велика по сравнению с компонентами v_y, v_z .

Обозначив v_x просто как v и опуская малые члены, мы можем написать x -компоненту уравнения Эйлера в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x},$$

а z -компоненту — в виде

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -g$$

(квадратичные по скорости члены опускаем, поскольку амплитуда волны попрежнему считается малой). Из второго уравнения имеем, замечая, что на свободной поверхности ($z = \zeta$) должно быть $p = p_0$:

$$p = p_0 + g\rho(\zeta - z).$$

Подставляя это выражение в первое уравнение, получаем:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x}. \quad (12,1)$$

Второе уравнение для определения двух неизвестных v и ζ можно вывести методом, аналогичным выводу уравнения непрерывности. Это уравнение представляет собой по существу уравнение непрерывности применительно к рассматриваемому случаю. Рассмотрим объём жидкости,

заклѳченный между двумя плоскостями поперечного сечения канала, находящимися на расстоянии dx друг от друга. За единицу времени через одну плоскость войдет ѳбъем жидкости, равный $(Sv)_x$, а через другую плоскость выйдет ѳбъем $(Sv)_{x+dx}$. Поэтому ѳбъем жидкости между обоими плоскостями изменится на

$$(Sv)_{x+dx} - (Sv)_x = \frac{\partial(Sv)}{\partial x} dx.$$

Но это изменение в силу несжимаемости жидкости может произойти только за сѳет изменения еѳ уровня. Изменение ѳбъема жидкости между рассматриваемыми плоскостями в единицу времени равно

$$\frac{\partial S}{\partial t} dx.$$

Следовательно, можно написать:

$$\frac{\partial S}{\partial t} dx = -\frac{\partial(Sv)}{\partial x} dx,$$

или

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial(Sv)}{\partial x} = 0. \quad (12,2)$$

Это и есть искомое уравнение непрерывности.

Пусть S_0 есть площадь поперечного сечения жидкости в канале при равновесии. Тогда $S = S_0 + S'$, где S' — изменение этой площади благодаря наличию волны. Поскольку изменение уровня жидкости в волне мало, то S' можно написать в виде $b\zeta$, где b — ширина сечения канала у самой поверхности жидкости в нем. Уравнение (12,2) приобретает тогда вид

$$b \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial(S_0 v)}{\partial x} = 0. \quad (12,3)$$

Дифференцируя (12,3) по x и подставляя $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ из (12,1), получим:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{g S_0}{b} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0. \quad (12,4)$$

Если сечение канала одинаково вдоль всей его длины, то $S_0 = \text{const.}$ и

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{g S_0}{b} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0. \quad (12,5)$$

Уравнение такого вида называется *волновым*; как будет показано в § 47, оно соответствует распространению волн с не зависящей от частоты скоростью U , равной квадратному корню из коэффициента при $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$. Таким образом, скорость распространения длинных гравитационных волн в каналах равна

$$U = \sqrt{\frac{g S_0}{b}}. \quad (12,6)$$

Совершенно аналогичным образом можно рассмотреть длинные волны в обширном бассейне, который мы будем считать неограниченным

в двух измерениях (вдоль плоскости x, y). Глубину жидкости в бассейне обозначим посредством h . Из трёх компонент скорости малой является теперь компонента v_z . Уравнения Эйлера приобретают вид, аналогичный (12,1):

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} + g \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0. \quad (12,7)$$

Уравнение непрерывности выводится аналогично (12,2) и имеет вид

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (h v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (h v_y)}{\partial y} = 0.$$

Глубину h пишем в виде $h = h_0 + \zeta$, где h_0 — равновесная глубина. Тогда

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial (h_0 v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (h_0 v_y)}{\partial y} = 0. \quad (12,8)$$

Предположим, что бассейн имеет плоское горизонтальное дно ($h_0 = \text{const.}$). Дифференцируя (12,8) по t и подставляя (12,7), получим:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - gh \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (12,9)$$

Это есть опять уравнение типа волнового (двухмерного) уравнения; оно соответствует волнам со скоростью распространения, равной

$$U = \sqrt{gh}. \quad (12,10)$$

ГЛАВА II

ВЯЗКАЯ ЖИДКОСТЬ

§ 13. Уравнения движения вязкой жидкости

Мы переходим теперь к изучению влияния, которое оказывают на движение жидкости происходящие при движении процессы диссипации энергии. Эти процессы являются выражением всегда имеющей в той или иной степени место термодинамической необратимости движения, связанной с наличием внутреннего трения (вязкости) и теплопроводности.

Для того, чтобы получить уравнения, описывающие движение вязкой жидкости, необходимо ввести дополнительные члены в уравнение движения идеальной жидкости. Что касается уравнения непрерывности, то, как явствует из самого его вывода, оно относится в равной мере

к движению всякой жидкости, в том числе и вязкой. Уравнение же Эйлера должно быть изменено.

Мы видели в § 6, что уравнение Эйлера может быть написано в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \sigma_i = - \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k},$$

где Π_{ik} — тензор плотности потока импульса. Поток импульса, определяемый формулой (6,2), представляет собой чисто обратимый перенос импульса, связанный просто с механическим передвижением различных участков жидкости из одного места в другое и с действующими в жидкости силами давления. Вязкость (внутреннее трение) жидкости проявляется в наличии ещё дополнительного, необратимого, переноса импульса из мест с большей в места с меньшей скоростью.

Поэтому уравнение движения вязкой жидкости можно получить, прибавив к «идеальному» потоку импульса (6,2) дополнительный член σ'_{ik} , определяющий необратимый, «вязкий», перенос импульса в жидкости. Таким образом, мы будем писать тензор плотности переноса импульса в вязкой жидкости в виде

$$\Pi_{ik} = \rho \delta_{ik} + \rho v_i v_k - \sigma'_{ik} = -\sigma_{ik} + \rho v_i v_k. \quad (13,1)$$

Тензор

$$\sigma_{ik} = -\rho \delta_{ik} + \sigma'_{ik} \quad (13,2)$$

называют *тензором напряжений*, а σ'_{ik} — «вязким» *тензором напряжений*. σ_{ik} определяет ту часть потока импульса, которая не связана с непосредственным переносом импульса вместе с массой передвигающейся жидкости.

Установить общий вид тензора σ'_{ik} можно, исходя из следующих соображений. Процессы внутреннего трения в жидкости возникают только в тех случаях, когда различные участки жидкости движутся с различной скоростью, так что имеет место движение частей жидкости друг относительно друга. Поэтому σ'_{ik} должно зависеть от производных от скорости по координатам. Если градиенты скорости не очень велики, то можно считать, что обусловленный вязкостью перенос импульса зависит только от первых производных от скорости. Самую зависимость σ'_{ik} от про-

изводных $\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$ можно, в том же приближении, считать линейной. Не зависящие от $\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$ члены должны отсутствовать в выражении для σ'_{ik} , поскольку σ'_{ik} должно обратиться в нуль при $\mathbf{v} = \text{const.}$ во всём объёме жидкости. Далее замечаем, что σ'_{ik} должно обращаться в нуль также и в том случае, когда вся жидкость, как целое, совершает равномерное вращение, поскольку ясно, что при таком движении никакого внутреннего трения в жидкости не происходит. При равномерном вращении с угловой скоростью Ω скорость \mathbf{v} равна векторному произведению

[Ω_{Γ}]. Линейными комбинациями производных $\frac{\partial v_l}{\partial x_k}$, обращающимися в нуль при $v = [\Omega_{\Gamma}]$, являются суммы

$$\frac{\partial v_l}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_l}.$$

Поэтому σ'_{ik} должно содержать именно эти симметричные комбинации производных $\frac{\partial v_l}{\partial x_k}$.

Наиболее общим видом тензора второго ранга, удовлетворяющего этим условиям, является

$$\sigma'_{ik} = a \left(\frac{\partial v_l}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_l} \right) + b \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \delta_{ik},$$

где a , b не зависят от скорости. Удобно, однако, писать это выражение в несколько ином виде, введя вместо a , b другие постоянные. Именно, мы будем писать σ'_{ik} в виде

$$\sigma'_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_l}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_l} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}. \quad (13,3)$$

Выражение, стоящее в скобках в первом члене, обладает тем свойством, что при упрощении (т. е. при суммировании компонент с $l=k$) даёт нуль. Величины η и ζ называются *коэффициентами вязкости*. Как будет показано в § 14, 39, оба они являются величинами положительными:

$$\eta > 0, \quad \zeta > 0. \quad (13,4)$$

Уравнения движения вязкой жидкости можно теперь получить непосредственно путём прибавления к правой стороне уравнения Эйлера

$$\rho \left(\frac{\partial v_l}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_l}$$

выражения $\frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k}$. Таким образом, получаем:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_l}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right) &= \\ &= - \frac{\partial p}{\partial x_l} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \eta \left(\frac{\partial v_l}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_l} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\zeta \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right). \end{aligned} \quad (13,5)$$

Это есть наиболее общий вид уравнений движения вязкой жидкости. Величины η , ζ являются, вообще говоря, функциями давления и температуры. В общем случае ρ , T , а потому и η , ζ , не постоянны вдоль всех

жидкости, так что η и ζ не могут быть вынесены из-под знака производной.

В большинстве случаев, однако, изменение коэффициентов вязкости вдоль жидкости незначительно, и потому можно считать их постоянными. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} &= \eta \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) + \zeta \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \\ &= \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Но $\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \equiv \text{div } \mathbf{v}$, $\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} \equiv \Delta v_i$. Поэтому можем написать уравнение движения вязкой жидкости в векторном виде:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right] = -\text{grad } p + \eta \Delta \mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \text{grad div } \mathbf{v}. \quad (13,6)$$

Если жидкость можно считать несжимаемой, то $\text{div } \mathbf{v} = 0$, и последний член справа в (13,6) исчезает. Таким образом, уравнение движения несжимаемой вязкой жидкости имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v}. \quad (13,7)$$

Это есть так называемое *уравнение Навье-Стокса* (Navier, Stokes). Тензор напряжений в несжимаемой жидкости принимает простой вид:

$$\sigma_{ik} = -p \delta_{ik} + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right). \quad (13,8)$$

Мы видим, что в несжимаемой жидкости вязкость описывается всего одним коэффициентом. Поскольку практически жидкость можно очень часто считать несжимаемой, то обычно играет роль именно этот коэффициент вязкости η . Заметим, что отношение

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (13,9)$$

называют *кинематической вязкостью* (а о самой η говорят тогда, как о *динамической вязкости*). Приведём значения величин η и ν для некоторых жидкостей и газов (при температуре 20°C) в абсолютных единицах:

	η г/сек-см	ν см ² /сек
Вода	0,010	0,010
Воздух	1,8·10 ⁻⁴	0,150
Спирт	0,018	0,022
Глицерин	8,5	6,8
Ртуть	0,156	0,0012

Из уравнения Навье-Стокса можно исключить давление таким же способом, как это было сделано раньше с уравнением Эйлера. Именно,

применив к обеим сторонам уравнения (13,7) операцию rot , получим [вместо уравнения (2,11) идеальной жидкости]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } v = \text{rot } [v \text{ rot } v] + \nu \Delta \text{rot } v. \quad (13,10)$$

Необходимо написать ещё граничные условия к уравнениям движения вязкой жидкости. Между поверхностью твёрдого тела и всякой реальной жидкостью всегда существуют силы молекулярного сцепления, приводящие к тому, что непосредственно прилегающий к твёрдой стенке слой жидкости полностью задерживается, как бы «прилипая» к стенке. Соответственно этому граничные условия к уравнениям движения вязкой жидкости заключаются в требованиях обращения в нуль скорости жидкости на неподвижных твёрдых поверхностях:

$$v = 0. \quad (13,11)$$

Подчеркнём, что здесь требуется исчезновение как нормальной, так и тангенциальной компоненты скорости, между тем как граничные условия к уравнениям идеальной жидкости требуют обращения в нуль только v_n ¹⁾.

В общем случае движущейся поверхности скорость v должна быть равна скорости этой поверхности.

Легко написать выражение для силы, действующей на соприкасающуюся с жидкостью твёрдую поверхность. Сила, действующая на некоторый элемент поверхности, есть не что иное, как поток импульса через этот элемент. Поток импульса через элемент поверхности df_k есть

$$\Pi_{ik} df_k = (pv_i v_k - \sigma_{ik}) df_k.$$

Написав df_k в виде $df_k = n_k df$, где n — единичный вектор нормали, к поверхности, и помня, что на твёрдой поверхности $v = 0$ ²⁾, находим, что сила P_i , действующая на единицу площади поверхности, равна

$$P_i = -\sigma_{ik} n_k = p n_i - \sigma'_{ik} n_k. \quad (13,12)$$

Первый член есть обычное давление жидкости, а второй представляет собой действующую на поверхность силу трения, обусловленную вязкостью. Подчеркнём, что p в (13,12) есть единичный вектор нормали, внешней по отношению к поверхности жидкости, т. е. внутренней по отношению к твёрдой поверхности.

Если мы имеем границу раздела двух несмешивающихся жидкостей (или жидкости и газа), то условия на этой поверхности гласят, что скорости обеих жидкостей должны быть равны и силы, с которыми они действуют друг на друга, должны быть одинаковы по величине и про-

¹⁾ Отметим, что решениями уравнения Эйлера, вообще говоря, невозможно удовлетворить граничному условию $v = 0$.

²⁾ При определении действующей на поверхность силы надо рассматривать данный элемент поверхности в системе отсчёта, в которой он покоится. Сила равна просто потоку импульса только при неподвижной поверхности.

тивоположны по направлению. Второе из этих условий записывается в виде

$$n_A^{(1)} \sigma_{iA}^{(1)} + n_A^{(2)} \sigma_{iA}^{(2)} = 0,$$

где индексы 1 и 2 относятся к двум жидкостям. Векторы нормали $n^{(1)}$ и $n^{(2)}$ имеют взаимно противоположные направления, т. е. $n_1^{(1)} = -n_1^{(2)} = n_r$, так что можно написать:

$$n_r \sigma_{iA}^{(1)} = n_r \sigma_{iA}^{(2)}. \quad (13,13)$$

На свободной поверхности жидкости должно выполняться условие

$$\sigma_{iA} n_A = \sigma'_{iA} n_A - p n_i = 0. \quad (13,14)$$

Приведём, для справок, выражения для компонент тензора напряжений и уравнения Навье-Стокса в цилиндрических и сферических координатах, имея в виду, что в дальнейшем нам придётся ими пользоваться. В цилиндрических координатах r, φ, z компоненты тензора напряжений выглядят следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= -p + 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r}, & \sigma_{r\varphi} &= \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= -p + 2\eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} \right), & \sigma_{\varphi z} &= \eta \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right), \\ \sigma_{zz} &= -p + 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z}, & \sigma_{rz} &= \eta \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\} \quad (13,15)$$

Три компоненты уравнения Навье-Стокса и уравнение непрерывности принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} &= \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{v_r}{r^2} \right), \\ \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_r v_\varphi}{r} &= \\ = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r^2} \right), \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right). \end{aligned} \right\} \quad (13,16)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} = 0.$$

В сферических координатах r, φ, θ имеем для тензора напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -p + 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r}, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= -p + 2\eta \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \operatorname{ctg} \theta}{r} \right); \\ \sigma_{\theta\theta} &= -p + 2\eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right); \\ \sigma_{r\theta} &= \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right); \\ \sigma_{\theta\varphi} &= \eta \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} - \frac{v_r \operatorname{ctg} \theta}{r} \right); \\ \sigma_{r\varphi} &= \eta \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r} \right), \end{aligned} \quad (13,17)$$

а уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\theta^2 + v_\varphi^2}{r} &= \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rv_r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \right. \\ \left. - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2 \operatorname{ctg} \theta}{r^2} v_\theta \right], \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\varphi^2 \operatorname{ctg} \theta}{r} &= \\ = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rv_\theta)}{\partial r^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \varphi^2} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \right. \\ \left. - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} \right], \\ \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\varphi}{r} + \frac{v_\theta v_\varphi \operatorname{ctg} \theta}{r} &= \\ = -\frac{1}{\rho r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \\ + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rv_\varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \right. \\ \left. + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} \right]; \\ \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2v_r}{r} + \frac{v_\theta \operatorname{ctg} \theta}{r} &= 0. \end{aligned} \quad (13,18)$$

Наконец, приведём уравнение, которому должна удовлетворять функция тока $\psi(x, y)$ при двумерном течении несжимаемой вязкой жидкости. Оно получается подстановкой $v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, $v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$, $v_z = 0$ в уравнение (13,10):

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \nu \Delta \Delta \psi = 0. \quad (13,19)$$

§ 14. Диссипация энергии в несжимаемой жидкости

Наличие вязкости приводит к диссипации энергии, переходящей в конце концов в тепло. Вычисление диссипируемой энергии в особенности просто для несжимаемой жидкости.

Полная кинетическая энергия несжимаемой жидкости равна

$$E_{кин.} = \frac{\rho}{2} \int v^2 dV.$$

Вычислим производную от этой энергии по времени. Для этого пишем

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho v^2}{2} = \rho v_i \frac{\partial v_i}{\partial t}$$

и подставляем для $\frac{\partial v_i}{\partial t}$ её выражение согласно уравнению Навье-Стокса:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k}.$$

В результате получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho v^2}{2} &= -\rho v (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} - v \nabla p + v_i \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} = \\ &= -\rho (\mathbf{v} \nabla) \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) + \text{div} (v \sigma') - \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

Здесь посредством $(v \sigma')$ обозначен вектор с компонентами $v \sigma'_{ik}$. Замечая, что в несжимаемой жидкости $\text{div} \mathbf{v} = 0$, можно написать первый член справа в виде дивергенции:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho v^2}{2} = -\text{div} \left[\rho v \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) - (v \sigma') \right] - \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \quad (14,1)$$

Выражение, стоящее под знаком div , представляет собой не что иное, как плотность потока энергии в жидкости. Именно, член $\rho v \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right)$ есть поток энергии, связанный с простым переносом массы жидкости при её движении, совпадающий с потоком энергии в идеальной жидкости [см. (9,5)]. Второй же член $(v \sigma')$ есть поток энергии, связанный с процессами внутреннего трения. Действительно, наличие вязкости приводит к появлению потока импульса σ'_{ik} ; перенос же импульса всегда связан с переносом энергии, причём поток энергии получается, очевидно, из потока импульса умножением на скорость.

Если проинтегрировать (14,1) по некоторому объёму V , то получится:

$$\frac{d}{dt} \int \frac{\rho v^2}{2} dV = - \oint [\rho v (\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho}) - (v \sigma')] dt - \int \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dV. \quad (14,2)$$

Первый член справа определяет изменение кинетической энергии жидкости в объёме V благодаря наличию потока энергии через поверхность этого объёма. Второй же член (взятый с обратным знаком) представляет собой, следовательно, уменьшение кинетической энергии в единицу времени, обусловленное диссипацией.

Если распространить интегрирование по всему объёму жидкости, то интеграл по поверхности исчезает (на бесконечности скорость обращается в нуль¹⁾), и мы получим диссипируемую в единицу времени во всей жидкости энергию в виде

$$\dot{E}_{кин.} = - \int \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dV.$$

В несжимаемых жидкостях тензор σ'_{ik} определяется выражением (13,8), так что

$$\sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \eta \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right).$$

Легко проверить, что это выражение может быть написано в виде

$$\frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2.$$

Таким образом, находим окончательно для диссипации энергии в несжимаемой жидкости следующую формулу:

$$\dot{E}_{кин.} = - \frac{\eta}{2} \int \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 dV. \quad (14,3)$$

Диссипация приводит к уменьшению механической энергии, т. е. должно быть $\dot{E}_{кин.} < 0$. С другой стороны, интеграл в (14,3) является величиной всегда положительной. Поэтому мы можем заключить, что коэффициент вязкости η всегда положителен.

§ 15. Пуазейлевское течение

Рассмотрим несколько простейших случаев движения вязкой несжимаемой жидкости.

Пусть жидкость заключена между двумя параллельными плоскостями, движущимися друг относительно друга с постоянной скоростью u . Плоскость x, z выберем в одной из них, причём ось x направим по

¹⁾ Мы рассматриваем движение жидкости в системе координат, в которой жидкость на бесконечности покоится.

направлению скорости u . Все величины зависят, очевидно, только от координаты y , а скорость жидкости направлена везде по оси x . Из (13,7) имеем для стационарного движения:

$$\frac{dp}{dy} = 0, \quad \frac{d^2v}{dy^2} = 0.$$

(Уравнение же непрерывности удовлетворяется тождественно.) Отсюда $p = \text{const.}$, $v = ay + b$. При $y = 0$ и при $y = h$ (h — расстояние между плоскостями) должно быть соответственно $v = 0$ и $v = u$. Отсюда находим:

$$v = \frac{y}{h} u. \quad (15,1)$$

Таким образом, распределение скоростей в жидкости линейно. Такое движение носит название *куэтовского* (Couette) *течения*. Средняя скорость жидкости определяется как

$$\bar{v} = \frac{1}{h} \int_0^h v dy$$

и равна

$$\bar{v} = \frac{1}{2} u. \quad (15,2)$$

Из (13,12) находим, что нормальная компонента действующей на плоскости силы равна, как и должно было быть, просто p , а тангенциальная сила трения (на плоскости $y = 0$) равна

$$\sigma_{xy} = \eta \frac{dv}{dy} = \frac{\eta u}{h} \quad (15,3)$$

(на плоскости $y = h$ она имеет обратный знак).

Далее, рассмотрим стационарное течение жидкости между двумя неподвижными параллельными плоскостями при наличии градиента давления. Координаты выбираем как в предыдущем случае; ось x направлена по направлению движения жидкости. Уравнения Навье-Стокса дают (скорость зависит, очевидно, только от координаты y):

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

Второе из этих уравнений показывает, что давление не зависит от y , т. е. постоянно вдоль толщины слоя жидкости между плоскостями. Тогда в первом уравнении справа стоит функция только x , а слева — только от y ; такое уравнение может выполняться, только если его левая и правая часть являются постоянными величинами. Таким образом,

$$\frac{dp}{dx} = \text{const.},$$

т. е. давление является линейной функцией координаты x вдоль направления потока жидкости. Для скорости же получаем теперь:

$$v = \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} y^2 + ay + b.$$

Постоянные a и b определяются из граничных условий $v = 0$ при $y = 0$ и $y = h$. В результате получаем:

$$v = -\frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} \left\{ \frac{h^2}{4} - \left(y - \frac{h}{2} \right)^2 \right\}. \quad (15,4)$$

Таким образом, скорость меняется вдоль толщины слоя жидкости по параболическому закону, достигая наибольшей величины посредине слоя. Средняя скорость течения (скорость, усреднённая по толщине слоя жидкости) определяется опять как $\bar{v} = \frac{1}{h} \int_0^h v dy$; вычисление даёт:

$$\bar{v} = -\frac{h^2}{12\eta} \frac{dp}{dx}. \quad (15,5)$$

Наконец, вычислим действующую на неподвижную плоскость силу трения $\sigma_{xy} = \eta \left. \frac{dv}{dy} \right|_{y=0}$. Подстановка (15,4) даёт:

$$\sigma_{xy} = -\frac{h}{2\eta} \frac{dp}{dx}. \quad (15,6)$$

Если ограничивающие жидкость плоскости движутся друг относительно друга и одновременно имеется градиент давления, то, в силу линейности уравнений движения, результирующее течение жидкости представляет собой просто сумму обеих, рассмотренных только что движений. Так, средняя скорость жидкости будет равна сумме

$$\bar{v} = -\frac{h^2}{12\eta} \frac{dp}{dx} + \frac{a}{2}. \quad (15,7)$$

Наконец, рассмотрим стационарное течение жидкости по трубке произвольного сечения (одинакового вдоль всей длины трубки). Ось трубки выберем в качестве оси x . Очевидно, что скорость v жидкости направлена везде по оси x и является функцией только от y и z . Уравнение непрерывности удовлетворяется тождественно, а y - и z -компоненты уравнения Навье-Стокса дают опять $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0$, т. е. давление постоянно вдоль сечения трубки. x -компонента уравнения (13,7) даёт:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{\eta} \frac{dp}{dx}. \quad (15,8)$$

Отсюда опять заключаем, что $\frac{dp}{dx} = \text{const.}$; градиент давления можно поэтому написать в виде $-\frac{\Delta p}{l}$, где Δp — разность давлений на концах трубки, а l — её длина.

Таким образом, распределение скоростей в потоке жидкости в трубе определяется двумерным уравнением типа $\Delta v = \text{const}$. Это уравнение должно быть решено при предельном условии $v = 0$ на контуре сечения трубки. Решим это уравнение для трубки кругового сечения. Выбирая начало координат в центре кругового сечения и вводя полярные координаты, имеем в силу симметрии $v = v(r)$. Воспользовавшись выражением для оператора Лапласа в полярных координатах, имеем:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = -\frac{\Delta p}{\eta l}.$$

Интегрируя, находим:

$$v = -\frac{\Delta p}{4\eta l} r^2 + a \ln r + b. \quad (15,9)$$

Постоянную a надо положить равной нулю, поскольку скорость должна оставаться конечной во всем сечении трубки, включая его центр. Постоянную b определяем из требования $v = 0$ при $r = R$ (R — радиус трубки) и получаем:

$$v = \frac{\Delta p}{4\eta l} (R^2 - r^2). \quad (15,10)$$

Таким образом, скорость распределена по сечению трубки по параболическому закону.

Легко определить количество (массу) жидкости Q , протекающей в 1 сек. через поперечное сечение трубы (или, как говорят, «расход» жидкости в трубе). Через кольцевой элемент $2\pi r dr$ площади сечения трубки проходит в 1 сек. количество жидкости $\rho \cdot 2\pi r v dr$. Поэтому

$$Q = 2\pi\rho \int_0^R r v dr.$$

С помощью (15,10) получаем:

$$Q = \frac{\pi \Delta p}{8\eta l} R^4. \quad (15,11)$$

Количество протекающей жидкости пропорционально, таким образом, четвертой степени радиуса трубки. Формула (15,11) называется формулой Пуазейля (Poiseuille), а рассмотренное движение жидкости по трубке — *пуазейлевским течением*.

Задачи

1. Определять течение жидкости по трубке с кольцевым сечением (внутренний и внешний радиусы трубки: R_1 и R_2).

Решение. Определяя постоянные a и b в общем решении (15,9) из условий $v = 0$ при $r = R_1$ и $r = R_2$, находим:

$$v = \frac{\Delta p}{4\eta l} \left(R_2^2 - r^2 - \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \ln \frac{r}{R_2} \right).$$

Количество протекающей жидкости равно

$$Q = \frac{r\Delta p}{8\mu} \left\{ R_2^4 - R_1^4 - \frac{(R_2^2 - R_1^2)^2}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \right\}.$$

2. То же для трубки эллиптического сечения.

Решение. Ищем решение уравнения (15,8) в виде $v = Ay^2 + Bz^2 + C$. Постоянные A, B, C определяем из требования, чтобы это выражение удовлетворяло уравнению и граничным условиям $v=0$ на контуре сечения (т. е. уравнение $Ay^2 + Bz^2 + C = 0$ должно совпадать с уравнением контура $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$, где a, b — полуоси эллипса). В результате получаем:

$$v = \frac{\Delta p}{2rI} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(1 - \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} \right).$$

Для количества протекающей жидкости получаем:

$$Q = \frac{r\Delta p}{4\mu} \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}.$$

3. То же для трубки с сечением в виде равностороннего треугольника (сторона треугольника a).

Решение. Обращаясь в нуль на треугольном контуре решение уравнения (15,8) есть

$$v = \frac{\Delta p}{I} \frac{2}{\sqrt{3} a^2} h_1 h_2 h_3,$$

где h_1, h_2, h_3 — длины трёх высот, опущенных из данной точки треугольника на три его стороны. Действительно, каждое из выражений $\Delta h_1, \Delta h_2, \Delta h_3$ (где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$) равно нулю; это видно хотя бы из того, что каждую из высот h_1, h_2, h_3 можно выбрать в качестве одной из координат y или z , а при применении оператора Лапласа к координате получается нуль. Поэтому имеем:

$$\Delta h_1 h_2 h_3 = 2 (h_1 \nabla h_2 \nabla h_3 + h_2 \nabla h_1 \nabla h_3 + h_3 \nabla h_1 \nabla h_2).$$

Но $\nabla h_1 = p_1, \nabla h_2 = p_2, \nabla h_3 = p_3$, где p_1, p_2, p_3 — единичные векторы, направленные вдоль направлений высот h_1, h_2, h_3 . Каждые два из p_1, p_2, p_3 образуют друг с другом угол $\frac{2\pi}{3}$, так что $\nabla h_1 \nabla h_2 = p_1 p_2 = \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ и т. д., и мы получаем соотношение

$$\Delta h_1 h_2 h_3 = -(h_1 + h_2 + h_3) = -\frac{a\sqrt{3}}{2},$$

с помощью которого убеждаемся в выполнении уравнения (15,8). Количество протекающей жидкости равно

$$Q = \frac{3\sqrt{3}}{1280} \frac{a^4 \Delta p}{\mu}.$$

4. Цилиндр радиуса R_1 движется со скоростью u внутри коаксиального с ним цилиндра радиуса R_2 параллельно своей оси; определить движение жидкости, заполняющей пространство между цилиндрами.

Решение. Выбираем цилиндрические координаты с осью x по оси цилиндра. Скорость направлена везде вдоль оси x и зависит (как и давление) только от r : $v_x = v(r)$. Для v получаем уравнение

$$\Delta v = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = 0.$$

{член $(v\nabla)v = v \frac{\partial v}{\partial z}$ исчезает тождественно}. Используя граничные условия $v = u$ при $r = R_1$ и $v = 0$ при $r = R_2$, получаем:

$$v = u \frac{\ln \frac{r}{R_2}}{\ln \frac{R_1}{R_2}}$$

5. Слой жидкости (толщины h) ограничен сверху свободной поверхностью, а снизу неподвижной плоскостью, наклонённой под углом α к горизонту. Определить движение жидкости, возникающее под влиянием поля тяжести.

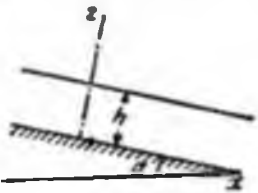


Рис. 4.

Решение. Выбираем неподвижную нижнюю плоскость в качестве плоскости x, y , ось x направлена по направлению течения жидкости, а ось z — перпендикулярно плоскости x, y (рис. 4). Ищем решение, зависящее только от координаты z . Уравнения Навье-Стокса с $v_x = v(z)$ при наличии поля тяжести гласят:

$$\eta \frac{d^2 v}{dz^2} + \rho g \sin \alpha = 0, \quad \frac{dp}{dz} + \rho g \cos \alpha = 0.$$

На свободной поверхности ($z = h$) должны выполняться условия $v_{zx} = -p = -p_0$, $v_{zx} = \eta \frac{dv}{dz} = 0$ (p_0 — атмосферное давление). При $z = 0$ должно быть $v = 0$. Удовлетворяющее этим условиям решение есть

$$p = p_0 + \rho g \cos \alpha \cdot (h - z), \quad v = \frac{\rho g \sin \alpha}{2\eta} z (2h - z).$$

Количество жидкости, протекающее в единицу времени через поперечное сечение слоя (отнесённое к единице длины вдоль оси y), есть $Q = \rho \int_0^h v dz$ и равно

$$Q = \frac{\rho h^3 \sin \alpha}{3\eta}.$$

6. Определить закон падения давления вдоль трубки кругового сечения, по которой происходит изотермическое течение вязкого идеального газа (иметь в виду, что динамическая вязкость η идеального газа не зависит от его давления, — см. § 104).

Решение. В каждом небольшом участке трубки газ можно считать несжимаемым (если только градиент давления не слишком велик) и соответственно этому можно применить формулу (15,11), согласно которой

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{8\tau Q}{\pi r R^4}.$$

На больших расстояниях, однако, ρ будет меняться, и давление не будет линейной функцией от x . Согласно уравнению Клапейрона плотность газа $\rho = \frac{m\rho}{kT}$ (m — масса молекулы, k — постоянная Больцмана), так что

$$-\frac{dp}{dx} = \left(\frac{8\tau Q k T}{\pi m R^4} \right) \frac{1}{p}$$

(расход газа Q через всё сечение трубки должен быть, очевидно, одинаковым вне зависимости от того, является ли газ несжимаемым или нет). Отсюда получаем:

$$p_2^2 - p_1^2 = \frac{16\gamma Q k T}{\pi m R^4} l$$

(p_2, p_1 — давления на концах участка трубки длины l).

§ 16. Движение жидкости между вращающимися цилиндрами

Рассмотрим движение жидкости, заключённой между двумя коаксиальными бесконечными цилиндрами, вращающимися вокруг своей оси с угловыми скоростями Ω_1 и Ω_2 ; радиусы цилиндров пусть будут R_1 и R_2 , причём $R_2 > R_1$. Выберем цилиндрические координаты r, z, φ с осью z по оси цилиндров. Из симметрии очевидно, что

$$v_z = v_r = 0; \quad v_\varphi = v(r); \quad p = p(r).$$

Уравнение (13,7) в цилиндрических координатах даёт в рассматриваемом случае два уравнения:

$$\frac{dp}{dr} = \rho \frac{v^2}{r}, \quad (16,1)$$

$$\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} - \frac{v}{r^2} = 0. \quad (16,2)$$

Второе из этих уравнений имеет решение типа r^n ; подстановка решения в таком виде даёт $n = \pm 1$, так что

$$v = ar + \frac{b}{r}.$$

Постоянные a и b находятся из предельных условий, согласно которым скорость жидкости на внутренней и внешней цилиндрических поверхностях должна быть равна скорости соответствующего цилиндра: $v = R_1 \Omega_1$ при $r = R_1$, $v = R_2 \Omega_2$ при $r = R_2$. В результате получаем распределение скоростей в виде

$$v = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} r + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r}. \quad (16,3)$$

Распределение давления получается отсюда согласно (16,1) простым интегрированием.

При $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$ получается просто $v = \Omega r$, т. е. жидкость просто вращается как целое вместе с цилиндрами. При отсутствии внешнего цилиндра ($\Omega_2 = 0$; $R_2 = \infty$) получается

$$v = \frac{\Omega_1 R_1^2}{r}.$$

Определим ещё момент действующих на цилиндры сил трения. На единицу поверхности внутреннего цилиндра действует сила трения,

направленная по касательной к поверхности и равная согласно (13,12) компоненте $\sigma'_{r\theta}$ тензора напряжений. С помощью формул (13,15) находим:

$$\sigma'_{r\theta}|_{r=R_1} = \eta \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) \Big|_{r=R_1} = -2\eta \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}.$$

Сила, действующая на поверхность единицы длины цилиндра, получается отсюда умножением на $2\pi R_1$, а момент M_1 этих сил — умножением ещё на R_1 . Таким образом, получаем:

$$M_1 = - \frac{4\pi\eta(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^3 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}. \quad (16,4)$$

Момент M_2 сил, действующих на внешний цилиндр, равен, очевидно, — M_1 .

По поводу полученных в этом и предыдущем параграфах решений уравнений движения вязкой жидкости можно сделать следующее общее замечание. Во всех этих случаях нелинейный член $(v\nabla)v$ тождественно исчезает из уравнений, определяющих распределение скоростей, так что фактически приходится решать линейные уравнения, что крайне облегчает задачу. По этой же причине все эти решения тождественно удовлетворяют также и уравнениям движения идеальной несжимаемой жидкости, написанным, например, в виде (9,2), (9,3). С этим связано то обстоятельство, что формулы (16,1) и (16,3) не содержат вовсе коэффициента вязкости жидкости. Коэффициент вязкости содержится только в таких формулах, как (15,10), (16,1), которые связывают скорость с градиентом давления в жидкости, поскольку самое наличие градиента давления связано с вязкостью жидкости; идеальная жидкость могла бы течь по трубе и при отсутствии градиента давления.

§ 17. Закон подобия

При изучении движения вязких жидкостей можно получить ряд существенных результатов из простых соображений, связанных с размерностью различных физических величин. Рассмотрим какой-нибудь определённый тип движения. Этим типом может быть, например, движение тела определённой формы через жидкость. Если тело не является шаром, то должно быть также указано, в каком направлении оно движется, например, движение эллипсоида в направлении его большой оси или в направлении его малой оси и т. п. Далее, речь может идти о течении жидкости по области, ограниченной стенками определённой формы, например, по трубе определённого сечения.

Телами одинаковой формы мы называем при этом тела геометрически подобные, т. е. такие, которые могут быть получены друг из друга изменением всех линейных размеров в одинаковое число раз. Поэтому, если форма тела задана, то для полного определения размеров тела достаточно указать какой-нибудь один из его линейных размеров (например, радиус шара или цилиндрической трубы, длина ребра куба и т. п.).

Мы будем рассматривать сейчас стационарные движения. Поэтому, если речь идёт, например, об обтекании твёрдого тела жидкостью (ниже мы говорим для определённости о таком случае), то скорость натекающего потока жидкости должна быть постоянной. Самую жидкость мы будем предполагать несжимаемой.

Из параметров, характеризующих самую жидкость, в гидродинамические уравнения (уравнение Навье-Стокса) входит только кинематическая вязкость $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ (неизвестными же функциями, которые должны быть определены решением уравнений, являются при этом скорость v и отношение $\frac{p}{\rho}$ (давления p к постоянной ρ). Кроме того, течение жидкости зависит, посредством граничных условий, от формы и размеров движущегося в жидкости тела и от его скорости. Поскольку форма тела считается заданной, то его геометрические свойства определяются всего одним каким-нибудь линейным размером, который мы обозначим посредством l . Скорость же натекающего потока пусть будет u .

Таким образом, каждый тип движения жидкости определяется тремя параметрами: ν , u , l . Эти величины обладают размерностями:

$$[\nu] = \text{см}^2/\text{сек}, [l] = \text{см}, [u] = \text{см}/\text{сек}.$$

Легко убедиться в том, что из этих величин можно составить всего одну независимую безразмерную комбинацию, именно, $\frac{lu}{\nu}$. Эта комбинация называется *числом Рейнольдса* (O. Reynolds) и обозначается посредством Re :

$$Re = \frac{lu}{\nu} = \frac{ul}{\nu}. \quad (17,1)$$

Всякую другую безразмерную величину можно написать в виде функции от Re .

Будем измерять длины в единицах l , а скорости — в единицах u , т. е. введём безразмерные величины $\frac{r}{l}$, $\frac{v}{u}$. Поскольку единственным безразмерным параметром является число Рейнольдса, то ясно, что получающееся в результате решения гидродинамических уравнений распределение скоростей определяется функциями вида

$$v = uf \left(\frac{r}{l}, Re \right). \quad (17,2)$$

Из этого выражения видно, что в двух различных течениях одного и того же типа (например, обтекание шаров различного радиуса жидкостями различной вязкости) скорости $\frac{v}{u}$ являются одинаковыми функциями отношения $\frac{r}{l}$, если только числа Рейнольдса для этих течений одинаковы. Течения, которые могут быть получены друг из друга простым изменением масштаба измерения координат и скоростей, называются *подобными*. Таким образом, течения одинакового типа с одинаковым числом Рейнольдса подобны (так называемый закон подобия, установленный Рейнольдсом).

Аналогичную (17,2) формулу можно написать и для распределения давления в жидкости. Для этого надо составить из параметров ν , l , u какую-нибудь величину с размерностью давления, делённого на ρ ; в качестве такой величины выберем, например, u^2 . Тогда можно утверждать, что $\frac{p}{\rho u^2}$ будет функцией от безразмерной переменной $\frac{r}{l}$ и безразмерного параметра Re . Таким образом,

$$p = \rho u^2 f\left(\frac{r}{l}, Re\right). \quad (17,3)$$

Наконец, аналогичные соображения применимы к величинам, характеризующим течение жидкости, но не являющимся уже функциями координат. Таковой является, например, действующая на обтекаемое тело сила сопротивления F . Именно, можно утверждать, что безразмерное отношение F к составленной из ν , u , l , ρ величине размерности силы должно быть функцией только от числа Рейнольдса. В качестве указанной комбинации из ν , u , l , ρ можно взять, например, произведение $\rho u^2 l^2$. Тогда

$$F = \rho u^2 l^2 f(Re). \quad (17,4)$$

Если влияние силы тяжести на движение является существенным, то движение определяется не тремя, а четырьмя параметрами: l , u , ν и ускорением силы тяжести g . Из этих параметров можно составить уже не одну, а две независимые безразмерные комбинации. В качестве их можно, например, выбрать число Рейнольдса и так называемое число Фруда (Froude), равное

$$Fr = \frac{u^2}{lg}. \quad (17,5)$$

В формулах (17,2)—(17,4) функция f зависит теперь не от одного, а от двух параметров (Re и Fr), и течения являются подобными лишь при равенстве обоих этих чисел.

Наконец, скажем несколько слов о нестационарных движениях. Нестационарное движение определённого типа характеризуется наряду с величинами ν , u , l ещё значением какого-либо характерного для этого движения интервала времени τ , определяющего изменение движения со временем. Например, при колебаниях по определённому закону погружённого в жидкость твёрдого тела определённой формы этим временем может являться период колебаний. Из четырёх величин ν , u , l , τ можно опять составить не одну, а две независимые безразмерные величины, в качестве которых можно взять число Рейнольдса и число

$$Sh = \frac{l}{u\tau}, \quad (17,6)$$

называемое иногда *числом Струхала* (Strouhal). Подобие движений имеет место в таких случаях при равенстве обоих этих чисел.

§ 18. Формула Стокса

Уравнение Навье-Стокса заметно упрощается в случае движений с малым числом Рейнольдса. Для стационарного движения несжимаемой жидкости это уравнение имеет вид

$$(\nabla\mathbf{v})\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\text{grad } p + \frac{\eta}{\rho}\Delta\mathbf{v}.$$

Член $(\nabla\mathbf{v})\mathbf{v}$ имеет порядок величины $\frac{u^2}{l}$, где u и l имеют тот же смысл, как и в § 17. Выражение же $\frac{\eta}{\rho}\Delta\mathbf{v}$ — порядка величины $\frac{\eta u}{\rho l^2}$. Отношение первой величины ко второй есть как раз число Рейнольдса. Поэтому при малых числах Рейнольдса членом $(\nabla\mathbf{v})\mathbf{v}$ можно пренебречь, и уравнение движения приобретает вид

$$\eta\Delta\mathbf{v} - \text{grad } p = 0. \quad (18,1)$$

Отметим, что это уравнение линейно. Вместе с уравнением непрерывности

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (18,2)$$

оно полностью определяет движение. Полезно также заметить уравнение

$$\Delta \text{rot } \mathbf{v} = 0, \quad (18,3)$$

получающееся применением операции rot к уравнению (18,1).

Рассмотрим в качестве примера прямолинейное и равномерное движение шара в вязкой жидкости. Задача о движении шара, очевидно, вполне эквивалентна задаче об обтекании неподвижного шара потоком жидкости, имеющей на бесконечности заданную скорость \mathbf{u} . Распределение скоростей в первой задаче получается из решения второй задачи просто вычитанием скорости \mathbf{u} ; тогда жидкость на бесконечности оказывается неподвижной, а шар движется со скоростью $-\mathbf{u}$. Если мы рассматриваем движение как стационарное, то надо, конечно, говорить именно об обтекании жидкостью неподвижного шара, так как при движущемся шаре скорость жидкости в каждой точке пространства меняется со временем.

Таким образом, на бесконечности должно быть $\mathbf{v} = \mathbf{u}$; напомним \mathbf{v} в виде $\mathbf{v}' + \mathbf{u}$, так что \mathbf{v}' обращается на бесконечности в нуль. Поскольку $\text{div } \mathbf{v} = \text{div } \mathbf{v}' = 0$, то \mathbf{v}' может быть представлено в виде ротора некоторого вектора: $\mathbf{v}' = \text{rot } \mathbf{A} + \mathbf{u}$. Далее, ротор полярного вектора является, как известно, вектором аксиальным, и обратно. Поскольку скорость является обычным, полярным вектором, то \mathbf{A} должен быть вектором аксиальным. С другой стороны, скорость \mathbf{v} , а потому и \mathbf{A} , зависит только от переменного радиуса-вектора \mathbf{r} (начало координат выбираем в центре шара) и от параметра \mathbf{u} ; оба эти вектора полярны. Далее, вектор \mathbf{A} должен, очевидно, зависеть от \mathbf{u} линейно. Но единственным таким аксиальным вектором, который можно построить для полностью симметричного тела (шара) из двух полярных векторов, является век-

торное произведение $[ru]$. Поэтому A должно иметь вид $f'(r)[ru]$, где $f'(r)$ — скалярная функция от r . Произведение $f'(r)r$ можно представить в виде градиента $\nabla f(r)$ от некоторой другой функции $f(r)$, так что общим видом A является $[\nabla f u]$. Поэтому мы можем искать скорость в виде

$$v' = \text{rot} [\nabla f u].$$

Поскольку $u = \text{const.}$, то можно написать

$$[\nabla f u] = \text{rot} fu,$$

так что

$$v = \text{rot rot} fu + u. \quad (18,4)$$

Для определения функции f воспользуемся уравнением (18,3). Имеем:

$$\text{rot } v = \text{rot rot rot} fu = (\text{grad div} - \Delta) \text{rot} fu = -\Delta \text{rot} fu.$$

Поэтому (18,3) принимает вид

$$\Delta^2 \text{rot} fu = 0$$

или, помня, что $u = \text{const.}$:

$$\Delta^2 [\nabla f u] = [\Delta^2 \text{grad} f u] = 0.$$

Отсюда следует, что должно быть

$$\Delta^2 \text{grad} f = 0. \quad (18,5)$$

Первое интегрирование даёт

$$\Delta^2 f = \text{const.}$$

Легко видеть, что const. должна быть положена равной нулю. Действительно, скорость v должна на бесконечности исчезать; тем более это должно относиться к её производным. Выражение же $\Delta^2 f$ содержит четвертые производные от f , в то время как сама скорость выражается через вторые производные от f .

Таким образом, имеем:

$$\Delta^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) \Delta f = 0.$$

Отсюда

$$\Delta f = \frac{2a}{r} + A.$$

Из двух постоянных a и A вторая опять должна быть положена равной нулю для того, чтобы скорость исчезла на бесконечности. Из $\Delta f = \frac{2a}{r}$ получаем:

$$f = ar + \frac{b}{r}. \quad (18,6)$$

Аддитивная постоянная в f опущена как несущественная (скорость определяется производными от f).

Подстановка в (18,4) даёт после простого вычисления:

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} - a \frac{\mathbf{u} + \mathbf{n}(\mathbf{u}\mathbf{n})}{r} + b \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{u}\mathbf{n}) - \mathbf{u}}{r^3} \quad (18,7)$$

(\mathbf{n} — единичный вектор вдоль направления \mathbf{r}). Постоянные a и b должны быть определены из граничных условий. Именно, на поверхности шара (т. е. при $r=R$) должно быть $\mathbf{v}=0$:

$$\mathbf{u} - a \frac{\mathbf{u} + \mathbf{n}(\mathbf{u}\mathbf{n})}{R} + b \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{u}\mathbf{n}) - \mathbf{u}}{R^3} = 0.$$

Поскольку это равенство должно иметь место при произвольном \mathbf{u} , то коэффициенты при \mathbf{u} и при $\mathbf{n}(\mathbf{u}\mathbf{n})$ должны, каждый в отдельности, исчезать:

$$\frac{a}{R} + \frac{b}{R^3} - 1 = 0, \quad -\frac{a}{R} + \frac{3b}{R^3} = 0.$$

Отсюда

$$a = \frac{3}{4}R, \quad b = \frac{R^3}{4}.$$

Таким образом, получаем окончательно:

$$f = \frac{3}{4}Rr + \frac{R^3}{4r}; \quad (18,8)$$

$$\mathbf{v} = -\frac{3}{4}R \frac{\mathbf{u} + \mathbf{n}(\mathbf{u}\mathbf{n})}{r} - \frac{R^3}{4} \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{u}\mathbf{n}) - \mathbf{u}}{r^3} + \mathbf{u}. \quad (18,9)$$

Этим определяется распределение скоростей вокруг движущегося шара.

Для определения распределения давления подставляем (18,4) в (18,1):

$$\text{grad } p = \eta \Delta \mathbf{v} = \eta \Delta \text{rot rot } f\mathbf{u} = \eta \Delta (\text{grad div } f\mathbf{u} - \Delta f\mathbf{u}).$$

Но $\Delta^2 f = 0$ и потому

$$\text{grad } p = \text{grad } (\eta \Delta \text{div } f\mathbf{u}) = \text{grad } (\eta \mathbf{u} \text{ grad } \Delta f).$$

Отсюда

$$p = \eta \mathbf{u} \text{ grad } \Delta f + p_0 \quad (18,10)$$

(p_0 — давление в жидкости на бесконечности). Подстановка f приводит к окончательному выражению

$$p = p_0 - \frac{3}{2} \eta \frac{\mathbf{u}\mathbf{n}}{r^2} R. \quad (18,11)$$

С помощью полученных формул можно вычислить силу F давления текущей жидкости на шар (или, что то же, силу сопротивления, испытываемую движущимся в жидкости шаром). Для этого введём сферические координаты с полярной осью вдоль скорости \mathbf{u} (все величины будут, в силу симметрии, функциями только от r и полярного угла θ). Очевидно, что сила F направлена по скорости \mathbf{u} . Абсолютная величина этой силы может быть определена с помощью (18,12). Определяя из этой формулы компоненты (по нормали и по касательной к поверхности)

силы, приложенной к некоторому элементу поверхности шара, и проектируя эти компоненты на направление z , найдём:

$$F = \int (-p \cos \theta + \sigma'_{rr} \cos \theta - \sigma'_{r\theta} \sin \theta) df, \quad (18,12)$$

где интегрирование производится по всей поверхности шара. Этот интеграл представляет собой в то же время полный поток импульса через поверхность шара. Но в силу закона сохранения импульса полный его поток через всякую замкнутую поверхность вокруг шара должен быть одинаковым. Поэтому в (18,12) можно выбрать другую поверхность интегрирования, в качестве которой удобно взять сферу с достаточно большим радиусом. Тогда в значениях величин на этой поверхности можно оставить только члены, наименее быстро падающие с r , что значительно упрощает вычисления.

Дальнейшее вычисление произведём сначала, пользуясь выражением (18,7) для скорости с неопределёнными постоянными a и b , имея в виду получить формулу, которая сможет быть применена не только к случаю твёрдого шара, но и к другим задачам. Опуская в (18,7) третий член, имеем для радиальной и тангенциальной составляющих скорости

$$v_r = u \cos \theta \left(1 - \frac{2a}{r}\right), \quad v_\theta = -u \sin \theta \left(1 - \frac{a}{r}\right).$$

Для давления получаем:

$$p = p_0 - \eta u \cos \theta \frac{2a}{r^2}.$$

Компоненты тензора σ'_{ik} в сферических координатах равны [согласно формулам (13,17)]:

$$\sigma'_{rr} = 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r} = 4\eta u \cos \theta \frac{a}{r^3}, \quad \sigma'_{r\theta} = \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) = 0.$$

Подставляя в (18,12), получаем:

$$F = 6\eta a u \int \cos^2 \theta d\Omega$$

($d\Omega$ — элемент телесного угла). Стоящий здесь интеграл равен $\frac{4\pi}{3}$, так что

$$F = 8\pi a \eta u. \quad (18,13)$$

Подставляя $a = \frac{3}{4}R$, получаем:

$$F = 6\pi R \eta u. \quad (18,14)$$

Эта формула определяет силу сопротивления, действующую на медленно движущийся в жидкости шар. Она называется *формулой Стокса*. Отметим, что сила сопротивления оказывается пропорциональной первым степеням скорости и линейных размеров тела.

Полученное нами решение задачи об обтекании оказывается неприемлемым на достаточно больших расстояниях от шара, несмотря на малость числа Рейнольдса. Для того, чтобы убедиться в этом, оценим

пренебреженный в (18,1) член $(\nabla\zeta)v$. На больших расстояниях скорость равна u . Производные же от скорости на этих расстояниях, как видно из (18,9), — порядка величины $\frac{uR}{r^2}$. Следовательно, $(\nabla\zeta)v$ имеет порядок величины $\frac{u^2R}{r^2}$. Оставленные же в уравнении (18,1) члены, например $\frac{1}{\rho} \text{grad } p$, — порядка $\frac{\eta R}{\rho r^2}$ [согласно (18,11)]. Условие

$$\frac{uR}{\rho r^2} \gg \frac{uR}{r^2}$$

выполняется только на расстояниях

$$r \ll \frac{\eta}{\rho u}. \quad (18,15)$$

На больших расстояниях сделанные пренебрежения оказываются незаконными и полученное распределение скоростей неправильным.

Для получения распределения скоростей на больших расстояниях от обтекаемого тела следует учесть отброшенный в (18,1) член $(\nabla\zeta)v$. Поскольку на больших расстояниях скорость v должна иметь вид $u + v'$ с малым v' , то в $(\nabla\zeta)v$ можно написать приближенно $(\nabla\zeta)u$ вместо $(\nabla\zeta)v$. Тогда мы получим для скорости на больших расстояниях линейное уравнение

$$(\nabla\zeta)u = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \frac{\eta}{\rho} \Delta v \quad (18,16)$$

(уравнение Осеена, Oseen). Решение этого уравнения для случая обтекания шара приведено в задаче 3 к этому параграфу.

Наконец, упомянем, что при решении задачи об обтекании бесконечного цилиндра жидкостью, движущейся в поперечном к цилиндру направлении, необходимо с самого начала решать уравнение Осеена. Уравнение (18,1) в этом случае оказывается вовсе не обладающим решением, удовлетворяющим граничным условиям на поверхности тела и одновременно обращающимся в нуль на бесконечности.

Задачи

1. Определять движение жидкости, заполняющей пространство между двумя сферами (радиусы R_1 и R_2 , $R_2 > R_1$), равномерно вращающимися вокруг различных диаметров с угловыми скоростями Ω_1 и Ω_2 (числа Рейнольдса $\frac{\Omega_1 R_1^2}{\nu}$ и $\frac{\Omega_2 R_2^2}{\nu}$ малы по сравнению с единицей).

Решение. В силу линейности уравнений движение между двумя вращающимися сферами можно рассматривать как наложение двух движений, имеющих место, если одна из сфер покоится, а другая вращается. Положим сначала $\Omega_2 = 0$, т. е. вращается только внутренняя сфера. Естественно ожидать, что скорость жидкости в каждой точке будет направлена по касательной к окружности с центром на оси вращения в плоскости, перпендикулярной этой оси. Но в силу аксиальной симметрии относительно оси вращения давление не может иметь градиента в этом направлении. Поэтому уравнение движения (18,1) приобретает вид

$$\Delta v = 0.$$

Вектор угловой скорости Ω_1 является аксиальным вектором. Рассуждения, аналогичные произведённым в тексте, показывают, что можно искать скорость в виде

$$v = \text{rot } \Omega_1 f(r) = [\nabla f \Omega_1].$$

Уравнение движения даёт тогда $[\text{grad } \Delta f \Omega_1] = 0$; поскольку вектор $\text{grad } \Delta f$ направлен по радиус-вектору, а произведение $[\nabla \Omega_1]$ не может быть равно нулю при заданном Ω_1 и произвольном r , то должно быть $\text{grad } \Delta f = 0$, так что

$$\Delta f = \text{const.}$$

Интегрируя, получаем:

$$f = ar^2 + \frac{b}{r}, \quad v = \left(\frac{b}{r^2} - 2a \right) [\Omega_1 r].$$

Постоянные a и b определяются из условия $v = 0$ при $r = R_2$ и $v = u$ при $r = R_1$, где $u = [\Omega_1 r]$ есть скорость точек вращающейся сферы. В результате получим:

$$v = \frac{R_1^3 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R_2^2} \right) [\Omega_1 r].$$

Давление в жидкости остаётся постоянным ($p = p_0$). Аналогично получается два случая, когда вращается внешний шар, а внутренний покоится ($\Omega_1 = 0$):

$$v = \frac{R_1^3 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{r^2} \right) [\Omega_2 r].$$

В общем случае вращения обеих сфер имеем:

$$v = \frac{R_1^3 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \left\{ \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R_2^2} \right) [\Omega_1 r] + \left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{r^2} \right) [\Omega_2 r] \right\}.$$

Если внешний шар вообще отсутствует ($R_2 = \infty$, $\Omega_2 = 0$), т. е. мы имеем просто шар радиуса R , вращающийся в неограниченной жидкости, то

$$v = \frac{R^3}{r^2} [\Omega r].$$

Вычислим момент сил трения, действующих на шар в этом случае. Если выбрать сферические координаты с полярной осью по Ω , то $v_r = v_\theta = 0$, $v_\varphi = v = \frac{R^3 \Omega}{r^2} \sin \theta$. Действующая на единицу поверхности шара сила трения равна

$$\sigma_{r\varphi} = \eta \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) \Big|_{r=R} = 3\eta \Omega \sin \theta.$$

Полный действующий на шар момент сил трения есть

$$M = - \int \sigma_{r\varphi} R \sin \theta \cdot 2\pi R^2 \sin \theta d\theta,$$

откуда

$$M = 8\pi\eta R^3 \Omega$$

Если отсутствует внутренний шар, то $v = [\Omega, r]$, т. е. жидкость просто вращается, как целое, вместе со сферой, внутри которой она находится.

2. Определить скорость, приобретённую круглым пузырьком газа (с вязкостью η'), движущимся (под действием силы тяжести) в жидкости (с вязкостью η).

Решение. Пользуемся системой координат, в которой пузырёк покоится. Для жидкости снаружи пузырька ищем решение уравнения (18,5) опять в виде (18,6), так что скорость имеет вид (18,7). Для жидкости же внутри пузырька надо искать решение, не обладающее особой точкой при $r=0$ (причём должны оставаться конечными также и вторые производные от f , определяющие скорость). Таким общим решением является

$$f = \frac{A}{4} r^2 + \frac{B}{8} r^4,$$

чему соответствует скорость

$$v = -Au + Br^2 [n(u\mathbf{n}) - 2u],$$

На поверхности шара должны быть выполнены следующие условия. Нормальные составляющие скорости жидкости вне ($v^{(e)}$) и внутри ($v^{(i)}$) пузырька должны обращаться в нуль:

$$v_r^{(i)} = v_r^{(e)} = 0.$$

Это условие выражает собой неподвижность пузырька как целого. Касательная компонента скорости должна быть непрерывна:

$$v_\theta^{(i)} = v_\theta^{(e)},$$

и то же самое должно иметь место для компоненты v_φ тензора напряжений:

$$\sigma_{\theta r}^{(i)} = \sigma_{\theta r}^{(e)}$$

(условие же равенства компонент $\sigma_{rr} = -p + \sigma_{rr}$ тензора напряжений можно не писать — оно определено бы собой искомую скорость u , которую, однако, проще найти, как это сделано ниже). Из указанных четырёх условий получаем четыре уравнения для постоянных a , b , A , B , решение которых даёт

$$a = R \frac{2\eta + 3\eta'}{4(\eta + \eta')}, \quad b = R^3 \frac{\eta'}{4(\eta + \eta')}, \quad A = -BR^2 = \frac{\eta}{2(\eta + \eta')}.$$

Для силы сопротивления получаем согласно (18,13):

$$F = 2\pi a \eta R \frac{2\eta + 3\eta'}{\eta + \eta'}$$

(эта формула переходит в формулу Стокса при $\eta' \rightarrow \infty$). Приравняв F действующей на пузырёк в поле тяжести силе $\frac{4\pi}{3} R^3 (\rho' - \rho) g$, найдём:

$$u = \frac{2R^2 g (\rho' - \rho) (\eta + \eta')}{3\eta (2\eta + 3\eta')}.$$

3. Решить уравнение Осеева для обтекания шара.

Решение. Выбирая направление обтекания в качестве оси x , пишем уравнение (18,16) в виде

$$u \frac{\partial v}{\partial x} - \nu \Delta v = -\nabla \frac{p}{\rho}.$$

Ищем решение этого уравнения в виде ¹⁾

$$v_x = f + \frac{\partial \psi}{\partial x} + u, \quad v_y = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (1)$$

где функция f удовлетворяет уравнению

$$u \frac{\partial f}{\partial x} - \nu \Delta f = 0.$$

Применяя подстановку

$$f = e^{\frac{u}{2\nu} x} F,$$

получим уравнение

$$\Delta F - \frac{u^2}{4\nu^2} F = 0;$$

для F выбираем частное решение вида

$$F = \frac{A}{r} e^{-\frac{u}{2\nu} r},$$

так что

$$f = \frac{A}{r} e^{\frac{u}{2\nu}(x-r)}. \quad (2)$$

Подставляя (1) в уравнение непрерывности $\operatorname{div} v = 0$, получим:

$$\Delta \psi = -\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\nu}{u} \Delta f,$$

откуда $\psi = \frac{\nu}{u} (\chi - f)$, где χ — функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа

$\Delta \chi = 0$. Выбирая для χ решение вида $\operatorname{const} \cdot \frac{1}{r}$, пишем:

$$\psi = \frac{\nu}{u} A \frac{1 - e^{\frac{u}{2\nu}(x-r)}}{r}. \quad (3)$$

На расстояниях r , удовлетворяющих неравенствам $R \ll r \ll \frac{\nu}{u}$, решение уравнения Осена должно переходить в стоксовское решение. На этих расстояниях имеем:

$$f \approx \frac{A}{r}, \quad \psi \approx A \frac{r-x}{2r}.$$

Вычисляя отсюда v и сравнивая с первым членом в (18,9), получим:

$$A = -\frac{3uR}{2}. \quad (4)$$

Формулы (1) — (4) решают поставленную задачу.

¹⁾ Это предположение, как и делаемый ниже конкретный выбор частных интегралов уравнений, оправдывается тем, что в результате мы получаем решение, удовлетворяющее всем необходимым условиям.

Для сферических компонент скорости получаем выражения

$$v_r = \frac{3uR}{2} \cdot \frac{1}{r^2} \left\{ 1 - e^{-\frac{u}{2\nu} r(1-\cos\theta)} \left[1 + \frac{u}{2\nu} r(1+\cos\theta) \right] \right\} + u \cos\theta,$$

$$v_\theta = \frac{3uR}{4} \frac{1}{r} \sin\theta e^{-\frac{u}{2\nu} r(1-\cos\theta)} - u \sin\theta.$$

В области, где $\frac{u}{2\nu} r(1-\cos\theta)$ велико, т. е. θ достаточно отличается от нуля, имеем $v_r = \frac{3R\nu}{2r^2} + u \cos\theta$, $v_\theta = -u \sin\theta$. В узком же пучке позади (по ходу течения) тела, где $\frac{u}{2\nu} r(1-\cos\theta)$ мало, имеем $v_r = \left(-\frac{3uR}{2r} + u \right) \cos\theta$, $v_\theta = -\left(\frac{3uR}{4r} - u \right) \sin\theta$.

§ 19. Точные решения уравнений движения вязкой жидкости

В тех случаях, когда нелинейные члены в уравнениях движения вязкой жидкости не исчезают тождественно, решение этих уравнений представляет большие трудности. Точные решения могут быть получены лишь в сравнительно небольшом числе случаев. Ниже приводятся примеры таких решений.

1. Бесконечный плоский диск, погруженный в вязкую жидкость, равномерно вращается вокруг своей оси. Требуется определить движение жидкости, приводимой в движение диском¹⁾. Выбираем плоскость диска в качестве плоскости $z=0$ цилиндрических координат. Диск вращается вокруг оси z с угловой скоростью Ω . Рассматривается неограниченная жидкость с той стороны диска, где $z > 0$. Предельные условия гласят:

$$\begin{aligned} v_r &= 0, & v_\varphi &= \Omega r, & v_z &= 0 & \text{при } z=0, \\ v_r &= 0, & v_\varphi &= 0 & & \text{при } z=\infty. \end{aligned}$$

Аксиальная скорость v_z не исчезает при $z \rightarrow \infty$, а стремится к постоянному отрицательному пределу, определяющемуся из самих уравнений движения. Дело в том, что поскольку жидкость движется радиально по направлению от оси вращения, в особенности вблизи диска, то для обеспечения непрерывности в жидкости должен существовать постоянный вертикальный поток по направлению из бесконечности к диску. Решение уравнений движения ищем в виде

$$\left. \begin{aligned} v_r &= r\Omega F(z_1); & v_\varphi &= r\Omega G(z_1); & v_z &= \sqrt{\nu\Omega} H(z_1); \\ p &= -\rho\nu\Omega P(z_1), & \text{где } z_1 &= \sqrt{\frac{\nu}{\Omega}} z. \end{aligned} \right\} \quad (19,1)$$

¹⁾ Решение этой задачи найдено Карманом (Th. v. Karman).

Подстановка в уравнения Навье-Стокса и уравнение непрерывности приводит к следующим уравнениям для функций F, G, H, P :

$$\left. \begin{aligned} F^2 - G^2 + F'H &= F^2, & 2FG + G'H &= G^2, \\ HH' &= P' + H^2, & 2F + H' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (19,2)$$

($'$ означает дифференцирование по z_1), с предельными условиями

$$\left. \begin{aligned} F=0, & G=1, & H=0 & \text{при } z_1=0, \\ F=0, & G=0 & & \text{при } z_1=\infty. \end{aligned} \right\} \quad (19,3)$$

Мы свели, таким образом, решение задачи к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений с одной переменной, которое может быть произведено численным образом. На рис. 5 изображены полученные таким способом графики функций F, G, H . Предельное значение функции H при $z_1 \rightarrow \infty$ равно $-0,886$; другими словами, скорость потока жидкости, текущего из бесконечности к диску, равна

$$v_z(\infty) = -0,886 \sqrt{v\Omega}.$$

Сила трения, действующая на единицу поверхности диска по направлению, перпендикулярному его радиусу

(в плоскости $z=0$), есть $\sigma_{rz} = \tau \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=0}$. Пренебрегая эффектами от краёв диска, можно написать для диска большого, но конечного радиуса R момент действующих на него сил трения в виде

$$M = 2 \int_0^R 2\pi r^2 \sigma_{rz} dr = \pi R^4 \rho \sqrt{v\Omega^3} G'(0)$$

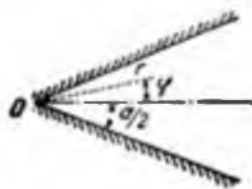


Рис. 6.

(множитель 2 перед интегралом учитывает наличие у диска двух сторон, омываемых жидкостью). Численное вычисление функции G приводит к формуле

$$M = 3,87 R^4 \rho \sqrt{v\Omega^3}. \quad (19,4)$$

2. Требуется определить стационарное движение жидкости между двумя плоскими стенками, наклонёнными друг к другу под углом α (на рис. 6 изображён поперечный разрез обеих плоскостей); исток жидкости происходит вдоль линии пересечения обеих плоскостей¹⁾.

Выбираем цилиндрические координаты r, z, φ с осью z вдоль линии пересечения обеих плоскостей (точка O) и углом φ , отсчитываемым указанным на рис. 6 образом. Движение однородно вдоль оси z , и есте-

¹⁾ Решение этой задачи получено Гамелем (Hamel).

ственно предположить, что оно будет чисто радиальным, т. е. $v_\varphi = v_z = 0$, $v_r = v(r, \varphi)$. Уравнения (13,16) дают

$$v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right); \quad (19,5)$$

$$-\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{2\nu}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0; \quad (19,6)$$

$$\frac{\partial(rv)}{\partial r} = 0.$$

Из последнего уравнения видно, что rv есть функция только от φ . Вводя функцию

$$u(\varphi) = \frac{1}{6\nu} rv, \quad (19,7)$$

получаем из (19,6):

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = \frac{12\nu^2}{r^2} \frac{du}{d\varphi},$$

откуда

$$\frac{p}{\rho} = \frac{12\nu^2}{r^2} u(\varphi) + f(r).$$

Подставляя это выражение в (19,5), получаем уравнение

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + 4u + 6u^2 = \frac{1}{6\nu^2} r^2 f'(r),$$

откуда видно, что как левая, так и правая части, зависящие соответственно только от φ и только от r , являются, каждая в отдельности, постоянной величиной, которую мы обозначим как $2C_1$. Таким образом:

$$f'(r) = 12\nu^2 C_1 \frac{1}{r^2},$$

откуда

$$f(r) = -\frac{6\nu^2 C_1}{r^2} + \text{const.},$$

и окончательно имеем для давления:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{6\nu^2}{r^2} (2u - C_1) + \text{const.} \quad (19,8)$$

Для $u(\varphi)$ имеем уравнение

$$u'' + 4u + 6u^2 = 2C_1,$$

которое после умножения на u' и первого интегрирования даёт:

$$\frac{u'^2}{2} + 2u^2 + 2u^3 - 2C_1 u - 2C_2 = 0.$$

Отсюда получаем

$$2\varphi = \pm \int \frac{du}{\sqrt{-u^3 - u^2 + C_1 u + C_2}} + C_3, \quad (19,9)$$

чем и определяется искомая зависимость скорости от φ ; функция $u(\varphi)$ может быть выражена отсюда посредством эллиптических функций. Три постоянные C_1, C_2, C_3 определяются из граничных условий на стенках:

$$u\left(\pm \frac{\alpha}{2}\right) = 0 \quad (19,10)$$

и из условия, что через любое сечение $r = \text{const.}$ проходит (в 1 сек.) одинаковое количество жидкости Q :

$$Q = \rho \int_{-\alpha/2}^{+\alpha/2} v r d\varphi = 6\nu\rho \int_{-\alpha/2}^{+\alpha/2} u d\varphi. \quad (19,11)$$

Q может быть как положительным, так и отрицательным. Если $Q > 0$, то линия пересечения плоскостей является источником, т. е. жидкость вытекает из вершины угла (о таком течении говорят, как о течении в диффузоре). Если $Q < 0$, то эта линия является стоком, и мы имеем дело со сходящимся к вершине угла течением (или, как говорят, с течением в конфузоре). Отношение $\frac{|Q|}{\nu}$ является безразмерным и играет роль числа Рейнольдса для рассматриваемого движения.

Рассмотрим сначала конфузурное движение ($Q < 0$). Для исследования решения (19,9) — (19,11) сделаем опрачывающееся в дальнейшем предположение, что движение симметрично относительно плоскости $\varphi = 0$ [т. е. $u(\varphi) = u(-\varphi)$], причём функция $u(\varphi)$ везде отрицательна (скорость направлена везде к вершине угла) и монотонно меняется от значения 0 при $\varphi = \pm \frac{\alpha}{2}$ до значения $-u_0$ ($u_0 > 0$) при $\varphi = 0$, так что u_0 есть максимум $|u|$. Тогда при $u = -u_0$ должно быть $\frac{du}{d\varphi} = 0$, откуда заключаем, что $u = -u_0$ есть корень кубического многочлена, стоящего под корнем в подинтегральном выражении в (19,9), так что можно написать

$$-u^3 - u^2 + C_1 u + C_2 = (u + u_0) [-u^2 - (1 - u_0)u + q],$$

где q — новая постоянная. Таким образом, имеем:

$$2\varphi = \pm \int_{-u_0}^u \frac{du}{V(u + u_0) [-u^2 - (1 - u_0)u + q]}, \quad (19,12)$$

причём постоянные u_0 и q определяются из условий

$$\left. \begin{aligned} a &= \int_{-u_0}^0 \frac{du}{V(u + u_0) [-u^2 - (1 - u_0)u + q]}, \\ \frac{Re}{6} &= \int_{-u_0}^0 \frac{u du}{V(u + u_0) [-u^2 - (1 - u_0)u + q]} \end{aligned} \right\} \quad (19,13)$$

(где $Re = \frac{|Q|}{\nu}$); постоянная q должна быть положительна — в противном случае эти интегралы сделались бы комплексными. Эти два уравнения имеют, как можно показать, решения для u_0 и q при любых Re и $\alpha < \pi$. Другими словами, сходящееся (конфузорное) симметрическое течение (рис. 7) возможно при любом угле раствора $\alpha < \pi$ и любом числе Рейнольдса. Рассмотрим подробнее движение при очень больших Re . Большие Re соответствуют также и большие значения u_0 . Написав (19,12) (для $\varphi > 0$) в виде:

$$\alpha \left(\frac{\alpha}{2} - \varphi \right) = \int_{u_0}^0 \frac{du}{\sqrt{(u+u_0)[-u^2-(1-u_0)u+q]}}$$

мы видим, что во всей области интегрирования подинтегральное выражение теперь мало, если только $|u|$ не близко к u_0 . Это значит, что $|u|$ может быть заметно отличным от u_0 только при φ ,

близких к $\pm \frac{\alpha}{2}$, т. е. в непосредственной близости от стенок¹⁾. Другими словами, почти во всём интервале углов φ получается $u \approx \text{const.} = -u_0$, причём, как показывают равенства (19,13), должно

быть $u_0 = \frac{Re}{6\alpha}$. Самая скорость v равна $v = \frac{|Q|}{6\alpha} \frac{1}{r}$, что соответствует потенциальному невязкому течению со скоростью, не зависящей от угла и падающей по величине

обратно пропорционально r . Таким образом, при больших числах Рейнольдса течение в конфузоре очень мало отличается от потенциального течения идеальной жидкости. Влияние вязкости проявляется только в очень узком слое вблизи стенок, где происходит быстрое падение скорости от значения, соответствующего потенциальному потоку, до нуля (рис. 8).

Пусть теперь $Q > 0$, т. е. мы имеем дело с диффузорным течением. Сделаем сначала опять предположение, что движение симметрично относительно плоскости $\varphi = 0$ и что $u(\varphi)$ (теперь $u > 0$) монотонно меняется от нуля при $\varphi = \pm \frac{\alpha}{2}$ до u_0 при $\varphi = 0$. Вместо (19,13) пишем теперь:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \int_0^{u_0} \frac{du}{\sqrt{(u_0-u)[u^2+(1+u_0)u+q]}} \\ \frac{Re}{6} &= \int_0^{u_0} \frac{u \, du}{\sqrt{(u_0-u)[u^2+(1+u_0)u+q]}} \end{aligned} \right\} \quad (19,14)$$

¹⁾ Может возникнуть вопрос о том, каким образом этот интеграл может сделаться не малым даже при $u \approx -u_0$. В действительности, при очень больших

Если рассматривать u_0 как заданное, то α монотонно возрастает с уменьшением q и имеет наибольшее возможное значение при $q=0$:

$$\alpha_{\max} = \int_0^{u_0} \frac{du}{\sqrt{u(u_0-u)(u+u_0+1)}}$$

С другой стороны, как легко убедиться, при заданном q α есть монотонно убывающая функция от u_0 . Отсюда следует, что u_0 как функция от q при заданном α есть монотонно убывающая функция, так что её наибольшее значение соответствует $q=0$ и определяется написанным равенством. Наибольшему u_0 соответствует также и наибольшее $Re = Re_{\max}$. С помощью подстановки $k^2 = \frac{u_0}{1+2u_0}$, $u = u_0 \cos^2 x$ можно представить зависимость Re_{\max} от α в параметрическом виде:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= 2\sqrt{1-2k^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}}, \\ Re_{\max} &= -6\alpha \frac{1-k^2}{1-2k^2} + \frac{12}{\sqrt{1-2k^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 x} dx. \end{aligned} \right\} (19,15)$$

Таким образом, симметрическое, везде расходящееся течение в диффузоре (рис. 9,а) возможно для данного угла раствора только при

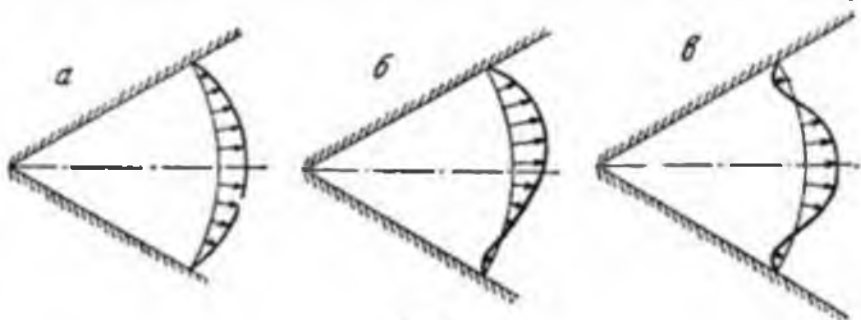


Рис. 9.

числах Рейнольдса, не превышающих определённого предела. При $\alpha \rightarrow \pi$ (что соответствует $k \rightarrow 0$) Re_{\max} стремится к нулю. При $\alpha \rightarrow 0$ (чему соответствует $k \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$) Re_{\max} стремится к бесконечности по закону $Re_{\max} = \frac{18,8}{\alpha}$.

u_0 один из корней трёхчлена $-u^2 - (1-u_0)u + q$ оказывается тоже близким к $-u_0$, так что всё подкоренное выражение имеет два почти совпадающих корня и потому весь интеграл «почти расходится» при $u = -u_0$.

При $Re > Re_{max}$ предположение о симметричном, везде расходящемся течении в диффузоре незаконно, так как условия (19,14) не могут быть выполнены. В интервале углов $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ функция $u(\varphi)$ должна иметь здесь несколько максимумов или минимумов. Соответствующие этим экстремумам значения $u(\varphi)$ должны попеременно быть корнями стоящего под корнем многочлена. Поэтому ясно, что трёхчлен $u^2 + (1 + u_0)u + q$ (с $u_0 > 0, q > 0$) должен иметь в этой области два действительных отрицательных корня, так что стоящее под корнем выражение может быть написано в виде

$$(u_0 - u)(u + u'_0)(u + u''_0),$$

где $u_0 > 0, u'_0 > 0, u''_0 > 0$; пусть $u'_0 < u''_0$. Функция $u(\varphi)$ может, очевидно, изменяться в интервале $u_0 \geq u \geq -u'_0$, причём $u = u_0$ соответствует положительному максимуму $u(\varphi)$, а $u = -u'_0$ — отрицательному минимуму. Не останавливаясь подробнее на исследовании получающихся таким образом решений, укажем, что при $Re > Re_{max}$ возникает сначала решение, при котором скорость имеет один максимум и один минимум, причём движение асимметрично относительно плоскости $\varphi = 0$ (рис. 9,б). При дальнейшем увеличении Re возникает симметричное решение с одним минимумом и двумя максимумами скорости (рис. 9,в) и т. д. Во всех этих решениях имеются, следовательно, наряду с областями вытекающей жидкости также и области втекающих потоков (но, конечно, так, что полный расход жидкости $Q > 0$). При $Re \rightarrow \infty$ число чередующихся минимумов и максимумов неограниченно возрастает, так что никакого определённого предельного решения не существует. Подчеркнём, что при диффузорном течении решение не стремится, таким образом, при $Re \rightarrow \infty$ к решению уравнений Эйлера, как это имеет место при конфузорном движении. Наконец, отметим, что при увеличении Re стационарное диффузорное движение описанного тела вскоре после достижения $Re = Re_{max}$ делается неустойчивым и в действительности возникает нестационарное (турбулентное, — см. гл. III) движение.

3. Требуется определить движение в струе жидкости, бьющей из конца тонкой трубки и попадающей в неограниченное пространство, заполненное той же жидкостью (так называемая затопленная струя)¹⁾.

Выбираем сферические координаты r, θ, φ с полярной осью вдоль направления скорости струи в точке её выхода, которая выбирается в качестве начала координат. Движение обладает аксиальной симметрией вокруг полярной оси, так что $v_\varphi = 0$, а v_r, v_θ являются функциями только от r, θ . Через всякую замкнутую поверхность вокруг начала координат (в частности, через бесконечно удалённую) должен протекать одинаковый полный поток импульса («импульс струи»). Для этого скорость должна падать обратно пропорционально расстоянию r от начала координат, так что

$$v_r = \frac{1}{r} F(\theta), \quad v_\theta = \frac{1}{r} f(\theta), \quad (19,16)$$

¹⁾ Решение этой задачи найдено Л. Ландау.

где F, f — некоторые функции только от θ . Уравнение непрерывности гласит

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta \cdot v_\theta)}{\partial \theta} = 0.$$

Отсюда находим, что

$$F(\theta) = -\frac{df}{d\theta} - f \operatorname{ctg} \theta. \quad (19,17)$$

Компоненты $\Pi_{rr}, \Pi_{\theta\theta}$ тензора потока импульса в струе тождественно исчезают, как это явствует уже из соображений симметрии. Сделаем предположение, что равны нулю также и компоненты $\Pi_{\theta r}$ и $\Pi_{r\theta}$ (оно оправдывается тем, что в результате мы получим решение, удовлетворяющее всем необходимым условиям). С помощью выражений (13,17) для компонент тензора ε_{ik} и формул (19,16) — (19,17) легко убедиться в том, что между компонентами $\Pi_{\theta\theta}, \Pi_{rr}$ и $\Pi_{r\theta}$ тензора потока импульса в струе имеется соотношение

$$\sin^2 \theta \Pi_{r\theta} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} [\sin^2 \theta (\Pi_{\theta\theta} - \Pi_{rr})].$$

Поэтому из равенства нулю $\Pi_{\theta r}$ и $\Pi_{r\theta}$ следует, что и $\Pi_{r\theta} = 0$. Таким образом, из всех компонент Π_{ik} отлична от нуля только Π_{rr} , зависящая от r как $\frac{1}{r^2}$. Легко видеть, что при этом уравнения движения $\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = 0$ удовлетворяются автоматически.

Далее, пишем

$$\frac{1}{r} (\Pi_{\theta\theta} - \Pi_{rr}) = \frac{1}{r^2} (f^2 + 2\nu f \operatorname{ctg} \theta - 2\nu f') = 0$$

или

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{f} \right) + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{f} + \frac{1}{2\nu} = 0.$$

Решение этого уравнения есть

$$f = -\frac{2\nu \sin \theta}{A - \cos \theta}, \quad (19,18)$$

а из (19,17) получаем теперь для F :

$$F = 2\nu \left\{ \frac{A^2 - 1}{(A - \cos \theta)^2} - 1 \right\}. \quad (19,19)$$

Распределение давления определяем из уравнения

$$\frac{1}{r} \Pi_{\theta\theta} = \frac{p}{\rho} + \frac{f}{r^2} (f + 2\nu \operatorname{ctg} \theta) = 0$$

и получаем:

$$p = -\frac{4\nu^2}{r^2} \frac{A \cos \theta - 1}{(A - \cos \theta)^2}. \quad (19,20)$$

Постоянную A можно связать с «импульсом струи», т. е. с полным потоком импульса в ней. Этот поток равен интегралу по сферической

поверхности:

$$P = \oint \Pi_{rr} \cos \theta \, d\theta = 2\pi \int_0^\pi r \Pi_{rr} \cos \theta \sin \theta \, d\theta.$$

Величина Π_{rr} равна:

$$\frac{1}{r} \Pi_{rr} = \frac{4v^2}{r^2} \left\{ \frac{(A^2 - 1)^2}{(A - \cos \theta)^2} - \frac{A}{A - \cos \theta} \right\},$$

и вычисление интеграла приводит к результату:

$$P = 16\pi v^2 \rho A \left\{ 1 + \frac{4}{3(A^2 - 1)} - \frac{A}{2} \ln \frac{A+1}{A-1} \right\}. \quad (19,21)$$

Формулы (19,16) — (19,21) решают поставленную задачу¹⁾.

Линии тока определяются уравнением $\frac{d\theta}{dr} = \frac{r \, d\theta}{v_r}$, интегрирование которого даёт

$$\frac{r \sin^2 \theta}{A - \cos \theta} = \text{const.}$$

На рис. 10 изображены линии тока и струе при $A = 2$.

Рассмотрим два предельных случая слабой (импульс P мал) и сильной (большие P) струи. При $P \rightarrow 0$ постоянная A стремится к бесконечности; из (19,21) имеем:

$$P = \frac{16\pi v^2 \rho}{A}.$$

Для скорости получаем в этом случае

$$v_\theta = -\frac{P \sin \theta}{8\pi v \rho r},$$

$$v_r = \frac{P \cos \theta}{4\pi v \rho r}.$$

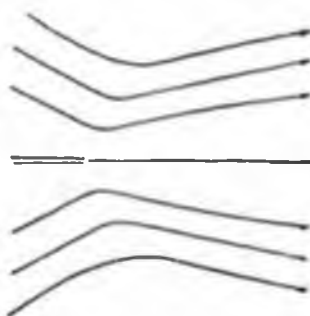


Рис. 10.

При $P \rightarrow \infty$ (сильная струя²⁾) A стремится к единице; (19,21) даёт

$$A = 1 + \frac{a^2}{2}, \quad \text{где } a = \frac{32\pi v^2 \rho}{3P}.$$

¹⁾ Полученное здесь решение является точным для струи, которая рассматривается как бьющая из точечного источника. Если учитывать конечные размеры отверстия трубки, то это решение представляет собой первый член разложения по степеням отношения размеров отверстия в расстоянии r от него. С этим обстоятельством связан тот факт, что если вычислить с помощью полученного решения полный поток жидкости, проходящей через замкнутую поверхность вокруг начала координат, то он окажется равным нулю. Отличный от нуля полный поток жидкости получился бы при учёте следующих членов разложения по указанному выше отношению.

²⁾ Надо, однако, иметь в виду, что в действительности движение в сильной струе делается турбулентным (§ 29).

Для больших углов ($\theta \sim 1$) скорость определяется формулами

$$v_\theta = -2\nu \frac{c \lg \frac{\theta}{2}}{r}, \quad v_r = -\frac{2\nu}{r},$$

а для малых углов ($\theta \sim \alpha$) получается:

$$v_\theta = -\frac{4\nu l}{a^2 + b^2}, \quad v_r = \delta\nu \frac{a^2}{(a^2 + b^2)^2}.$$

§ 20. Колебательное движение в вязкой жидкости

Движение, возникающее в вязкой жидкости при колебаниях погружённых в неё твёрдых тел, обладает целым рядом характерных особенностей. Для изучения этих особенностей удобно начать с рассмотрения простого типичного примера. Именно, предположим, что несжимаемая жидкость соприкасается с неограниченной плоской поверхностью, совершающей (в своей плоскости) простое гармоническое колебательное движение с частотой ω . Требуется определить возникающее при этом в жидкости движение. Твёрдую поверхность выберем в качестве плоскости y, z ; области жидкости соответствуют $x > 0$. Ось y выберем вдоль направления колебаний поверхности. Скорость u колеблющейся поверхности есть функция времени вида $A \cos(\omega t + \alpha)$. Удобно писать такую функцию в виде действительной части от комплексного выражения: $u = \text{Re} \{ u_0 e^{-i\omega t} \}$ (с комплексной, вообще говоря, постоянной $u_0 = A e^{-i\alpha}$).

До тех пор, пока при вычислениях производятся только линейные операции над скоростью u , можно опускать знак взятия действительной части и вычислять так, как если бы u было комплексным, после чего можно взять действительную часть от окончательного результата. Таким образом, мы будем писать:

$$u_y = u = u_0 e^{-i\omega t}. \quad (20.1)$$

Скорость жидкости должна удовлетворять граничному условию $v = u$, т. е.

$$v_x = v_z = 0, \quad v_y = u$$

при $x = 0$.

Из соображений симметрии очевидно, что все величины будут зависеть только от координаты x (и от времени t). Из уравнения непрерывности $\text{div } \mathbf{v} = 0$ имеем поэтому

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0,$$

откуда $v_x = \text{const.}$, причём согласно граничным условиям эта постоянная должна быть равной нулю, т. е. $v_x = 0$. Поскольку все величины не зависят от координат y, z , то $(\nabla \cdot) \mathbf{v} = v_x \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{v}$ и благодаря равен-

ству v_x нулю имеем тождественно $(\nabla \nabla) v = 0$. Уравнение движения (13,7) приобретает вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta v. \quad (20,2)$$

Это уравнение линейно. x -компонента его даёт

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

т. е. $p = \text{const}$.

Из симметрии, далее, очевидно, что скорость v направлена везде по оси y . Для $v_y = v$ получаем согласно (20,2)

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (20,3)$$

т. е. уравнение типа уравнения теплопроводности (одномерного). Будем искать периодическое по x и t решение этого уравнения вида

$$v = u_0 e^{i(kx - \omega t)}$$

с амплитудой (комплексной) u_0 , так, чтобы при $x = 0$ было $v = u$. Подставляя в (20,3), получаем $i\omega = \nu k^2$, откуда

$$k = \sqrt{i \frac{\omega}{\nu}} = \pm \frac{i+1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{\nu}},$$

так что скорость v равна:

$$v = u_0 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} x} e^{i \left(\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} x - \omega t \right)} \quad (20,4)$$

(мы выбрали k с положительной мнимой частью, так как в противном случае скорость неограниченно возрастала бы по направлению в глубь жидкости, что физически нелепо).

Полученное решение представляет собой поперечную волну: её скорость $v_y = v$ направлена перпендикулярно направлению распространения. Наиболее существенным свойством этой волны является то, что она быстро затухает по направлению внутрь жидкости: её амплитуда экспоненциально падает с увеличением расстояния x до твёрдой поверхности.

Таким образом, в вязкой жидкости могут существовать поперечные волны. Они, однако, быстро затухают при удалении от поверхности твёрдого тела, движение которого создаёт эти волны.

Назовём «глубиной проникновения» δ волны расстояние, на котором амплитуда волны падает в e раз. Из (20,4) видно, что

$$\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}. \quad (20,5)$$

Таким образом, глубина проникновения волны падает с увеличением частоты волны и растёт с увеличением кинематической вязкости жидкости.

Вычислим силу трения, действующую на единицу площади плоскости, совершающей колебания в вязкой жидкости. Эта сила направлена, очевидно, по оси y , она равна компоненте

$$\sigma_{xy} = \tau_1 \frac{\partial v_y}{\partial x}$$

тензора напряжений; значение производной должно быть взято на самой поверхности, т. е. при $x=0$. Подставляя (20,4), получим:

$$\sigma_{xy} = \sqrt{\frac{\omega \eta \rho}{2}} (i-1) u. \quad (20,6)$$

Если выбрать начало отсчёта времени так, чтобы u_0 в (20,1) было действительным, то, взяв действительную часть от (20,6), получаем:

$$\sigma_{xy} = -\sqrt{\omega \eta \rho} u_0 \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{4} \right).$$

Скорость же колеблющейся поверхности есть $u = u_0 \cos \omega t$. Таким образом, между скоростью и силой трения имеется сдвиг фаз.

Рассмотрим теперь общий случай колеблющегося тела произвольной формы. В изученном выше случае колебаний плоской поверхности член $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ в уравнении движения жидкости исчезал тождественно. Для поверхности произвольной формы это, конечно, уже не имеет места. Мы будем, однако, предполагать, что этот член мал по сравнению с другими членами, так что им всё же можно пренебречь. Необходимые для возможности такого пренебрежения условия будут выяснены ниже.

Таким образом, мы будем исходить попрежнему из линейного уравнения (20,2). Применим к обеим сторонам этого уравнения операцию rot . Член $\text{rot grad } p$ исчезает тождественно, так что мы получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{v} = \nu \Delta \text{rot } \mathbf{v}, \quad (20,7)$$

т. е. $\text{rot } \mathbf{v}$ удовлетворяет уравнению типа уравнения теплопроводности.

Но мы видели выше, что такое уравнение приводит к экспоненциальному затуханию описываемой им величины. Мы можем, следовательно, утверждать, что ротор скорости затухает по направлению в глубь жидкости. Другими словами, вызываемое колебаниями тела движение жидкости является вихревым в некотором слое вокруг тела, а на больших расстояниях быстро переходит в потенциальное движение. «Глубина проникновения» вихревого движения — порядка величины

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\nu}{\omega}}.$$

В связи с этим возможны два важных предельных случая. Именно, величина $\sqrt{\frac{\nu}{\omega}}$ может быть велика или мала по сравнению с размерами колеблющегося в жидкости тела. Пусть l есть порядок величины этих

размеров. Рассмотрим сначала случай $\delta \gg l$. Поскольку $\delta \sim \sqrt{\frac{\nu}{\omega}}$, то это значит, что должно выполняться условие $R^2 \omega \ll \nu$. Наряду с этим условием мы будем предполагать также, что число Рейнольдса мало. Если a есть амплитуда колебаний тела, то его скорость — порядка величины $a\omega$. Поэтому число Рейнольдса для рассматриваемого движения есть $\frac{a\omega l}{\nu}$. Таким образом, мы предполагаем выполнение условий

$$R^2 \omega \ll \nu, \quad \frac{a\omega l}{\nu} \ll 1. \quad (20,8)$$

Это есть случай малых частот колебаний. Но малость частоты означает, что скорость медленно меняется со временем и потому в общем уравнении движения

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (\nabla v) v = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta v$$

можно пренебречь производной $\frac{\partial v}{\partial t}$. Членом же $(\nabla v) v$ можно пренебречь в силу малости числа Рейнольдса.

Отсутствие члена $\frac{\partial v}{\partial t}$ в уравнении движения означает стационарность движения. Таким образом, при $\delta \gg l$ движение можно рассматривать в каждый данный момент времени как стационарное. Это значит, что движение жидкости в каждый данный момент такое же, каким оно было бы при равномерном движении тела со скоростью, которой оно в действительности обладает в данный момент. Если, например, речь идёт о колебаниях погруженного в жидкость шара, с частотой, удовлетворяющей неравенствам (20,8) (где l есть теперь радиус шара), то можно поэтому утверждать, что испытываемая шаром сила сопротивления будет определяться формулой Стокса (18,14), полученной для равномерного движения шара при малых числах Рейнольдса.

Перейдём теперь к изучению противоположного случая, когда $l \gg \delta$. Для того, чтобы можно было опять пренебречь членом $(\nabla v) v$, необходимо в этом случае одновременное выполнение условия малости амплитуды колебаний тела по сравнению с его размерами:

$$R^2 \omega \gg \nu, \quad a \ll l \quad , \quad (20,9)$$

(заметим, что число Рейнольдса при этом опять не должно быть малым). Действительно, оценим член $(\nabla v) v$. Оператор (∇v) означает дифференцирование вдоль направления скорости. По волизи поверхности тела скорость направлена в основном в касательном направлении. В этом направлении скорость заметно меняется лишь на протяжении размеров тела. Поэтому $(\nabla v) v \sim \frac{v^2}{l} \sim \frac{a^2 \omega^2}{l}$ (сама скорость имеет порядок величины $a\omega$). Производная же $\frac{\partial v}{\partial t}$ — порядка $\omega v \sim a\omega^2$. Сравнивая оба выражения, видим, что при $a \ll l$ действительно $(\nabla v) v \ll \frac{\partial v}{\partial t}$. Члены же $\frac{\partial v}{\partial t}$ и $\nu \Delta v$ имеют теперь, как легко убедиться, одинаковый порядок величины.

Рассмотрим теперь характер движения жидкости вокруг колеблющегося тела в случае выполнения условий (20,9). В тонком слое вблизи поверхности тела движение является вихревым. В основной же массе жидкости движение потенциально¹⁾. Поэтому везде, кроме пристеночного слоя, движение жидкости описывается уравнениями

$$\operatorname{rot} v = 0, \quad \operatorname{div} v = 0. \quad (20,10)$$

Отсюда следует, что и $\Delta v = 0$, а потому уравнение Навье-Стокса переходит в уравнение Эйлера. Таким образом, везде, кроме пристеночного слоя, жидкость движется как идеальная.

Поскольку пристеночный слой тонкий, то при решении уравнений (20,10) с целью определения движения в основной массе жидкости следовало бы взять в качестве граничных условий те условия, которые должны выполняться на поверхности тела, т. е. равенство скорости жидкости скорости тела. Однако, решения уравнений движения идеальной жидкости не могут удовлетворить этим условиям. Можно потребовать лишь выполнения этого условия для нормальной к поверхности компоненты скорости жидкости.

Хотя уравнения (20,10) и неприменимы в пристеночном слое жидкости, но поскольку получающееся в результате их решения распределение скоростей уже удовлетворяет необходимым граничным условиям для нормальной компоненты скорости, то истинный ход этой компоненты вблизи поверхности не обнаружит каких-либо существенных особенностей. Что же касается касательной компоненты, то, решая уравнения (20,10), мы получили бы для неё некоторое значение, отличное от соответствующей компоненты скорости тела, между тем как эти скорости тоже должны быть равными. Поэтому в тонком пристеночном слое должно происходить быстрое изменение касательной компоненты скорости.

Легко определить ход этого изменения. Рассмотрим какой-нибудь участок поверхности тела, размеры которого велики по сравнению с δ , но малы по сравнению с размерами тела. Такой участок можно рассматривать приближённо как плоский и потому можно воспользоваться для него полученными выше для плоской поверхности результатами. Пусть ось x направлена по направлению нормали к рассматриваемому участку поверхности, а ось y — по касательной к нему, совпадающей с направлением тангенциальной составляющей скорости элемента поверхности. Обозначим посредством v_y касательную компоненту скорости движения жидкости относительно тела; на самой поверхности v_y должно обратиться в нуль. Пусть, наконец, $v_{y0} e^{-i\omega t}$ есть значение v_y , получающееся в результате решения уравнений (20,10). На основании получен-

¹⁾ При колебаниях плоской поверхности на расстоянии δ ватухает не только $\operatorname{rot} v$, но и сама скорость v . Это связано с тем, что плоскость при своих колебаниях не вытесняет жидкости и потому жидкость вблизи от неё остаётся вообще неподвижной. При колебаниях же тел другой формы происходит вытеснение жидкости, в результате чего она приходит в движение, скорость которого заметно ватухает лишь на расстояниях порядка размеров тела.

ных в начале этого параграфа результатов мы можем утверждать, что в пристеночном слое v_y будет падать по направлению к поверхности по закону

$$v_y = v_0 (1 - e^{-(1-i)\sqrt{\frac{\eta}{2\rho}} x}) e^{-i\omega t}. \quad (20,11)$$

Такой характер распределения скоростей в жидкости даёт возможность легко определить обусловленную вязкостью диссипацию энергии. Диссипируемая в единицу времени энергия равна согласно (14,3)

$$\dot{E}_{\text{дисс.}} = -\frac{\eta}{2} \int \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 dV.$$

Очевидно, что основная доля диссипации будет иметь место в пристеночном слое жидкости, в котором градиент скорости особенно велик (правда, толщина этого слоя мала, но зато подинтегральное выражение содержит квадраты производных от скорости, так что интеграл будет всё же велик). Поэтому для вычисления диссипируемой энергии не надо знать распределения скоростей в основной массе жидкости, а также хода скорости v_x в пристеночном слое, которая тоже не обнаруживает аномально быстрого изменения. Достаточно учесть только ход изменения v_y с координатой x . Вычислим среднее (по времени) значение диссипируемой энергии, отнесённое к единице площади поверхности тела. Согласно сказанному эта энергия равна

$$\frac{\eta}{2} 2 \int_0^{\infty} \overline{\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2} dx.$$

Интегрирование по dx можно распространить до бесконечности ввиду быстрого уменьшения подинтегрального выражения. Подставляя для v_y действительную часть от выражения (20,11), производя усреднение¹⁾ и интегрирование, получим:

$$\frac{|v_0|^2 \rho \sqrt{\nu \omega}}{2\sqrt{2}}.$$

Полная диссипируемая в единицу времени энергия равна интегралу

$$\dot{E}_{\text{дисс.}} = -\frac{\rho \sqrt{\nu \omega}}{2\sqrt{2}} \int |v_0|^2 df, \quad (20,12)$$

¹⁾ Для усреднения по времени квадрата действительной части функции вида $f e^{-i\omega t}$ (где f — комплексная функция только от координат), пишем

$$\overline{(\operatorname{Re} \{f e^{-i\omega t}\})^2} = \frac{1}{4} \overline{(f e^{-i\omega t} + f^* e^{i\omega t})^2}.$$

Поскольку средние значения от $e^{\pm 2i\omega t}$ равны нулю, то получаем

$$\overline{(\operatorname{Re} \{f e^{-i\omega t}\})^2} = \frac{ff^*}{2} = \frac{|f|^2}{2}.$$

взятому по всей поверхности тела. Отметим, что диссипация энергии оказывается пропорциональной корню из вязкости и корню из частоты колебаний.

Задачи

1. Определить силу трения, действующую на каждую из двух параллельных твердых плоскостей, между которыми находится слой вязкой жидкости, причём одна из плоскостей совершает колебательное движение в своей плоскости.

Решение. Ищем решение уравнения (20,3) в виде

$$v = (A \sin kx + B \cos kx) e^{-i\omega t}, \quad k = (1+i) \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}$$

и определяем A и B из условий $v = u = u_0 e^{-i\omega t}$ при $x=0$ и $v=0$ при $x=h$ (h — расстояние между плоскостями). В результате получаем:

$$v = u \frac{\sin k(h-x)}{\sin kh}$$

Сила трения (на единицу поверхности) на движущейся плоскости равна

$$P_{1x} = \eta \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=0} = -ku \operatorname{ctg} kh,$$

а на неподвижной

$$P_{2x} = -\eta \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=h} = \frac{ku}{\sin kh}$$

(везде подразумеваются действительные части соответствующих выражений).

2. Определить силу трения, действующую на колеблющуюся плоскость, покрытую слоем жидкости (толщины h), верхняя поверхность которого свободна.

Решение. Граничные условия на твердой плоскости: $v = u$ при $x=0$,

а на свободной поверхности: $\sigma_{xy} = \eta \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ при $x=h$. Для скорости находим:

$$v = u \frac{\cos k(h-x)}{\cos kh}$$

Сила трения есть

$$P_x = \eta \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=0} = uk \operatorname{tg} kh.$$

3. Плоский диск (бесконечного радиуса) совершает вращательные колебания вокруг своей оси с малой амплитудой (угол поворота диска $\theta = \theta_0 \cos \omega t$, $\theta_0 \ll 1$); определить движение жидкости вокруг диска и момент сил трения, действующих на диск.

Решение. Для колебаний с малой амплитудой член $(\nu \nabla^2) v$ в уравнении движения всегда мал по сравнению с $\frac{\partial v}{\partial t}$, независимо от величины частоты ω .

Выбираем цилиндрические координаты с осью z по оси вращения и ищем решение в виде $v_r = v_\theta = 0$, $v_\varphi = v = r\Omega(z, t)$. Для угловой скорости $\Omega(z, t)$ жидкости получаем уравнение

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2}.$$

Решение этого уравнения, обращающееся в $-\omega \theta_0 \sin \omega t$ при $z=0$ и в нуль при $z=\infty$, есть

$$\Omega = -\omega \theta_0 e^{-\sqrt{\frac{\nu}{2}} z} \sin \left(\omega t - \sqrt{\frac{\nu}{2}} z \right).$$

Для момента сил трения, действующих на ограниченную радиусом R площадь поверхности диска, получаем:

$$M = \int_0^R r 2\pi r \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=0} dr = \omega^2 \eta \sqrt{\omega \eta} R^4 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right).$$

4. Определить движение жидкости между двумя параллельными плоскостями при наличии градиента давления, меняющегося со временем по гармоническому закону.

Решение. Выбираем плоскость x, z посредине между обеими плоскостями; ось x направлена по градиенту давления, который пишем в виде $-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = a e^{-i\omega t}$. Скорость направлена везде по оси x и определяется уравнением

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a e^{-i\omega t} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

Решение этого уравнения имеет вид $v = \left(A e^{iky} + B e^{-iky} + \frac{ia}{\omega} \right) e^{-i\omega t}$, где

$$k = \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} (1 + i).$$

A и B определяем из условий $v = 0$ при $y = \pm \frac{h}{2}$ (h — расстояние между плоскостями) и получаем:

$$v = \frac{ia}{\omega} \left[1 - \frac{e^{iky} + e^{-iky}}{e^{ik\frac{h}{2}} + e^{-ik\frac{h}{2}}} \right] e^{-i\omega t}.$$

При $h \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \ll 1$ это выражение переходит в

$$v = a e^{-i\omega t} \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2}{2\nu}$$

в согласии с (15,4). При $\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} h \gg 1$ имеем:

$$v = \frac{ia}{\omega} e^{-i\omega t} \left[1 - e^{ik\left(y + \frac{h}{2}\right)} - e^{ik\left(\frac{h}{2} - y\right)} \right].$$

Вблизи середины слоя жидкости (y мало) это даёт просто

$$v = \frac{ia}{\omega} e^{-i\omega t},$$

а вблизи стенки $\left(\frac{h}{2} - y\right)$ мало):

$$v = \frac{ia}{\omega} e^{-i\omega t} \left[1 - e^{-k\left(1 - \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\left(\frac{h}{2} - y\right)\right)} \right]$$

в согласии с (20,11).

5. Определить силу сопротивления, испытываемую шаром (радиуса R), совершающим в жидкости колебательное поступательное движение.

Решение. Скорость шара пишем в виде $u = u_0 e^{-i\omega t}$. Аналогично тому, как мы поступали в § 18, ищем скорость в виде $v = e^{-i\omega t} \text{rot rot } f u_0$, где

f — функция только от r (начало координат выбираем в точке нахождения центра шара в данный момент времени). Подставляя в (20,7) и производя преобразования, аналогичные произведённым в § 18, получаем уравнение

$$\Delta^2 f + \frac{i\omega}{\nu} \Delta f = 0$$

(вместо уравнения $\Delta^2 f = 0$ в § 18). Отсюда имеем:

$$\Delta f = \text{const.} \frac{e^{ikr}}{r}, \quad k = \sqrt{i \frac{\omega}{\nu}} = (1+i) \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}.$$

Знак корня в k выбран так, чтобы e^{ikr} экспоненциально затухало, а не возрастало с r . Интегрируя, получаем:

$$\frac{df}{dr} = a \frac{e^{ikr}}{r^2} \left(r - \frac{1}{ik} \right) + \frac{b}{r^3} \quad (1)$$

(самую функцию f можно не выписывать, так как в скорость входят только производные $\frac{df}{dr}$ и $\frac{d^2f}{dr^2}$). Постоянные a и b определяются из условия $v = u$ при $r = R$ и оказываются равными

$$a = -\frac{3R^2 e^{-ikR}}{2ik}, \quad b = -\frac{R^3}{2} \left(-\frac{3}{ikR} - \frac{3}{R^2 k^2} \right). \quad (2)$$

Отметим, что на больших расстояниях ($\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} r \gg 1$) $a \rightarrow 0$, $b \rightarrow -\frac{\pi^2}{2}$, что соответствует (в согласии с утверждениями § 20) потенциальному движению (определённому в задаче 2 § 9).

Сила сопротивления вычисляется по формуле (19,12), в которой интегрирование должно производиться по поверхности шара (интегрировать вместо этого по бесконечно удалённой сфере в рассматриваемом случае нельзя ввиду нестационарности движения). Результат:

$$F = 2\pi R^2 \omega u_0 e^{-i\omega t} \left\{ \frac{3}{2R} \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}} \left(1 + \frac{1}{R} \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}} \right) - i \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2R} \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}} \right) \right\}. \quad (3)$$

При $\omega = 0$ эта формула переходит в формулу Стокса; при $\nu \rightarrow 0$ получается $F = \frac{2\pi}{3} \rho R^3 \frac{du}{dt}$, что соответствует потенциальному обтеканию шара (§ 10).

6. Определить силу сопротивления, действующую на произвольно движущийся шар (скорость шара есть заданная функция времени $u = u(t)$).

Решение. Разлагаем $u(t)$ в интеграл Фурье

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_\omega e^{-i\omega t} d\omega, \quad u_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau$$

В силу линейности уравнений полная сила сопротивления может быть написана в виде интеграла от сил сопротивления, получающихся при движении со скоростями, равными отдельным компонентам Фурье $u_\omega e^{-i\omega t}$, эти силы определяются выражением (3) предыдущей задачи и равны

$$2\pi R^2 u_\omega e^{-i\omega t} \left\{ \frac{6\nu}{R^2} - \frac{2i\omega}{3} + \frac{3\sqrt{2\nu}}{R} (1-i) \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \right\}.$$

Замечая, что $\left(\frac{du}{dt}\right)_\omega = -i\omega u_\omega$, переписываем это в виде

$$2\pi\rho R^3 e^{-i\omega t} \left\{ \frac{6\nu}{R^2} u_\omega + \frac{2}{3} (\ddot{u})_\omega + \frac{3\sqrt{2}}{R} (\dot{u})_\omega \frac{1+i}{\sqrt{\omega}} \right\}.$$

При интегрировании по $d\omega$ в первом и втором членах получаем соответственно $u(t)$ и $\dot{u}(t)$. Для интегрирования третьего члена раньше всего замечаем, что для отрицательных ω надо писать этот член в комплексно сопряжённом виде.

Написав в нём $\frac{1-i}{\sqrt{|\omega|}}$ вместо $\frac{1+i}{\sqrt{\omega}}$ (это связано с тем, что полученная в задаче 5 формула (3) выведена для скорости $u = u_0 e^{-i\omega t}$ с положительными ω ; для скорости же $u_0 e^{i\omega t}$ получалась бы комплексно сопряжённая величина). Поэтому вместо интеграла по $d\omega$ в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ можно написать удвоенную действительную часть интеграла от 0 до $+\infty$. Пишем:

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re} \left\{ (1+i) \int_0^{\infty} \frac{i\dot{u}(\tau) e^{-i\omega(\tau-t)}}{\sqrt{\omega}} d\omega \right\} &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ (1+i) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\dot{u}(\tau) e^{i\omega(\tau-t)}}{\sqrt{\omega}} d\omega d\tau \right\} = \\ &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ (1+i) \int_{-\infty}^t \int_0^{\infty} \frac{\dot{u}(\tau) e^{-i\omega(t-\tau)}}{\sqrt{\omega}} d\omega d\tau + (1+i) \int_t^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\dot{u}(\tau) e^{i\omega(\tau-t)}}{\sqrt{\omega}} d\omega d\tau \right\} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^t \frac{\dot{u}(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau + i \int_t^{\infty} \frac{\dot{u}(\tau)}{\sqrt{\tau-t}} d\tau \right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{\dot{u}(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем окончательное выражение для силы сопротивления:

$$F = 2\pi\rho R^3 \left\{ \frac{1}{3} \frac{du}{dt} + \frac{3\nu}{R^2} u + \frac{3}{R} \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{du}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \right\}. \quad (4)$$

7. Определить силу сопротивления для шара, начинающего в момент $t=0$ двигаться равноускоренно по закону $u = at$.

Решение. Полагая в формуле (4) задачи 6 $u=0$ при $t < 0$ и $u=at$ при $t > 0$, получаем (при $t > 0$):

$$F = 2\pi\rho R^3 a \left\{ \frac{1}{3} + \frac{3\nu}{R^2} t - \frac{6}{R} \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \sqrt{t} \right\}.$$

8. То же для шара, мгновенно приведённого в равномерное движение.

Решение. Имеем $u=0$ при $t < 0$ и $u=u_0$ при $t > 0$. Производная $\frac{du}{dt}$ равна нулю всегда, кроме момента $t=0$, в который она обращается в бесконечность, причём так, что интеграл от $\frac{du}{dt}$ по времени конечен и равен u_0 . В результате получаем для всего времени $t > 0$:

$$F = 6\pi\rho R u_0 \left\{ 1 + \frac{R}{\sqrt{\pi\nu}} \frac{1}{\sqrt{t}} \right\}.$$

При $t \rightarrow \infty$ это выражение асимптотически приближается к значению, даваемому формулой Стокса. Импульс силы сопротивления, испытываемый шаром в течение бесконечно малого интервала времени вокруг $t=0$, получается инте-

приравняем выражения (4) по времени, причём существенен только первый член и нём; этот импульс силы равен

$$\frac{2}{3} \pi R^3 \mu_0.$$

9. Определить момент сил трения, действующих на шар, совершающий в вязкой жидкости вращательное колебательное движение вокруг своего диаметра.

Решение. По тем же причинам, как и в задаче 1 § 14, в уравнении движения можно не писать члена с градиентом давления, так что имеем:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \Delta v.$$

Ищем решение в виде $v = \text{rot } f \Omega_0 e^{-i\omega t}$, где $\Omega = \Omega_0 e^{-i\omega t}$ — угловая скорость вращения шара. Для f получаем теперь вместо уравнения $\Delta f = \text{const}$ следующее уравнение:

$$\Delta f + k^2 f = \text{const}.$$

Опуская несущественный постоянный член в решении этого уравнения, имеем отсюда $f = \frac{a}{r} e^{ikr}$ (выбирается такое решение, которое обращается на бесконечности в нуль). Постоянную a определяем из предельного условия $v = [\Omega r]$ на поверхности шара и в результате получаем:

$$f = \frac{R^3}{1 - ikR} e^{ik(r-R)}, \quad v = [\Omega r] \left(\frac{R}{r} \right)^3 \frac{1 - ikr}{1 - ikR} e^{ik(r-R)}$$

(R — радиус шара). Вычисление, аналогичное произведённому в задаче 1 § 18, приводит к следующему выражению для момента действующих на шар сил трения:

$$M = \frac{8\pi}{3} \nu R^3 \Omega_0 e^{-i\omega t} \frac{3 + 3(1-l)k - (1+3l)k^2 - k^3}{1 - (1-l)k - ik^3}.$$

10. Определить момент сил трения, действующих на наполненный вязкой жидкостью полый шар, совершающий вращательное колебательное движение вокруг своего диаметра.

Решение. Ищем скорость в том же виде, как и в предыдущей задаче. Для f берём решение, конечное во всём объёме внутри шара, включая его центр:

$f = a \frac{\sin kr}{r}$. Определяя a из граничного условия, получаем:

$$f = \frac{\sin kr}{r} \frac{R^3}{kR \cos kR - \sin kR}, \quad v = [\Omega r] \left(\frac{R}{r} \right)^3 \frac{rk \cos kr - \sin kr}{kR \cos kR - \sin kR}.$$

Вычисление момента сил трения приводит к выражению

$$M = \frac{8}{3} \pi R^3 \Omega \frac{k^3 R^3 \sin kR + 3kR \cos kR - 3 \sin kR}{kR \cos kR - \sin kR}.$$

При $R \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \gg 1$ получается:

$$M = \frac{4\sqrt{2}}{3} \pi R^4 \sqrt{\omega \rho \tau} (l-1) \Omega,$$

а при $R \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \ll 1$:

$$M = -\frac{16\pi}{15} R^3 \omega \rho \tau \Omega.$$

§ 21. Затухание гравитационных волн

Рассуждения, аналогичные вышележащим, могут быть проведены по поводу распределения скоростей вблизи свободной поверхности жидкости. Именно, рассмотрим колебательное движение, происходящее у поверхности жидкости (например, гравитационные волны). Предположим, что выполняются условия (20,9), в которых теперь роль размеров l играет длина волны λ :

$$\lambda \omega \gg \nu, \quad a \ll \lambda \quad (21,1)$$

(a — амплитуда волны, ω — её частота). Тогда можно утверждать, что решение будет вихревым лишь в тонком слое у поверхности жидкости, а в основном её объёме движение будет потенциальным — таким, каким оно было бы у идеальной жидкости.

Движение вязкой жидкости должно удовлетворять у свободной поверхности граничным условиям (13,14), требующим исчезновения определённых комбинаций производных от скорости по координатам. Движение же, получающееся в результате решения уравнений гидродинамики идеальной жидкости, этому условию не удовлетворяет. Подобно тому, как это было сделано в предыдущем параграфе для скорости v_y , мы можем заключить, что в тонком слое у поверхности жидкости соответствующие производные скорости будут быстро уменьшаться. Существенно отметить, что градиент скорости не будет аномально большим, как это имело место вблизи твёрдой поверхности.

Вычислим диссипацию энергии в гравитационной волне. Здесь надо говорить не о диссипации кинетической энергии, а о диссипации механической энергии $E_{\text{мех.}}$, включающей в себя наряду с кинетической также и потенциальную энергию в поле тяжести. Ясно, однако, что на обусловленную процессами внутреннего трения в жидкости диссипацию энергии не может влиять факт наличия или отсутствия поля тяжести. Поэтому $E_{\text{мех.}}$ определяется той же формулой (14,3):

$$\dot{E}_{\text{мех.}} = -\frac{\nu}{2} \int \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 dV.$$

При вычислении этого интеграла для гравитационной волны надо заметить, что поскольку объём поверхностного слоя вихревого движения мал, а градиент скорости в нём не аномально велик, то фактом наличия этого слоя можно пренебречь, в противоположность тому, что мы имели в случае колебаний твёрдой поверхности. Другими словами, интегрирование должно производиться по всему объёму жидкости, в котором, как мы видели, жидкость движется как идеальная.

Но движение в гравитационной волне в идеальной жидкости было у нас определено в § 11. Это движение потенциально и потому

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_i} = \frac{\partial v_k}{\partial x_i},$$

так что

$$\dot{E}_{\text{мех.}} = -2\nu \int \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} \right)^2 dV.$$

Потенциал φ имеет вид

$$\varphi = \varphi_0 \cos(kx - \omega t + a) e^{-\mu z}.$$

Нас интересует, конечно, не моментальное значение $\dot{E}_{\text{мех.}}$, а среднее по времени значение $\bar{E}_{\text{мех.}}$ диссипируемой энергии. Замечая, что средние значения квадратов косинуса и синуса одинаковы, получим:

$$\dot{E}_{\text{мех.}} = -8\gamma k^4 \int \overline{\varphi^2} dV. \quad (21,2)$$

Что касается самой энергии $E_{\text{мех.}}$ гравитационной волны, то для её вычисления можно воспользоваться известным из механики обстоятельством, что у всякой системы, совершающей малые колебания (колебания с малой амплитудой), средняя кинетическая и потенциальная энергии равны друг другу. На этом основании можно написать $\bar{E}_{\text{мех.}}$ просто как удвоенную кинетическую энергию:

$$\bar{E}_{\text{мех.}} = \rho \int \overline{\dot{\varphi}^2} dV = \rho \int \overline{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2} dV,$$

откуда

$$\bar{E}_{\text{мех.}} = 2\rho k^2 \int \overline{\varphi^2} dV. \quad (21,3)$$

Затухание волн удобно характеризовать так называемым коэффициентом затухания β , определяющимся как отношение

$$\beta = \frac{|\dot{E}_{\text{мех.}}|}{2\bar{E}}. \quad (21,4)$$

С течением времени энергия волны падает по закону $\bar{E} = \text{const.} e^{-2\beta t}$; что касается амплитуды волны, то поскольку энергия пропорциональна её квадрату, то закон её уменьшения со временем определяется множителем $e^{-\mu z}$.

С помощью (21,2) — (21,3) находим:

$$\beta = \frac{2\gamma k^2}{\rho}. \quad (21,5)$$

Подставляя сюда (11,7), получим коэффициент затухания гравитационных волн в виде

$$\beta = \frac{2\gamma \omega^4}{\rho g^3}. \quad (21,6)$$

Задачи

1. Определить коэффициент затухания длинных гравитационных волн, распространяющихся в канале постоянного сечения; частота предполагается настолько большой, что $\sqrt{\frac{g}{\omega}}$ мало по сравнению с глубиной жидкости в канале.

Решение. Основная диссипация энергии будет происходить в пристеночном слое жидкости, где скорость меняется от нуля на самой стенке до

значения $v = v_0 e^{-i\omega t}$, которое она имеет в волне. Средняя диссипация энергии (отнесённая к единице длины канала) равна согласно (20,12)

$$\dot{\epsilon} = \frac{|v_0|^2}{2V^2} V^{\nu\omega};$$

l — длина той части контура сечения канала, вдоль которой он соприкасается с жидкостью. Средняя же энергия жидкости (тоже отнесённая к единице длины канала) равна $S\rho\bar{v}^2 = S\rho\frac{|v_0|^2}{2}$ (S — площадь сечения жидкости в канале). Коэффициент затухания равен:

$$\beta = \frac{l}{2V^2 S} V^{\nu\omega}.$$

Так, для канала прямоугольного сечения (ширина a , глубина жидкости h)

$$\beta = \frac{2h+a}{2V^2 2ah} V^{\nu\omega}.$$

2. Определить движение в гравитационной волне на жидкости с большой вязкостью.

Решение. Приведённое в тексте вычисление коэффициента затухания применимо только в случаях, когда этот коэффициент мал, так что движение можно рассматривать в первом приближении как движение идеальной жидкости. При произвольной вязкости ищем: решение уравнений движения

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_z}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g,$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,$$

зависящее от t и x посредством множителя $e^{-i\omega t + ikx}$ и затухающее с z по направлению в глубь жидкости ($z < 0$). Получаем:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= e^{-i\omega t + ikx} (Ae^{kz} + Be^{mz}), & v_z &= e^{-i\omega t + ikx} \left(-iAe^{kz} - i\frac{k}{m}Be^{mz} \right), \\ \frac{p}{\rho} &= e^{-i\omega t + ikx} \frac{\omega}{k} A e^{kz} - gz, & \text{где } m^2 &= k^2 - i\frac{\omega}{\nu}. \end{aligned} \right\} (1)$$

Предельные условия на поверхности жидкости:

$$\sigma_{zx} = -p + 2\eta \frac{\partial v_x}{\partial z} = 0, \quad \sigma_{xz} = \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) = 0$$

(при $z = \zeta$). Во втором из этих условий можно непосредственно написать $z = 0$ вместо $z = \zeta$. Первое же дифференцируем предварительно по t и пишем $\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial t}$ вместо $\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial t}$, после чего полагаем $z = 0$. Из условия совместности получающихся таким образом двух однородных уравнений для A и B получаем:

$$\left(2 - i\frac{\omega}{\nu k^3} \right)^2 + \frac{\epsilon}{\nu k^3} = 4\sqrt{1 - i\frac{\omega}{\nu k^2}}, \quad (2)$$

а для отношения $\frac{A}{B}$:

$$\frac{A}{B} = \frac{2\sqrt{1 - i\frac{\omega}{\nu k^2}}}{i\frac{\omega}{\nu k^3} - 2}. \quad (3)$$

Уравнение (2) определяет зависимость ω от волнового вектора k . При этом ω является комплексной величиной; её действительная часть определяет частоту колебаний, а мнимая — коэффициент затухания. Физический смысл имеют те из решений уравнения (2), мнимая часть которых отрицательна (соответственно затуханию волны); таковыми являются только два из корней (2). Если $\nu^2 \ll \nu^2 g k^2$ [условие (21,1)], то коэффициент затухания мал и (2) даёт приближённо $\omega = \pm \sqrt{gk} - i \cdot 2\nu k^2$ — известный уже нам результат. В противоположном предельном случае $\nu^2 \gg \nu^2 g k^2$ уравнение (2) имеет два чисто мнимых корня, соответствующих чисто затухающему движению. Один из этих корней есть $\omega = -\frac{g^2}{2\nu k^2}$, а другой значительно больше (порядка νk^2) и потому не интересен (соответствующее ему движение быстро затухает).

ГЛАВА III

ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

§ 22. Устойчивость стационарного движения жидкости

При решении уравнений стационарного движения вязкой жидкости часто приходится ввиду математических трудностей ограничиваться некоторыми приближениями. Применимость этих приближенных решений ограничена, естественно, определенными пределами. Таково, например, решение задачи об обтекании шара (§ 18), область применимости которого ограничена малыми значениями числа Рейнольдса.

Принципиально, однако, для всякой задачи, т. е. для всякого движения в заданных стационарных внешних условиях, должно существовать точное стационарное решение гидродинамических уравнений (некоторые такие точные решения были рассмотрены нами в §§ 15, 16, 19). Эти решения формально существуют при любых числах Рейнольдса.

Не всякое решение уравнений движения, даже если оно является точным, может, однако, реально осуществиться в природе. Осуществляющиеся в природе движения должны не только удовлетворять гидродинамическим уравнениям, но должны еще быть устойчивыми. Для устойчивости движения необходимо, чтобы малые возмущения, раз возникнув, затухали бы со временем. Если же, напротив, возникающие в потоке жидкости сколь угодно малые возмущения стремятся возрасти со временем, то движение будет абсолютно неустойчивым. Такое неустойчивое по отношению к бесконечно малым возмущениям движение вовсе не может существовать.

Математическое исследование вопроса об устойчивости того или иного движения по отношению к бесконечно малым возмущениям должно происходить по следующей схеме. На исследуемое стационарное решение [распределение скоростей в котором пусть будет $v_n(x, y, z)$] накладывается нестационарное малое возмущение $v'_1(x, y, z, t)$, которое должно быть определено таким образом, чтобы результирующее движение $v =$

$= v_0 + v_1$, удовлетворяло уравнениям движения. Уравнение для определения v_1 получается подстановкой в уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \nabla) v = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta v, \quad \operatorname{div} v = 0$$

скорости и давления в виде $v = v_0 + v_1$, $p = p_0 + p_1$, причём известные функции v_0 и p_0 удовлетворяют невозмущённым уравнениям

$$(v_0 \nabla) v_0 = -\frac{\nabla p_0}{\rho} + \nu \Delta v_0, \quad \operatorname{div} v_0 = 0.$$

Опуская члены высших порядков по малой величине v_1 , получим:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + (v_0 \nabla) v_1 + (v_1 \nabla) v_0 = -\frac{\nabla p_1}{\rho} + \nu \Delta v_1, \quad \operatorname{div} v_1 = 0. \quad (22.1)$$

Граничным условием является исчезновение v_1 на неподвижных твёрдых поверхностях.

Таким образом, v_1 удовлетворяет системе линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами, являющимися функциями только от координат, но не от времени. Общее решение таких уравнений может быть представлено в виде суммы частных решений, в которых v_1 зависит от времени посредством множителей типа $e^{-i\omega t}$. Сами «частоты» ω возмущений не произвольны, а определяются в результате решений уравнений (22.1) с соответствующими предельными условиями. Эти «частоты», вообще говоря, комплексны. Если имеются такие ω , мнимая часть которых положительна, то $e^{-i\omega t}$ будет неограниченно возрастать со временем. Другими словами, такие возмущения, раз возникнув, будут возрастать, т. е. движение будет неустойчиво по отношению к таким возмущениям. Для устойчивости движения необходимо, чтобы у всех возможных «частот» ω мнимая часть была отрицательна. Тогда возникающие возмущения будут экспоненциально затухать со временем.

Такое математическое исследование устойчивости, однако, крайне сложно и до настоящего времени было произведено лишь для очень немногих простейших случаев (см. ниже). Для обтекания тел можно показать, что в то время как при достаточно малых числах Рейнольдса стационарное движение жидкости устойчиво, при увеличении Re достигается в конце концов определённое его значение (которое можно назвать критическим, Re_{cr}), начиная с которого движение делается неустойчивым по отношению к бесконечно малым возмущениям¹⁾. Таким образом, при достаточно больших числах Рейнольдса ($Re > Re_{cr}$) стационарное обтекание твёрдых тел вязкой жидкостью невозможно. Отметим, однако, уже здесь, что существуют некоторые исключительные случаи стационарного движения, которые могут осуществляться и при сколь угодно больших числах Рейнольдса; таковыми являются Пуазейлевское и Куэттовское течения, некоторые движения жидкости между вращающимися цилиндрами (об устойчивости этих движений речь будет идти ниже, в § 23, 24).

¹⁾ Именно, можно показать, что при достаточно больших Re во всяком случае становится абсолютно неустойчивым движение в области следа (см. § 30).

Необходимо подчеркнуть, что критическое значение числа Рейнольдса не является, конечно, универсальным. Для каждого типа движения существует своё критическое число Рейнольдса. Величины этих критических значений (например, для обтекания шара, цилиндра), по видимому, — порядка нескольких десятков¹⁾.

§ 23. Устойчивость вращательного движения жидкости

Точное математическое исследование вопроса об устойчивости движения жидкости по отношению к бесконечно малым возмущениям представляет, как уже указывалось, весьма большие математические трудности даже в простейших случаях. Существует, однако, простой способ, с помощью которого можно сделать некоторые заключения об устойчивости движения в предельном случае сколь угодно больших чисел Рейнольдса. Именно, можно установить условие, выполнение которого необходимо для устойчивости движения, хотя оно и не является достаточным. Поэтому при невыполнении этого условия движение во всяком случае абсолютно неустойчиво; в обратном же случае полной уверенности в устойчивости всё же не может быть. Этот метод²⁾ аналогичен применённому в § 3 для получения условия механической устойчивости неподвижной жидкости в поле тяжести. Его сущность состоит в том, что рассматривается какой-нибудь произвольный малый участок жидкости и предполагается, что этот участок смещается с той траектории, по которой он движется в рассматриваемом течении. При таком смещении появляются некоторые силы, действующие на смещённый участок жидкости. Для устойчивости основного движения необходимо, чтобы эти силы не приводили к неограниченному возрастанию смещения.

Применим этот метод к рассмотренному в § 16 движению между двумя вращающимися цилиндрами. Выберем некоторый элемент жидкости, масса которого пусть будет m . В невозмущённом движении все элементы жидкости движутся по окружностям $r = \text{const.}$ в плоскостях, перпендикулярных оси цилиндров. Пусть значение r для выбранного нами элемента есть r_0 . Рассмотрим смещение этого элемента в радиальном направлении в плоскости его движения. Для определения дальнейшего движения элемента m после такого смещения напишем его функцию Лагранжа. Поскольку $z = \text{const.}$, функция Лагранжа в цилиндрических координатах имеет вид

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - U(r),$$

где $U(r)$ — потенциальная энергия смещённого элемента жидкости. Функцию U легко определить, замечая, что сила, действующая на единицу объёма жидкости есть $-\frac{dp}{dr}$, так что на данный элемент жидкости

¹⁾ Так, при обтекании цилиндра (в поперечном направлении) наблюдалось незатухающее нестационарное движение уже при $Re = 34$ (где $Re = ud/\nu$, d — диаметр цилиндра). Точные же измерения $Re_{кр}$ не производились

²⁾ Принадлежащий Рэлею (Rayleigh).

действует сила $-V \frac{dp}{dr}$, где V — объем элемента. С другой стороны, эта сила должна быть равна $-\frac{dU}{dr}$. Следовательно, с точностью до незначительной поправки, $U = Vp = \frac{m}{\rho} p(r)$. Таким образом, исконая функция Лагранжа есть

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{m}{\rho} p(r). \quad (23,1)$$

Из этой функции Лагранжа получаем уравнения движения рассматриваемого элемента жидкости:

$$\ddot{\varphi} r^2 = \text{const.}, \quad \ddot{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} + r \dot{\varphi}^2.$$

Первое из этих уравнений означает, что величина $\mu = r^2 \dot{\varphi}$ для данного элемента жидкости остаётся при его передвижении постоянной, равной тому значению μ_0 , которое она имела для несмещённого элемента (т. е. при $r = r_0$). Тогда второе из уравнений движения можно написать в виде

$$\ddot{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} + \frac{\mu_0^2}{r^3}.$$

Но согласно гидродинамическому уравнению (16,1) имеем:

$$\frac{dp}{dr} = \rho \frac{v^2}{r}.$$

Написав скорость v в виде $r \dot{\varphi}$ я вводя $\mu = r^2 \dot{\varphi}$, переписываем это в виде $\frac{dp}{dr} = \frac{\rho \mu^2}{r^3}$. Таким образом, получаем уравнение движения элемента m в виде

$$\ddot{r} = \frac{\mu_0^2 - \mu^2}{r^3}. \quad (23,2)$$

Здесь μ_0 есть значение $r^2 \dot{\varphi}$ для данного рассматриваемого элемента m жидкости, находившегося до смещения в точке r_0 , а μ — значение $r^2 \dot{\varphi}$ для несмещённого элемента жидкости, находящегося в переменной точке r .

Пусть смещение рассматриваемого элемента жидкости от его невозмущённого положения мало. Тогда выражение, стоящее в правой части уравнения (23,2), можно разложить по степеням $r - r_0$. Член нулевого порядка в этом разложении выпадает, и с точностью до членов первого порядка получаем:

$$\ddot{r} = -2\mu_0 \frac{d\mu}{dr_0} \frac{r - r_0}{r_0^3},$$

или

$$\frac{d^2}{dt^2} (r - r_0) + \frac{2\mu_0}{r_0^3} \frac{d\mu_0}{dr_0} (r - r_0) = 0. \quad (23,3)$$

Если коэффициент при $r - r_0$ в этом линейном уравнении отрицателен, то оно имеет решения, в которых смещение $r - r_0$ экспоненциально растёт со временем ($r - r_0 = \text{const.} \exp \left\{ \sqrt{\frac{2v_0}{r_0^2} \frac{d\Omega}{dr_0} (t - t_0)} \right\}$). Поэтому необходимым условием устойчивости является положительность этого коэффициента, т. е. должно быть

$$\mu \frac{d\Omega}{dr} > 0 \quad (23,4)$$

(индекс нуль у μ и r мы здесь опускаем, поскольку это условие должно выполняться во всех точках жидкости).

Подчеркнём здесь, что в рассматриваемых нами уравнениях движения вовсе не учитывается влияние вязкости на движение смещённого участка жидкости. Поэтому развиваемый метод применим только к случаям сколь угодно малой вязкости, т. е. сколь угодно больших чисел Рейнольдса.

Согласно полученной в § 16 формуле (16,3) угловая скорость $\dot{\varphi}$ частиц движущейся жидкости равна

$$\dot{\varphi} = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r^2}.$$

Опуская все заведомо положительные множители, пишем условие (23,4) в виде

$$(\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2) \dot{\varphi} > 0. \quad (23,5)$$

Угловая скорость $\dot{\varphi}$ монотонно меняется с r от значения Ω_1 на внутреннем до значения Ω_2 на внешнем цилиндре. Если оба цилиндра вращаются в противоположных направлениях, т. е. Ω_1 и Ω_2 имеют различные знаки, то функция $\dot{\varphi}$ меняет знак в пространстве между цилиндрами и её произведение на постоянное число $\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2$ не может быть везде положительным. Таким образом, в этом случае условие (23,5) не выполняется во всём объёме жидкости, и движение неустойчиво.

Пусть теперь оба цилиндра вращаются в одну сторону; выбирая это направление вращения в качестве положительного, имеем $\Omega_1 > 0$, $\Omega_2 > 0$. Тогда $\dot{\varphi}$ везде положительно, и для выполнения условия (23,5) необходимо, чтобы было

$$\Omega_2 R_2^2 > \Omega_1 R_1^2. \quad (23,6)$$

Если же $\Omega_2 R_2^2$ меньше, чем $\Omega_1 R_1^2$, то движение неустойчиво. Так, например, если внешний цилиндр покоится ($\Omega_2 = 0$), а вращается только внутренний, то движение неустойчиво. Напротив, если покоится внутренний цилиндр ($\Omega_1 = 0$), то движение устойчиво.

Полученные результаты относятся, как уже указывалось, к случаю сколь угодно больших чисел Рейнольдса (т. е. величин $\frac{R_1^2 \Omega_1}{\nu}$, $\frac{R_2^2 \Omega_2}{\nu}$).

Отметим, что для движения жидкости между вращающимися цилиндрами оказывается возможным произвести исследование устойчивости движения при произвольных числах Рейнольдса¹⁾. На рис. 11 изображён примерный ход кривой, разделяющей области устойчивости и неустойчивости движения (последняя заштрихована). Правая ветвь кривой, соответствующая вращению обоих цилиндров в одну сторону, имеет в качестве асимптоты прямую $\Omega_2 R_2^2 = \Omega_1 R_1^2$. Увеличение числа Рейнольдса для данного типа движе-

ния означает увеличение обоих чисел $\frac{\Omega_1 R_1^2}{\nu}$ и $\frac{\Omega_2 R_2^2}{\nu}$ в одинаковое число раз.

На диаграмме рис. 11 этому соответствует передвижение вверх по проходящей через начало координат прямой, имеющей определённый наклон. На правой части диаграммы (обе угловые скорости Ω_1 и Ω_2 положительны) все такие прямые, для которых $\frac{\Omega_2 R_2^2}{\Omega_1 R_1^2} > 1$, нигде не пересекают кривую, ограничивающую область устойчи-

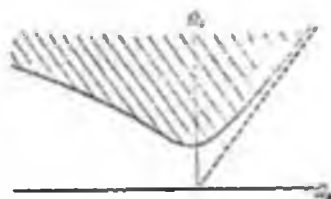


Рис. 11.

вости. Напротив, при $\frac{\Omega_2 R_2^2}{\Omega_1 R_1^2} < 1$ и доста-

точном увеличении числа Рейнольдса мы всегда попадём в область неустойчивости, в согласии с условием (23,6). На левой части диаграммы (Ω_1 и Ω_2 — различных знаков) всякая прямая, проходящая через начало координат, всегда пересекает в конце концов указанную кривую, т. е.

движение может сделаться неустойчивым при любом отношении $\frac{|\Omega_2| R_2^2}{|\Omega_1| R_1^2}$,

опять в согласии с полученными выше результатами.

При $\Omega_2 = 0$ (вращается только внутренний цилиндр) неустойчивость наступает при

$$\Omega_1 = 41,3 \frac{\nu}{h \sqrt{hR}} \quad (23,7)$$

(где $h = R_0 - R_1 \ll R_2$).

Оказывается возможным определить также характер того периодического движения, которое возникает в жидкости непосредственно после перехода в область неустойчивости. Оказывается, что скорость этого движения направлена везде в меридиональных плоскостях, проходящих через ось цилиндров, т. е. в плоскостях, перпендикулярных плоскостям, в которых происходит невозмущённое движение жидкостей.

Попробуем теперь применить изложенный метод к Пуазейлевскому течению по трубе. В невозмущённом потоке каждая частица жидкости движется по прямой, параллельной оси трубки. При смещении какого-либо участка жидкости в направлении поперёк трубы не возникает, однако, никаких новых сил, которые действовали бы на него в ту или иную сто-

¹⁾ При близком к единице отношении R_2/R_1 . Это исследование произведено Тейлором (G. Taylor).

рону, поскольку давление в трубе в поперечном направлении не меняется (см. § 15). Таким образом, каждый участок жидкости находится как бы в некотором «безразличном» равновесии. Точное исследование показывает, что Пуазейлевское течение действительно всегда устойчиво по отношению к бесконечно малым возмущениям. То же самое относится к Куэттовскому движению между движущимися параллельными плоскостями.

§ 24. Возникновение турбулентности

Обратимся теперь к изучению характера того нестационарного режима, который устанавливается в результате абсолютной неустойчивости стационарного движения при больших числах Рейнольдса¹⁾.

Начнём с выяснения свойств этого движения при числах Рейнольдса, лишь немногим превышающих $Re_{кр}$. При $Re < Re_{кр}$ у комплексных «частот» $\omega = \omega_1 + i\gamma_1$ всех возможных малых возмущений скорости мнимая часть отрицательна ($\gamma_1 < 0$). При $Re = Re_{кр}$ появляется одна частота, мнимая часть которой обращается в нуль. При $Re > Re_{кр}$ у этой «частоты» мнимая часть положительна, причём для Re , близких к $Re_{кр}$, γ_1 мало по сравнению с действительной частью ω_1 ²⁾. Функция v_1 , соответствующая этой «частоте», имеет вид

$$v_1 = A(t) f(x, y, z), \quad (24,1)$$

где f — некоторая комплексная функция координат, а комплексная амплитуда $A(t)$ равна

$$A(t) = \text{const. } e^{i\omega_1 t} e^{-\gamma_1 t}. \quad (24,2)$$

Это выражение для $A(t)$ в действительности, однако, пригодно лишь в течение короткого промежутка времени после момента срыва стационарного режима: множитель $e^{i\omega_1 t}$ быстро растёт со временем, между тем как описанный в § 22 метод определения v_1 , приводящий к выражению типа (24,1) — (24,2), применим лишь при достаточной малости v_1 . В действительности, конечно, модуль $|A|$ амплитуды нестационарного движения не растёт неограниченно, а стремится к некоторому конечному пределу. При Re , близких к $Re_{кр}$ (везде идёт речь о $Re > Re_{кр}$), этот конечный предел тоже ещё мал, и для его определения можно поступить следующим образом.

Определим производную по времени от квадрата амплитуды $|A|^2$. Для самых малых времён, когда ещё применимо (24,2), имеем:

$$\frac{d|A|^2}{dt} = 2\gamma_1 |A|^2.$$

¹⁾ Излагаемая здесь общая картина турбулентного движения в значительной мере основана на идеях Л. Д. Ландау.

²⁾ Надо иметь в виду, что в совокупность (или, как говорят, «спектр») всех возможных (для каждого данного типа движений) значений частот входят как отдельные изолированные значения («дискретный спектр»), так и частоты непрерывно заполняющие целые интервалы значений («непрерывный спектр»). Можно, однако, видеть, что интересующие нас частоты с положительной мнимой частью могут иметься, вообще говоря, только среди частот дискретного спектра.

Это выражение является по существу лишь первым членом разложения в ряд по степеням A и A^* . При увеличении модуля $|A|$ (но когда он всё же ещё остаётся малым) надо учесть следующие члены этого разложения. Ближайшие следующие члены есть члены третьего порядка по A . Нас, однако, интересует не точное значение производной $\frac{d|A|^2}{dt}$, а её среднее по времени значение, причём усреднение производится по промежуткам времени, большим по сравнению с периодом $\frac{2\pi}{\omega_1}$ периодического множителя $e^{-i\omega_1 t}$ (напоминаем, что поскольку $\omega_1 \gg \gamma_1$, то этот период мал по сравнению с временем $\frac{1}{\gamma_1}$ заметного изменения модуля амплитуды $|A|$). Но члены третьего порядка непременно содержат периодический множитель и при усреднении выпадают¹⁾. Среди членов же четвертого порядка есть член, пропорциональный $A^2 A^{*2} = |A|^4$; этот член при усреднении, очевидно, не выпадает. Таким образом, с точностью до членов четвертого порядка имеем:

$$\frac{d|A|^2}{dt} = 2\gamma_1 |A|^2 - a |A|^4, \quad (24,3)$$

где a может быть как > 0 , так и < 0 .

Положим, что a есть положительная постоянная²⁾. Над $|A|^2$ и $|A|^4$ мы не пишем знаков усреднения, так как усреднение происходит только по промежуткам времени, малым по сравнению с $\frac{1}{\gamma_1}$. По этой же причине при решении этого уравнения надо поступать так, как если бы черты над производной в левой его части не было. Решение уравнения (24,3) имеет вид

$$\frac{1}{|A|^2} = \frac{a}{2\gamma_1} + \text{const.} \cdot e^{-2\gamma_1 t}.$$

Отсюда видно, что $|A|^2$ асимптотически стремится к конечному пределу

$$|A|^2_{\text{max}} = \frac{2\gamma_1}{a}. \quad (24,4)$$

Величина γ_1 есть некоторая функция от числа Рейнольдса. Вблизи $Re_{кр}$ она может быть разложена в ряд по степеням $Re - Re_{кр}$. Но $\gamma_1(Re_{кр}) = 0$ по самому определению критического числа Рейнольдса. Поэтому член нулевого порядка в разложении выпадает, и мы имеем с точностью до членов первого порядка:

$$\gamma_1 = \text{const.} (Re - Re_{кр}).$$

¹⁾ Строго говоря, члены третьего порядка дают при усреднении не нуль, а величины четвертого порядка; эти величины предполагаются исключенными в члены четвертого порядка в разложении.

²⁾ О случае отрицательных a см. ниже.

Подставляя это в (24,4), мы видим, что абсолютная величина $|A|$ амплитуды пропорциональна корню из разности $Re - Re_{кр}$:

$$|A|_{\max} \sim \sqrt{Re - Re_{кр}}. \quad (24,5)$$

Резюмируем полученные результаты. Абсолютная неустойчивость движения при $Re > Re_{кр}$ приводит к появлению нестационарного непериодического движения. При Re , близких к $Re_{кр}$, это движение может быть представлено в виде наложения стационарного движения $v_0(x, y, z)$ и периодического движения $v_1(x, y, z, t)$ с малой, но конечной амплитудой, растущей по мере увеличения Re пропорционально корню из $Re - Re_{кр}$. Распределение скоростей в этом движении имеет вид

$$v_1 = f(x, y, z) e^{-i(\omega_1 t + \beta_1)}, \quad (24,6)$$

где f — комплексная функция координат, а β_1 — некоторая начальная фаза. При больших разностях $Re - Re_{кр}$ разделение скорости на две части v_0 и v_1 уже не имеет смысла. Мы имеем при этом дело просто с некоторым периодическим движением с частотой ω_1 . Если вместо времени пользоваться в качестве независимой переменной фазой $\varphi_1 = \omega_1 t + \beta_1$, то можно сказать, что функция $v(x, y, z, \varphi_1)$ является периодической функцией от φ_1 с периодом 2π . Эта функция, однако, не есть теперь простая тригонометрическая. В её разложение в ряд Фурье

$$v = \sum_p A_p(x, y, z) e^{-i\varphi_1 p} \quad (24,7)$$

(суммирование проводится по всем положительным и отрицательным целым числам p) входят не только члены с основной частотой ω_1 , но и члены, соответствующие частотам, равным целым кратным от неё.

Необходимо указать ещё на следующую существенную особенность рассматриваемого нестационарного движения. Уравнением (24,3) определяется только абсолютная величина временного множителя $A(t)$, но не его фаза. Фаза $\varphi_1 = \omega_1 t + \beta_1$ периодического движения остаётся по существу неопределённой и зависит от случайных начальных условий, имевших место в момент начала движения. В зависимости от этих условий начальная фаза β_1 может иметь любое значение. Таким образом, изучаемое периодическое движение не определяется однозначно теми заданными стационарными внешними условиями, в которых происходит движение. Одна величина — начальная фаза скорости — остаётся произвольной. Можно сказать, что это движение обладает одной степенью свободы, между тем как стационарное движение, полностью определяющееся внешними условиями, не обладает степенями свободы вовсе.

Перейдём теперь к изучению явлений, возникающих при дальнейшем увеличении числа Рейнольдса. По мере этого увеличения наступает в конце концов момент, когда становится неустойчивым и рассмотренное выше периодическое движение. Исследование этой неустойчивости должно было бы производиться¹⁾ аналогично изложенному выше методу опреде-

¹⁾ Но не было приведено ни в одном случае ввиду исключительных математических трудностей.

ления неустойчивости основного стационарного течения. Роль невозмущенного движения играет теперь периодическое движение $v_0(x, y, z, t)$ (с частотой ω_1), а в уравнения движения подставляется $v = v_0 + v_2$, где v_2 — малая поправка. Для v_2 получаем опять линейное уравнение, но коэффициенты этого уравнения являются теперь функциями не только от координат, но и от времени, причём по времени эти коэффициенты являются периодическими функциями с периодом $\frac{2\pi}{\omega_1}$. Решение такого уравнения должно разыскиваться в виде

$$v_2 = \Pi(x, y, z, t) e^{-i\omega t},$$

где $\Pi(x, y, z, t)$ — периодическая функция времени (с периодом $\frac{2\pi}{\omega_1}$). Неустойчивость наступает опять при появлении «частоты» $\omega = \omega_1 + i\gamma_2$, у которой мнимая часть γ_2 положительна, а соответствующая действительная часть ω_2 определяет новую появляющуюся частоту.

Таким образом, в результате возникает некоторое квазипериодическое движение, характеризующееся двумя различными периодами. Аналогично тому, как после появления первого периодического движения течение обладало одной степенью свободы, теперь две величины (фазы) являются произвольными, т. е. движение обладает двумя степенями свободы.

При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса появляются последовательно всё новые и новые периоды. Интервалы между числами Рейнольдса, соответствующими последовательному появлению новых частот, быстро падают. Что касается самих вновь появляющихся движений, то они имеют всё более мелкие масштабы. Это значит, что порядок величины расстояний, на которых заметно меняется скорость движения, тем меньше, чем позже данное движение появляется.

Таким образом, при $Re > Re_{кр}$ движение быстро приобретает сложный и запутанный характер. Такое движение называется *турбулентным*; его свойства будут подробно исследованы в следующих параграфах. В противоположность турбулентному, правильное течение жидкости, при котором она движется как бы слоями, обладающими различными скоростями, называется *ламинарным*.

Найдем общий вид функции $v(x, y, z, t)$, зависимость которой от времени определяется некоторым числом n различных частот ω_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Вместо одной фазы $\varphi_1 = \omega_1 t + \beta_1$ мы имеем теперь n различных фаз $\varphi_i = \omega_i t + \beta_i$. Функцию v можно рассматривать как функцию от этих фаз (и от координат), причём по каждой из них она является периодической функцией с периодом 2π . Такая функция может быть написана в виде ряда

$$v(x, y, z, t) = \sum_{p_1, p_2, \dots, p_n} A_{p_1, \dots, p_n}(x, y, z) e^{-i \sum_{i=1}^n p_i \varphi_i} \quad (24,8)$$

(суммирование производится по всем целым числам p_1, p_2, \dots, p_n), представляющего собой обобщение формулы (24,7). Заметим, что самый вы-

бор основных частот $\omega_1, \dots, \omega_n$ является, как видно из (24,8), не однозначным; с тем же успехом можно взять в качестве основных какие-нибудь l линейных независимых комбинаций ω_i с целыми коэффициентами¹⁾.

Движение, описываемое формулой типа (24,8), обладает l степенями свободы; в него входят l произвольных начальных фаз β_r . По мере увеличения числа Рейнольдса вместе с увеличением числа частот растёт также и число степеней свободы движения. В пределе при стремлении Re к бесконечности число степеней свободы тоже делается сколь угодно большим.

Надо иметь в виду, что поскольку скорость является периодической функцией фаз (с периодами 2π), то состояния, фазы которых отличаются только на целое кратное 2π , являются физически тождественными. Другими словами, можно сказать, что все существенно различные значения каждой из фаз лежат в интервале $0 \leq \varphi_i < 2\pi$. Рассмотрим какую-нибудь пару фаз $\varphi_1 = \omega_1 t + \beta_1$ и $\varphi_2 = \omega_2 t + \beta_2$. Пусть в некоторый момент времени φ_1 имеет значение α . Тогда согласно только что сказанному «одинаковые» с α значения φ_1 будет иметь во все моменты времени $t = \frac{\alpha - \beta_1}{\omega_1} + 2\pi l \frac{1}{\omega_1}$, где l — любое целое число. Фаза φ_2 имеет в эти

моменты значения $\varphi_2 = \frac{\omega_2}{\omega_1}(\alpha - \beta_1) + \beta_2 + 2\pi l \frac{\omega_2}{\omega_1}$. Но различные частоты являются, вообще говоря, числами несоизмеримыми друг с другом, так что $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ есть число иррациональное. Приводя каждый раз посредством вычитания должного целого кратного от 2π значение φ_2 к интервалу между 0 и 2π , мы получим поэтому при пробегании l значений от 0 до ∞ для φ_2 значения, сколь угодно близкие к любому наперёд заданному числу в этом интервале. Другими словами, в течение достаточно большого промежутка времени φ_1 и φ_2 одновременно пройдут сколь угодно близко к любой паре наперёд заданных значений. То же самое относится, очевидно, и ко всем фазам. Таким образом, турбулентное движение обладает свойствами некоторой, как говорят, квазипериодичности: в течение достаточно долгого времени жидкость пройдёт через состояния, сколь угодно близкие к любому наперёд заданному состоянию, определяемому любым возможным набором одновременных значений фаз φ_r .

Мы ввели понятие о критическом числе Рейнольдса, как о том значении Re , при котором возникает неустойчивость стационарного движения в описанном выше смысле. Понятие о $Re_{кр}$ можно, однако, характеризовать также и с несколько иной точки зрения. Именно, при $Re < Re_{кр}$ не существует устойчивых, не затухающих со временем, нестационарных решений уравнений движения. После достижения критического значения появляется устойчивое нестационарное решение, которое и осуществляется реально в движущейся жидкости.

¹⁾ Эти линейные комбинации должны быть такими, чтобы из них можно было составить все возможные числа $\sum \beta_i \omega_i$ легко видеть, что для этого детерминант из коэффициентов преобразования от старых частот к новым должен быть равен единице.

Мы отметили уже в § 22, что существуют некоторые исключительные случаи ламинарных движений, остающихся устойчивыми по отношению к бесконечно малым возмущениям при сколь угодно больших числах Рейнольдса. Однако, и для этих движений (мы будем говорить для определенности о Пуазейлевском течении по трубе, как примере таких движений) существуют критические числа Рейнольдса в указанном только что смысле, — начиная с этих значений появляются устойчивые незатухающие нестационарные решения уравнений движения, между тем как при меньших Re таких решений нет. Разница по сравнению с обычными, не исключительными, случаями заключается в том, что, в то время как там после достижения критического числа Рейнольдса стационарное движение не может существовать вовсе, здесь стационарное решение попрежнему остаётся устойчивым по отношению к бесконечно малым возмущениям и потому может быть реально осуществлено.

Будет ли течение жидкости по трубе стационарным или нестационарным — зависит от начальных условий движения, имеющих место, например, у входа трубы. При некоторых начальных условиях течение будет стационарным, при других же — нестационарным. При Re , лишь немногим превышающих $Re_{кр}$, большинство начальных условий приводит в результате к стационарному течению. Наоборот, при очень больших Re движение делается в большинстве случаев нестационарным, и для достижения стационарности движения необходимо соблюдение достаточных предосторожностей в смысле устранения возмущений, накладываемых на течение. Иначе можно сказать, что, в то время как при Re , близких к $Re_{кр}$, стационарное течение может лишь с трудом быть переведено в нестационарное, при очень больших Re для этого достаточно почти любые, даже небольшие (но всё же конечные), возмущения. Величина возмущений, необходимых для срыва стационарного режима движения, при этом падает с ростом Re .

Экспериментально устойчивое нестационарное движение в трубе наблюдалось, начиная от чисел Рейнольдса около 1900 (число Рейнольдса определяется при этом как $\frac{da}{v}$, где a — диаметр трубки, а средняя скорость течения v есть $\frac{4Q}{\pi a^2}$, где Q — количество жидкости, протекающей в 1 сек. через поперечное сечение трубки). Из сказанного выше о трудности осуществления нестационарного движения при Re , близких к $Re_{кр}$, ясно, что истинное значение $Re_{кр}$ для течения по трубе лежит во всяком случае ниже указанного числа.

Характер установления турбулентного режима при срыве ламинарного различен для обычных случаев и для течения по трубе. При течении по трубе нестационарное движение обладает многими степенями свободы не только при больших Re , но при всех вообще $Re > Re_{кр}$, начиная от самого начала его устойчивости при $Re = Re_{кр}$ (хотя, конечно, число степеней свободы всё же тем больше, чем больше Re). Поэтому нестационарное течение жидкости является весьма сложным, т. е. турбулентным, даже при Re , лишь немногим превышающих критическое значение.

Отличие между возникновением нестационарного движения в обоих случаях можно характеризовать ещё и следующим образом. При абсолютной неустойчивости стационарного течения возникновение нестационарного движения при прохождении через Re_{cr} происходит непрерывным образом, т. е. распределение скоростей в жидкости не испытывает никакого скачка. При течении же жидкости по трубе возникновение турбулентности, даже если бы оно имело место при $Re = Re_{cr}$, происходит скачком — распределение скоростей меняется скачкообразно. С этим различием связано, в частности, различие между зависимостью сопротивления от числа Рейнольдса в обоих случаях. Если, например, речь идёт о движении какого-нибудь тела в жидкости, то испытываемая им сила сопротивления F не претерпевает скачка при $Re = Re_{cr}$ (когда стационарное обтекание делается абсолютно неустойчивым). В этой точке кривая $F(Re)$ имеет только излом — соответственно изменению характера движения. При течении же в трубе при $Re \geq Re_{cr}$ имеется по существу два различных закона сопротивления: один для стационарного, а другой — для турбулентного течений. При каком бы значении Re ни произошёл переход одного в другое, сила сопротивления испытывает скачок.

Наконец, остановимся ещё на одном, принципиально возможном, типе потери устойчивости ламинарным движением. Этот тип соответствует случаю, когда в уравнении (24,3) α отрицательно; положим $\beta = -\alpha$, получим:

$$\frac{d|A|^2}{dt} = 2\gamma_1 |A|^2 + \beta |A|^4$$

с положительным β . При Re , несколько меньших чем Re_{cr} , член второго порядка отрицателен (так как $\gamma_1 < 0$ при $Re < Re_{cr}$). Но поскольку член четвертого порядка положителен, то при достаточной величине амплитуды $|A|$ производная $\frac{d}{dt}|A|^2$ сделалась бы положительной. Это значит, что движение становится неустойчивым по отношению к достаточно сильным возмущениям уже при $Re < Re_{cr}$. Таким образом, описываемый тип неустойчивости отличается тем, что при определённом значении Re , числа Рейнольдса движение становится неустойчивым по отношению к бесконечно малым возмущениям, но уже при $Re < Re_{cr}$ имеет место неустойчивость по отношению к возмущениям конечной величины. В этом случае наряду с указанным критическим числом Re_{cr} должно существовать ещё одно, «нижнее», критическое число Рейнольдса, определяющее момент появления устойчивых нестационарных решений уравнений движения.

§ 25. Развитая турбулентность

Турбулентное движение жидкости при достаточно больших значениях Re характеризуется наличием чрезвычайно нерегулярного, беспорядочного изменения скорости со временем в каждой точке потока («развитая турбулентность»). Скорость всё время пульсирует вокруг некоторого своего среднего значения; отметим уже здесь, что размах этих пульсаций, вообще говоря, не мал по сравнению с величиной самой скорости. Такое же нерегулярное изменение скорости имеет место от точки к точке потока,

рассматриваемого в заданный момент времени. Траектории жидких частиц в турбулентном потоке чрезвычайно сложны, что приводит к наличию сильного перемешивания жидкости.

Как было указано в предыдущем параграфе, турбулентное движение обладает очень большим числом степеней свободы. Значения соответствующих этим степеням свободы начальных фаз β_i определяются начальными условиями движения. Но задание точных начальных условий, которые бы определяли значения такого большого числа величин, является настолько нереальным, что самая постановка вопроса в такой форме физически бессмысленна.

Положение здесь аналогично тому, которое имело бы место при попытке рассмотреть движение всех молекул, составляющих какое-нибудь макроскопическое тело, с помощью уравнений механики, — и здесь постановка вопроса о задании начальных условий, определяющих начальные значения координат и скоростей всех молекул, и дальнейшем интегрировании уравнений движения является физически бессмысленной. Аналогично можно провести несколько дальше. Макроскопическое тело, рассматриваемое как состоящее из отдельных молекул, обладает грандиозным числом степеней свободы. Точное, микроскопическое, описание состояния тела требовало бы определения значения координат и скоростей всех составляющих его частиц. Точный ход изменения этих величин со временем зависит от их значений в начальный момент времени. Но благодаря крайней сложности и беспорядочности движения молекул можно считать, что в течение достаточно большого промежутка времени скорости и координаты молекул пройдут через все возможные наборы их значений, так что влияние начальных условий сглаживается и исчезает. Это обстоятельство, как известно, приводит к возможности рассматривать макроскопические тела статистическим образом.

Аналогичное положение имеет место для турбулентного движения. Для точного описания изменения со временем распределения скоростей в движущейся жидкости должны быть заданы значения всех начальных фаз β_i , после чего будут известны значения всех фаз $\varphi_i = \omega_i t + \beta_i$ в каждый момент времени. Мы видели, что, вне зависимости от значений начальных фаз β_i , в течение достаточно долгого времени жидкость пройдет через состояния, сколь угодно близкие к любому наперед заданному состоянию, определяемому любым возможным набором одновременных значений фаз φ_i . Отсюда следует, что при рассмотрении турбулентного движения в течение достаточно больших промежутков времени конкретные начальные условия перестают играть какую-либо роль. Это обстоятельство показывает, что теория турбулентного движения должна иметь статистический характер. В настоящее время полная количественная теория турбулентности ещё не построена. Тем не менее известен ряд весьма существенных качественных результатов, изложению которых и посвящены следующие параграфы.

Введём понятие о средней скорости движения, получающейся в результате усреднения по большим промежуткам времени истинной скорости в каждой точке пространства. При таком усреднении нерегулярность изменения скорости сглаживается и средняя скорость оказывается плавной

меняющейся вдоль потока функцией. Мы будем в дальнейшем обозначать среднюю скорость посредством $u = \bar{v}$. Разность $v' = v - u$ между истинной и средней скоростями, обнаруживающую характерное для турбулентности нерегулярное изменение, мы будем называть «пульсационной» частью скорости.

Рассмотрим подробнее характер накладывающегося на усреднённый поток нерегулярного, «пульсационного», движения. Это движение можно, в свою очередь, качественно рассматривать как результат наложения движений («турбулентных пульсаций») различных, как мы будем говорить, масштабов (под масштабом движения подразумевается порядок величины тех расстояний, на протяжении которых существенно меняется скорость движения). По мере возрастания числа Рейнольдса появляются сначала крупномасштабные пульсации; чем меньше масштаб движения, тем позже такие пульсации появляются. При очень больших числах Рейнольдса в турбулентном потоке присутствуют пульсации с масштабами от самых больших до очень малых. Основную же роль во всяком турбулентном потоке играют крупномасштабные пульсации, масштаб которых — порядка величины характеристических длин, определяющих размеры области, в которой происходит турбулентное движение; в дальнейшем мы будем обозначать порядок величины этого основного масштаба каждого данного турбулентного движения посредством l . Эти крупномасштабные движения обладают наибольшими «амплитудами». Их скорость сравнима по порядку величины с изменениями средней скорости на протяжении расстояний l (порядок величины этих изменений будем обозначать как Δu)¹). Соответствующие этим движениям частоты — порядка отношения $\frac{u}{l}$

средней скорости u (а не её изменения Δu) к размерам l . Действительно, частота определяет период повторяемости картины движения, наблюдаемой из некоторой неподвижной системы отсчёта. Но относительно такой системы вся эта картина движется вместе со всей жидкостью со скоростью порядка u .

Мелкомасштабные же пульсации, соответствующие большим частотам, участвуют в турбулентном потоке со значительно меньшими амплитудами. Их можно рассматривать, как мелкую детальную структуру, накладывающуюся на основные крупномасштабные турбулентные движения. В мелкомасштабных пульсациях заключена лишь сравнительно малая часть всей кинетической энергии жидкости.

Из описанной картины турбулентного движения можно сделать заключение о характере изменения пульсационной скорости вдоль потока (рассматриваемого в заданный момент времени). На протяжении больших

¹) Мы говорим здесь о порядке величины не самой средней скорости, а её изменения (на расстояниях порядка l), поскольку именно это изменение Δu характеризует скорость турбулентного движения. Абсолютная же величина средней скорости может быть произвольной, в зависимости от того, в какой системе отсчёта движение рассматривается.

Отметим также, что экспериментально масштабы основного турбулентного движения оказываются в несколько раз меньше, чем характеристические размеры l , а его скорость — в несколько раз меньше, чем Δu .

расстояний (сравнимых с l) изменение пульсационной скорости определяется изменением скорости крупномасштабных пульсаций и потому сравнимо по величине с порядком Δu . На малых же (по сравнению с l) расстояниях оно определяется мелкомасштабными пульсациями и потому мало (по сравнению с Δu)¹⁾. Такая же картина имеет место, если наблюдать изменение скорости со временем в заданной точке пространства. На протяжении малых (по сравнению с характеристическим временем $T \sim \frac{l}{u}$) интервалов времени скорость испытывает незначительные изменения; в течение же больших промежутков времени скорость меняется на величины порядка Δu .

В число Рейнольдса Re , определяющее свойства данного течения жидкости в целом, в качестве характеристической длины входит длина l . Наряду с таким числом Рейнольдса можно ввести качественное понятие о числах Рейнольдса имеющихся в турбулентном потоке пульсаций различных масштабов. Если λ есть порядок величины масштаба данного движения, а v_λ — порядок величины его скорости, то соответствующее число Рейнольдса определяется как $Re_\lambda \sim \frac{v_\lambda \lambda}{\nu}$. Это число тем меньше, чем меньше масштаб движения.

При больших числах Рейнольдса Re велики также и числа Рейнольдса Re_λ крупномасштабных движений. Но большие числа Рейнольдса эквивалентны малым вязкостям. Мы приходим, следовательно, к результату, что для крупномасштабного движения, являющегося как раз основным во всяком турбулентном потоке, вязкость жидкости не играет роли и может быть положена равной нулю, так что это движение описывается уравнением Эйлера. В частности, отсюда следует, что в крупномасштабном движении не происходит заметной диссипации энергии.

Вязкость жидкости делается существенной только для самых мелкомасштабных пульсаций, число Рейнольдса которых делается сравнимым с единицей (масштаб этих движений обозначим как λ_0 ; он будет определен в следующем параграфе). Именно в этих мелкомасштабных пульсациях, несущественных с точки зрения общей картины движения жидкости в турбулентном потоке, и происходит диссипация энергии.

Мы приходим, таким образом, к следующему представлению о диссипации энергии при турбулентном движении. От пульсаций с большими масштабами энергия переходит в пульсации с меньшими масштабами, практически не диссипируясь при этом. Можно сказать, что имеется как бы непрерывный «поток энергии» от крупно- к мелкомасштабным пульсациям, т. е. от малых частот к большим. Этот поток энергии диссипируется, т. е. кинетическая энергия переходит в тепло, в самых мелкомасштабных пульсациях²⁾.

¹⁾ Но велико по сравнению с изменением средней скорости на том же малом расстоянии.

²⁾ Для поддержания «стационарного» состояния необходимо, конечно, наличие внешних источников энергии, непрерывно передающих её основному крупномасштабному движению.

Поскольку вязкость жидкости существенна только для самых мелко-масштабных пульсаций, то можно утверждать, что все величины, относящиеся к турбулентному движению в масштабах $\lambda \gg \lambda_0$, не могут зависеть от ν (более точно, эти величины не должны меняться при изменении ν и неизменных остальных условиях, в которых происходит движение). Это обстоятельство сужает круг величин, определяющих свойства турбулентного движения, в результате чего для исследования турбулентности приобретают большое значение соображения подобия, связанные с размерностью имеющихся в нашем распоряжении величин.

Применим такие соображения к определению порядка величин диссипации энергии при турбулентном движении. Пусть ϵ есть количество энергии, диссипируемой в единицу времени в единице объема жидкости. Мы видели, что эта энергия черпается из крупномасштабного движения, откуда постепенно передается по всё меньшим масштабам, пока не диссипируется в пульсациях масштаба $\sim \lambda_0$. Поэтому, несмотря на то, что диссипация обязана в конце концов вязкости жидкости, порядок величины ϵ может быть определён с помощью одних только величин, характерных для крупномасштабных движений. Таковыми являются плотность жидкости ρ , размеры l и скорость Δu . Из этих трёх величин можно составить всего одну комбинацию, обладающую той же размерностью, что и ϵ , т. е. $\frac{\rho \Delta u^3}{\text{см}^3 \cdot \text{сек}} = \frac{\epsilon}{\text{см}^3 \cdot \text{сек}}$. Таким способом получаем:

$$\epsilon \sim \frac{\rho (\Delta u)^3}{l}, \quad (25,1)$$

чем и определяется порядок величины диссипации энергии в турбулентном потоке.

Турбулентно движущуюся жидкость можно, в некоторых отношениях, качественно описывать как жидкость, обладающую некоторой, как говорят, «турбулентной вязкостью» $\nu_{\text{турб.}}$, отличной от истинной кинематической вязкости ν . Характеризуя свойства турбулентного движения, $\nu_{\text{турб.}}$ должно по порядку величины определяться величинами ρ , Δu , l . Единственной составленной из них величиной с размерностью кинематической вязкости является $\Delta u \cdot l$, поэтому

$$\nu_{\text{турб.}} \sim \Delta u \cdot l, \quad (25,2)$$

Отношение турбулентной вязкости к обычной согласно этой формуле — порядка

$$\frac{\nu_{\text{турб.}}}{\nu} \sim Re,$$

т. е. растёт с числом Рейнольдса ¹⁾.

¹⁾ В действительности, однако, в этом отношении должен стоять ещё довольно заметный численный коэффициент. Это связано с указанным выше обстоятельством, что l и Δu могут довольно заметно отличаться от истинных масштабов и скоростей турбулентного движения. Отношение $\frac{\nu_{\text{турб.}}}{\nu}$ можно написать более точно в виде $\frac{\nu_{\text{турб.}}}{\nu} \sim \frac{Re}{Re_{\text{кр}}}$, где учитывается тот факт, что $\nu_{\text{турб.}}$ и ν должны в действительности сравниваться по порядку величины не при $Re \sim 1$, а при $Re \sim Re_{\text{кр}}$.

Диссипация энергии ϵ выражается посредством $\nu_{\text{турб.}}$ формулой

$$\epsilon \sim \nu_{\text{турб.}} \rho \left(\frac{\Delta u}{l} \right)^3$$

в соответствии с обычным определением вязкости. В то время как ν определяет диссипацию энергии по производным от истинной скорости по координатам, $\nu_{\text{турб.}}$ связывает диссипацию с градиентом $\left(\sim \frac{\Delta u}{l} \right)$ средней скорости движения.

Применим соображения подобия ещё для определения порядка величины Δp изменения давления на протяжении области турбулентного движения. Единственной величиной размерности давления, которую можно составить из ρ , l и Δu , является $\rho (\Delta u)^2$. Поэтому должно быть

$$\Delta p \sim \rho (\Delta u)^2. \quad (25,3)$$

§ 26. Локальная турбулентность

Перейдём теперь к изучению свойств турбулентности в масштабах λ , малых по сравнению с основным масштабом l турбулентности. Об этих свойствах мы будем говорить как о локальных свойствах турбулентности. При этом мы будем рассматривать жидкость вдали от твёрдых стенок, точнее, на расстояниях от этих стенок, больших по сравнению с λ .

О такой мелкомасштабной турбулентности вдали от твёрдых тел можно высказать естественное предположение, что она обладает свойством изотропности. Это значит, что в участках, размеры которых малы по сравнению с l , свойства турбулентного движения одинаковы по всем направлениям; в частности, они не зависят от направления скорости усреднённого движения. Необходимо подчеркнуть, что здесь и⁴ везде ниже в этом параграфе, где говорится о свойствах турбулентного движения в малом участке жидкости, подразумевается относительное движение жидких частиц в этом участке, а не абсолютное движение, в котором принимает участие весь участок как целое и которое связано с движением более крупных масштабов.

Оказывается возможным получить целый ряд весьма существенных результатов о локальных свойствах турбулентности непосредственно из соображений размерности¹⁾. Для этого выясним предварительно, какими параметрами могут вообще определяться свойства турбулентного движения в участках, малых по сравнению с l , но больших по сравнению с расстояниями λ_0 , на которых начинает играть роль вязкость жидкости; ниже будет идти речь именно о таких расстояниях. Этими параметрами является плотность ρ жидкости и, кроме того, ещё одна характерная для каждого турбулентного потока величина — энергия ϵ , диссипируемая в единицу времени в единице объёма жидкости. Мы видели, что ϵ представляет собой «поток энергии», непрерывно передаваемой от пульсаций с большими к пульсациям с меньшими масштабами. Поэтому, хотя диссипация энергии и обуславливается в конечном итоге вязкостью жидкости:

¹⁾ Эти результаты принадлежат А. Н. Колмогорову и А. М. Обузову.

и происходит в самых мелкомасштабных пульсациях, тем не менее величина ϵ определяет свойства движения и в больших масштабах. Что касается масштабов l и Δx размеров и скорости движения в целом, то естественно считать, что (при заданных ρ и ϵ) локальные свойства турбулентности от этих величин не зависят. Вязкость жидкости ν тоже не может входить ни в какие интересующие нас теперь величины (напомним, что речь идёт о расстояниях $\lambda \gg \lambda_0$).

Определим порядок величины v_λ изменения скорости турбулентного движения на протяжении расстояний порядка λ . Оно должно определяться только ρ , ϵ и, разумеется, самой величиной расстояния λ . Из этих трёх величин можно составить всего одну комбинацию с размерностью скорости; таковой является $\left(\frac{\epsilon \lambda}{\rho}\right)^{1/3}$. Поэтому можно утверждать, что должно быть

$$v_\lambda \sim \left(\frac{\epsilon \lambda}{\rho}\right)^{1/3}. \quad (26,1)$$

Мы приходим, таким образом, к весьма существенному результату: изменение скорости на протяжении некоторого малого расстояния пропорционально кубическому корню из этого расстояния¹⁾. Величину v_λ можно качественно рассматривать и как скорость турбулентных движений масштаба порядка λ .

Поставим теперь вопрос несколько иначе. Именно, определим порядок величины v_τ изменения скорости в заданной точке пространства, испытываемого ею в течение промежутка времени порядка τ , малого по сравнению с характеристическим временем $T \sim \frac{l}{u}$ движения в целом.

Для этого замечаем, что благодаря наличию общего течения каждый данный участок жидкости в продолжение промежутка времени τ перемещается в пространстве на расстояние порядка произведения $u\tau$ средней скорости u на время τ . Поэтому в данной точке пространства по истечении времени τ будет находиться участок жидкости, который в начальный момент был удалён от этой точки на расстояние $u\tau$. Искомую величину v_τ мы можем, следовательно, получить, непосредственно подставляя в (26,1) $u\tau$ вместо λ :

$$v_\tau \sim \left(\frac{\epsilon \tau u}{\rho}\right)^{1/3} \quad (26,2)$$

Таким образом, изменение скорости в течение промежутка времени τ пропорционально кубическому корню из этого промежутка.

От величины v_τ следует отличать изменение v_λ скорости данного перемещающегося в пространстве участка жидкости. Это изменение может, очевидно, зависеть только от величин ρ , ϵ , определяющих локальные свойства турбулентности, и, разумеется, от величины самого интервала

¹⁾ Отметим, что изменение v_λ скорости на малых расстояниях есть, в основном, изменение пульсационной части скорости; изменение средней скорости на малых расстояниях мало по сравнению с изменением пульсационной скорости на этих же расстояниях.

времени t . Составляя из ρ , ϵ , t единственную комбинацию размерности скорости, получаем для искомого изменения

$$v_t' \sim \left(\frac{\epsilon t}{\rho}\right)^{1/3}. \quad (26,3)$$

В отличие от изменения скорости в заданной точке пространства оно пропорционально квадратному, а не кубическому корню из t . Легко видеть, что для малых t (по сравнению с T) v_t' всегда меньше, чем v_* .

С помощью выражения (25,1) для ϵ можно переписать (26,1) в виде

$$v_t' \sim \Delta u \left(\frac{\lambda}{l}\right)^{1/3}. \quad (26,4)$$

Аналогично можно написать v_t как

$$v_t \sim \Delta u \left(\frac{t}{T}\right)^{1/3} \quad (26,5)$$

(где $T \sim \frac{l}{u}$).

Выясним теперь, на каких расстояниях начинает играть роль вязкость жидкости. Эти расстояния λ_0 определяют собой в то же время порядок величины масштабов наиболее мелкомасштабных пульсаций в турбулентном потоке. Для этого составляем «число Рейнольдса» $Re_\lambda \sim \frac{v_\lambda \lambda}{\nu}$; с помощью (26,4) получаем:

$$Re_\lambda \sim \frac{\Delta u \cdot \lambda^{4/3}}{\nu^{1/3}}.$$

Вводя число Рейнольдса $Re \sim \frac{\Delta u \cdot l}{\nu}$ движения в целом, переписываем это в виде

$$Re_\lambda \sim Re \left(\frac{\lambda}{l}\right)^{4/3}.$$

Порядок величины λ_0 определяется тем, что должно быть $Re_{\lambda_0} \sim 1$. Отсюда находим:

$$\lambda_0 = \frac{l}{Re^{3/4}}. \quad (26,6)$$

Таким образом, наименьшие масштабы турбулентности падают при увеличении числа Рейнольдса обратно пропорционально этому числу в степени $\frac{3}{4}$. Для соответствующей скорости имеем:

$$v_{\lambda_0} \sim \frac{\Delta u}{Re^{1/4}}. \quad (26,7)$$

Она тоже падает с увеличением Re . Наконец, порядок величины частоты, соответствующей движениям этих масштабов, есть $\omega_0 \sim \frac{u}{l_0}$ или

$$\omega_0 \sim \frac{u}{l} Re^{3/4}. \quad (26,8)$$

Этим определяется порядок величины верхнего конца частотного спектра турбулентного движения; нижний его конец лежит при частотах порядка u/l . Таким образом, диапазон частот растёт пропорционально числу Рейнольдса в степени $\frac{3}{4}$.

Аналогичные соображения дают возможность определить порядок величины числа степеней свободы турбулентного движения. Обозначим посредством n число степеней свободы, приходящихся на единицу объёма жидкости; n имеет размерность $1/\text{см}^3$. Это число может зависеть только от величин ρ , ε и, кроме того, от вязкости ν , поскольку ею определяется нижний предел масштабов турбулентных движений. Из этих трёх величин можно составить всего одну величину размерности $1/\text{см}^3$, именно, $\left(\frac{\varepsilon}{\rho\nu^3}\right)^{1/4}$. С помощью (25,1) и (26,6) убеждаемся, что это есть не что иное, как $\frac{1}{\lambda_0}$ — результат, который естественно было ожидать. Таким образом, имеем

$$n \sim \frac{1}{\lambda_0^3} \sim \frac{1}{l^3} Re^{3/4}. \quad (26,9)$$

Полное число N степеней свободы получается умножением n на объём области турбулентного движения, имеющий порядок величины l^3 :

$$N \sim Re^{3/4}. \quad (26,10)$$

Наконец, остановимся на свойствах движения в участках, размеры λ которых малы по сравнению с λ_0 . В таких участках движение обладает правильным характером, и его скорость меняется плавно. Поэтому мы можем здесь разложить σ_λ в ряд по степеням λ и, сохранив только первый член, получим, что $\sigma_\lambda = \text{const} \cdot \lambda$. Порядок величины const может быть определён из требования, чтобы при $\lambda \sim \lambda_0$ было $\sigma_\lambda \sim \sigma_{\lambda_0}$. Это даёт $\text{const} \sim \frac{\sigma_{\lambda_0}}{\lambda_0}$, и, подставляя (26,6) — (26,7), получим:

$$\sigma_\lambda \sim \frac{3u}{7} Re^{1/2} \lambda \quad (26,11)$$

З а д а ч а

Две жидкие частицы находятся на малом расстоянии λ_1 друг от друга; определить порядок величины времени τ , в течение которого частицы разойдутся на расстояние λ_2 ($\lambda_2 \ll \lambda_1 \ll l$).

1) Формулы (26,6) — (26,10) определяют закон изменения соответствующих величин с числом Рейнольдса. Однако, что касается количественной стороны дела, то следует иметь в виду, что во всех этих формулах может в действительности стоять заметный численный коэффициент. Так, число степеней свободы должно быть порядка единицы не при $Re \sim 1$, а при $Re \sim Re_{кр}$. Поэтому надо писать в (26,10) вместо Re отношение $Re/Re_{кр}$, так что

$$N \sim \left(\frac{Re}{Re_{кр}}\right)^{3/4}.$$

Решение. Если $\lambda \gg \lambda_0$, то явеем из соображений размерности: $\frac{d\lambda}{d\lambda} \sim \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{1/3}$. Интегрируя это соотношение и считая, что $\lambda_2 \gg \lambda_1$, явеем:

$$\tau \sim \left(\frac{\rho_1^2}{\rho}\right)^{1/3}.$$

§ 27. Корреляция скоростей

Уже формула (26,1) качественно определяет корреляцию скоростей в локальной турбулентности, т. е. связь между скоростями в двух близких точках потока. Введём теперь величины, которые могут служить количественной характеристикой этой корреляции. Такими величинами являются, например, компоненты тензора

$$B_{ik} = \overline{(v_{2i} - v_{1i})(v_{2k} - v_{1k})}, \quad (27,1)$$

где v_2 и v_1 — скорости жидкости в двух близких точках потока, а черта обозначает усреднение по времени¹⁾. Радиус-вектор между точками 1 и 2 (направленный от 1 к 2) обозначим посредством \mathbf{r} ; его величину r будем считать малой по сравнению с l (но не обязательно большой по сравнению с λ_0).

В силу изотропии локальной турбулентности тензор B_{ik} не может зависеть ни от какого избранного направления в пространстве. Единственным вектором, который может входить в выражение для B_{ik} , является радиус-вектор \mathbf{r} . Другими словами, в B_{ik} может входить, кроме абсолютной величины r вектора \mathbf{r} , только единичный тензор δ_{ik} и единичный вектор \mathbf{n} в направлении \mathbf{r} . Наиболее общий вид такого тензора второго ранга есть

$$B_{ik} = A(r)\delta_{ik} + B(r)n_i n_k. \quad (27,2)$$

Выберем оси координат так, чтобы направление одной из осей совпало с направлением \mathbf{n} ; компоненту скорости вдоль этой оси обозначим как v_r , а перпендикулярную \mathbf{n} составляющую скорости будем отличать индексом t . Компонента B_{rr} есть тогда среднее значение квадрата относительной скорости двух близких жидких частиц в их движении навстречу друг другу. Аналогично B_{tt} есть средний квадрат скорости вращательного движения одной частицы относительно другой, а B_{rt} — среднее значение от произведения этих двух составляющих скорости. Поскольку $n_r = 1$, $n_t = 0$, то из (27,2) явеем:

$$B_{rr} = A + B, \quad B_{tt} = A, \quad B_{rt} = 0. \quad (27,3)$$

Выведем соотношение, связывающее B_{rr} и B_{tt} .

Для этого предварительно замечаем, что изменение скорости на малых расстояниях обусловлено в основном мелкомасштабными пульсациями.

¹⁾ При отсутствии корреляции между значениями скорости в точках 1 и 2 средние значения произведений в (27,1) сводились бы к произведениям средних значений каждого множителя в отдельности и потому обращались бы в нуль.

С другой стороны, свойства локальной турбулентности не зависят от имеющего наряду с ней место крупномасштабного движения. Поэтому для вычисления тензора B_{ik} достаточно рассмотреть частный случай полностью изотропного и однородного турбулентного движения, в котором усредненное движение жидкости вообще отсутствует¹⁾. Раскроем скобки в определении (27,1):

$$B_{ik} = \overline{v_{1i}v_{1k}} + \overline{v_{2i}v_{2k}} - \overline{v_{1i}v_{2k}} - \overline{v_{1k}v_{2i}}$$

В силу полной однородности и изотропности движения имеем теперь

$$\overline{v_{1i}v_{1k}} = \overline{v_{2i}v_{2k}} \text{ и } \overline{v_{1i}v_{2k}} = \overline{v_{1k}v_{2i}}. \text{ Таким образом,}$$

$$B_{ik} = 2\overline{v_{1i}v_{1k}} - 2\overline{v_{1i}v_{2k}}. \quad (27,4)$$

Продифференцируем это выражение по координатам точки 2:

$$\frac{\partial B_{ik}}{\partial x_{2k}} = -2\overline{v_{1i} \frac{\partial v_{2k}}{\partial x_{2k}}}.$$

Но в силу уравнения непрерывности $\frac{\partial v_{2k}}{\partial x_{2k}} = 0$, так что

$$\frac{\partial B_{ik}}{\partial x_{2k}} = 0.$$

Поскольку B_{ik} является функцией только от компонент $x_i = x_{2i} - x_{1i}$ вектора r , то дифференцирование по x_{2k} эквивалентно дифференцированию по x_k . Подставляя (27,2), получаем после простого вычисления следующее соотношение.

$$A' + B' + \frac{2B}{r} = 0$$

($'$ означает дифференцирование по r). Подставляя сюда (27,3), перелисываем это в виде

$$B'' + \frac{2}{r}(B_{rr} - B_{ii}) = 0,$$

откуда окоячительно получаем общее соотношение между B_{rr} и B_{ii} ²⁾:

$$B_{ii} = \frac{1}{2r} \frac{d}{dr} (r^2 B_{rr}). \quad (27,5)$$

На расстояниях r , больших по сравнению с l_0 , разность скоростей пропорциональна $r^{1/2}$ [согласно (26,1)]. Поэтому компоненты тензора B_{ik}

¹⁾ Такое движение можно представлять себе как движение в жидкости, подвергнутой сильному «взбалтыванию» и затем оставленной в покое. Заметим, что такое движение непременно затухает со временем.

²⁾ Это соотношение, как и соотношения (27,13), (27,15), получены Карманом и Говартом (Howarth).

для таких r пропорциональны $r^{2/3}$. Подставляя в (27,5) $B_{rr} = \text{const. } r^{2/3}$, $B_{ii} = \text{const. } r^{2/3}$, получаем следующее простое соотношение:

$$B_{ii} = \frac{4}{3} B_{rr}. \quad (27,6)$$

Для расстояний же r , малых по сравнению с λ_0 , разность скоростей просто пропорциональна r и, следовательно, B_{rr} и B_{ii} пропорциональны r^2 . Формула (27,5) приводит теперь к соотношению

$$B_{ii} = 2B_{rr}. \quad (27,7)$$

Для рассматриваемых расстояний ($r \ll \lambda_0$) B_{ii} и B_{rr} могут ещё быть выражены, каждая в отдельности, через диссипацию энергии ϵ . Пишем $B_{rr} = ar^2$, где a — постоянная, и, комбинируя (27,2) — (27,4), находим:

$$\overline{v_{1i}v_{2i}} = \overline{v_{1i}v_{1i}} - ar^2\delta_{ik} + \frac{ar^2}{2} n_i n_k.$$

Дифференцируя это соотношение, без труда получаем:

$$\frac{\partial \overline{v_{1i}}}{\partial x_{1i}} \frac{\partial \overline{v_{2i}}}{\partial x_{2i}} = 15a, \quad \frac{\partial \overline{v_{1i}}}{\partial x_{1i}} \frac{\partial \overline{v_{2i}}}{\partial x_{2i}} = 0.$$

Поскольку это имеет место при сколь угодно малых r , то можно здесь положить $x_{1i} = x_{2i}$, так что

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\right)^2 = 15a, \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0.$$

С другой стороны, согласно общей формуле (14,3) имеем для средней диссипации энергии:

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{2} \rho \nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right)^2 = \rho \nu \left[\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right] = 15 \rho \nu a,$$

откуда $a = \frac{\bar{\epsilon}}{15}$. В результате получаем окончательно следующие соотношения, определяющие B_{rr} и B_{ii} через среднюю диссипацию энергии¹⁾:

$$B_{rr} = \frac{2}{15} \frac{\bar{\epsilon}}{\rho \nu^2} r^2, \quad B_{ii} = \frac{1}{15} \frac{\bar{\epsilon}}{\rho \nu^2} r^2. \quad (27,8)$$

1) Можно было бы думать, что существует принципиальная возможность получить универсальную (применимую к любому турбулентному движению) формулу, определяющую величины B_{rr} , B_{ii} для всех расстояний r , малых по сравнению с l . В действительности, однако, такой формулы вообще не может существовать, как это явствует из следующих соображений. Мгновенные значения величины $(v_{2i} - v_{1i})$ ($v_{2k} - v_{1k}$) можно было бы, принципиально, выразить универсальным образом через диссипацию энергии ϵ в тот же момент времени. Однако, при усреднении этих выражений будет существенным впадом изменения ϵ в течение периодов крупномасштабных (масштабы $\sim l$) движений, различных при различных конкретных случаях движения. Поэтому и результат усреднения не может быть универсальным.

Остановимся еще на тензоре «тройной корреляции»

$$B_{ikl} = \overline{(v_{2l} - v_{1l})(v_{2k} - v_{1k})(v_{2i} - v_{1i})}. \quad (27,9)$$

Будем опять считать, что движение полностью однородно и изотропно.

Рассмотрим предварительно вспомогательный тензор $\overline{v_{1i}v_{1k}v_{2l}}$. Этот тензор симметричен по индексам i и k , а в силу изотропии должен, как и B_{ikl} , выражаться через n_i и δ_{ik} . Наиболее общий вид такого тензора есть

$$\overline{v_{1i}v_{1k}v_{2l}} = C(r)\delta_{ik}n_l + D(r)(\delta_{il}n_k + \delta_{kl}n_i) + F(r)n_in_kn_l \quad (27,10)$$

Дифференцируя по x_{2l} , получаем в силу уравнения непрерывности:

$$\frac{\partial}{\partial x_{2l}} \overline{(v_{1i}v_{1k}v_{2l})} = \overline{v_{1i}v_{1k} \frac{\partial v_{2l}}{\partial x_{2l}}} = 0.$$

Подстановка сюда выражения для $\overline{v_{1i}v_{1k}v_{2l}}$ приводит после простого вычисления, которое мы здесь не приводим, к двум равенствам:

$$\frac{d}{dr}[r^2(3C + 2D + F)] = 0, \quad C' + \frac{2}{r}(C + D) = 0.$$

Интегрирование первого даёт

$$3C + 2D + F = \frac{\text{const.}}{r^2}.$$

Но при $r=0$ функции C , D , F должны оставаться конечными; поэтому надо положить $\text{const.} = 0$, так что

$$3C + 2D + F = 0.$$

Из обоих полученных таким образом уравнений находим:

$$D = -\left(C + \frac{rC'}{2}\right), \quad F = rC' - C. \quad (27,11)$$

Раскроем теперь скобки в (27,9). Легко видеть, что в силу изотропии движения средние значения $\overline{v_{1i}v_{1k}v_{2l}}$ и $\overline{v_{2i}v_{2k}v_{2l}}$ исчезают. Действительно, в этих произведениях все три скорости берутся в одной и той же точке; поэтому единственным тензором, через который должен выражаться тензор $\overline{v_i v_k v_l}$ является δ_{ik} . Но из единичных тензоров невозможно составить симметрический тензор третьего ранга. Что касается таких средних значений, как $\overline{v_{1i}v_{1k}v_{2l}}$ и $\overline{v_{2i}v_{2k}v_{1l}}$, то они равны друг другу с обратным знаком [при перестановке точек 1 и 2 меняется знак вектора n_i в (27,10)]. В результате получаем:

$$B_{ikl} = -2(\overline{v_{1i}v_{1k}v_{2l}} + \overline{v_{1i}v_{2k}v_{1l}} + \overline{v_{2i}v_{1k}v_{1l}}).$$

Подстановка (27,10) и (27,11) приводит к выражению

$$B_{ikl} = 2(rC' + C)(\delta_{ik}n_l + \delta_{il}n_k + \delta_{kl}n_i) + 6(C - rA')n_in_kn_l \quad (27,12)$$

Направляя опять одну из осей координат по направлению вектора \mathbf{n} , получаем для компонент тензора B_{ikl} :

$$B_{rrr} = 12C, \quad B_{rll} = 2(C + rC'), \quad B_{rll} = B_{lll} = 0.$$

Отсюда видно, что между отличными от нуля компонентами B_{rll} и B_{rrr} имеет место соотношение

$$B_{rll} = \frac{1}{6} \frac{d}{dr} (rB_{rrr}). \quad (27,13)$$

Наконец, оказывается возможным найти связь между компонентами тензоров B_{ik} и B_{ikl} . Для этого вычисляем производную $\frac{\partial}{\partial t} \overline{v_{1l}v_{2k}}$ (напоминаем, что полностью однородное и изотропное движение непременно затухает со временем). Выражая производные $\frac{\partial v_{1l}}{\partial t}$ и $\frac{\partial v_{2k}}{\partial t}$ с помощью уравнения Навье-Стокса, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{v_{1l}v_{2k}} = & - \frac{\partial}{\partial x_{1l}} (\overline{v_{1l}v_{1l}v_{2k}}) - \frac{\partial}{\partial x_{2l}} (\overline{v_{1l}v_{2k}v_{2l}}) - \frac{\partial}{\partial x_{1l}} \left(\frac{p_1 v_{2k}}{\rho} \right) - \\ & - \frac{\partial}{\partial x_{2k}} \left(\frac{p_2 v_{1l}}{\rho} \right) + \nu \Delta_1 \overline{v_{1l}v_{2k}} + \nu \Delta_2 \overline{v_{1l}v_{2k}}. \end{aligned}$$

При использовании свойства однородности и изотропности движения надо иметь в виду, что перестановка точек 1 и 2 связана с изменением знака \mathbf{r} , а потому надо изменить знак производных (первых) по координатам. Поэтому два первых и два последних члена попарно равны друг другу. Что же касается третьего и четвертого, то они равны нулю.

[Действительно, среднее значение $\overline{p_1 v_{2k}}$ должно в силу изотропии иметь вид $f(r) n_k$. С другой стороны, дивергенция $\frac{\partial}{\partial x_{2k}} (\overline{p_1 v_{2k}}) = p_1 \frac{\partial \overline{v_{2k}}}{\partial x_{2k}}$ равна нулю. Но единственным центрально-симметрическим вектором с везде равной нулю дивергенцией является вектор $\frac{\text{const.}}{r^3} n_k$; такой вектор обращался бы в бесконечность при $r=0$, что невозможно. Поэтому должно быть $\text{const.} = 0$.]

Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{v_{1l}v_{2k}} = -2 \frac{\partial}{\partial x_{1l}} \overline{v_{1l}v_{1l}v_{2k}} + 2\nu \Delta_1 \overline{v_{1l}v_{2k}}. \quad (27,14)$$

Сюда надо подставить согласно выведенным выше формулам

$$\begin{aligned} \overline{v_{1l}v_{2k}} = & \overline{v_{2k}v_{1l}} - \frac{1}{2} B_{ikl}, \\ \overline{v_{1l}v_{1l}v_{2k}} = & \frac{B_{rrr}}{12} \delta_{ll} n_k + \frac{1}{12} \left(\frac{rB'_{rrr}}{2} - B_{rrr} \right) (\delta_{lk} n_l + \delta_{lk} n_l) + \\ & + \frac{1}{12} (rB'_{rrr} - B_{rrr}) n_l n_k n_r \end{aligned}$$

Поскольку r предполагается малым, то в левой части (27,14) можно с достаточной точностью положить $r=0$, т. е. $v_1 = v_2$. В правой же части этого, разумеется, непосредственно делать нельзя, так как мы получили бы при этом просто нуль. В силу изотропии движения должно быть $\overline{v_i v_k} = \frac{1}{3} \overline{v^2} \delta_{ik}$, так что

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{v_i v_{ik}} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\overline{v^2}}{3} \delta_{ik}.$$

Но производная $\frac{\partial}{\partial t} \frac{\overline{v^2}}{2}$ по времени от кинетической энергии есть не что иное, как диссипация энергии $-\epsilon$. Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{v_i v_{ik}} = -\frac{2}{3} \overline{\epsilon} \delta_{ik}.$$

Простое, но длинное вычисление приводит в результате к следующему соотношению:

$$B_{rrr} = -\frac{2}{5} \frac{\overline{\epsilon}}{\rho} r + 3\nu \frac{dB_{rr}}{dr}. \quad (27,15)$$

Это соотношение, как и (27,13), справедливо при r как меньших, так и больших λ_0 . При $r \gg \lambda_0$ член, содержащий вязкость, мал, и мы имеем просто

$$B_{rrr} = -\frac{2}{5} \frac{\overline{\epsilon}}{\rho} r. \quad (27,16)$$

Заметим, что если подставить в (27,15) при $r \ll \lambda_0$ выражение (27,8) для B_{rr} , то получится нуль; это связано с тем, что B_{rrr} в этом случае должно быть третьего порядка по r , так что члены первого порядка должны сократиться.

§ 28. Область турбулентности и явление отрыва

Турбулентное движение является, вообще говоря, вихревым. Однако, распределение ротора скорости вдоль объема жидкости обнаруживает при турбулентном движении (при очень больших Re) существенные особенности. Именно, можно прийти к выводу, что при «стационарном» турбулентном обтекании тел весь объем жидкости можно обычно разделить на две области, отграниченные одна от другой. В одной из них движение является вихревым, а в другой ротор скорости отсутствует, и движение потенциально. Ротор скорости оказывается, таким образом, распределенным не по всему объему жидкости, а лишь по его части (вообще говоря, — тоже бесконечной).

Возможность существования такой отграниченной области вихревого движения является следствием того, что турбулентное движение может рассматриваться как движение идеальной жидкости, описывающееся

уравнениями Эйлера¹⁾. Мы видели (§ 7), что для движения идеальной жидкости имеет место закон сохранения циркуляции скорости. В частности, если в какой-нибудь точке линии тока ротор скорости равен нулю, то это имеет место и вдоль всей этой линии. Напротив, если в какой-нибудь точке линии тока $\text{rot } v \neq 0$, то он отличен от нуля вдоль всей линии тока. Отсюда ясно, что наличие ограниченных областей вихревого и безвихревого движения совместимо с уравнениями движения, если область вихревого движения представляет собой область, за границы которой не выходят находящиеся внутри неё линии тока. Такое распределение ротора скорости будет устойчивым, и ротор скорости не будет «проникать» за поверхность раздела.

Одним из свойств области вихревого турбулентного движения является то, что обмен жидкостью между нею и окружающим пространством может быть только односторонним. Жидкость может втекать в неё из области потенциального движения, но никогда не вытекает из неё.

Подчеркнём, что приведённые здесь соображения не могут, конечно, рассматриваться как сколько-нибудь точные доказательства высказанных утверждений. Однако, наличие ограниченных областей вихревого турбулентного движения подтверждается опытом.

Как в вихревой, так и в безвихревой областях движение турбулентно. Однако, характер этой турбулентности совершенно различен в обеих областях. Для выяснения происхождения этого различия обратим внимание на следующее общее свойство потенциального движения, описываемого уравнением Лапласа $\Delta\varphi = 0$. Предположим, что движение периодически в плоскости x, y , так что φ зависит от x и y посредством множителя вида $e^{ik_1x + ik_2y}$; тогда $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = -(k_1^2 + k_2^2)\varphi$,

и поскольку сумма вторых производных должна быть равна нулю, то ясно, что вторая производная по координате z равна φ , умноженному на положительный коэффициент, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = (k_1^2 + k_2^2)\varphi$. Но тогда зависимость

φ от z будет определяться затухающим множителем вида $e^{-z\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}$

при $z > 0$ (неограниченное возрастание как $e^{z\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}$, очевидно, невозможно). Таким образом, если потенциальное движение периодически в некоторой плоскости, то оно должно быть затухающим вдоль перпендикулярного к этой плоскости направления. При этом, чем больше k_1 и k_2 , т. е. чем меньше период повторяемости движения в плоскости x, y , тем быстрее затухает движение вдоль оси z . Все эти рассуждения остаются качественно применимыми и в тех случаях, когда движение не является строго периодическим, а лишь обнаруживает некоторую качественную повторяемость.

¹⁾ Границей применимости этих уравнений к турбулентному движению являются расстояния порядка λ_0 . Поэтому и о резкой границе между областями вихревого и безвихревого движения можно говорить только с точностью до таких расстояний.

Отсюда непосредственно вытекает следующий результат. Вне области вихревого движения турбулентное пульсационное движение должно затухать, причём тем быстрее, чем более мелкомасштабными являются данные пульсации. Другими словами, можно сказать, что мелкомасштабные пульсации не проникают далеко в глубь области потенциального движения. В результате заметную роль в этой области играют только самые крупномасштабные пульсации, затухающие лишь на расстояниях порядка величины размеров (поперечных) вихревой области (основным масштабом турбулентности являются как раз эти размеры).

Мы видели, что диссипация энергии при турбулентном движении связана с наиболее мелкомасштабными пульсациями; крупномасштабные движения заметной диссипацией не сопровождаются, с чем и связана возможность применения к ним уравнения Эйлера. Ввиду сказанного выше мы приходим к существенному результату, что диссипация энергии происходит в основном лишь в области вихревого турбулентного движения и практически не имеет места вне этой области.

Имея в виду все эти особенности вихревого и безвихревого турбулентного движений, мы будем в дальнейшем для краткости называть область вихревого турбулентного движения просто *областью турбулентного движения* или *турбулентной областью*. В следующих параграфах будет рассмотрена форма этой области для различных случаев.

Турбулентная область должна быть ограничена с какой-нибудь стороны частью поверхности обтекаемого жидкостью тела. Линию, ограничивающую эту часть поверхности тела, называют *линией отрыва*. От неё отходит поверхность раздела между областью турбулентности и остальным объёмом жидкости. Самое образование турбулентной области при обтекании тела называют *явлением отрыва*.

Форма турбулентной области определяется свойствами движения в основном объёме жидкости (т. е. не в непосредственной близости от поверхности тела). Она может быть, принципиально, определена с помощью уравнений движения идеальной жидкости, если задано положение линии отрыва на поверхности тела. При этом сами эти уравнения допускают решение при произвольном положении линии отрыва. Действительное же её положение определяется свойствами движения в непосредственной близости поверхности тела (в так называемом пограничном слое), где существенную роль играет вязкость жидкости (см. гл. IV).

§ 29. Турбулентная струя

Перейдём теперь к рассмотрению некоторых конкретных примеров турбулентного движения и начнём с обтекания жидкостью угла, образованного двумя пересекающимися бесконечными плоскостями (на рис. 12 изображён их поперечный разрез). При ламинарном обтекании (рис. 2) поток жидкости, идущей вдоль одной из сторон угла (скажем, в направлении от A к O), плавно поворачивался бы, переходя в поток, идущий вдоль второй плоскости в направлении от края угла (от O к B). При турбулентном же обтекании картина движения оказывается совершенно иной.

Поток жидкости, идущий вдоль одной из сторон угла, теперь не поворачивается, дойдя до края угла, а продолжает распространяться в прежнем направлении. Вдоль другой же стороны возникает поток жидкости, подтекающей в направлении к краю угла (от B к O). «Смешивание» обоих потоков происходит в турбулентной области¹⁾ (границы сечения этой области указаны на рис. 12 пунктиром). Происхождение такой области можно наглядно описать

следующим образом. Представим себе такое течение жидкости, при котором идущий от A к O равномерный поток продолжал бы течь в том же направлении, заполняя всё пространство сверху от плоскости AO и её продолжения направо в глубь жидкости, а в пространстве под этой плоскостью жидкость была бы вообще неподвижна. Другими словами, мы имели бы при этом поверхность разрыва (продолжение плоскости AO) между жидкостью, текущей с постоянной скоростью, и жидкостью неподвижной. Но такая поверхность разрыва является неустойчивой и не может реально существовать (см. ниже § 63). Эта неустойчивость приводит к её «разбалтыванию» и образованию области турбулентного движения. Подтекающий от B к O поток возникает при этом в результате того, что в область турбулентности должно происходить втекание жидкости извне.

Определим форму области турбулентного движения. Выберем ось x указанным на рис. 12 образом; начало координат находится в точке O . Обозначим посредством Y_1 и Y_2 расстояния от плоскости x, z до верхней и нижней границ турбулентной области; требуется определить зависимость Y_1 и Y_2 от x . Эту зависимость легко определить непосредственно из соображений размерности. Поскольку все размеры плоскостей бесконечны, то в нашем распоряжении нет никаких характерных для рассматриваемого движения постоянных параметров с размерностью длины. Отсюда следует что единственной возможной зависимостью величин Y_1, Y_2 от расстояния x является их прямая пропорциональность:

$$Y_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot x, \quad Y_2 = \operatorname{tg} \alpha_2 \cdot x. \quad (29.1)$$

Коэффициенты пропорциональности являются просто численными постоянными; мы пишем их в виде $\operatorname{tg} \alpha_1, \operatorname{tg} \alpha_2$, так что α_1 и α_2 суть углы наклона обеих границ турбулентной области к оси x . Таким образом, область турбулентного движения ограничена двумя плоскостями, пересекающимися вдоль линии края обтекаемого угла.

Значения углов α_1 и α_2 зависят только от величины обтекаемого угла и не зависят, например, от скорости набегающего потока жид-

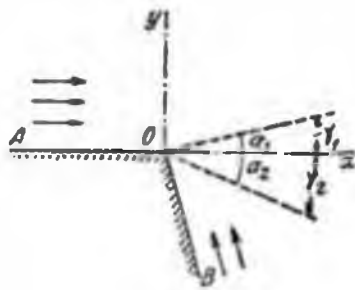


Рис. 12.

¹⁾ Напоминаем, что вие турбулентной области имеет место безвихревое турбулентное движение, постепенно переходящее в ламинарное по мере удаления от этой области.

кости. Они не могут быть вычислены теоретически; экспериментальные данные дают, например, для обтекания прямого угла значения $\alpha_1 = 5^\circ$, $\alpha_2 = 9^\circ$.

Скорости потоков жидкости с обеих сторон угла неодинаковы; их отношение является определённым числом, зависящим опять-таки только от величины обтекаемого угла. При неслишком малых углах одна из скоростей оказывается значительно больше другой — именно, большей является скорость того потока, в направлении которого расположена турбулентная область (поток от A к O). Так, при обтекании прямого угла скорость потока вдоль плоскости AO в 30 раз больше скорости потока от B к O .

Отметим ещё, что разность давлений жидкости по обе стороны турбулентной области очень мала. Так, при обтекании прямого угла оказывается

$$p_1 - p_2 = 0,003\rho U_1^2.$$

Здесь U_1 — скорость набегающего потока (от A к O), p_1 — давление в верхнем (вдоль AO), а p_2 — в нижнем (вдоль BO) потоках жидкости.

В предельном случае равного нулю обтекаемого угла мы имеем дело просто с краем пластинки, вдоль обеих сторон которой течёт жидкость. Угол раствора $\alpha_1 + \alpha_2$ турбулентной области при этом тоже обращается в нуль, т. е. турбулентная область исчезает; скорости же потоков по обеим сторонам пластинки становятся одинаковыми. При увеличении угла AOB наступает момент, когда плоскость BO касается нижней границы турбулентной области; угол AOB является при этом уже тупым. При дальнейшем увеличении угла AOB область турбулентности будет оставаться ограниченной с одной стороны поверхностью твёрдой стенки. По существу, мы имеем при этом дело просто с явлением отрыва, с линией отрыва вдоль края угла. Угол раствора турбулентной области остаётся всё время конечным.

В качестве следующего примера рассмотрим задачу о бьющей из конца тонкой трубки струе, распространяющейся в неограниченном во все стороны, заполненном той же жидкостью пространстве¹⁾ (задача о ламинарном движении в такой струе была решена в § 19). На больших по сравнению с размерами отверстия трубы расстояниях (о которых только и будет идти речь) струя аксиально симметрична, вне зависимости от конкретной формы отверстия.

Определим форму области турбулентного движения в струе. Выберем ось струи в качестве оси x , а радиус области турбулентности обозначим посредством R ; требуется определить зависимость R от x (x отсчитывается от точки выхода струи). Как и в предыдущем примере, эту зависимость легко определить непосредственно из соображений размерности. На больших по сравнению с размерами отверстия трубы расстояниях конкретная форма и размеры отверстия не могут играть роли для формы струи. Поэтому в нашем распоряжении нет никаких

¹⁾ Эта задача была рассмотрена впервые Толмином (Tollmien).

характерных для струи постоянных параметров с размерностью длины. Отсюда опять следует, что R должно быть пропорционально x :

$$R = \operatorname{tg} \alpha \cdot x, \quad (29,2)$$

где численная постоянная $\operatorname{tg} \alpha$ одинакова для всех струй. Таким образом, область турбулентного движения представляет собой конус; эксперимент даёт для угла раствора этого конуса значение $2\alpha = 24^\circ$.

Скорость жидкости в каждом поперечном сечении струи уменьшается при удалении от оси струи. Точный ход этого уменьшения внутри турбулентной области не может быть вычислен теоретически. Распределение же средних скоростей вне этой области может быть определено; это вычисление приведено в задаче 1 к этому параграфу. Укажем уже здесь, что на краю турбулентной области скорость делается очень малой по сравнению со скоростью на оси струи.

Скорость в струе падает также с увеличением расстояния от отверстия. Легко определить закон, по которому происходит это уменьшение. Для этого воспользуемся следующими соображениями. Полный поток импульса через сферическую поверхность (с центром в точке выхода струи) должен оставаться неизменным при изменении её радиуса. Плотность потока импульса в струе — порядка величины ρu^2 , где u есть порядок величины некоторой средней скорости в струе; это есть единственная величина должной размерности, которую можно составить из имеющихся в нашем распоряжении плотности жидкости ρ , скорости u и расстояния x . Площадь той части поперечного сечения струи, в которой u заметно отлично от нуля, — порядка величины R^2 . Поэтому полный поток импульса — порядка $\rho u^2 R^2$. Приравнявая это выражение постоянной и поставив $R = \operatorname{const} \cdot x$, получаем:

$$u \sim \frac{\operatorname{const}}{x}, \quad (29,3)$$

т. е. скорость падает обратно пропорционально расстоянию от точки выхода струи.

Количество Q жидкости, протекающей в 1 сек. через поперечное сечение турбулентной области струи, — порядка величины произведения его площади ($\sim R^2$) на среднюю скорость u . Подставляя (29,2) — (29,3), находим¹⁾:

$$Q = Bx. \quad (29,4)$$

Таким образом, расход жидкости сквозь сечение турбулентной области возрастает с x (т. е. жидкость как бы втягивается в турбулентную область²⁾). Входящую сюда постоянную можно определить следующим

¹⁾ Если две переменные величины, меняющиеся в широких пределах, всегда — одного порядка величины, то они вообще всегда пропорциональны друг другу. Поэтому в данном (и в других аналогичных) случае вместо $Q \sim \operatorname{const} \cdot x$ можно писать точную формулу $Q = \operatorname{const} \cdot x$.

²⁾ Что касается полного потока жидкости через всю бесконечную плоскость, проведённую поперёк струи, то он оказывается бесконечным, т. е. струя, бьющая в неограниченное пространство, увлекает с собой бесконечное количество жидкости.

образом. На расстояниях порядка величины размеров отверстия трубки Q должно переходить в характерное для каждой данной струи количество Q_0 жидкости, выбрасываемой в 1 сек. из трубы. Отсюда видно, что $B \sim \frac{Q_0}{a}$, где a — поперечные размеры отверстия трубки (например, его радиус, если отверстие круглое). Таким образом, можно написать

$$B = c \frac{Q_0}{a}, \quad (29,5)$$

где c — численная постоянная, зависящая только от формы отверстия. Эта постоянная не может быть вычислена теоретически.

Движение в каждом участке длины струи характеризуется числом Рейнольдса для этого участка, определяемым как $\frac{uR}{\nu}$. Но в силу (29,2) и (29,3) произведение uR остаётся постоянным вдоль струи, так что число Рейнольдса одинаково для всех участков струи. В качестве этого числа может быть выбрано, например, отношение $\frac{B}{\nu}$. Входящая сюда постоянная B является тем единственным параметром, который определяет все движения в струе. При увеличении «мощности» струи Q_0 (при заданной величине a отверстия) достигается в конце концов некоторое критическое значение числа Рейнольдса $\frac{B}{\nu}$, после которого движение делается турбулентным одновременно вдоль всей длины струи.

Задачи

1. Определить среднее движение жидкости в струе вне турбулентной области.

Решение. Выбираем сферические координаты r, θ, φ с полярной осью вдоль оси струи и началом координат в точке ее выхода. В силу аксиальной симметрии струи компонента u_φ средней скорости отсутствует, а u_θ, u_r являются функциями только от r и θ . Те же соображения, что и в задаче о ламинарной струе в § 19, показывают, что u_r, u_θ должны иметь вид $u_\theta = \frac{l(\theta)}{r}, u_r = \frac{r'(\theta)}{r}$.

Вне области турбулентности движение жидкости потенциально (§ 28), т. е. $\text{rot } u = 0$, откуда

$$\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{r}{\partial r} (r u_\theta) = 0.$$

Но $r u_\theta$ не зависит от r , поэтому $\frac{d u_\theta}{d \theta} = \frac{1}{r} \frac{d F}{d \theta} = 0$, откуда $F = \text{const}$. Написав сопот. в виде — a , имеем:

$$u_r = -\frac{a}{r}. \quad (1)$$

Из уравнения непрерывности

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta u_\theta) = 0$$

получаем теперь:

$$f = \frac{\text{const} - a \cos \theta}{\sin \theta}.$$

Постоянная интегрирования должна быть положена равной $-a$ так, чтобы скорость не обращалась в бесконечность при $\theta = \pi$ (что касается обращения f в бесконечность при $\theta = 0$, то оно несущественно, поскольку рассматриваемое здесь решение относится только к пространству вне турбулентной области, а направление $\theta = 0$ лежит внутри неё). Таким образом,

$$u_{\theta} = -\frac{a}{r} \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}. \quad (2)$$

Проекция скорости на направление струи (u_x) и абсолютная величина скорости равны

$$u_x = \frac{a}{r} = \frac{a \cos \theta}{r}, \quad u = \frac{a}{r} \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}}. \quad (3)$$

Постоянную a можно связать с постоянной B , входящей в формулу (29,4). Рассмотрим отрезок конуса турбулентной области, вырезаемый двумя бесконечно близкими поперечными сечениями. Количество жидкости, втекающей в 1 сек. извне в этот участок турбулентной области, равно $dQ = 2\pi r (1 + \cos \alpha) dr$, а из формулы (29,4) имеем $dQ = B dx = B \cos \alpha dr$. Сравнивая оба выражения, получаем:

$$a = \frac{B}{2\pi} \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha}. \quad (4)$$

Сравним среднюю скорость \bar{u}_x внутри турбулентной области (определяемую как $\bar{u}_x = \frac{Q}{\pi r^2} = \frac{B}{\pi r x (1 + \cos \alpha)}$) со скоростью $(u_x)_{\text{пор}}$ на границе этой области. Взяв вторую из (3) с $\theta = \alpha$, получаем:

$$\frac{(u_x)_{\text{пор}}}{\bar{u}_x} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}.$$

При $\alpha = 12^\circ$ получаем для этого отношения значение 0,011, т. е. на границе турбулентной области скорость мала по сравнению со средней скоростью внутри области.

2. Определить закон изменения размеров и скорости в струе, бьющей из бесконечно длинной тонкой щели.

Решение. По тем же причинам, как и для аксиальной струи, заключаем, что турбулентная область ограничена двумя плоскостями, пересекающимися вдоль линии щели (т. е. ширина щели $Y = \text{const} \cdot x$). Поток импульса в струе (отнесенный к единице длины щели) — порядка $\rho u^2 Y$. Для зависимости средней скорости u от x получаем поэтому $u \sim \frac{\text{const}}{\sqrt{x}}$. Расход жидкости через сечение

турбулентной области струи $Q \sim uY$, откуда $Q = \text{const} \cdot \sqrt{x}$.

§ 30. След

При числах Рейнольдса, значительно превышающих критическое, при обтекании твердого тела потоком жидкости за телом образуется длинная область турбулентного движения. Эту область называют *турбулентным следом*.

Обозначим посредством U постоянную скорость набегающего на тело потока жидкости (направление U выберем в качестве оси x). Истинную

же скорость жидкости в каждой точке будем писать в виде суммы $U + v$; на бесконечности v обращается в нуль. Усреднённая скорость есть $U + u$, где посредством u обозначено \bar{v} .

Полный поток импульса, переносимого жидкостью через какую-нибудь замкнутую поверхность, охватывающую собой обтекаемое тело, равен взятому по этой поверхности интегралу от тензора потока импульса:

$$\oint \Pi_{ik} df_k.$$

Компоненты тензора Π_{ik} равны:

$$\Pi_{ik} = p \delta_{ik} + \rho (U_i + v_i)(U_k + v_k).$$

Напишем давление в виде $p = p_0 + p'$, где p_0 — давление на бесконечности. Интегрирование постоянного члена $p_0 \delta_{ik} + U_i U_k$ даст в результате нуль, поскольку для замкнутой поверхности векторный интеграл $\oint df = 0$. Обращается в нуль также и интеграл $U_i \oint \rho v_k df_k$; поскольку полное количество жидкости в рассматриваемом объёме остаётся неизменным, полный поток жидкости $\int \rho v df$ через охватывающую его поверхность должен исчезать. Наконец, вдали от тела скорость v мала по сравнению с U . Поэтому, если рассматриваемая поверхность расположена достаточно далеко от тела, то на ней можно пренебречь в Π_{ik} членом $\rho v_i v_k$ по сравнению с $\rho U_k v_i$. Таким образом, полный поток импульса будет равен интегралу

$$\oint (p' \delta_{ik} + \rho U_k v_i) df_k.$$

Выберем теперь в качестве рассматриваемого объёма жидкости объём между двумя поперечными сечениями потока (т. е. бесконечными плоскостями $x = \text{const.}$), из которых одно взято впереди, а другое — позади тела (причём оба — на достаточном расстоянии от тела). При определении полного потока импульса интеграл по бесконечно удалённой «боковой» поверхности исчезает (так как на бесконечности $p' = 0$, $v = 0$) и поэтому достаточно интегрировать только по обоим поперечным плоскостям. Получающийся таким образом поток импульса представляет собой, очевидно, разность между полным потоком импульса, «втекающим» через переднее, и потоком, «вытекающим» через заднее сечение. Но эта разность является в то же время количеством импульса, передаваемым в единицу времени от жидкости к телу, т. е. силой F , действующей на обтекаемое тело.

Таким образом, компоненты силы F равны разностям

$$F_x = \left(\iiint_{x=x_1} - \iiint_{x=x_2} \right) (p' + \rho U v_x) dy dz; \quad F_y = \left(\iiint_{x=x_1} - \iiint_{x=x_2} \right) \rho U v_y dy dz;$$

$$F_z = \left(\iiint_{x=x_1} - \iiint_{x=x_2} \right) \rho U v_z dy dz,$$

где интегрирование производится по бесконечным плоскостям $x = x_1$ и $x = x_2$ (x_1, x_2 — координаты точек значительно позади и значительно впереди тела). Рассмотрим сначала первую из этих величин.

Вне следа движение потенциально, и потому справедливо уравнение Бернулли

$$p + \frac{\rho}{2} (U + v)^2 = \text{const.} \equiv p_0 + \rho \frac{U^2}{2}$$

или, пренебрегая членом $\frac{\rho v^2}{2}$ по сравнению с ρUv ,

$$p' = -\rho Uv_x.$$

Мы видим, что в этом приближении подинтегральное выражение в F_x обращается в нуль во всей области вне следа. Другими словами, интеграл по плоскости $x = x_2$ (проходящей впереди от тела, считая по ходу течения, и не пересекающей следа вовсе) исчезает полностью, а в интеграле по задней плоскости $x = x_1$ достаточно интегрировать лишь по площади S_0 сечения следа. Но внутри следа изменение давления p' — порядка величины ρv^2 , т. е. мало по сравнению с ρUv_x . Таким образом, приходим к окончательному результату, что сила, действующая на тело в направлении обтекания, называемая силой сопротивления, равна

$$F_x = -\rho U \iint_{S_0} u_x dy dz, \quad (30,1)$$

где интегрирование производится по площади поперечного сечения следа вдали от тела (мы интересуемся, конечно, усредненными по времени величинами и потому пишем здесь u_x вместо v_x).

Рассмотрим теперь силу F_y, F_z , стремящуюся сдвинуть тело в поперечном направлении и называемую подъёмной силой. Вне следа, где движение потенциально, можно написать $v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}, v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}$; интеграл по проходящей везде вне следа плоскости $x = x_2$ обращается в нуль:

$$\iint v_y dy dz = \iint \frac{\partial \phi}{\partial y} dy dz = 0, \quad \iint \frac{\partial \phi}{\partial z} dy dz = 0,$$

поскольку на бесконечности $\phi = 0$. Таким образом, для подъёмной силы получаем выражение:

$$F_y = -\rho U \iint u_y dy dz, \quad F_z = -\rho U \iint u_z dy dz, \quad (30,2)$$

где, однако, в противоположность формуле (30,1) интегрирование производится не только по площади сечения следа, а по всей бесконечной плоскости сечения потока позади тела. Если обтекаемое тело обладает осью симметрии (не обязательно полной аксиальной симметрии) и обтекание происходит вдоль направления этой оси, то ось симметрии обладает и движение жидкости вокруг тела. В этом случае подъёмная сила, очевидно, отсутствует.

Рассмотрим теперь турбулентный след на больших (по сравнению с размерами тела) расстояниях и определим его форму¹⁾. Обозначив не-

¹⁾ Эта задача была впервые рассмотрена Шлихтингом (Schlichting).

которую поперечную ширину следа посредством Y , мы определим зависимость Y от x . Если при обтекании тела подъемная сила отсутствует, то на больших расстояниях от тела след обладает аксиальной симметрией и имеет круговое сечение; величиной Y может являться в этом случае диаметр следа. Наличие же подъемной силы приводит к появлению некоторого избранного направления в плоскости y, z , и след уже не будет обладать аксиальной симметрией ни на каких расстояниях от тела.

Продольная компонента скорости жидкости в следе — порядка величины U , а поперечная — порядка некоторого среднего значения u турбулентной скорости. Поэтому угол между линиями тока и осью x — порядка величины отношения $\frac{u}{U}$. С другой стороны, граница следа является, как мы знаем, границей, за которую не выходят линии тока вихревого турбулентного движения. Отсюда следует, что угол наклона линии контура продольного сечения следа к оси x — тоже порядка величины $\frac{u}{U}$. Это значит, что мы можем написать:

$$\frac{dY}{dx} \sim \frac{u}{U}. \quad (30,3)$$

Область интегрирования в (30,1) — порядка величины Y^2 . Поэтому оценка этого интеграла приводит к соотношению

$$F_x \sim \rho U u Y^2 \text{ или } u \sim \frac{F_x}{\rho U Y^2}. \quad (30,4)$$

Подставляя это в (30,3), находим:

$$\frac{dY}{dx} \sim \frac{F_x}{\rho U^2 Y^2},$$

откуда посредством интегрирования:

$$Y \sim \sqrt[3]{\frac{F_x x}{\rho U^2}}. \quad (30,5)$$

Таким образом, ширина следа растёт пропорционально кубическому корню из расстояния от тела. Для скорости u имеем из (30,4) и из (30,5):

$$u \sim \sqrt[3]{\frac{F_x U}{\rho x^2}}. \quad (30,6)$$

т. е. средняя скорость движения жидкости внутри следа падает обратно пропорционально $x^{2/3}$.

Движение жидкости в каждом участке длины следа характеризуется числом Рейнольдса $Re \sim \frac{Y u}{\nu}$. Подставляя (30,5) и (30,6), получаем:

$$Re \sim \frac{F_x}{\nu \rho U} \sim \frac{1}{\nu} \left(\frac{F_x^2}{\rho^2 U x} \right)^{1/3}.$$

Мы видим, что это число не остаётся постоянным вдоль длины следа, в противоположность тому, что мы имели в случае турбулентной струи. На достаточно больших расстояниях от тела Re делается настолько малым, что движение в следе перестают быть турбулентным и становится ламинарным.

Форму этой ламинарной области следа можно определить следующим образом. В уравнении Навье-Стокса член $(\nu \nabla^2) \sigma_x$ имеет для движения в следе порядок величины $(U + u) \frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{Uu}{x}$. Член же $\nu \Delta \sigma_x$ — порядка $\nu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} \sim \frac{\nu u}{Y^2}$ (производные по x малы по сравнению с производными по y , поскольку $x \gg Y$). Сравнивая обе эти величины, имеем $U \frac{u}{x} \sim \frac{\nu u}{Y^2}$, отсюда

$$Y \sim \sqrt{\frac{\nu x}{U}}. \quad (30,7)$$

Таким образом, в ламинарной части следа его ширина пропорциональна квадратному корню из x . Надо, впрочем, иметь в виду, что в ламинарной области не существует никакой резкой границы следа, как в турбулентной области; здесь Y есть просто порядок величины расстояний, на которых скорость заметно падает при удалении от «оси» следа. Для закона спадания скорости с расстоянием от тела получаем в ламинарной области из (30,4) и (30,7):

$$u \sim \frac{F_x}{\rho x}. \quad (30,8)$$

Отметим здесь некоторые общие свойства распределения скоростей вокруг обтекаемого тела. Как внутри турбулентного следа, так и вне его скорость (речь идёт везде о скорости u) падает с увеличением расстояния от тела. При этом, однако, продольная скорость u_x падает вне следа значительно быстрее, чем внутри следа (как $1/x^2$ — см. задачу 1). Поэтому вдали от тела можно считать, что продольная скорость u_x имеется только внутри следа, а вне его $u_x = 0$. Можно сказать, что u_x спадает от некоторого максимального значения на «оси» следа до нуля на его границе. Что же касается поперечных скоростей u_y, u_z , то на границе следа они того же порядка величины, что и внутри него, а при удалении от следа (при неизменном расстоянии от тела) они быстро падают.

Исключением из этого правила является случай широкого и тонкого следа. Такой след получается, например, при обтекании тела, «размах» которого велик по сравнению с остальными его размерами, т. е. при обтекании длинного тела в направлении поперёк его длины; примером является обтекание крыла самолёта. В этом случае скорость в направлении, перпендикулярном плоскости следа, имеет одинаковый порядок величины как внутри следа, так и на значительных (порядка «размаха» крыла) расстояниях от него.

Выберемось u в направлении «размаха» тела (перпендикулярно плоскости чертежа на рис. 13) и рассмотрим вертикальную подъёмную силу F_y ,

развивающуюся при таком обтекании. Поскольку толщина следа (по оси z) мала, а скорость u_z внутри него отнюдь не велика по сравнению с этой же скоростью вне следа, то в рассматриваемом случае можно с достаточной точностью ограничиться при интегрировании по dz в интеграле $F_z = -\rho U \iint u_z dz dy$ интегрированием только по области вне следа, т. е. написать:

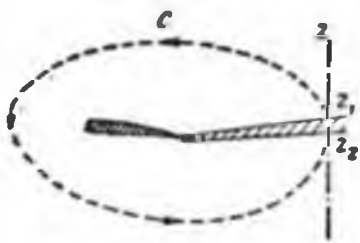


Рис. 13.

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_z dz \approx \int_{z_1}^{\infty} u_z dz + \int_{-\infty}^{z_2} u_z dz,$$

где z_1 и z_2 — координаты границ следа.

Но вне следа движение потенциально и $u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$; имея в виду, что на бесконечности $\varphi = 0$, получаем поэтому:

$$\int u_z dz = \varphi_2 - \varphi_1,$$

где φ_1 и φ_2 — значения потенциала на обеих поверхностях следа; можно сказать, что $\varphi_2 - \varphi_1$ есть скачок потенциала при прохождении через след. Таким образом, получаем для подъемной силы следующую формулу:

$$F_z = \rho U \int (\varphi_1 - \varphi_2) dy. \quad (30,9)$$

Интегрирование по dy распространяется, очевидно, фактически лишь по ширине следа (вне следа, конечно, $\varphi_1 - \varphi_2 \equiv 0$).

Эту формулу можно представить в несколько ином виде. Для этого замечаем, что по известным свойствам интегралов от градиента скаляра можно написать разность $\varphi_2 - \varphi_1$ в виде криволинейного интеграла $\int \nabla \varphi dl = \int (a_y dy + u_z dz)$, взятому по контуру, выходящему из точки z_1 , огибающему тело и приходящему в точку z_2 , проходя, таким образом, везде в области потенциального движения. А благодаря тонкости следа можно, не изменяя интеграла с точностью до малых величин высшего порядка, дополнить этот длинный контур коротким отрезком от z_1 до z_2 , превратив его таким образом в замкнутый. Обозначая посредством Γ циркуляцию скорости по замкнутому контуру C , охватывающему тело (рис. 13):

$$\Gamma = \oint_C u dl = \varphi_2 - \varphi_1, \quad (30,10)$$

получаем для подъемной силы формулу

$$F_z = -\rho U \int \Gamma dy, \quad (30,11)$$

называемую формулой Кутты (Kutta)-Жуковского.

Задачи

1. Определять движение жидкости вне турбулентного следа (на больших расстояниях от тела) в случае отсутствия подъемной силы.

Решение. Поляный поток жидкости через сферу S большого радиуса с центром в месте вхождения тела (как и через всякую другую замкнутую

поверхность) должен быть равен нулю. Но через часть S_0 этой сферы, являющуюся площадью сечения следа, втекает количество жидкости $-\int_{S_0} u_x dy dz = -\frac{F_x}{\rho U}$. Поэтому через всю остальную площадь сферы должно вытекать столько же жидкости, т. е. должно быть $\int_{S-S_0} u dt = \frac{F_x}{\rho U}$.

В силу малости S_0 по сравнению со всей площадью S , можно заменить это условие требованием

$$\int_S u dt = \int_S \nabla_T dt = \frac{F_x}{\rho U}$$

(вне следа движение потенциально). Удовлетворяющее этому условию решение уравнения Лапласа $\Delta \varphi = 0$ для потенциала φ средней скорости v есть (r — расстояние от тела):

$$\varphi = -\frac{F_x}{4\pi\rho U} \frac{1}{r}; \quad v = \frac{F_x}{4\pi\rho U} \frac{r}{r^3}.$$

Таким образом, распределение скорости вне следа вдали от тела оказывается сферически симметричным, причём скорость падает как $\frac{1}{r^2}$.

2. Определить движение в ламинарной области следа (при наличии как силы сопротивления, так и пограничной силы).

Решение. Написав в уравнении Навье-Стокса скорость в виде $v + U$ и опуская (вдали от тела!) квадратичные по u члены, получаем:

$$U \frac{\partial v}{\partial x} = -\nabla \frac{p}{\rho} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

(мы пренебрегли также в Δv членом $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$). Ищем решение в виде $v = v_1 + v_2$, где v_1 есть решение уравнения

$$U \frac{\partial v_1}{\partial x} = \nu \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} \right).$$

Величину же v_2 , связанную с наличием члена $-\nabla \frac{p}{\rho}$ в исходном уравнении, можно искать в виде градиента $\nabla \phi$ от некоторого скаляра. Поскольку вдали от тела производные по x малы по сравнению с производными по y и z , то, в рассматриваемом приближении, в u_x надо пренебречь членом $\frac{\partial \phi}{\partial x}$, т. е. считать $u_x = u_{1,x}$.

Таким образом, для u_x имеем уравнение

$$U \frac{\partial u_x}{\partial x} = \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right).$$

Это уравнение формально совпадает с двумерным уравнением теплопроводности, причём роль времени играет $\frac{x}{U}$, а роль коэффициента температуропроводности — вязкость ν . Решение, спадающее с y и z (при заданном x), а в пределе при $x \rightarrow 0$ приводящее к бесконечно малой ширине следа (в рассматриваемом приближении расстояния порядка размеров тела считаются малыми), есть (см. § 41) $\text{const.} \frac{1}{x} e^{-\frac{U}{4\nu} \frac{y^2+z^2}{x}}$. Постоянная определяется из усло-

вия $\iint_{\Sigma} u_x dy dz = -\frac{F_x}{\rho U}$, причём ввиду быстрого спада u_x с y и z можно распространить интегрирование до $\pm \infty$. В результате получаем:

$$u_x = -\frac{F_x}{4\pi\rho U} \frac{1}{x} e^{-\frac{U}{4\nu} \frac{y^2+z^2}{x}}. \quad (1)$$

Качественные результаты (30,7) — (30,8) находятся, как и должно было быть, в согласии с этой формулой.

Такой же вид, как (1), должны иметь также u_{1y} , u_{1z} . Выберем направление подъемной силы в качестве оси z (так что $F_y = 0$). Согласно (30,2) в замечая, что на бесконечности $\phi = 0$, имеем:

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} u_z dy dz = \iint (u_{1z} + \frac{\partial \phi}{\partial z}) dy dz = \iint u_{1z} dy dz = -\frac{F_z}{\rho U}; \quad \iint u_{1y} dy dz = 0.$$

Определяя из этих условий const. в u_{1y} , u_{1z} , получаем:

$$u_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad u_z = -\frac{F_z}{4\pi\rho U} \frac{1}{x} e^{-\frac{U}{4\nu} \frac{y^2+z^2}{x}} + \frac{\partial \phi}{\partial z}.$$

Для определения функции ϕ поступаем следующим образом. Согласно уравнению непрерывности $\operatorname{div} u \approx \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$; подставляя (2), получаем:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi = -\frac{\partial u_{1z}}{\partial z}. \quad (2)$$

Продифференцировав это равенство по x и воспользовавшись уравнением, которому удовлетворяет u_{1z} , получаем:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_{1z}}{\partial x} \right) = -\frac{\nu}{U} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{\partial u_{1z}}{\partial z}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\nu}{U} \frac{\partial u_{1z}}{\partial z}.$$

Наконец, подставляя выражение для u_{1z} и интегрируя по x , получаем окончательно:

$$\phi = -\frac{F_z}{2\pi\rho U} \frac{z}{y^2+z^2} \left[e^{-\frac{U}{4\nu} \frac{y^2+z^2}{x}} - 1 \right] \quad (3)$$

(постоянная интегрирования выбрана так, чтобы ϕ оставалось конечным при $y=z=0$). Из (2) — (3) видно, что u_y и u_z содержат, в отличие от u_x , наряду с членами, экспоненциально падающими с y и z (при данном x), также и члены, значительно медленнее убывающие при удалении от «оси» следа (как $\frac{1}{y^2+z^2}$).

В. Воспользовавшись результатами задачи 2, определить движение вне следа (вдали от тела) при наличии подъемной силы.

Решение. Полученные в задаче 2 формулы (1) — (3) выведены в предположении $x \gg \sqrt{y^2+z^2}$. Поэтому при $x \gg \sqrt{y^2+z^2}$ искомое решение, описывающее движение во всей области вне следа (вдаль и от тела), должно плавно смыкаться с формулами (1) — (3). В выражении (3) в области «вне следа»

(т. е. при $y^2 + z^2 \gg x^2/U$) можно пренебречь экспоненциальным членом, а (1) обращается в том же приближении в нуль. Другими словами, получается потенциальное движение с потенциалом

$$\Phi = \psi = \frac{F_x}{2\pi\rho U} \frac{z}{y^2 + z^2}$$

(потенциал обозначается здесь посредством Φ в отличие от угла φ сферических координат, которыми мы пользуемся ниже). Вводим сферические координаты r, θ, φ с началом в месте нахождения тела, полярной осью по оси x и углом φ , отсчитываемым от плоскости x, z . Замечая, что $x \gg \sqrt{y^2 + z^2}$ означает в этих координатах $\theta \ll 1$, мы можем сформулировать полученное условие как требование, чтобы искомый потенциал $\Phi(r, \theta, \varphi)$ движения вне следа (при больших r) переходил при $\theta \rightarrow 0$ в

$$\Phi = \frac{F_x}{2\pi\rho U} \frac{\cos\varphi}{r}.$$

Соответственно этому ищем решение уравнения Лапласа

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} = 0$$

в виде $\Phi = \frac{\cos\varphi}{r} f(\theta)$ и получаем для $f(\theta)$ уравнение:

$$\frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{df}{d\theta} \right) - \frac{f}{\sin\theta} = 0,$$

откуда

$$f = \frac{a + b \cos\theta}{\sin\theta}.$$

Выбирая a и b так, чтобы было $f = \frac{F_x}{2\pi\rho U} \frac{1}{\theta}$ при $\theta \rightarrow 0$ и f конечно при $\theta \rightarrow \pi$, получаем:

$$\Phi = \frac{F_x}{2\pi\rho U} \frac{\cos\varphi}{r} \frac{1 + \cos\theta}{2 \sin\theta} = \frac{F_x}{2\pi\rho U} \frac{\cos\varphi}{r} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}.$$

В таком виде, однако, Φ не удовлетворяет другому необходимому условию: $\iint u_x r^2 \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{F_x}{\rho U}$ (см. задачу 1). Общим условиям удовлетворяет сумма решений уравнения Лапласа, найденных здесь и в задаче 1:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\rho U r} \left(-F_x + 2F_x \cos\varphi \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \right),$$

чем и определяется движение во всей области вне следа (вдали от тела). Можно показать, что эта формула относится к области вокруг как ламинарного, так и турбулентного следа.

4. Определить форму турбулентного следа, образующегося при обтекании бесконечно длинного цилиндра в направлении поперёк его длины.

Решение. Выбираем ось x по направлению обтекания, а ось y — по направлению оси цилиндра. Для силы сопротивления f_x , отнесённой к единице длины цилиндра, имеем по порядку величины $f_x \sim \rho U u Z$. Комбинируя это с соотношением (30,3), получаем для ширины следа Z :

$$Z \sim \sqrt{\frac{x f_x}{\rho U^3}}.$$

Средняя скорость u в следе падает по закону $u \sim \sqrt{\frac{f_x}{\rho x}}$. Число Рейнольдса $Re \sim \frac{Zu}{\nu} \sim \frac{f_x}{\rho U}$ не зависит от x и потому ламинарного участка след не имеет.

5. Определить движение вне следа, образующегося при обтекании бесконечно длинного тела в направлении, перпендикулярном его образующей (оси y).

Решение. Подобно тому, как было сделано в решении задачи 1, заключаем, что должно быть $\int u \, dl = \int \Gamma \Phi \, dl = \frac{f_x}{2\rho}$, где теперь интегрирование производится по поверхности цилиндра большого радиуса с осью вдоль оси y и длиной, равной единице, а f_x есть сила сопротивления, отнесенная к единице длины тела. Удовлетворяющее этому условию решение двумерного уравнения Лапласа $\Delta \Phi = 0$ есть (r — расстояние от оси y): $\Phi = \frac{f_x}{2\rho U} \ln r$. Далее, для подъемной силы имеем согласно формуле (30.9) $f_z = \rho U (\Phi_1 - \Phi_2)$. Наиболее быстро убывающим с расстоянием решением уравнения Лапласа, испытывающим скачок на плоскости $\varphi = 0$ (φ — угол в цилиндрической системе координат с осью вдоль оси y) является $\Phi = \cos \varphi$; поскольку $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi$, то $\Phi = -\frac{f_z}{2\rho U} \varphi$. Движение жидкости определяется суммой обеих найденных решений, т. е.

$$\Phi = \frac{1}{2\rho U} (f_x \ln r - f_z \varphi).$$

Цилиндрические компоненты скорости u равны:

$$u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{f_x}{2\rho U} \frac{1}{r}, \quad u_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = -\frac{f_z}{2\rho U} \frac{1}{r}.$$

Скорость u образует с цилиндрическим радиус-вектором постоянный угол, тангенс которого равен $\frac{f_z}{f_x}$.

§ 31. Изотропная турбулентность

Очень своеобразным случаем турбулентного движения является движение, возникающее в потоке жидкости после его прохождения через решётку — экран с большим числом регулярно расположенных отверстий. Будем опять обозначать скорость основного потока посредством U (и выберем ось x в направлении U), а истинную скорость будем писать в виде суммы $U + v$, так что v есть скорость интересующего нас турбулентного движения. Если ввести систему отсчёта, движущуюся со скоростью U , то относительно такой системы жидкость совершает турбулентное движение со скоростью v .

По мере удаления от решётки усреднённое турбулентное движение (со скоростью $u = v$) затухает быстрее, чем пульсационное. Это связано с тем, что усреднённое движение обладает масштабами порядка размеров a отверстий решётки, которые, как мы увидим ниже, малы по сравнению с масштабами пульсационного движения. В результате на достаточно больших расстояниях x от решётки усреднённая скорость u

¹⁾ Пользоваться формулой (30,2) при обтекании бесконечно длинного тела нельзя, в связи с тем, что потенциал Φ не обращается здесь в нуль на бесконечности.

практически равна нулю и турбулентная скорость v является чисто пульсационной. На этих расстояниях турбулентное движение можно практически считать полностью изотропным (в участках, размеры которых малы по сравнению с x , но не обязательно малы по сравнению с основным масштабом турбулентности).

Дальнейшее исследование изотропной турбулентности основано на некотором законе сохранения ¹⁾, который оказывается имеющим место для турбулентного движения с равной нулю усредненной скоростью. Этот закон является следствием закона сохранения момента импульса и может быть выведен следующим образом.

Для удобства вывода предположим, что жидкость находится в сосуде большого, но конечного объема. Легко видеть, что полный импульс этой жидкости равен нулю. Действительно, компоненты вектора полного импульса равны интегралам

$$\rho \int v_i dV,$$

взятым по всему объему жидкости. Имеем тождественно:

$$\int v_i dV = \int \frac{\partial}{\partial x_k} (v_i x_k) dV - \int x_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dV.$$

Первый интеграл, будучи преобразован в поверхностный согласно теореме Гаусса, исчезает, поскольку на ограничивающих жидкость стенках сосуда нормальная компонента скорости равна нулю, так что $v_k df_k = (v \cdot n) df = 0$ (n — нормаль к поверхности). Второй интеграл равен нулю в силу несжимаемости жидкости ($\text{div } v = 0$).

Тензор же M_{ik} полного момента импульса отнюдь не равен нулю. Согласно общему определению имеем:

$$M_{ik} = \rho \int (x_i v_k - x_k v_i) dV.$$

Далее пишем:

$$\int x_k v_i dV = \int \frac{\partial}{\partial x_i} (x_i x_k v_i) dV - \int x_i x_k \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dV - \int x_i v_k dV.$$

Первый интеграл справа опять исчезает, будучи преобразован по теореме Гаусса, а второй — в силу несжимаемости жидкости. Таким образом,

$$\int x_k v_i dV = - \int x_i v_k dV,$$

и мы можем переписать M_{ik} в виде

$$M_{ik} = 2\rho \int x_i v_k dV.$$

Сумма квадратов компонент тензора M_{ik} равна удвоенному квадрату абсолютной величины вектора момента $M = \rho \int [rv] dV$. Поэтому

¹⁾ Найденном Л. Г. Лойцянским.

имеем:

$$\frac{M^2}{\rho^2} = 2 \left\{ \int x_i v_k dV \right\}^2.$$

Квадрат интеграла можно написать в виде двойного интеграла:

$$\frac{M^2}{\rho^2} = 2 \iint x_i x'_i v_k v'_k dV dV'.$$

Наконец, замечаем, что это выражение можно окончательно переписать в виде

$$\frac{M^2}{\rho^2} = - \iint (x_i - x'_i)^2 v_k v'_k dV dV' \quad (31,1)$$

(интегралы, содержащие квадраты x_i^2 и x'^2_i , исчезают, поскольку

$$\iint x_i^2 v_k v'_k dV dV' = \int x_i^2 v_k dV \int v'_k dV',$$

а $\int v'_k dV' = 0$, как было показано выше). В силу закона сохранения момента импульса полученный интеграл должен представлять собой не зависящую от времени постоянную.

Пусть l есть основной масштаб турбулентности; мы предполагаем, что он мал по сравнению с размерами L всей области движения (т. е. области, в которой подинтегральное выражение в (31,1) заметно отличается от нуля), которые рассматриваются как сколь угодно большие. Множитель $v_k v'_k$ под интегралом в (31,1) представляет собой произведение скоростей в двух точках с координатами x_i и x'_i , находящихся на расстоянии $r = \sqrt{(x_i - x'_i)^2}$ друг от друга. Усредним это произведение по всем положениям точек x_i и x'_i (при заданном r) внутри областей, размеры которых велики по сравнению с l , но малы по сравнению с L ; такое усреднение обозначаем посредством двойной черты. Величина $\overline{v v'}$ является, очевидно, функцией только от r , причём функцией плавной. Она быстро падает с увеличением r , поскольку скорости турбулентного движения в двух точках, находящихся на большом расстоянии друг от друга, можно считать статистически независимыми; среднее значение их произведения разбивается тогда на произведение средних значений каждой в отдельности, которые исчезают (поскольку мы рассматриваем здесь турбулентное движение, в котором усреднённое движение отсутствует).

Произведя под интегралом в (31,1) такое усреднение, получим M^2 в виде

$$M^2 = \rho^2 \int f dV; \quad f = - \int (\overline{v v'}) r^2 dV'. \quad (31,2)$$

Подинтегральное выражение в f быстро падает с увеличением r , так что интеграл сходится (это значит, что при стремлении L к бесконечности f остаётся конечным). Интеграл же $\int f dV$ растёт при увеличении объёма движущейся жидкости пропорционально этому объёму. Отметим, что момент количества движения оказывается, таким образом, растущим

как квадратный корень из объема движущейся жидкости, а не как сам этот объем. Это связано с тем обстоятельством, что при исчезающей во всем объеме жидкости средней скорости равны нулю также и средние значения момента импульса жидкости в отдельных участках (размеры которых велики по сравнению с l и малы по сравнению с L), причём сами эти моменты различных участков статистически независимы. С другой стороны, среднее значение квадрата величины (в данном случае — полного момента), являющейся суммой большого числа статистически независимых слагаемых (моментов отдельных участков) с равными нулю средними значениями, как известно из статистики, пропорционально первой степени числа этих слагаемых.

Величина f является во всякий момент времени плавной функцией координат, испытывающей заметное изменение лишь на расстояниях, сравнимых с размерами L . С другой стороны, интеграл $\int f dV$ должен сохраняться, и потому изменение функции f в некоторой точке пространства со временем должно сопровождаться её изменением и в остальном пространстве. В силу этого ясно, что f может испытать в каждой данной точке заметное изменение лишь в течение промежутка времени, пропорционального размерам L всей области движения. Такие промежутки должны рассматриваться вместе с L как сколь угодно большие, а в течение малых по сравнению с ними интервалов времени величина f может считаться постоянной. Таким образом, мы получаем в каждой точке пространства следующий закон сохранения:

$$\int (\overline{vv'}) r^2 dV = \text{const.} \quad (31,3)$$

Вернёмся теперь к изотропной турбулентности в потоке, прошедшем через решётку. Для того, чтобы применить к ней результат (31,3), надо, очевидно, рассматривать движение в системе отсчёта, движущейся со скоростью U вместе с основным потоком. В этой системе отсчёта движение затухает со временем; в исходной системе этому соответствует затухание турбулентности с увеличением расстояния от решётки.

В интеграле (31,3) подинтегральное выражение заметно отлично от нуля в области размеров порядка основного масштаба l турбулентного движения (объем этой области $\sim l^3$) и имеет в ней порядок величины $v^2 l^3$. Поэтому из (31,3) получаем соотношение

$$v^2 l^3 = \text{const.} \quad (31,4)$$

Далее оценим производную по времени от кинетической энергии единицы объема жидкости. С одной стороны, её можно написать, по порядку величины, как $\frac{v^2}{l}$. С другой стороны, она должна быть равна энергии ϵ , диссипируемой в единицу времени в том же объеме. Согласно формуле (25,1) $\epsilon \sim \frac{v^3}{l}$ (роль характерной для турбулентности скорости играет теперь v). Сравнивая оба эти выражения, находим:

$$l \sim v. \quad (31,5)$$

Подставляя (31,5) в (31,4), находим, что

$$v = \frac{\text{const.}}{l^{2/3}}. \quad (31,6)$$

Таким образом, скорость изотропного турбулентного движения затухает со временем обратно пропорционально $l^{2/3}$. Для l имеем:

$$l = \text{const. } t^{3/2}, \quad (31,7)$$

т. е. основной масштаб турбулентности растёт пропорционально $t^{3/2}$.

Возвращаясь теперь к исходной неподвижной системе координат, мы должны, очевидно, заменить время t на $\frac{x}{U}$. (31,7) даёт тогда $l = \text{const. } x^{3/2}$; постоянную здесь можно оценить из следующих соображений. На расстояниях от решётки порядка величины a её отверстий, масштаб l должен быть порядка этой же величины a . Поэтому можно написать:

$$l \sim a \left(\frac{x}{a} \right)^{2/3}. \quad (31,8)$$

Для скорости имеем согласно (31,5) $v \sim \frac{l}{x} U$, откуда

$$v \sim U \left(\frac{a}{x} \right)^{5/3}. \quad (31,9)$$

Полученные формулы определяют закон изменения масштаба и скорости турбулентного движения по мере удаления от решётки.

Задача

Определить закон затухания изотропного турбулентного движения в последних стадиях этого затухания, когда влияние вязкости жидкости делается преобладающим.

Решение. Согласно (31,6) — (31,7) число Рейнольдса $Re \sim \frac{vl}{\nu}$ падает со временем как $t^{-1/2}$, и при достаточно больших t делается настолько малым, что вязкость начинает играть существенную роль. Диссипируемая энергия определяется тогда, с одной стороны, обычной формулой (14,3), согласно которой $\epsilon = \frac{\rho}{2} \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right|^2$; по порядку величины эта формула даёт $\epsilon \sim \frac{\rho v^3}{l}$.

С другой стороны, $\epsilon \sim \frac{\rho v^3}{l}$. Сравнивая оба выражения, получаем:

$$l \sim \nu \cdot t$$

С помощью (31,4) получаем теперь:

$$v = \frac{\text{const.}}{l^{2/3}}.$$

1) Этот результат получен Колмогоровым.

ГЛАВА IV

ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

§ 32. Ламинарный пограничный слой

Мы уже неоднократно ссылались на то обстоятельство, что очень большие числа Рейнольдса эквивалентны очень малой вязкости, в результате чего жидкость может рассматриваться при таких Re как идеальная. Однако, такое приближение во всяком случае непригодно для движения жидкости вблизи твёрдых стенок. Граничные условия для идеальной жидкости требуют лишь исчезновения нормальной составляющей скорости; касательная же к поверхности обтекаемого тела компонента скорости остаётся, вообще говоря, конечной. Между тем, у всякой реальной жидкости скорость на твёрдых стенках должна обращаться в нуль.

Отсюда можно сделать вывод, что при больших числах Рейнольдса падение скорости до нуля будет происходить почти полностью в тонком пристеночном слое жидкости. Этот слой носит название пограничного и характеризуется, следовательно, наличием в нём значительных градиентов скорости. Движение в пограничном слое может быть как ламинарным, так и турбулентным. Здесь мы рассмотрим свойства ламинарного пограничного слоя. Граница этого слоя не является, конечно, резкой, и переход между ламинарным движением в нём и в основном потоке жидкости происходит непрерывным образом.

Падение скорости в пограничном слое обусловливается в конечном итоге вязкостью жидкости, которой нельзя пренебречь здесь, несмотря на большие значения Re . Математически это проявляется в том, что градиенты скорости в пограничном слое велики и потому вязкие члены в уравнениях движения, содержащие производные от скорости по координатам, велики, несмотря на малость ν .

Выведем уравнения движения жидкости в ламинарном пограничном слое (эти уравнения были впервые получены Прандтлем, L. Prandtl). Для простоты вывода рассмотрим двухмерное обтекание жидкостью плоского участка поверхности тела. Эту плоскость выберем в качестве плоскости x, z , причём ось x направлена по направлению обтекания. Распределение скорости не зависит от координаты z ; z -компонента скорости отсутствует.

Точные гидродинамические уравнения Навье-Стокса и уравнение непрерывности, написанные в компонентах, принимают вид:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right), \quad (32,1)$$

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right), \quad (32,2)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (32,3)$$

Движение предполагается стационарным, и потому производных по времени мы не пишем.

Вдоль направления оси y скорость меняется быстро — заметное изменение её происходит на расстояниях порядка толщины δ пограничного слоя. В направлении же оси x скорость меняется медленно; заметное изменение её происходит здесь на протяжении расстояний порядка характеристической длины l задачи (скажем, размеров тела). Поэтому производные по y велики по сравнению с производными по x (от той же величины). Далее, ввиду тонкости пограничного слоя ясно, что движение в нём будет происходить в основном параллельно обтекаемой поверхности, т. е. скорость v_y будет мала по сравнению с v_x (это видно, например, уже непосредственно из уравнения непрерывности). Из сказанного следует, что в уравнении (32,1) можно пренебречь производной $\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}$ по сравнению с $\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$, а сравнивая первое уравнение со вторым, мы видим, что производная $\frac{\partial p}{\partial y}$ мала по сравнению с $\frac{\partial p}{\partial x}$ (по порядку величины — в отношении $\frac{v_y}{v_x}$). В рассматриваемом приближении мы можем положить просто

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (32,4)$$

т. е. можно считать, что в пограничном слое нет поперечного градиента давления. Другими словами, давление в пограничном слое равно давлению $p(x)$, имеющемуся в основном потоке жидкости и являющемуся при решении задачи о пограничном слое заданной функцией от x . В уравнении (32,1) мы можем теперь написать вместо $\frac{\partial p}{\partial x}$ полную производную $\frac{dp(x)}{dx}$; эту производную можно выразить с помощью скорости и $U(x)$ основного потока. Поскольку вне пограничного слоя движение потенциально, то имеет место уравнение Бернулли

$$p + \frac{\rho U^2}{2} = \text{const.}, \quad \text{откуда} \quad \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = -U \frac{dU}{dx}.$$

Таким образом, мы получаем систему уравнений движения в ламинарном пограничном слое в виде

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = U \frac{dU}{dx}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (32,5)$$

Можно легко показать, что эти уравнения (выведенные для обтекания плоской стенки) остаются справедливыми и в более общем случае произвольного двумерного обтекания тела (поперечное обтекание бесконечно длинного цилиндра произвольного сечения). При этом x есть расстояние, отсчитываемое по длине линии контура поперечного сечения тела от некоторой его точки, а y — расстояние от поверхности тела (по нормали к ней).

Пусть U_0 есть характеристическая скорость данной задачи (например, скорость (на бесконечности) натекающего на тело потока жидкости),

Введём вместо координат x, y и скоростей v_x, v_y безразмерные переменные x', y', v'_x, v'_y согласно определениям:

$$x = lx', \quad y = \frac{ly'}{\sqrt{Re}}, \quad v_x = U_0 v'_x, \quad v_y = \frac{U_0 v'_y}{\sqrt{Re}} \quad (32,6)$$

(и соответственно полагаем $U = U_0 U'$), где $Re = \frac{U_0 l}{\nu}$. Тогда уравнения (32,5) принимают вид

$$v'_x \frac{\partial v'_x}{\partial x'} + v'_y \frac{\partial v'_x}{\partial y'} - \frac{\partial^2 v'_x}{\partial y'^2} = U' \frac{dU'}{dx'}, \quad \frac{\partial v'_x}{\partial x'} + \frac{\partial v'_y}{\partial y'} = 0. \quad (32,7)$$

Эти уравнения (а также и граничные условия к ним) не содержат вязкости. Это значит, что их решения не зависят от числа Рейнольдса. Таким образом, мы приходим к важному результату: при изменении числа Рейнольдса вся картина движения в пограничном слое подвергается лишь подобному преобразованию, при котором продольные расстояния и скорости остаются неизменными, а поперечные меняются обратно пропорционально корню из Re .

Далее, мы можем утверждать, что получающиеся в результате решения уравнений (32,7) безразмерные «скорости» v'_x, v'_y , как не зависящие от Re , должны быть порядка величины единицы; то же самое относится и к «толщине пограничного слоя» δ в координатах x', y' . Из формул (32,6) можно, следовательно, заключить, что

$$v_y \sim \frac{U_0}{\sqrt{Re}}, \quad (32,8)$$

т. е. отношение поперечной скорости к продольной обратно пропорционально \sqrt{Re} , и

$$\delta \sim \frac{l}{\sqrt{Re}}, \quad (32,9)$$

т. е. толщина пограничного слоя падает с увеличением числа Рейнольдса, как $Re^{-\frac{1}{2}}$.

Применим уравнения пограничного слоя к обтеканию плоской пластинки плоско-параллельным потоком жидкости. Пусть плоскость пластинки совпадает с полуплоскостью x, z , соответствующей положительным x (так что передним краем пластинки является линия $x=0$). Длину пластинки в положительном направлении оси x предполагаем бесконечной. Скорость основного потока в этом случае, очевидно, постоянна: $U = \text{const}$. Уравнения (32,5) принимают вид

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (32,10)$$

Граничные условия на поверхности пластинки требуют обращения в нуль обеих компонент скорости:

$$v_x = v_y = 0 \quad \text{при} \quad x \geq 0, \quad y = 0.$$

При удалении же от пластинки скорость должна асимптотически приближаться к скорости U натекания жидкости на пластинку, т. е.

$$v_x = U \text{ при } y \rightarrow \pm \infty.$$

В решении уравнений пограничного слоя $\frac{v_x}{U}$ и $v_y \sqrt{\frac{l}{U}}$ могут быть, как мы видели, функциями только от $x' = \frac{x}{l}$ и $y' = y \sqrt{\frac{U}{l}}$. Но в рассматриваемой задаче о бесконечной пластинке нет никаких характеристических параметров длины l . Поэтому $\frac{v_x}{U}$ может зависеть только от такой комбинации x' и y' , которая бы не содержала l ; таковой является $\frac{y'}{\sqrt{x'}} = \frac{y}{\sqrt{x}} \sqrt{\frac{U}{\nu}}$. Что же касается v_y , то здесь функцией от $\frac{y'}{\sqrt{x'}}$ должно быть произведение $v_y' \sqrt{x'}$. Таким образом, можно искать решение в виде

$$v_x = U f\left(y \sqrt{\frac{U}{\nu x}}\right), \quad v_y = \frac{\sqrt{U \nu}}{\sqrt{x}} f_1\left(y \sqrt{\frac{U}{\nu x}}\right), \quad (32,11)$$

где f, f_1 — некоторые безразмерные функции. С помощью второго из уравнений (32,10) можно выразить f_1 через f . Таким образом, задача сводится к определению всего одной функции f от одной переменной $\xi = y \sqrt{\frac{U}{\nu x}}$.

Ниже мы будем интересоваться только распределением продольной скорости v_x (поскольку v_y мало). Уже из формулы (32,11) с неопределенной пока функцией f можно сделать следующий существенный вывод. Скорость v_x возрастает от нуля на поверхности пластинки до определенной доли U при определенном значении аргумента функции f , т. е. при $\frac{y \sqrt{U}}{\sqrt{\nu x}} = \text{const.}$, где const. есть некоторое число. Поэтому мы можем заключить, что «толщина» пограничного слоя на обтекаемой пластинке — порядка величины

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\nu x}{U}}. \quad (32,12)$$

Таким образом, по мере удаления от края пластинки δ расстёт пропорционально квадратному корню из расстояния до этого края.

1) Легко найти, что если ввести функцию $\varphi(\xi)$ такую, что $f(\xi) = \varphi'(\xi)$, то

$$f_1(\xi) = \frac{1}{2} (\xi \varphi' - \varphi),$$

а φ удовлетворяет уравнению

$$\varphi \varphi'' + 2\varphi'^2 = 0$$

с условиями: $\varphi = 0, \varphi' = 0$ при $\xi = 0$ и $\varphi' = 1$ при $\xi = \infty$.

Функцию f можно определить посредством численного интегрирования соответствующего уравнения. График этой функции изображён на рис. 14. Мы видим, что f весьма быстро стремится к своему предельному значению 1¹⁾.

Сила трения, действующая на единицу площади поверхности пластинки, равна

$$\sigma_{xy} = \eta \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{y=0}$$

Численное вычисление даёт:

$$\sigma_{xy} = 0,332 \sqrt{\frac{\eta \rho U^3}{x}}. \quad (32,13)$$

Если пластинка имеет длину l (вдоль оси x), то полная действующая на неё сила трения (отнесённая к единице длины пластинки в поперечном — вдоль оси z — направлении) равна

$$F = 2 \int_0^l \sigma_{xy} dx.$$

Множитель 2 учитывает наличие у пластинки двух сторон, омываемых жидкостью. Подстановка (32,13) даёт²⁾:

$$F = 1,328 \sqrt{\eta \rho l U^3}. \quad (32,14)$$

Отметим, что сила трения оказывается пропорциональной полуторной степени скорости натекающего потока. Формула (32,14) может применяться только для достаточно длинных пластинок, для которых число Рейнольдса $Re = \frac{Ul}{\nu}$ достаточно велико. Вместо силы обычно вводят так называемый коэффициент сопротивления, определяемый как безразмерное отношение

$$C = \frac{F}{\frac{1}{2} \rho U^2 \cdot 2l}. \quad (32,15)$$

Согласно (32,14) эта величина при ламинарном обтекании пластинки обратно пропорциональна квадратному корню из числа Рейнольдса:

$$C = \frac{1,328}{\sqrt{Re}}. \quad (32,16)$$

Полученные здесь количественные формулы относятся, конечно, только к обтеканию плоской пластинки. Качественные же результаты

¹⁾ Если определить δ как расстояние, на котором $v_x = 0,99 U$, то $\delta = 5,2 \sqrt{\nu x / U}$.

²⁾ Эта формула получена Блазиусом (Blasius).

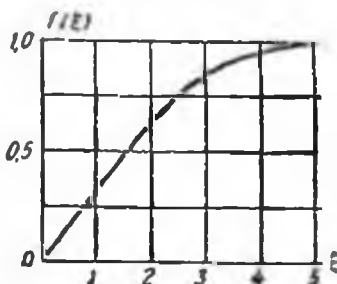


Рис. 14.

[например, (32,8) — (32,9)] имеют место и при обтекании тела произвольной формы; при этом под l надо понимать размеры тела в направлении обтекания.

Упомянем особо о следующих двух случаях пограничного слоя. Если мы имеем плоский диск (большого радиуса), вращающийся в жидкости вокруг оси, перпендикулярной его плоскости, то для оценки толщины пограничного слоя надо подставить в (32,12) Ωx вместо U (Ω — угловая скорость вращения). Тогда находим:

$$\delta \sim \sqrt{\frac{x}{\Omega}}. \quad (32,17)$$

Мы видим, что толщину пограничного слоя можно считать постоянной вдоль поверхности диска. Что касается действующего на диск момента сил трения, то расчёт с помощью уравнений пограничного слоя приводит, конечно, к формуле (19,4), поскольку эта формула является вообще точной и потому относится к ламинарному движению при любых Re .

Наконец, остановимся на ламинарном пограничном слое, возникающем на стенках трубы вблизи места входа жидкости в неё. Жидкость вступает в трубу обычно с распределением скоростей, почти постоянным по всему поперечному сечению, и падение скорости происходит только в пограничном слое. По мере удаления от входа начинают тормозиться слои жидкости всё ближе к оси трубы. Поскольку количество протекающей жидкости должно оставаться постоянным, то наряду с уменьшением диаметра внутренней части течения (с почти постоянным профилем скоростей) происходит одновременное его ускорение. Так продолжается до тех пор, пока асимптотически не устанавливается параболическое распределение скоростей, которое, таким образом, имеет место только на достаточно большом расстоянии от входа трубы. Легко определить порядок величины длины l этого так называемого начального участка течения. Он определяется тем, что на расстоянии l от входа толщина пограничного слоя делается порядка величины радиуса a трубы, так что пограничный слой как бы заполняет собой всё сечение. Полагая в (32,12) $x \sim l$ и $\delta \sim a$, получим:

$$l \sim \frac{a^2 U}{\nu} \sim a Re. \quad (32,18)$$

Таким образом, длина начального участка пропорциональна числу Рейнольдса.

Задачи

1. Определить толщину пограничного слоя вблизи критической точки (см. § 9) на обтекаемом жидкостью теле.

Решение. Вблизи точки остановки скорость жидкости (вне пограничного слоя) является линейной функцией расстояния x от этой точки, так что можно написать $U = ax$. Оценка членов уравнений (32,5) приводит к выражению

$$l \sim \sqrt{\frac{x}{a}}.$$

Таким образом, вблизи критической точки толщина пограничного слоя остаётся конечной (и, в частности, не обращается в нуль в самой критической точке).

2. Определить движение в пограничном слое при конфузормом (см. § 19) течении между двумя непараллельными плоскостями¹⁾.

Решение. Рассматривая пограничный слой, образующийся вдоль одной из сторон угла, отсчитываем координату x вдоль этой стороны от точки O (рис. 7). Для течения идеальной жидкости мы имели бы для скорости выражение $U = \frac{Q}{2x\rho}$; соответствующий градиент давления равен согласно

формуле Бернулли

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = -\frac{dU^2}{dx} = -\frac{Q^2}{2^2 x^3 \rho^2}.$$

Легко убедиться в том, что v_x и v_y надо искать в виде $v_x = \frac{Q}{\rho x} f\left(\frac{y}{x}\right)$ и $v_y = \frac{Q}{\rho x} f_1\left(\frac{y}{x}\right)$. Из уравнения непрерывности получаем $f_1 = \frac{y}{x} f$, после чего первое из уравнений (32,5) даёт для функции f :

$$\frac{v_x}{Q} f'' = 1 - f^2,$$

где ' означает дифференцирование f по её аргументу $\xi = \frac{y}{x}$. Граничные условия гласят: $f(0) = 0$, $f(\infty) = 1$ (соответственно тому, что должно быть $v_x|_{y=0} = 0$, $v_x|_{y=\infty} = \frac{Q}{\rho x}$). Первый интеграл этого уравнения есть

$$\frac{v_x}{2Q} f'^2 = f - \frac{f^3}{3} + \text{const.}$$

Поскольку при $y \rightarrow \infty$ f стремится к 1, то мы видим, что и f' стремится к определённому пределу, и ясно, что этот предел может быть только нулём.

Определяя отсюда const., находим: $\frac{v_x}{2Q} f'^2 = -\frac{1}{3}(f-1)^2(f+2)$. Так как правая часть всегда отрицательна в интервале $0 \leq f \leq 1$, то непременно должно быть $Q < 0$. Другими словами, пограничный слой рассматриваемого типа образуется только при конфузормом течении (с большими числами Рейнольдса $Re = \frac{|\rho Q|}{\mu}$) и не получается при диффузормом течении, в согласии с результатами § 19. Интегрируя ещё раз, получаем окончательно:

$$f = 3 \operatorname{th}^2 \left[\ln(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \xi \sqrt{\frac{Re}{2a}} \right] - 2$$

§ 33. Движение вблизи линии отрыва

При описании явления отрыва (§ 28) уже было указано, что реальное положение линии отрыва на поверхности обтекаемого тела определяется свойствами движения в пограничном слое. Мы увидим ниже, что в чисто математическом отношении линия отрыва есть линия, точки которой являются особыми точками решений уравнений движения в по-

¹⁾ Решение этой задачи получено Польгаузенем (Pohlhausen).

граничном слое (уравнений Прандтля). Задача состоит в том, чтобы определить свойства этих решений вблизи такой особой линии¹⁾.

От линии отрыва отходит, как мы знаем, уходящая в глубь жидкости поверхность, ограничивающая область турбулентного движения. Движение во всей турбулентной области является вихревым, между тем как при отсутствии отрыва оно было бы вихревым лишь в пограничном слое, где существенна вязкость жидкости, а в основном потоке ротор скорости отсутствовал бы. Поэтому можно сказать, что при отрыве происходит «проникновение» ротора скорости из пограничного слоя в глубь жидкости. Но в силу закона сохранения циркуляции скорости такое «проникновение» может произойти только путём непосредственного перемещения движущейся вблизи поверхности тела (в пограничном слое) жидкости в глубь основного потока. Другими словами, должен произойти как бы «отрыв» течения в пограничном слое от поверхности тела, в результате чего линии тока выходят из пристеночного слоя в глубь жидкости. (Поэтому и называют это явление «отрывом» или «отрывом пограничного слоя».)

Уравнения движения в пограничном слое приводят, как мы видели, к результату, что в пограничном слое тангенциальная составляющая скорости (v_x) велика по сравнению с нормальной к поверхности тела компонентой (v_y). Такое соотношение между v_x и v_y органически связано с основными предположениями о характере движения в пограничном слое и должно необходимым образом соблюдаться везде, где уравнения Прандтля имеют физически осмысленные решения. Математически оно во всяком случае имеет место во всех точках, не лежащих в непосредственной близости от особых точек. Но если $v_y \ll v_x$, то это значит, что жидкость движется вдоль поверхности тела, практически не отклоняясь от неё, так что никакого «отрыва течения» произойти не может. Таким образом, мы приходим к выводу, что отрыв может произойти лишь на той линии, точки которой являются особыми для решения уравнений Прандтля.

Характер этих особенностей тоже непосредственно следует из сказанного. Действительно, дойдя до линии отрыва, течение отклоняется, переходя из области пограничного слоя в глубь жидкости. Другими словами, нормальная составляющая скорости перестаёт быть малой по сравнению с тангенциальной и делается по крайней мере одного с нею порядка величины. Мы видели [см. (32,8)], что отношение $\frac{v_y}{v_x}$ — порядка $\frac{1}{\sqrt{Re}}$, так что возрастание v_y до $v_y \sim v_x$ означает увеличение в \sqrt{Re} раз. Поэтому при достаточно больших числах Рейнольдса (о которых, разумеется, только и идёт речь) можно считать, что v_y возрастает в бесконечное число раз. Если перейти в уравнениях Прандтля к безразмерным величинам [см. (32,7)], то описанное положение формально означает, что безразмерная скорость v'_y в решении уравнений становится на линии отрыва бесконечной.

¹⁾ Илагаемая здесь, несколько отличная от обычной, трактовка вопроса принадлежит Л. Д. Ландау.

Будем рассматривать для некоторого упрощения дальнейшего исследования «двухмерную» задачу о поперечном обтекании бесконечно длинного тела. Как обычно, x будет координатой вдоль поверхности тела в направлении течения, а координата y будет расстоянием от поверхности тела. Вместо линии отрыва здесь можно говорить о «точке отрыва», подразумевая пересечение линии отрыва с плоскостью x, y ; в выбранных координатах это есть точка $x = \text{const.} = x_0, y = 0$. Область до точки отрыва пусть соответствует $x < x_0$.

Согласно полученным результатам при $x = x_0$ имеем:

$$v_y(x_0, y) = \infty. \quad (33,1)$$

Но в уравнениях Прандтля скорость v , является своего рода вспомогательной величиной, которой при исследовании движения в пограничном слое обычно не интересуются (в связи с её малостью). Поэтому желательно выяснить, какими свойствами обладает вблизи линии отрыва функция v_x .

Поскольку (33,1) имеет место при всех y^1 , то ясно, что при $x = x_0$ обращается в бесконечность также и производная $\frac{\partial v_y}{\partial y}$. Из уравнения непрерывности $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$ следует тогда, что и $\frac{\partial v_x}{\partial x} \Big|_{x=x_0}$ делается бесконечной, или

$$\frac{\partial x}{\partial v_x} = 0,$$

где x рассматривается как функция от v_x и y . Обозначим посредством $v_0(y)$ значение функции $v_x(x, y)$ при $x = x_0$ ($v_0(y) = v_x(x_0, y)$). Вблизи точки отрыва разности $v_x - v_0$ и $x_0 - x$ малы и можно разложить $x_0 - x$ в ряд по степеням $v_x - v_0$ (при заданном y). В силу условия $\frac{\partial x}{\partial v_x} \Big|_{x=x_0} = 0$

член первого порядка в этом разложении должен тождественно выпадать, и с точностью до членов второго порядка имеем:

$$x_0 - x = f(y) (v_x - v_0)^2$$

или

$$v_x = v_0(y) + \alpha(y) \sqrt{x_0 - x}, \quad (33,2)$$

где $\alpha = \frac{1}{\sqrt{f}}$ — некоторая функция только от y . Написав теперь

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\alpha(y)}{2\sqrt{x_0 - x}}$$

и интегрируя, получаем для v_y :

$$v_y = \frac{\beta(y)}{\sqrt{x_0 - x}}, \quad (33,3)$$

где $\beta(y) = \frac{1}{2} \int \alpha(y) dy$ есть опять функция от y .

¹⁾ Кроме только точки $y = 0$, в которой всегда должно быть $v_y = 0$ согласно граничным условиям на поверхности тела.

Далее, воспользуемся первым из уравнений (32,5):

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}. \quad (33,4)$$

Производная $\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$ не обращается, как это видно из (33,2), при $x = x_0$ в бесконечность. То же самое относится и к величине $\frac{dp}{dx}$, определяющейся движением вне пограничного слоя. Оба же члена в левой стороне уравнения (33,4) обращаются, каждый в отдельности, в бесконечность. В первом приближении можно, следовательно, написать для области вблизи точки отрыва:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.$$

Подставляя сюда $\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial v_y}{\partial y}$, переписываем это уравнение в виде,

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial y} - v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = v_x^2 \frac{\partial v_y}{\partial y v_x} = 0.$$

Поскольку при $x = x_0$ v_x , вообще говоря, не обращается в нуль, то должно быть $\frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$, т. е. отношение $\frac{v_y}{v_x}$ не зависит от y . С другой стороны, из (33,2) — (33,3) имеем с точностью до членов высшего порядка: $\frac{v_y}{v_x} = \frac{\beta(y)}{v_0(y)\sqrt{x_0 - x}}$. Для того, чтобы это выражение было функцией только от x , необходимо: $\beta(y) = Av_0(y)$, где A — численная постоянная. Таким образом,

$$v_y = \frac{Av_0(y)}{2\sqrt{x_0 - x}}. \quad (33,5)$$

Наконец, замечая, что функции α и β в (33,2) — (33,3) связаны друг с другом уравнением $\alpha = 2\beta'$, получаем $\alpha = A \frac{dv_0}{dy}$, так что

$$v_x = v_0(y) + A \frac{dv_0}{dy} \sqrt{x_0 - x}. \quad (33,6)$$

Формулы (33,5) — (33,6) определяют характер зависимости функций v_x и v_y от x вблизи точки отрыва. Мы видим, что обе они оказываются разложимыми в этой области по степеням корня $\sqrt{x_0 - x}$, причём разложение v_y начинается с члена (-1) -й степени, так что v_y обращается при $x \rightarrow x_0$ в бесконечность, как $\frac{1}{\sqrt{x_0 - x}}$. При $x > x_0$, т. е. за точкой отрыва, разложение (33,5) — (33,6) физически неприменимо, так как корни делаются мнимыми; это свидетельствует о физической бессмысленности продолжения за точку отрыва решений уравнений Прандтля, описывающих движение до этой точки.

В силу граничных условий на самой поверхности тела должно быть всегда $v_x = v_y = 0$ при $y = 0$. Из (33,5) — (33,6) заключаем поэтому, что

$$v_x(0) = 0, \quad \left. \frac{dv_x}{dy} \right|_{y=0} = 0. \quad (33,7)$$

Таким образом, мы приходим к важному результату, что в самой точке отрыва ($x = x_0, y = 0$) обращается в нуль не только самая скорость v_x , но и её первая производная по y (этот результат принадлежит Прандтлю¹⁾).

В предыдущем параграфе было показано, что картина движения в пограничном слое остаётся при изменении числа Рейнольдса подобной самой себе, причём, в частности, масштабы по координате x остаются неизменными. Отсюда следует, что значение x_0 координаты x , при котором

обращается в нуль производная $\left. \frac{dv_x}{dx} \right|_{y=0}$, не меняется при изменении Re .

Таким образом, мы приходим к существенному выводу, что положение точки отрыва на поверхности обтекаемого тела не зависит от числа Рейнольдса (до тех пор, разумеется, пока пограничный слой остаётся ламинарным; см. об этом § 37).

Выясним ещё, какими свойствами обладает распределение давления $p(x)$ вблизи точки отрыва. При $y = 0$ левая сторона уравнения (33,4) обращается в нуль вместе с v_x и v_y и остаётся

$$\nu \left. \frac{d^2 v_x}{dy^2} \right|_{y=0} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}. \quad (33,8)$$

Отсюда видно, что знак $\frac{dp}{dx}$ совпадает со знаком $\left. \frac{d^2 v_x}{dy^2} \right|_{y=0}$. До тех пор, пока $\left. \frac{dv_x}{dy} \right|_{y=0} > 0$, о знаке второй производной ничего нельзя сказать.

¹⁾ Необходимо подчеркнуть, что равенство $\left. \frac{dv_x}{dy} \right|_{y=0} = 0$ на линии отрыва имеет место лишь постольку, поскольку при этом же x v_x обращается в бесконечность. Если бы постоянная A в (33,5) случайно оказалась равной нулю (а потому не было бы и $v_x(x_0, y) = \infty$), то точка $x = x_0, y = 0$, в которой обращается в нуль производная $\left. \frac{dv_x}{dy} \right|_{y=0}$, не была бы ничем замечательна и, во всяком случае, не была бы точкой отрыва. Обращение A в нуль может, однако, произойти лишь чисто случайно и поэтому невероятно. Практически, следовательно, точка на поверхности тела, на которой $\left. \frac{dv_x}{dy} \right|_{y=0} = 0$, всегда является в то же время точкой отрыва.

Если бы в точке $x = x_0$ не возник отрыв (т. е. если $A = 0$), то при $x > x_0$ было бы $\left. \frac{dv_x}{dy} \right|_{y=0} < 0$, т. е. при удалении от стенки (при достаточно малых y) v_x делалось бы отрицательным, увеличиваясь по абсолютной величине. Другими словами, в точке $x = x_0$ жидкость двигалась бы в нижних слоях пограничного слоя в направлении, обратном основному потоку; возникло бы «подтекание» жидкости к этой точке. Подчеркнём, что из такого рода рассуждений ещё отнюдь нельзя было бы делать вывода о необходимости отрыва в точке, где $\left. \frac{dv_x}{dy} \right|_{y=0} = 0$; вся картина течения в «подтеканием» может (как это и было бы при $A = 0$) находиться целиком в области пограничного слоя, не выходя в область основного потока, между тем как для отрыва характерен именно выход течения в основной объём жидкости.

Но поскольку при удалении от стенки v_x положительно и растёт (в области до точки отрыва), то в самой точке $x = x_0$, где $\frac{\partial v_x}{\partial y} = 0$, должно во всяком случае быть $\left. \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right|_{y=0} > 0$. Отсюда заключаем, что

$$\left. \frac{dp}{dx} \right|_{x=x_0} > 0, \quad (33,9)$$

т. е. вблизи точки отрыва жидкость движется от более низкого давления к более высокому. Градиент давления связан с градиентом скорости $U(x)$ вне пограничного слоя соотношением $\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = -U \frac{dU}{dx}$. Поскольку положительное направление оси совпадает с направлением основного потока, то $U > 0$, и мы заключаем, что

$$\left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=x_0} < 0, \quad (33,10)$$

т. е. вблизи точки отрыва скорость U падает в направлении течения.

Из полученных результатов можно вывести заключение о том, что при обтекании тела в том или ином месте его поверхности должен произойти отрыв. Действительно, на заднем, как и на переднем, конце тела имеется точка, в которой при потенциальном обтекании идеальной жидкостью скорость жидкости обращалась бы в нуль (критическая точка). Поэтому, начиная с некоторого значения x , скорость $U(x)$ должна была бы начать падать, обращаясь в конце концов в нуль. С другой стороны, ясно, что текущая вдоль поверхности тела жидкость тормозится тем сильнее, чем ближе к стенке находится рассматриваемый её слой (т. е. чем меньше y). Поэтому, раньше чем обратилась бы в нуль скорость $U(x)$ на внешней границе пограничного слоя, должна была бы обратиться в нуль скорость в непосредственной близости от стенки. Математически это, очевидно, означает, что производная $\frac{\partial v_x}{\partial y}$ во всяком случае должна была бы

обратиться в нуль (а поэтому отрыв не может не возникнуть) при некотором x , меньшем чем то его значение, при котором было бы $U(x) = 0$.

В случае обтекания тел произвольной формы все вычисления могут быть произведены совершенно аналогичным образом и приводят к результату, что на линии отрыва обращаются в нуль производные $\frac{\partial v_x}{\partial y}$, $\frac{\partial v_y}{\partial y}$ от обеих касательных к поверхности тела компонент скорости v_x и v_y (ось y попрежнему направлена по нормали к рассматриваемому участку поверхности тела).

Приведём простое рассуждение, которое показывает необходимость возникновения отрыва в случаях, когда в отсутствии отрыва в обтекающем тело потоке жидкости имелось бы достаточно быстрое возрастание давления (и соответственно этому падение скорости U) в направлении течения. Пусть на малом расстоянии $\Delta x = x_2 - x_1$ давление p испытывает достаточно большое увеличение от значения p_1 до p_2 ($p_2 \gg p_1$). На том же расстоянии Δx скорость U жидкости вне погранич-

1) Это не относится к так называемым хорошо обтекаемым телам; см. § 38.

ного слоя падает от исходного значения U_1 до значительно меньшего значения U_2 , определяемого уравнением Бернулли:

$$\frac{1}{2}(U_1^2 - U_2^2) = \frac{1}{\rho}(p_2 - p_1).$$

Поскольку ρ не зависит от y , то увеличение давления $p_2 - p_1$ одинаково на всех расстояниях от стенки. При достаточно большом градиенте давления $\frac{dp}{dx} \sim \frac{p_2 - p_1}{\Delta x}$ в уравнении движения (33,4) может быть опущен член $\nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$, содержащий вязкость (если только, разумеется, ν не слишком мало). Тогда можно и для оценки изменения скорости v в пограничном слое воспользоваться уравнением Бернулли, написав

$$\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) = -\frac{1}{\rho}(p_2 - p_1)$$

или, сравнивая с предыдущим равенством:

$$v_2^2 = v_1^2 - (U_1^2 - U_2^2).$$

Но скорость v_1 в пограничном слое меньше скорости основного потока; точнее, можно выбрать такое y , для которого $v_1^2 < U_1^2 - U_2^2$. Скорость v_2 оказывается, таким образом, мнимой, что свидетельствует об отсутствии физически осмысленных решений уравнений Прандтля. В действительности, на участке Δx должен возникнуть отрыв, в результате которого слишком большой градиент давления уменьшается.

Интересным случаем возникновения отрыва является обтекание угла, образованного двумя пересекающимися твёрдыми поверхностями. При ламинарном потенциальном обтекании выпуклого угла (рис. 2) скорость жидкости на крае угла обратилась бы в бесконечность (см. задачу 6 § 9), возрастая вдоль потока, подходящего к краю, и убывая в потоке, уходящем от него. В действительности, быстрое падение скорости (и соответственно возрастание давления) за краем угла приводит к возникновению отрыва, причём линией отрыва является линия края угла. В результате возникает картина движения, рассмотренная в § 29.

При ламинарном же течении внутри вогнутого угла (рис. 3) скорость жидкости обращается на краю угла в нуль. Падение скорости (и возрастание давления) имеет здесь место в потоке, подходящем к краю угла. Оно приводит, вообще говоря, к возникновению отрыва, причём линия отрыва расположена не доходя (по направлению течения) линии края угла.

Задача

Определить наименьший порядок величины увеличения давления Δp , которое должно иметь место (в основном потоке) на расстоянии Δx , для того, чтобы произошёл отрыв.

Решение. Пусть y есть такое расстояние от поверхности тела, на котором, с одной стороны, уже можно применить уравнение Бернулли, а с другой стороны, такое, что квадрат $v^2(y)$ скорости v в пограничном слое здесь меньше изменения $|\Delta U^2|$ скорости U вне этого слоя. Для $v(y)$ можно написать по порядку величины: $v(y) \approx \frac{dv}{dy} y \sim \frac{U}{\delta} y$ ($\delta \sim \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$ — ширина пограничного слоя,

δ — размеры тела). Приравнявая порядки величины обоих членов и правой стороне уравнения (33,4), получаем: $\frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{\Delta x} \sim \frac{v(y)}{y^2} \sim \frac{U}{\delta y}$. Из условия же $v^2 = |\Delta U^2| = 2 \frac{\Delta p}{\rho}$ получаем: $\frac{U^2}{\delta^2} y^2 \sim \frac{\Delta p}{\rho}$. Исключая y из обоих полученных соотношений, находим окончательно:

$$\Delta p \sim \rho U^2 \left(\frac{\Delta x}{l} \right)^{2/3}$$

§ 34. Устойчивость движения в ламинарном пограничном слое

Ламинарное движение в пограничном слое, как и всякое другое ламинарное течение, при достаточно больших числах Рейнольдса делается в той или иной степени неустойчивым. Характер потери устойчивости в ламинарном слое различен в разных случаях. Он существенно зависит от формы кривой профиля скоростей.

В ламинарном пограничном слое, образующемся при обтекании плоской пластинки, скорость v_x монотонно растёт с y , причём кривая $v_x(y)$ является везде выпуклой (рис. 14), т. е. $\frac{d^2 v_x}{dy^2}$ везде положительно и нигде не обращается в нуль. Другими словами, эта кривая не имеет точки перегиба. Оказывается, что ламинарное движение в таком слое обнаруживает в отношении своей устойчивости такие же свойства, какими обладает ламинарное течение по трубе. Именно, оно устойчиво по отношению к бесконечно малым возмущениям при сколь угодно больших числах Рейнольдса. Устойчивое же нестационарное, турбулентное, движение в пограничном слое делается возможным лишь при Re , превышающих некоторое критическое значение; при $Re > Re_{кр}$ течение ламинарно или турбулентно в зависимости от начальных условий движения. При Re , значительно больших, чем $Re_{кр}$, можно говорить о неустойчивости ламинарного движения по отношению к малым, но конечным возмущениям. В соответствии с таким характером потери устойчивости значения Re , при которых реально происходит турбулизация движения в ламинарном пограничном слое на пластинке, зависят, например, от степени турбулентности набегающего потока. Чем больше эта степень, т. е. чем более сильным возмущениям подвергается движение в ламинарном слое, тем раньше происходит его турбулизация.

Необходимо подчеркнуть, что неустойчивость ламинарного движения наступает, конечно, не во всём слое сразу, а лишь в определённой его части. Так, при обтекании пластинки надо определять число Рейнольдса как $Re_x = \frac{Ux}{\nu}$, где x — расстояние от переднего края пластинки, и существует определённое критическое значение этого числа¹⁾ $Re_{x,кр}$.

¹⁾ Иногда вместо числа Рейнольдса $Re_x = \frac{Ux}{\nu}$ вводят число Рейнольдса Re_δ пограничного слоя, определяемое как $Re_\delta \sim \frac{U\delta}{\nu}$, где δ — толщина слоя. Согласно (32,12) имеем $Re_\delta \sim \sqrt{Re_x}$.

Движение турбулизируется в той части слоя, для которой $Re_x > Re_{x_{кр}}$. Чем больше скорость U (или чем меньше ν), тем ближе к краю пластинки наступает неустойчивость и тем большая часть слоя турбулизируется.

Турбулентное движение в пограничном слое на пластинке наблюдалось уже при $Re_x \approx 100\,000$. По тем же причинам, что и для движения по трубе (см. § 24), надо считать, что истинное значение $Re_{x_{кр}}$ лежит во всяком случае ниже этой цифры.

Рассмотрим теперь пограничный слой, у которого кривая профиля скоростей попрежнему не имеет точки перегиба, но который расположен над искривлённой поверхностью. Для простоты рассуждений будем говорить о симметричном обтекании тела вращения, так что кривые профили скоростей являются плоскими. Рассмотрим сначала течение вблизи вогнутой поверхности и применим к нему критерий устойчивости, выведенный в § 23. Пусть A (рис. 15, а) есть какая-нибудь точка контура сечения поверхности, а O — центр кривизны этого контура в точке A .

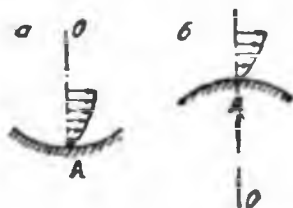


Рис. 15.

«Момент импульса» μ (см. § 23) жидкости в пограничном слое относительно точки O можно написать как $\rho v_t r$, где v_t — тангенциальная скорость, а r — расстояние от точки O . Скорость v_t , а с нею и μ имеет при всех r (внутри пограничного слоя) одинаковый знак, который можно считать положительным. Поскольку v_t в пограничном слое меняется очень быстро, то можно писать $\frac{dv_t}{dr} = R \frac{dv_t}{dr}$ (R — расстояние OA).

Но производная $\frac{dv_t}{dr}$ отрицательна, так как v_t падает при приближении к стенке. Таким образом, условие (23,4) $\mu \frac{d\mu}{dr} > 0$ не выполняется, и мы приходим к результату, что ламинарное движение в пограничном слое у вогнутой поверхности при достаточно больших Re делается абсолютно неустойчивым (неустойчивым по отношению к бесконечно малым возмущениям). Вогнутость поверхности действует, таким образом, в направлении уменьшения устойчивости ламинарного пограничного слоя.

Если же поверхность является выпуклой (рис. 15, б), то точка O расположена по другую сторону от контура сечения поверхности, так что увеличению r соответствует и увеличение v_t . Производная $\frac{dv_t}{dr}$ теперь положительна, и условие $\mu \frac{d\mu}{dr} > 0$ выполняется. Ламинарное течение в пограничном слое оказывается в этом случае устойчивым по отношению к бесконечно малым возмущениям при любых Re . Более того, выпуклость поверхности действует даже стабилизирующим образом на ламинарный пограничный слой, по сравнению со слоем у плоской поверхности, — критические числа Рейнольдса оказываются здесь более высокими, чем в случае плоской пластинки.

Перейдём теперь к ламинарному движению в пограничном слое с перегибом в профиле скоростей. Равьше всего покажем, что точка

перегиба непременно должна иметься, если скорость $U(x)$ жидкости вне пограничного слоя уменьшается по направлению течения. Рассмотрим небольшой участок поверхности стенки, который можно считать плоским, и пусть x есть опять продольная координата вдоль направления течения, а y — расстояние от стенки. Из соотношения (33,8)

$$\nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = -U \frac{\partial U}{\partial x}$$

видно, что если U падает в направлении течения ($\frac{\partial U}{\partial x} < 0$), то вблизи поверхности

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} > 0.$$

На расстоянии же y порядка толщины пограничного слоя производная $\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$ должна быть всегда отрицательна, независимо от знака $\frac{\partial U}{\partial x}$.

Действительно, функция $v_x(y)$ должна при увеличении y асимптотически приближаться к конечному пределу U . Из чисто геометрических соображений ясно, что это возможно только, если кривая $v_x(y)$ становится при увеличении y выпуклой (рис. 16). Таким образом, мы видим, что при $\frac{\partial U}{\partial x} < 0$

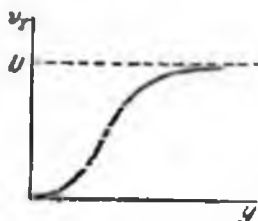


Рис. 16.

производная $\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$ непременно меняет знак внутри пограничного слоя, так что кривая $v_x(y)$ имеет точку перегиба.

Оказывается, что наличие перегиба в профиле скоростей приводит к уменьшению устойчивости ламинарного движения в пограничном слое. Если перегиб профиля достаточно сильный, то при достаточно больших Re движение делается неустойчивым по отношению к бесконечно малым возмущениям.

Надо, впрочем, отметить, что рассматриваемое движение, по видимому, становится неустойчивым по отношению к конечным возмущениям ещё раньше, чем делается абсолютно неустойчивым. На это указывает то обстоятельство, что момент наступления турбулизации пограничного слоя, т. е. значение $Re_{кр}$, при течении в направлении уменьшения скорости U основного потока тоже оказывается зависящим от степени турбулизации набегающего потока. Между тем, при абсолютной неустойчивости турбулизация должна была бы наступать всегда сразу при достижении $Re_{кр}$, вне зависимости от величины имеющихся возмущений.

Задачи

1. Определять, устойчиво ли (при сколь угодно больших числах Рейнольдса) по отношению к бесконечно малым возмущениям течение с профилем скоростей, изображённым на рис. 17.

Решение. Выведем общее уравнение, определяющее устойчивость плоского течения с распределением скоростей вида $v_x = U(y)$, $v_y = v_z = 0$. Начиная с невозмущённого движения малое возмущение, имеем: $v_x = U + v'_x$

$v_y = v'_y, v_x = 0$. Поскольку мы рассматриваем сколь угодно большие Re , то можно положить $\gamma = 0$, т. е. пользоваться уравнением Эйлера. Подставляя $v_x = U + v'_x, v_y = v'_y$ в уравнение Эйлера в виде (2,11) и в уравнение непрерывности, получаем с точностью до членов первого порядка.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial v'_y}{\partial x} - \frac{\partial v'_x}{\partial y}\right) - v'_y \frac{d^2 U}{dy^2} = 0, \quad \frac{\partial v'_x}{\partial x} + \frac{\partial v'_y}{\partial y} = 0.$$

Ищем решение в виде $v'_x = e^{i(kx - \omega t)} \varphi(y), v'_y = e^{i(kx - \omega t)} \psi(y)$ и получаем $\varphi = -\frac{1}{ik} \frac{d\psi}{dy}$, а для ψ — уравнение

$$(Uk - \omega) \left(\frac{d^2 \psi}{dy^2} - k^2 \psi\right) = \psi k \frac{d^2 U}{dy^2}. \quad (1)$$

Если профиль скоростей состоит из прямолинейных отрезков, то на каждом из этих отрезков $\frac{d^2 U}{dy^2} = 0$. Неустойчивость движения связана с наличием комплексных «частот» ω ; чисто действительные ω нас не интересуют. Но при комплексном ω разность $Uk - \omega$ не может нигде обратиться в нуль, так что (1) можно написать просто как

$$\frac{d^2 \psi}{dy^2} - k^2 \psi = 0. \quad (2)$$

На границе между двумя прямолинейными участками профиля скоростей ψ должно быть непрерывно, а $\frac{d\psi}{dy}$ должно удовлетворять условию, получающемуся интегрированием (1):

$$\frac{1}{\psi} \left[\frac{d\psi}{dy} \right] = \frac{k}{Uk - \omega} \left[\frac{dU}{dy} \right], \quad (3)$$

где квадратные скобки означают скачки значений соответствующей величины в рассматриваемой точке.

В данном случае имеем: $U = 0$ при $|y| > h, U = U_0 \left(1 \pm \frac{y}{h}\right)$ при $|y| < h$. Ищем решение в виде: $\psi = c_1 e^{-ky}$ при $y > h, \psi = c_2 (\operatorname{ch} ky + a \operatorname{th} ky)$ при $0 < y < h$, а при $y < 0$ — в таком же виде с измененным знаком у y . Условие (3) в точках $y = 0$ и $y = h$ вместе с условием непрерывности ψ в этих же точках даёт:

$$a = -\frac{U_0}{h(U_0 k - \omega)}, \quad 1 + \frac{a + \operatorname{th} kh}{a \operatorname{th} kh + 1} = \frac{U_0}{\omega h}.$$

Исключая a , получаем:

$$\left(\frac{\omega h^2}{U_0}\right) (1 + \operatorname{th} kh) + \frac{\omega h}{U_0} (\operatorname{th} kh - kh - kh \operatorname{th} kh) + (kh - \operatorname{th} kh) = 0.$$

Дискриминант этого уравнения положителен при $kh \gg 1$, но отрицателен при $kh \ll 1$, так что всегда существуют комплексные ω , и движение неустойчиво.

2. То же для течения с профилем скоростей, изображённом на рис. 18.

Решение. Функция $U(y)$ есть $U = U_1$ при $y > h, U = a_1 y$ (где $a_1 = \frac{U_1}{h}$) при $0 < y < h, U = a_2 y$ при $y < 0$. Ищем решение в виде $\psi = c_1 e^{-ky}$ при $y > h,$



Рис. 17.

$\psi = c_2 (\operatorname{ch} ky + a \operatorname{sh} ky)$ при $0 < y < h$, $\psi = c_2 e^{ky}$ при $y < 0$. Условие (3) в точках $y=0$ и $y=h$ (вместе с условием непрерывности ψ в этих точках) даёт два уравнения:

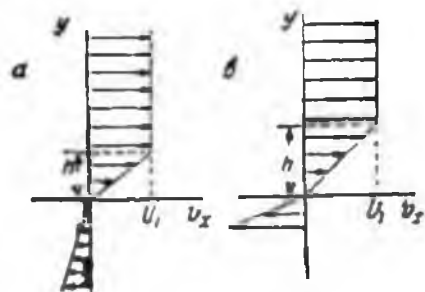


Рис. 18.

$$a - 1 = -\frac{a_1 - a_2}{\omega},$$

$$1 + \frac{a \operatorname{ch} kh + \operatorname{sh} kh}{a \operatorname{sh} kh + \operatorname{ch} kh} = \frac{a_1}{kh a_1 - \omega}.$$

Исключая a , получаем уравнение

$$2e^{kh} \left(\frac{\omega}{a_1} \right)^2 + \frac{\omega}{a_1} e^{kh} (1 - 2kh - \frac{a_1 - a_2}{a_1}) + \frac{a_1 - a_2}{a_1} (kh e^{kh} - \operatorname{sh} kh) = 0.$$

Дискриминант этого уравнения равен

$$e^{2kh} \left(\frac{a_1 - a_2}{a_1} - 2kh + 1 \right)^2 - 4 \frac{a_1 - a_2}{a_1}.$$

Это выражение как функция от kh проходит или не проходит через нуль, в зависимости от того, отрицательна или положительна величина $a_1 - a_2$. Таким образом, движение неустойчиво при $a_1 - a_2 < 0$ (рис. 18, а) и устойчиво, если $a_1 - a_2 > 0$ (рис. 18, б).

§ 35. Турбулентное движение в трубе¹⁾

Рассмотрим плоско-параллельный турбулентный поток жидкости, текущий вдоль неограниченной плоской поверхности (когда мы говорим о плоско-параллельности турбулентного потока, то подразумевается, конечно, усреднённое по времени движение в нём). Выберем направление потока в качестве оси x , плоскость стенки — в качестве плоскости x, z , так что y есть расстояние от стенки. Компоненты средней скорости вдоль осей y и z равны нулю: $u_y = u_z = 0$. Перепад давления отсутствует; все величины зависят только от y .

Обозначим посредством σ силу трения, действующую на единицу поверхности стенки (и направленную, очевидно, по оси x). Величина σ представляет собой не что иное, как импульс, передаваемый жидкостью твёрдой стенке; она является в то же время тем постоянным потоком импульса (точнее x -компоненты импульса), который направлен в отрицательном направлении оси y , и определяет количество импульса, непрерывно передаваемого от более удалённых от стенки слоёв жидкости к менее удалённым.

Наличие этого потока импульса связано, конечно, с наличием вдоль оси y градиента средней скорости u . Если бы жидкость двигалась с везде одинаковой скоростью, то никакого потока импульса в ней не было бы. Можно поставить вопрос и обратным образом. Именно, зададимся некоторым определённым значением σ и поставим вопрос о том, каково должно быть движение в жидкости данной плотности ρ , при-

¹⁾ Изложенные в §§ 35, 36 результаты были получены Карманом и Прандтлем.

водящее к потоку импульса σ . Что касается вязкости ν , то при больших числах Рейнольдса она, как обычно, не играет роли (она делается существенной лишь на очень малых расстояниях y , — см. ниже). Таким образом, значение градиента скорости $\frac{du}{dy}$ в каждой точке должно определяться постоянными параметрами ρ , σ и, разумеется, самим расстоянием y . Размерности этих трёх величин есть соответственно $\frac{2}{\text{см}^2}$, $\frac{\text{дина}}{\text{см}^2} = \frac{2}{\text{см} \cdot \text{сек}^2}$ и см . Размерность же производной $\frac{du}{dy}$ есть $1/\text{сек}$. Единственной комбинацией этой размерности, которую можно составить из σ , ρ и y , является $\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} \frac{1}{y}$. Поэтому должно быть

$$\frac{du}{dy} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} \frac{1}{y}, \quad (35,1)$$

где a есть численная постоянная. Эта постоянная не может быть вычислена теоретически и должна быть определена из экспериментальных данных. Она оказывается равной

$$a = 0,17. \quad (35,2)$$

Введём удобное для дальнейшего обозначение $v_0 = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$, так что

$$\sigma = \rho v_0^2. \quad (35,3)$$

Величина v_0 имеет размерность $\text{см}/\text{сек}$ и играет роль некоторой характерной для рассматриваемого турбулентного движения скорости; (35,1) приобретает теперь вид $\frac{du}{dy} = \frac{v_0}{y}$, откуда

$$u = v_0 (\ln y + c), \quad (35,4)$$

где c есть постоянная интегрирования. Для определения этой постоянной нельзя воспользоваться обычными граничными условиями на поверхности стенки: при $y=0$ первый член в (35,4) обращается в бесконечность. Причина этого заключается в том, что написанное выражение делается в действительности неприменимым на очень малых расстояниях от стенки, поскольку при очень малых y влияние вязкости делается существенным и им нельзя пренебрегать. Условия на бесконечности тоже отсутствуют: при $y=\infty$ выражение (35,4) тоже делается бесконечным. Это связано с тем, что в поставленных нами идеализированных условиях задачи фигурирует бесконечная поверхность стенки, влияние которой простирается поэтому и на бесконечно большие расстояния.

Прежде чем определить постоянную c , укажем предварительно на следующую существенную особенность рассматриваемого движения: оно не имеет никаких характерных постоянных параметров длины, которые могли бы определить масштаб турбулентного движения, как это имеет место в обычных случаях. Поэтому основной масштаб турбулентности определяется самим расстоянием y : турбулентное движение на

расстоянии y от стенки имеет основной масштаб порядка величины y . Что же касается пульсационной скорости турбулентного движения, то она — порядка величины v_0 . Это тоже следует непосредственно из соображений размерности, поскольку v_0 есть единственная величина с размерностью скорости, которую можно составить из имеющихся в нашем распоряжении величин σ , ρ , y . Подчеркнем, что в то время как средняя скорость падает с уменьшением y , порядок величины пульсационной скорости оказывается одинаковым на всех расстояниях от стенки. Этот результат находится в согласии с общим правилом, что порядок величины пульсационной скорости определяется изменением Δu средней скорости (§ 25). В рассматриваемом случае нет характерных длин l , на которых можно было бы брать изменение средней скорости. Δu должно быть теперь разумным образом определено, как изменение u при изменении расстояния y на величину порядка его самого. Но при изменении y , например, вдвое, скорость u меняется согласно (35,4) как раз на величину порядка v_0 .

На достаточно малых расстояниях от стенки начинает играть роль вязкость жидкости; обозначим порядок величины этих расстояний посредством y_0 . Определить y_0 можно следующим образом. Масштаб турбулентного движения на этих расстояниях — порядка y_0 , а скорость — порядка v_0 . Поэтому число Рейнольдса, характеризующее движение на расстояниях порядка y_0 , есть

$$Re \sim \frac{y_0 v_0}{\nu}.$$

Вязкость начинает играть роль, когда Re делается порядка единицы. Отсюда находим, что

$$y_0 \sim \frac{\nu}{v_0}, \quad (35,5)$$

чем и определяется интересующее нас расстояние.

На малых по сравнению с y_0 расстояниях от стенки движение жидкости определяется обычным вязким трением. Распределение скоростей здесь может быть получено непосредственно из обычной формулы для вязкого трения:

$$\sigma = \rho \nu \frac{du}{dy},$$

откуда

$$u = \frac{\sigma}{\rho \nu} y = \frac{\sigma v_0^2}{\nu} y. \quad (35,6)$$

Таким образом, непосредственно к стенке прилегает тонкая прослойка жидкости, в которой средняя скорость меняется с y по линейному закону; эту прослойку можно назвать «вязким подслоем»¹⁾. Сама

¹⁾ Обычно принятое название «ламинарного подслоя» не совсем удачно, так как в действительности и здесь движение жидкости турбулентно. Сходство с ламинарным движением заключается только в том, что средняя

величина скорости во всём подслое мала; она меняется от нуля на самой стенке до значений порядка v_0 при $y \sim y_0$.

В дальнейшем движении в вязком подслое мы не будем интересоваться вовсе. Наличие его надо учесть только соответствующим выбором постоянной интегрирования в (35,1). Эта постоянная должна быть выбрана таким образом, чтобы скорость делалась порядка v_0 на расстояниях порядка y_0 . Для этого надо взять $c = -\ln y_0$, так что $u = v_0 \ln \frac{y}{y_0}$, или

$$u = v_0 \ln \frac{y v_0}{\nu}. \quad (35,7)$$

Эта формула определяет (при ограниченных y) распределение скоростей в турбулентном потоке, текущем вдоль твёрдой стенки. Такое распределение называют логарифмическим профилем скоростей.

Заметим, что в формуле (35,7) под знаком логарифма должен был бы на самом деле стоять ещё некоторый численный коэффициент. Однако, в формулах, которые мы будем здесь выводить, мы будем ограничиваться «логарифмической» точностью. Это значит, что величина, стоящая в качестве аргумента под знаком логарифма, предполагается большой, причём пренебрегаем не только членами, пропорциональными более низким степеням этого аргумента, но и членами, содержащими логарифм в более низких степенях, чем в главном члене. Введение небольшого численного коэффициента под знаком логарифма, например, в (35,7), эквивалентно прибавлению к написанному выражению дополнительного члена вида $\text{const.} \cdot v_0$, где const. — число порядка единицы; этот член не содержит логарифма, и потому мы им пренебрегаем. Надо, однако, иметь в виду, что в выводимых здесь формулах аргумент y логарифма всё же не настолько велик, чтобы его логарифм тоже был ещё очень велик; поэтому и точность формул не очень высока.

Более точными эти формулы можно сделать, вводя в них некоторые численные множители в аргументах логарифма. Эти множители, однако, не могут быть вычислены теоретически и должны определяться из экспериментальных данных. Так, эмпирический коэффициент под знаком логарифма в формуле (35,7) оказывается равным примерно пяти, так что более точная формула для распределения скоростей может быть написана в виде

$$u = v_0 \ln 5 \frac{y v_0}{\nu}. \quad (35,8)$$

скорость распределена здесь по такому же закону, по которому была бы распределена истинная скорость при ламинарном течении в тех же условиях.

Порядок величины продольной компоненты пульсационной скорости (v'_x): в вязком подслое — тот же, что и средней скорости, и, в частности, пропорционален y . Из уравнения непрерывности следует, что поперечная компонента пульсационной скорости изменяется как y^2 (поскольку производная $\frac{\partial v'_x}{\partial y} = -\frac{\partial v'_y}{\partial x}$ пропорциональна y). Далее из линейности уравнений движения в вязком подслое (нелинейные члены здесь малы по сравнению с вязкими) следует, что периоды турбулентных пульсаций одинаковы по всей его толщине. Умножая эти периоды на пульсационную скорость, найдём, что расстояния, проходимые частицами жидкости в их пульсационном движении в продольном направлении, пропорциональны y , а в поперечном — пропорциональны y^2 .

Нетрудно определить диссипацию энергии ϵ в единице объема жидкости. ϵ представляет собой среднее значение компоненты Π_{xy} тензора плотности потока импульса $\Pi_{ix} = \rho v_i v_x - \tau \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_x} + \frac{\partial v_x}{\partial x_i} \right)$. Вне вязкого подслоя вязкий член может быть опущен, так что $\sigma = \overline{\rho v_x v_y}$. Вводя пульсационную скорость v' , можно написать $v_x = u + v'_x$; что же касается скорости v_y , то она сама является пульсационной скоростью, поскольку её среднее значение равно нулю. В результате получим:

$$\epsilon = \overline{\rho v_x v_y} = \overline{\rho v'_x v'_y} + \overline{\rho u v'_y} = \overline{\rho v'_x v'_y}.$$

Далее, плотность потока энергии в направлении оси y равна

$$\left(\rho + \frac{\rho \sigma^2}{2} \right) v_y,$$

(здесь тоже опущен вязкий член). Написав во втором члене $\sigma^2 = (u + v'_x)^2 + v_y^2$ и усредняя, получим: $\frac{1}{2} \overline{\rho \sigma^2 v_y} + \frac{1}{2} \overline{\rho v_y^3} + \overline{\rho u v'_x v'_y}$.

Здесь достаточно сохранить только последний член. Дело в том, что пульсационная скорость — порядка величины v_0 и потому, с логарифмической точностью, мала по сравнению с u . Что касается давления p , то его турбулентные пульсации — порядка величины ρv_0^2 [ср. (25,3)] и потому, с той же точностью, соответствующий член в потоке энергии тоже может быть опущен. Таким образом, имеем для средней плотности потока энергии:

$$\overline{\rho u v'_x v'_y} = \epsilon \sigma.$$

По мере приближения к поверхности стенки этот поток уменьшается, что связано как раз с тем, что энергия диссипируется. Уменьшение плотности потока энергии при приближении к стенке на расстояние dy равно $\sigma \frac{d\epsilon}{dy} dy$. Это есть то количество энергии, которое превратилось в тепло в слое жидкости толщины dy (и с равной единице площадью боковых поверхностей). Отсюда заключаем, что диссипация энергии, отнесённая к единице объёма, есть $\sigma \frac{d\epsilon}{dy}$, или

$$\epsilon = \frac{\sigma v_0^3}{y} = \sqrt{\frac{\sigma^3}{\rho \nu^3}} \frac{1}{y}. \quad (35,9)$$

Применим теперь полученные результаты к турбулентному течению жидкости по трубе. Вблизи стенок трубы (на расстояниях, малых по сравнению с её радиусом r) её поверхность можно приближённо рассматривать как плоскую и распределение скоростей должно описываться формулой (35,7) или (35,8). Однако, ввиду медленного изменения функции $\ln y$ можно, с логарифмической точностью, применить формулу (35,7) и к средней скорости U течения жидкости в трубе, написав в этой формуле вместо y радиус r трубы:

$$U = v_0 \ln \frac{r v_0}{\nu}. \quad (35,10)$$

(Под скоростью U мы будем подразумевать количество (объем) жидкости, протекающей в 1 сек. через сечение трубы, делённое на площадь этого сечения: $U = \frac{Q}{\pi r^2}$.)

Для того, чтобы связать скорость U с поддерживающим течение перепадом давления $\Delta p/l$ (Δp — разность давлений на концах трубы с длиной l), замечаем следующее. Действующая на всё сечение потока жидкости в трубе движущая сила есть $\pi r^2 \Delta p$. Эта сила идёт на преодоление трения о стенки. Поскольку отнесённая к единице площади стенки сила трения есть $\sigma = a \rho v_0^2$, то полная сила трения равна $2\pi r l a \rho v_0^2$. Приравнявая оба выражения, находим:

$$\frac{\Delta p}{l} = a \sigma_0^2 \frac{2}{r}. \quad (35,11)$$

Уравнения (35,10) — (35,11) определяют в параметрическом виде (параметром является σ_0) связь скорости течения жидкости по трубе с перепадом давления в ней. Об этой связи говорят обычно как о «законе сопротивления» трубы. Выражая σ_0 через $\frac{\Delta p}{l}$ из (35,11) и подставляя в (35,10), получаем закон сопротивления в виде уравнения

$$U = \sqrt{\frac{r \Delta p}{2 a \rho l}} \ln \left(\frac{r}{v} \sqrt{\frac{r \Delta p}{2 a \rho l}} \right). \quad (35,12)$$

Обычно в этой формуле вводят так называемый коэффициент сопротивления трубы, являющийся безразмерной величиной и определяющийся как отношение

$$\lambda = \frac{\Delta p}{l} \frac{2r}{\rho U^2}. \quad (35,13)$$

Зависимость λ от безразмерного числа Рейнольдса $Re = \frac{2rU}{\nu}$ определяется неявным образом уравнением

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0,85 \ln (3,5 Re \sqrt{\lambda}). \quad (35,14)$$

Мы подставили здесь для a значение (35,2), а под знаком логарифма введён эмпирический численный множитель. Определяемый этой формулой коэффициент сопротивления является медленно убывающей функцией числа Рейнольдса. Для сравнения приведём закон сопротивления при ламинарном течении в трубе. Вводя в формулу (15,11) коэффициент сопротивления, получаем:

$$\lambda = \frac{64}{Re}. \quad (35,15)$$

При ламинарном течении коэффициент сопротивления падает с ростом числа Рейнольдса быстрее, чем при турбулентном течении.

На рис. 19 изображён (в логарифмическом масштабе) график зависимости λ от Re . Круто спадающая прямая соответствует ламинарному режиму (формула (35,15)), в более пологая кривая (практически тоже близкая к прямой) — турбулентному течению (формула (35,14)). Переход с первой на вторую происходит, по мере увеличения числа Рейнольдса, в момент турбулизации течения, который может наступить при различных значениях Re , в зависимости от конкретных условий течения (от степени «возмущённости» потока, — см. конец § 24).

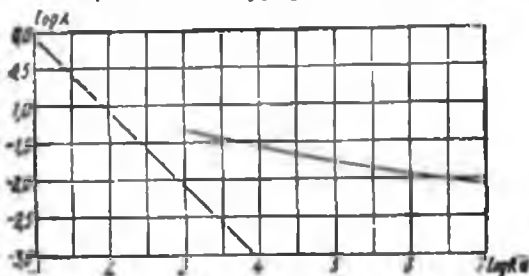


Рис. 19.

До сих пор мы предполагали всегда, что поверхность стенки достаточно гладкая. Если же поверхность является шероховатой, то выведенные здесь формулы могут несколько измениться. В качестве меры шероховатости стенки можно выбрать порядок величины выступов шероховатости, которые мы обозначим посредством d . Существенным является сравнительная величина d и толщина подслоя y_0 . Если толщина y_0 велика по сравнению с d , то наличие шероховатости вообще не существенно; это и подразумевается под достаточной гладкостью стенки. Если y_0 и d одного порядка величины, то никаких общих формул написать нельзя.

В обратном же предельном случае сильной шероховатости ($d \gg y_0$) снова можно установить некоторые общие соотношения. Говорить о вязком подслое в этом случае, очевидно, нельзя. Вокруг выступов шероховатости будет происходить турбулентное движение, характеризующееся величинами ρ , σ , d ; вязкость ν , как обычно, не должна входить непосредственно. Скорость этого движения — порядка величины

$\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} \sim v_0$ — единственной имеющейся в нашем распоряжении величины с размерностью скорости. Таким образом, мы видим, что в потоке, текущем вдоль шероховатой поверхности, скорость делается малой (порядка v_0) на расстояниях $y \sim d$ вместо $y \sim y_0$, как это было при течении вдоль гладкой поверхности. Отсюда ясно, что распределение скоростей будет определяться формулой, получающейся из (35,7) заменой в ней $\frac{y}{v_0}$ на d . Таким образом,

$$u = v_0 \ln \frac{y}{d}. \quad (35,16)$$

Аналогично должны быть изменены формулы для течения по трубе. Достаточно просто заменить в них $\frac{y_0}{v_0}$ на d . Для закона сопротивления получаем теперь вместо (35,12) формулу

$$U = \sqrt{\frac{r \Delta p}{2 \rho l}} \ln \frac{r}{d}. \quad (35,17)$$

Под знаком логарифма теперь стоит постоянная величина, не содержащая перепада давления, как это было в (35,12). Мы видим, что средняя скорость течения теперь просто пропорциональна квадратному корню из градиента давления в трубе. Если ввести коэффициент сопротивления, то (35,17) приобретёт вид

$$\lambda = \frac{8\alpha}{\ln^2 \frac{r}{d}} = \frac{1,4}{\ln^2 \frac{r}{d}}, \quad (35,18)$$

т. е. λ является постоянной величиной, не зависящей от числа Рейнольдса.

§ 36. Турбулентный пограничный слой

Тот факт, что мы получили для плоско-параллельного турбулентного потока логарифмический закон распределения скоростей формально во всём пространстве, связан с тем, что рассматривалось течение вдоль стенки, площадь которой бесконечна. При течении же вдоль поверхности реальных тел конечных размеров логарифмическим профилем обладает лишь движение на небольших расстояниях от поверхности — в пограничном слое¹⁾. Отметим уже сразу, что турбулентный пограничный слой может существовать как под турбулентным образом движущейся в основном потоке жидкостью, так и под ламинарным потоком.

Падение средней скорости в турбулентном, как и в ламинарном пограничном слое, обуславливается в конечном итоге вязкостью жидкости. Однако, влияние вязкости проявляется в турбулентном пограничном слое очень своеобразным образом. Самый ход изменения средней скорости в слое не зависит непосредственно от вязкости; вязкость входит в выражение для градиента скорости только в ламинарном подслое. Общая же толщина пограничного слоя определяется вязкостью и обращается в нуль²⁾ вместе с ней (см. ниже). Если бы вязкость была в точности равна нулю, то никакого пограничного слоя вовсе не было бы.

Приемим полученные в предыдущем параграфе результаты к турбулентному пограничному слою, образуемому при обтекании тонкой плоской пластинки, — таком же, какое было рассмотрено в § 32 для ламинарного течения. На границе турбулентного слоя скорость жид-

¹⁾ Толщина пограничного слоя растёт вдоль поверхности обтекаемого тела по направлению течения жидкости (закон этого возрастания будет определен ниже). Это объясняет, почему при течении по трубе логарифмический профиль имеет место вдоль всего сечения трубы. Толщина пограничного слоя у стенки трубы растёт, начиная от места втекания жидкости. Уже на некотором конечном расстоянии от конца трубы пограничный слой как бы заполняет собой всю площадь сечения трубы. Поэтому, если рассматривать трубу как достаточно длинную и не интересоваться её начальным участком, то течение во всём её объёме будет того же типа, как и в турбулентном пограничном слое. Напомним, что аналогичное положение имеет место и при ламинарном течении²⁾ по трубе. Такое течение описывается при любых числах Рейнольдса формулой Пуазейля. В пуазейлевском же течении роль вязкости проявляется на всех расстояниях от стенки и никогда не бывает ограничена тонким пристеночным слоем жидкости.

кости почти равна скорости натекания основного потока, которую мы обозначаем посредством U . С другой стороны, для определения этой скорости на границе мы можем (с логарифмической точностью) воспользоваться формулой (35,7), подставив в неё вместо y толщину пограничного слоя δ . Сравнивая оба выражения, получим:

$$U = v_0 \ln \frac{v_0 \delta}{\nu}. \quad (36,1)$$

Здесь U есть постоянный (для данного потока) параметр; толщина же δ меняется вдоль пластинки, а вместе с ней является, следовательно, медленно меняющейся функцией от x и величина v_0 . Для определения этих функций формула (36,1) недостаточна; необходимо получить ещё какое-нибудь соотношение, которое бы связывало v_0 и δ с x .

Для этого воспользуемся теми же соображениями, с помощью которых была получена формула (30,3) для ширины турбулентного следа. Как и там, производная $\frac{d\delta}{dx}$ должна быть порядка величины отношения скорости вдоль оси y на границе слоя к скорости вдоль оси x на той же границе. Вторая из них — порядка U , что же касается поперечной скорости, то она обязана пульсационному движению и потому — порядка v_0 . Таким образом,

$$\frac{d\delta}{dx} \sim \frac{v_0}{U},$$

откуда

$$\delta \sim \frac{v_0 x}{U}. \quad (36,2)$$

Формулы (36,1)—(36,2) определяют вместе зависимость v_0 и δ от расстояния x . Эта зависимость, однако, не может быть написана в явном виде. Ниже мы выразим δ через некоторую вспомогательную величину. Но поскольку v_0 есть медленно меняющаяся функция от x , то уже из (36,2) видно, что толщина слоя меняется в основном пропорционально x . Напомним, что толщина ламинарного пограничного слоя растёт пропорционально \sqrt{x} , т. е. медленнее, чем в турбулентном слое.

Определим зависимость от x действующей на единицу площади поверхности пластинки силы трения σ . Эта зависимость определяется двумя формулами:

$$\sigma = a\rho v_0^2, \quad U = v_0 \ln \frac{v_0 x}{U\nu}.$$

Вторая из них получается подстановкой (36,2) в (36,1) и обладает логарифмической точностью. Введём коэффициент сопротивления c (относённый к единице площади поверхности пластинки), определяемый как безразмерное отношение

$$c = \frac{2\sigma}{\rho U^2}. \quad (36,3)$$

Тогда, исключая σ_0 из двух написанных уравнений, получим следующие уравнения, определяющие (с логарифмической точностью) в неявном виде зависимость c от x :

$$\sqrt{\frac{2a}{c}} = \ln c Re_x, \quad Re_x = \frac{Ux}{\nu}. \quad (36,4)$$

Для придания этой формуле большей точности, можно написать под знаком логарифма ещё некоторый эмпирический численный множитель. Такая формула имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{c}} = 1,7 \ln (6,6 c Re_x). \quad (36,5)$$

Определяемый этой формулой коэффициент сопротивления c является медленно меняющейся функцией расстояния x .

Полная действующая на обе стороны пластинки сила (отнесённая к единице длины вдоль её края) есть

$$F = 2 \int_0^l \sigma dx$$

(l — длина пластинки). Введя вместо F коэффициент сопротивления

$$C = \frac{F}{\frac{1}{2} \rho U^2 l},$$

имеем:

$$C = \frac{1}{l} \int_0^l c dx.$$

Если ограничиваться только членами, содержащими логарифм в низкой (т. е. первой) степени, то написанный интеграл будет равен просто $c(l)$ (где значение c берётся при $x=l$). Для того же, чтобы получить для C более точное выражение, соответствующее формуле (36,5) с численным коэффициентом под знаком логарифма, надо произвести интегрирование с точностью до членов следующего порядка, содержащих логарифм в нулевой степени. Для этого пишем:

$$\int_0^l c dx = xc \Big|_0^l - \int_0^l x \frac{dc}{dx} dx.$$

Производную $\frac{dc}{dx}$ вычисляем с помощью формулы (36,5), написав её временно в виде

$$c = \frac{1}{a^2 \ln^2 bxc}.$$

С достаточной точностью получаем отсюда:

$$\frac{dc}{dx} = -\frac{2}{xa^2 \ln^3 bxc}.$$

С той же точностью имеем теперь

$$C = \frac{1}{l} \int_0^l c dx = c(l) + \frac{2}{a^2 \ln^3 bxc} = c(l) \left[1 + \frac{2}{\ln bxc} \right]$$

и, далее,

$$\frac{1}{\sqrt{C}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \left(1 - \frac{1}{\ln bxc} \right) = a (\ln bxc - 1) = a \ln \frac{bxc}{e} \approx a \ln \frac{bxc}{e}.$$

Подставляя согласно (36,5) $a = 1,7$, $b = \frac{U}{\nu} 6,6$, получаем окончательно следующее уравнение, определяющее зависимость полного коэффициента сопротивления C от числа Рейнольдса $Re = \frac{Ul}{\nu}$:

$$\frac{1}{\sqrt{C}} = 1,7 \ln (2,4 C Re). \quad (36,6)$$

При больших Re коэффициент сопротивления, определённый этой формулой, падает как $\frac{1}{\ln^2 Re}$. При ламинарном же пограничном слое C падает как $1/\sqrt{Re}$ [см. (32,16)], т. е. более быстро. Таким образом, можно сказать, что при больших числах Рейнольдса сила трения в турбулентном пограничном слое больше, чем в ламинарном.

Наконец, выразим толщину пограничного слоя с помощью функции $c(x)$. Имеем:

$$c_0 = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = U \sqrt{\frac{c}{2a}}.$$

Подставляя это в (36,2), получаем:

$$\delta = \text{const.} \cdot x \sqrt{c}. \quad (36,7)$$

Писать эту формулу со знаком равенства имеет смысл, конечно, только в случаях турбулентного пограничного слоя под ламинарным потоком, когда величина δ имеет точный смысл (область турбулентности, как всегда, резко отграничена от ламинарной области). Постоянный же множитель в (36,7) должен быть определён из экспериментальных данных.

Формула (36,7) применима качественно и к турбулентному пограничному слою на телах произвольной формы. Вместо x надо при этом писать размеры l тела, так что

$$\delta \sim l \sqrt{c}.$$

Здесь c надо рассматривать просто как некоторую вспомогательную функцию, связанную с числом Рейнольдса $Re = \frac{Ul}{\nu}$ соотношением типа (36,4), в котором x тоже заменено на l .

Задача

Определить зависимость коэффициента сопротивления шероховатой пластинки от числа Рейнольдса при турбулентном пограничном слое на ней.

Решение. Подставляя вместо толщины ламинарного подслоя y_0 размеры d выступов шероховатости, получаем две формулы:

$$\alpha = \alpha \rho v_0^2, \quad U = v_0 \ln \frac{x v_0}{\nu d}.$$

Вводя коэффициент сопротивления c , получаем отсюда:

$$\sqrt{\frac{2x}{c}} = \ln \left(\frac{x}{d} \sqrt{c} \right).$$

Аналогично для полного коэффициента сопротивления пластинки (тоже с логарифмической точностью) получаем:

$$\sqrt{\frac{2x}{c}} = \ln \frac{l}{d} \sqrt{c}.$$

Отметим, что коэффициент сопротивления шероховатых пластинок не зависит от числа Рейнольдса.

§ 37. Кризис сопротивления

Из полученных в последних параграфах результатов можно сделать существенные заключения о законе сопротивления при больших числах Рейнольдса, т. е. о зависимости действующей на обтекаемое тело силы сопротивления от Re при больших значениях последнего.

Картина обтекания при больших Re (о которых только и идёт речь ниже) выглядит, как уже говорилось, следующим образом. Во всём основном объёме жидкости (т. е. везде, за исключением пограничного слоя, которым мы здесь не интересуемся) жидкость может рассматриваться как идеальная, причём её движение является потенциальным везде, кроме области турбулентного следа. Размеры — ширина — следа зависят от положения линии отрыва на поверхности обтекаемого тела. При этом существенно, что хотя это положение и определяется свойствами пограничного слоя, но в результате оказывается, как было отмечено в § 33, независимым от числа Рейнольдса. Таким образом, мы можем сказать, что вся картина обтекания при больших числах Рейнольдса практически не зависит от вязкости, т. е., другими словами, от Re (до тех пор, пока пограничный слой остаётся ламинарным, — см. ниже).

Отсюда следует, что и сила сопротивления не может зависеть от вязкости. В нашем распоряжении остаются только три величины: скорость U натекающего потока, плотность жидкости ρ и размеры тела l . Из них можно составить всего лишь одну величину с размерностью силы, именно, $\rho U^2 l^2$. Вместо квадрата l^2 линейных размеров тела введём, как это обычно делают, пропорциональную ему площадь S поперечного (по отношению к направлению обтекания) сечения тела и напишем:

$$F = \text{const. } \rho U^2 S, \quad (37,1)$$

где const. есть численная постоянная, зависящая только от формы тела. Таким образом, сила сопротивления должна быть (при больших Re) пропорциональна площади сечения тела и квадрату скорости обтекания.

Напомним для сравнения, что при совсем малых Re ($Re \ll 1$) сопротивление было пропорционально первой степени линейных размеров тела и первой степени скорости ($F \sim \nu \rho l U$, — см. § 18).

Обычно, как уже неоднократно отмечалось, вместо силы сопротивления F рассматривают коэффициент сопротивления C , определяемый как

$$C = \frac{F}{\frac{1}{2} \rho U^2 S}.$$

C является безразмерной величиной и может зависеть только от Re . Формула (37,1) напишется в виде

$$C = \text{const.}, \quad (37,2)$$

т. е. коэффициент сопротивления зависит только от формы тела.

Такой ход силы сопротивления не может, однако, продолжаться до сколь угодно больших чисел Рейнольдса. Дело в том, что при достаточно

больших Re ламинарный пограничный слой (на поверхности тела до линии отрыва) делается неустойчивым и турбулизируется. При этом турбулизируется не весь пограничный слой, а лишь некоторая часть. Вся поверхность тела может быть разделена, таким образом, на три части: на передней имеется ламинарный пограничный слой, затем идёт область турбулентного слоя и, наконец, область за линией отрыва.

Турбулизация пограничного слоя существенно сказывается на всей картине течения в основном потоке. Именно, она приводит к заметному смещению линии отрыва по направлению к заднему

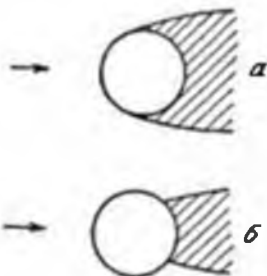


Рис. 20.

концу тела (т. е. вперёд по течению жидкости), так что турбулентный след за телом сужается (как это изображено схематически на рис. 20; область следа заштрихована). Это связано с тем, что в турбулентном пограничном слое сила трения о поверхность тела больше, чем в ламинарном (см. § 36, стр. 168), между тем как из приведённого в § 33 рассуждения (стр. 152) видно, что чем это трение больше, тем более затруднено образование отрыва. Поэтому в турбулентном слое отрыв происходит позднее, чем он произошёл бы в ламинарном пограничном слое, т. е. дальше (по ходу течения) на поверхности тела.

Сужение турбулентного следа приводит к уменьшению силы сопротивления. Таким образом, турбулизация пограничного слоя при больших числах Рейнольдса сопровождается падением коэффициента сопротивления. Коэффициент сопротивления падает в несколько раз в сравнительно узком интервале чисел Рейнольдса (в области Re , равных нескольким 10^5). Это явление называется *кризисом сопротивления*. Уменьшение коэффициента сопротивления настолько значительно, что само сопротивление, которое при постоянном C должно возрастать пропорционально квадрату скорости, в этой области чисел Рейнольдса даже убывает с возрастанием скорости.

Можно отметить, что на явление кризиса влияет степень турбулентности в исходном набегающем на тело потоке. Чем она больше, тем

раньше (при меньших Re) наступает турбулизация пограничного слоя. В связи с этим и падение коэффициента сопротивления начинается при меньших числах Рейнольдса (и растягивается по более широкому интервалу Re).

На рис. 21 и 22 приведён экспериментально найденный график зависимости коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса ($Re = \frac{Ud}{\nu}$) для шара (на рис. 21 — в логарифмическом, а на рис. 22 — в обыкновенном масштабе). При самых малых Re ($Re \ll 1$) коэффициент сопротивления падает по закону $C = \frac{24}{Re}$ (формула Стокса). Падение C продолжается затем более медленно вплоть до $Re \approx 5 \cdot 10^3$, где C достигает минимума, вслед за чем несколько повышается. В области чисел Рейнольдса $2 \cdot 10^4 - 2 \cdot 10^5$ имеет место закон (37,2), т. е. C практически остаётся постоянным. При $Re \approx 2 \cdot 10^5$ наступает кризис сопротивления, причём коэффициент сопротивления падает примерно в 4—5 раз.

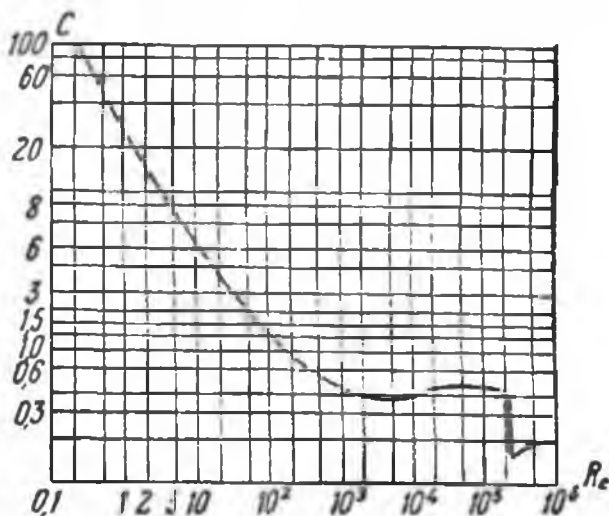


Рис. 21.

Для сравнения' приведём следующий пример обтекания, при котором не происходит явления кризиса. Рассмотрим обтекание плоского диска в направлении, перпендикулярном его плоскости. Место отрыва в этом случае заранее очевидно из чисто геометрических со-

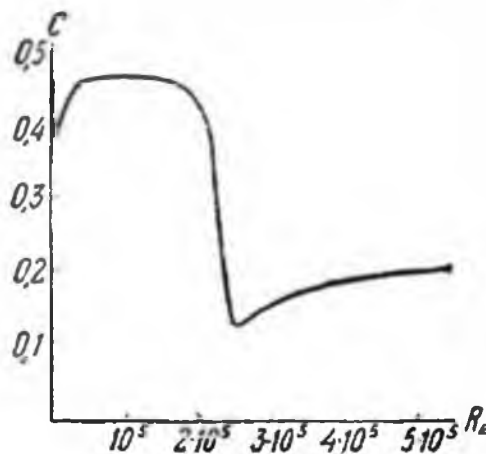


Рис. 22.

ображений, — ясно, что отрыв произойдет по краю диска и в дальнейшем уже никуда не будет смещаться. Поэтому при увеличении Re коэффициент сопротивления диска останется постоянным, не обнаруживая кризиса.

§ 38. Хорошо обтекаемые тела

Можно поставить вопрос о том, какова должна быть форма тела (при заданной, например, площади его сечения) для того, чтобы оно испытывало при движении в жидкости по возможности меньшее сопротивление.

Из всего предыдущего ясно, что для этого, во всяком случае, необходимо достичь по возможности более позднего отрыва, — отрыв должен произойти поближе к заднему концу тела так, чтобы турбулентный след был как можно более узким. Мы уже знаем, что возникновение отрыва

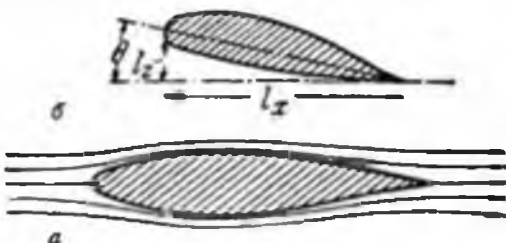


Рис. 23.

облегчается наличием быстрого падения давления вдоль обтекаемого тела. Поэтому необходимо придать телу такую форму, чтобы изменение давления вдоль него, — в той области, где давление падает, — происходило по возможности медленно и плавно. Этого можно достичь приданием телу удлинённой (в направлении обтекания) формы, причём оно плавно заостряется в направлении обтекания так, что стекающие с разных сторон поверхности тела потоки как бы плавно смыкаются без того, чтобы им пришлось где-либо обтекать какие-нибудь углы или же сильно поворачивать по отношению к направлению набегающего потока. Спереди же тело должно быть закруглено.

Всем этим требованиям в высокой степени удовлетворяют формы типа, изображённого на рис. 23. Изображённый, например, на рис. 23,а профиль может представлять собой сечение удлинённого тела вращения, но может быть и сечением тела с большим «размахом» (о таких телах мы будем условно говорить как о «крыльях»). Профиль сечения крыла может быть и не симметричным, как, например, на рис. 23,б. При обтекании тел такой формы отрыв происходит лишь в непосредственной близости острого конца (либо же вообще не происходит), в результате чего коэффициент сопротивления достигает относительно малых значений. Такие тела называют *хорошо обтекаемыми*.

В сопротивлении хорошо обтекаемых тел заметную роль играет эффект непосредственного трения жидкости о поверхность в пограничном слое. Этот эффект сравнительно очень мал и потому практически совершенно несущественен для плохо обтекаемых тел (о которых шла речь в предыдущем параграфе). В обратном же предельном случае обтекания плоской пластинки (параллельным ей потоком жидкости) он представляет собой единственный источник сопротивления (§ 32).

При обтекании хорошо обтекаемого крыла, наклонённого под малым углом к направлению потока (θ на рис. 23,б, так называемый «угол атаки»), развивается большая подъёмная сила F_z , при этом сопротивление F_x остаётся малым, и в результате отношение $\frac{F_z}{F_x}$ может до-

стичь больших значений (порядка 10—100). Так продолжается, однако, лишь до тех пор, пока угол атаки не делается слишком большим (обычно порядка 10°). После этого сопротивление начинает очень быстро возрастать, а подъёмная сила падать. Это явление обуславливается тем, что при больших углах атаки тело перестаёт удовлетворять условиям хорошей обтекаемости: место отрыва сильно смещается по поверхности тела по направлению к его переднему краю, в результате чего след делается значительно более широким. Надо иметь в виду, что в предельном случае тела очень малой толщины, т. е. плоской пластинки, хорошее обтекание имеет место только при очень малом угле атаки; отрыв происходит на переднем крае пластинки уже при малых углах её наклона к направлению потока.

Угол атаки θ отсчитывается, по определению, от того положения крыла, при котором подъёмная сила равна нулю. При малых углах атаки подъёмную силу можно разложить в ряд по степеням θ . Ограничиваясь первым членом разложения, мы можем считать силу F_z пропорциональной θ , или, что то же, размеру l_2 (см. рис. 23,6). Далее, по тем же соображениям размерности, как и для силы сопротивления, подъёмная сила должна быть пропорциональна ρU^2 . Вводи также длину размаха l_1 крыла, мы можем написать:

$$F_z = \text{const.} \rho U^2 l_1 l_2, \quad (38,1)$$

где const. — численная постоянная, зависящая только от формы крыла и не зависящая, в частности, от угла атаки. Для крыльев очень большого размаха можно считать подъёмную силу просто пропорциональной длине размаха; в этом случае const. зависит только от формы профиля поперечного сечения крыла.

Для вычисления подъёмной силы хорошо обтекаемого крыла можно пользоваться формулой Кутта-Жуковского, причём входящую в неё циркуляционную скорость Γ можно вычислить следующим образом. Везде, кроме области следа, движение потенциально; ввиду тонкости следа можно поэтому для определения распределения скоростей (а с ним и циркуляции Γ) решать задачу о потенциальном обтекании крыла идеальной жидкостью. Наличие следа учитывается при этом тем, что на параллельной направлению потока плоскости, отходящей от острого края крыла, потенциал должен испытывать скачок $\varphi_2 - \varphi_1 = \Gamma$. Что касается производных от φ , т. е. компонент скорости, то производная $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ должна оставаться непрерывной. Скачок $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$, т. е. нормальной к плоскости следа компоненты скорости, означал бы, что некоторое количество жидкости «втекает» в след; между тем, в приближении, в котором след рассматривается как не имеющая толщины поверхность, этот эффект должен отсутствовать. Далее, в этом же приближении на следе должно быть непрерывно также и давление. Поскольку изменение давления определяется согласно формуле Бернулли в первом приближении величиной $\rho U u_x = \rho U \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, то отсюда следует, что должна быть непрерывна и про-

изводная $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$. Производная же $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, т. е. компонента скорости в направлении размаха крыла, испытывает, вообще говоря, скачок.

Отметим, однако, что в идеальном случае бесконечно длинного крыла постоянного сечения мы имели бы дело с двухмерным (в плоскости x, z) движением жидкости и производная $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ была бы вообще равной нулю. В этом случае, следовательно, мы должны были бы искать решение, в котором испытывает скачок только сам потенциал при непрерывных его производных; другими словами, мы имели бы дело с неоднозначной функцией $\varphi(x, z)$, принимающей конечное приращение Γ при обходе по контуру, охватывающему обтекаемый профиль. В таком виде, однако, задача ещё не однозначна, так как допускает решение при произвольном, заранее заданном, скачке потенциала. Для получения однозначного ответа надо добавить ещё требование, чтобы скорость жидкости не обращалась в бесконечность на остром крае крыла (как это может иметь место при обтекании угловой точки). Естественно ожидать, что при таком условии решение задачи о чисто потенциальном обтекании приведёт к картине, наиболее близкой к истинной, при которой ведь скорость везде конечна. Решение становится после этого вполне однозначным и, в частности, определяется и нужный для вычисления подъёмной силы скачок потенциала.

Для вычисления же силы сопротивления хорошо обтекаемого тела можно поступить следующим образом¹⁾. Подобно тому, как мы поступали в § 30, пишем силу F_x в виде разности полных потоков x -компоненты импульса через плоскости $x=x_1$ и $x=x_2$, проходящие соответственно значительно позади и значительно впереди тела. Написав три компоненты скорости в виде $U + u_x, u_y, u_z$, будем иметь для компоненты Π_{xx} плотности потока импульса выражение $\Pi_{xx} = p + \rho(U + u_x)^2$, так что сила сопротивления есть

$$F_x = \left(\iint_{x=x_2} - \iint_{x=x_1} \right) [p + \rho(U + u_x)^2] dy dz.$$

Ввиду тонкости следа можно пренебречь (в интеграле по плоскости $x=x_1$) интегралом по площади его сечения и, таким образом, интегрировать везде только по области вне следа. Но вне следа движение потенциально и имеет место формула Бернулли

$$p + \frac{\rho}{2} (U + u)^2 = \text{const.} = p_0 + \frac{\rho U^2}{2},$$

откуда

$$p = p_0 - \rho U u_x - \frac{\rho}{2} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2).$$

Подставляя это выражение в F_x , найдём:

$$F_x = \left(\iint_{x=x_2} - \iint_{x=x_1} \right) \left[p_0 + \rho U^2 + \rho U u_x + \frac{\rho}{2} (u_x^2 - u_y^2 - u_z^2) \right] dy dz.$$

¹⁾ Этот вопрос был разрешён Прандтлем.

Разность интегралов от постоянной величины $p_0 + \rho U^2$ обращается в нуль; исчезает также разность интегралов от $\rho U u_x$, поскольку потоки жидкости $\iiint \rho u_x dy dz$ через переднюю и заднюю плоскости должны быть одинаковыми (расходом жидкости через сечение следа в рассматриваемом приближении пренебрегаем). Далее, отодвигая плоскость $x = x_2$ достаточно далеко вперёд от тела, будем иметь на ней очень малые значения скорости u , так что интегралом от $\frac{\rho}{2}(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)$ по этой плоскости можно пренебречь. Наконец, как было указано в § 30, при обтекании хорошо обтекаемого тела скорость u_x вне следа мала по сравнению с u_y и u_z . Поэтому в интеграле по плоскости $x = x_1$ можно пренебречь u_x^2 по сравнению с $u_y^2 + u_z^2$. Таким образом, получим:

$$F_x = \frac{\rho}{2} \iint (u_y^2 + u_z^2) dy dz, \quad (38,2)$$

где интегрирование производится по плоскости $x = \text{const.}$, расположенной на большом расстоянии позади тела, причём сечение следа исключается из области интегрирования.

Вычисленное таким образом сопротивление хорошо обтекаемого тела называют индуктивным. Его можно выразить через ту же циркуляцию скорости Γ , которая определяет и подъёмную силу. Для этого прежде всего заметим, что на достаточно большом расстоянии от тела скорость слабо зависит от координаты x и потому можно рассматривать $u_y(y, z)$, $u_z(y, z)$, как скорость некоторого двумерного движения, считая её независимой от x вовсе. Удобно ввести в качестве вспомогательной величины функцию тока (§ 9) так, что $u_y = \frac{\partial \psi}{\partial z}$, $u_z = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$. Таким образом,

$$F_x = \frac{\rho}{2} \iint \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right] dy dz,$$

где интегрирование по z производится от $+\infty$ до z_1 и от z_2 до $-\infty$ (рис. 13). Из потенциальности движения вне следа ($\text{rot } u = 0$) имеем $\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$. Применяя к написанному интегралу двумерную формулу Грина, получаем поэтому:

$$F_x = -\frac{\rho}{2} \oint \psi \frac{\partial \psi}{\partial n} dl,$$

где интегрирование производится по контуру, огибающему область интегрирования в исходном интеграле ($\frac{\partial}{\partial n}$ — дифференцирование по направлению внешней нормали к контуру). На бесконечности $\psi = 0$ и, следовательно, надо интегрировать по контуру поперечного сечения

следа (сечения плоскостью y, z), в результате чего получаем:

$$F_x = \frac{\rho}{2} \int \psi \left| \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_2 - \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_1 \right| dy.$$

Здесь надо интегрировать по dy по ширине следа, а стоящая в квадратных скобках разность есть скачок производной $\frac{\partial \psi}{\partial z}$ при прохождении через след. Замечая, что $\frac{\partial \psi}{\partial z} = u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$, имеем:

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_2 - \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_1 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_1 = \frac{d\Gamma}{dy},$$

так что

$$F_x = \frac{\rho}{2} \int \psi \frac{d\Gamma}{dy} dy.$$

Наконец, воспользуемся известной из теории потенциала формулой

$$\psi = -\frac{1}{2\pi} \int \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_2 - \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_1 \right] \ln r dl,$$

где интегрирование производится по некоторому плоскому контуру, r — расстояние от dl до точки, в которой разыскивается значение ψ , а в квадратных скобках стоит заданный скачок производной от ψ по направлению нормали к контуру¹⁾. В нашем случае контуром интегрирования является отрезок оси y , так что для значений функции $\psi(y, z)$ на оси y можно написать

$$\begin{aligned} \psi(y, 0) &= \frac{1}{2\pi} \int \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_1 - \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_2 \right] \ln |y - y'| dy' = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int \frac{d\Gamma(y')}{dy'} \ln |y - y'| dy'. \end{aligned}$$

Наконец, подставляя это в F_x , получим окончательно для индуктивного сопротивления следующую формулу²⁾:

$$F_x = -\frac{\rho}{4\pi} \iint \frac{d\Gamma(y)}{dy} \frac{d\Gamma(y')}{dy'} \ln |y - y'| dy dy'. \quad (38,3)$$

¹⁾ Эта формула определяет, в двумерной теории потенциала, потенциал, создаваемый заряженным плоским контуром с плотностью заряда, равной

$$\frac{1}{2\pi} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_2 - \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_1 \right].$$

²⁾ Во избежание недоразумений отметим, что тот факт, что при изменении единиц измерения длины стоящий под знаком интеграла логарифм увеличивается на постоянную, несущественен. Действительно, интеграл, отличающийся от написанного тем, что в нём вместо $\ln |y - y'|$ стоит const. , всё равно равен нулю, так как $\int \frac{d\Gamma}{dy} dy = \Gamma \Big| = 0$ (на краях следа Γ обращается в нуль).

Если увеличить все размеры по оси y в некоторое число раз (при неизменных Γ), то интеграл (38,3) не изменится. Это показывает, что полное индуктивное сопротивление крыла не изменяется, по порядку величины, при увеличении его «размаха». Другими словами, индуктивное сопротивление, отнесённое к единице длины крыла, падает с увеличением этой длины. В противоположность сопротивлению полная подъёмная сила $F_z = -\rho U \int \Gamma dy$ растёт примерно пропорционально размаху крыла, а отнесённая к единице длины — остаётся постоянной.

Задачи

1. Проверить, что наименьшее индуктивное сопротивление при заданных подъёмной силе F_z и размахе крыла $2l$ достигается при распределении Γ по закону $\Gamma = \text{const} \sqrt{l^2 - y^2}$ (где $-l \leq y \leq +l$).

Решение. Варьируя интеграл (38,3) и производя в нём интегрирование по частям, получаем для вариации δF_z :

$$\begin{aligned} \delta F_z &= -\frac{\rho}{4\pi} \iint_{-l}^{+l} \left[\frac{d\delta\Gamma}{dy} \frac{d\Gamma}{dy'} + \frac{d\Gamma}{dy} \frac{d\delta\Gamma}{dy'} \right] \ln|y-y'| dy dy' = \\ &= -\frac{\rho}{4\pi} \iint \left[\frac{\delta\Gamma}{y-y'} \frac{d\Gamma}{dy} - \frac{d\Gamma}{dy} \frac{\delta\Gamma}{y-y'} \right] dy dy' = \frac{\rho}{2\pi} \iint \frac{d\Gamma}{dy} \frac{\delta\Gamma}{y-y'} dy dy'. \end{aligned}$$

Для вариации же подъёмной силы имеем $\delta F_z = -\rho U \int \delta\Gamma dy$. Согласно известному способу определения условного экстремума приравняем нулю сумму $\delta F_z + \text{const} \cdot \delta F_z$, в результате чего получаем в качестве условия минимума уравнение вида

$$\int_{-l}^{+l} \frac{d\Gamma}{dy'} \frac{dy'}{y-y'} = \text{const}.$$

Легко убедиться в том, что при $\Gamma = \text{const} \sqrt{l^2 - y'^2}$ стоящий здесь интеграл действительно не зависит от y .

2. Определить форму следа, образующегося за хорошо обтекаемым крылом большого размаха при наличии подъёмной силы.

Решение. Отходящий от заднего края хорошо обтекаемого крыла плоский тонкий след при наличии подъёмной силы загибается; закон $z = z(x)$ этого загибания определяется уравнением $\frac{dz}{u_x - U} = \frac{dz}{u_x}$. Подставляя сюда согласно результатам задачи 5 § 30 $u_x \approx -\frac{f_2}{2\pi\rho U} \frac{1}{x}$ и пренебрегая u_x по сравнению с U , получим:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{f_2}{2\pi\rho U^2 x},$$

откуда

$$z = \text{const} - \frac{f_2}{2\pi\rho U^2} \ln x.$$

ГЛАВА V

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В ЖИДКОСТИ

§ 39. Общее уравнение переноса тепла

В конце § 2 было указано, что полная система гидродинамических уравнений должна содержать пять уравнений. Для жидкости, в которой имеют место процессы теплопроводности и внутреннего трения, одним из этих уравнений является попрежнему уравнение непрерывности; уравнения Эйлера заменяются уравнениями Навье-Стокса. Что же касается пятого уравнения, то для идеальной жидкости им является уравнение сохранения энтропии (2,6). В вязкой жидкости это уравнение, разумеется, не имеет места, поскольку в ней происходят необратимые процессы диссипации энергии.

В идеальной жидкости закон сохранения энергии выражается уравнением (5,1):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon \right) = -\operatorname{div} \left[\rho v \left(\frac{v^2}{2} + w \right) \right].$$

Слева стоит скорость изменения энергии единицы объема жидкости, а справа — дивергенция плотности потока энергии. В вязкой жидкости закон сохранения энергии, конечно, тоже имеет место: изменение полной энергии жидкости в некотором объеме (в 1 сек.) должно быть попрежнему равно полному потоку энергии через границы этого объема. Однако, самая плотность потока энергии выглядит теперь иным образом.

Прежде всего, помимо потока $\rho v \left(\frac{v^2}{2} + w \right)$, связанного с простым переносом массы жидкости при её движении, имеется ещё поток, связанный с процессами внутреннего трения. Этот второй поток выражается вектором $(\sigma'v)$ с компонентами σ'_{ik} (см. § 13). Этим, однако, не исчерпываются все дополнительные члены в потоке энергии.

Если температура жидкости не постоянна вдоль её объема, то наряду с обоними указанными механизмами переноса энергии будет происходить перенос тепла также и посредством так называемой теплопроводности. Под этим подразумевается непосредственный молекулярный перенос энергии из мест с более высокой в места с более низкой температурой. Он не связан с макроскопическим движением и происходит также и в неподвижной жидкости.

Обозначим через q плотность потока тепла, переносимого посредством теплопроводности. Поток q связан, некоторым образом, с изменением температуры вдоль жидкости. Эту зависимость можно написать сразу в тех случаях, когда градиент температуры в жидкости не слишком велик; практически в явлениях теплопроводности мы почти всегда имеем дело именно с такими случаями. Мы можем тогда разложить q в ряд по степеням градиента температуры, ограничившись первыми членами разложения. Постоянный член в этом разложении, очевидно, исчезает, поскольку q должно обращаться в нуль вместе с ∇T . Таким образом, получаем:

$$q = -\chi \nabla T.$$

Постоянная χ называется *коэффициентом теплопроводности*. Она всегда положительна, — это видно уже непосредственно из того, что поток энергии должен быть направлен из мест с более высокой в места с более низкой температурой, т. е. q и ∇T должны иметь противоположные направления. Коэффициент χ является, вообще говоря, функцией температуры и давления.

Таким образом, полная плотность потока энергии в жидкости при наличии вязкости и теплопроводности равна сумме:

$$\rho v \left(\frac{v^2}{2} + w \right) - (\sigma'v) - \chi \nabla T.$$

Соответственно этому, общий закон сохранения энергии выражается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho e \right) = - \operatorname{div} \left[\rho v \left(\frac{v^2}{2} + w \right) - (\sigma'v) - \chi \nabla T \right]. \quad (39,2)$$

Это уравнение можно было бы выбрать в качестве последнего из полной системы гидродинамических уравнений вязкой жидкости. Удобно, однако, придать ему другой вид, преобразовав его с помощью уравнений движения. Для этого вычислим производную по времени от энергии единицы объема жидкости, исходя из уравнений движения. Имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho e \right) = \frac{v^2}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho \frac{\partial e}{\partial t} + e \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Подставляя сюда $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ из уравнения непрерывности и $\frac{\partial v}{\partial t}$ из уравнения Навье-Стокса, получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho e \right) = - \frac{v^2}{2} \operatorname{div} \rho v - \rho (v \nabla) \frac{v^2}{2} - v \nabla p + v_i \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i^2} + \rho \frac{\partial e}{\partial t} - e \operatorname{div} \rho v.$$

Воспользуемся теперь термодинамическим соотношением

$$de = T ds - p dV = T ds + \frac{p}{\rho^2} d\rho,$$

откуда

$$\frac{\partial e}{\partial t} = T \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} = T \frac{\partial s}{\partial t} - \frac{p}{\rho^2} \operatorname{div} (\rho v).$$

Подставляя это и вводя тепловую функцию $w = e + \frac{p}{\rho}$, находим

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho e \right) = - \left(w + \frac{v^2}{2} \right) \operatorname{div} (\rho v) - \rho (v \nabla) \frac{v^2}{2} - v \nabla p + \rho T \frac{\partial s}{\partial t} + v_i \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i^2}.$$

Далее, из термодинамического соотношения $d w = T ds + \frac{1}{\rho} d p$ имеем

$$\nabla p = \nabla w - \rho T \nabla s.$$

Последний же член в правой стороне равенства можно написать в виде

$$v_l \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} (v_l \sigma'_{ik}) - \sigma'_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \equiv \operatorname{div} (v \sigma') - \sigma'_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_k}.$$

Подставляя эти выражения, прибавляя и вычитая $\operatorname{div} (\chi \nabla T)$, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon \right) = & - \operatorname{div} \left[\rho v \left(\frac{v^2}{2} + w \right) - (v \sigma') - \chi \nabla T \right] + \\ & + \rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + v \nabla s \right) - \sigma'_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_k} - \operatorname{div} (\chi \nabla T). \end{aligned}$$

Сравнивая это выражение для производной от энергии единицы объёма с выражением (39,2), получим следующее уравнение:

$$\rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + v \nabla s \right) = \sigma'_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_k} + \operatorname{div} (\chi \nabla T). \quad (39,3)$$

Мы будем называть это уравнение *общим уравнением переноса тепла*. В отсутствии вязкости и теплопроводности его правая сторона обращается в нуль и получается уравнение сохранения энтропии (2,6) идеальной жидкости.

Следует обратить внимание на следующее истолкование уравнения (39,3). Стоящее слева выражение есть не что иное, как умноженная на ρT полная производная от энтропии по времени: $\rho T \frac{ds}{dt} \cdot \frac{ds}{dt}$ определяет изменение энтропии данной передвигающейся в пространстве единицы массы жидкости; $T \frac{ds}{dt}$ есть, следовательно, количество получаемого этой единицей массы в единицу времени тепла, а $\rho T \frac{ds}{dt}$ — количество тепла, отнесённое к единице объёма. Из (39,3) мы видим поэтому, что количество получаемого единицей объёма жидкости тепла есть

$$\sigma'_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_k} + \operatorname{div} (\chi \nabla T).$$

Первый член здесь представляет собой энергию, диссипируемую в виде тепла благодаря вязкости, а второй есть тепло, приносимое в рассматриваемый объём посредством теплопроводности.

Раскроем член $\sigma'_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_k}$ в (39,3), подставив в него выражение (13,3) для σ'_{ik} . Имеем:

$$\sigma'_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_k} = \eta \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_l}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_l} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}.$$

Легко проверить, что первый член может быть написан в виде

$$\frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial v_l}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_l} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2,$$

а во втором имеем:

$$\zeta \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \delta_{lk} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} = \zeta \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \equiv \zeta (\operatorname{div} v)^2.$$

Таким образом, уравнение (39,3) приобретает вид

$$\rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + v \nabla s \right) = \operatorname{div} (\chi \nabla T) + \frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial v_l}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_l} - \frac{2}{3} \delta_{lk} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2 + \zeta (\operatorname{div} v)^2. \quad (39,4)$$

В результате необратимых процессов теплопроводности и внутреннего трения энтропия жидкости возрастает. Речь идёт при этом, конечно, не об энтропии каждого элемента объёма жидкости в отдельности, а о полной энтропии всей жидкости, равной интегралу $\int \rho s dV$. Изменение энтропии в единицу времени определяется производной

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho s dV = \int \frac{\partial(\rho s)}{\partial t} dV.$$

С помощью уравнения непрерывности и уравнения (39,4) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho s)}{\partial t} &= \rho \frac{\partial s}{\partial t} + s \frac{\partial \rho}{\partial t} = \\ &= -s \operatorname{div} \rho v - \rho v \nabla s + \frac{1}{T} \operatorname{div} (\chi \nabla T) + \frac{\eta}{2T} \left(\frac{\partial v_l}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_l} - \frac{2}{3} \delta_{lk} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2 + \\ &\quad + \frac{\zeta}{T} (\operatorname{div} v)^2. \end{aligned}$$

Первые два члена дают в сумме $-\operatorname{div}(\rho s v)$. Интеграл по объёму от этого члена преобразуется по теореме Гаусса в интеграл от потока энтропии $\rho s v$ по поверхности. Рассматривая неограниченный объём жидкости, покоящейся на бесконечности, мы можем стремиться граничную поверхность на бесконечность; тогда подынтегральное выражение в поверхностном интеграле обращается в нуль и интеграл исчезает. Интеграл от третьего члена преобразуется следующим образом:

$$\int \frac{1}{T} \operatorname{div} (\chi \nabla T) dV = \int \operatorname{div} \left(\frac{\chi \nabla T}{T} \right) dV + \int \frac{\chi (\nabla T)^2}{T^2} dV.$$

Считая, что температура жидкости на бесконечности достаточно быстро стремится к постоянному пределу, преобразуем первый интеграл в интеграл по бесконечно удалённой поверхности, на которой $\nabla T = 0$, так что интеграл тоже исчезает.

В результате получается:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int \rho s dV &= \int \frac{\chi (\nabla T)^2}{T^2} dV + \int \frac{\eta}{2T} \left(\frac{\partial v_l}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_l} - \frac{2}{3} \delta_{lk} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2 dV + \\ &\quad + \int \frac{\zeta}{T} (\operatorname{div} v)^2 dV. \quad (39,5) \end{aligned}$$

Первый член представляет собой увеличение энтропии благодаря теплопроводности, а остальные два — увеличение энтропии, обусловленное внутренним трением.

Энтропия может только возрастать, т. е. сумма (39,5) должна быть положительна. С другой стороны, в каждом из членов этой суммы под-интегральное выражение может быть отлично от нуля даже при равенстве нулю двух других интегралов. Поэтому каждый из этих интегралов должен быть всегда положителен. Отсюда следует наряду с известной уже нам положительностью χ и η также и положительность второго коэффициента вязкости ζ .

При выводе формулы (39,1) молчаливо подразумевалось, что поток тепла зависит только от градиента температуры и не зависит от градиента давления. Это предположение, а priori не очевидное, может быть оправдано теперь следующим образом. Если бы в q входил член, пропорциональный ∇p , то в выражении (39,5) для изменения энтропии прибавился бы ещё член, содержащий под интегралом произведение $\nabla p \nabla T$. Поскольку это последнее может быть как положительным, так и отрицательным, то и производная от энтропии по времени не была бы существенно положительной, что невозможно.

§ 40. Теплопроводность в несжимаемой жидкости

Общее уравнение теплопроводности в форме (39,3) или (39,4) может быть в различных случаях значительно упрощено.

Если скорости движения жидкости малы по сравнению со скоростью звука, то возникающие в результате движения изменения давления настолько малы, что вызываемым ими изменением плотности (и других термодинамических величин) можно пренебречь. Однако, неравномерно нагретая жидкость не является всё же при этом вполне «несжимаемой» в том смысле, как это понималось выше. Дело в том, что плотность меняется ещё и под влиянием изменения температуры; этим изменением плотности, вообще говоря, нельзя пренебречь, и потому даже при достаточной малости скоростей плотность неравномерно нагретой жидкости всё же нельзя считать постоянной. При определении производных от термодинамических величин в рассматриваемом случае надо, следовательно, считать постоянным давление, а не плотность. Так, имеем:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \nabla s = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p \nabla T$$

и поскольку $T \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p$ есть теплоёмкость c_p при постоянном давлении, то

$$T \frac{\partial s}{\partial t} = c_p \frac{\partial T}{\partial t}, \quad T \nabla s = c_p \nabla T.$$

Уравнение (39,3) принимает вид:

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v \nabla T\right) = \operatorname{div} (\chi \nabla T) + \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \quad (40,1)$$

Для того, чтобы в уравнениях движения неравномерно нагретой жидкости можно было считать плотность постоянной, необходимо (помимо малости отношения скорости жидкости к скорости звука),

чтобы имеющиеся в жидкости разности температур были достаточно малы. Подчеркиём, что здесь речь идёт именно об абсолютных значениях разностей температур, а не о градиенте температуры. Тогда жидкость можно считать «несжимаемой» в том же смысле, как это подразумевалось раньше; в частности, уравнение непрерывности для неё будет выглядеть просто как $\operatorname{div} v = 0$. Считая разности температур малыми, мы будем пренебрегать также и температурным изменением величин η , χ , c_p , т. е. будем считать их постоянными. Написав член $\sigma_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}$ в том виде, как это сделано в (39,4), мы получим в результате уравнение передачи тепла в несжимаемой жидкости в следующем сравнительно простом виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v \nabla T = \chi \Delta T + \frac{v}{2c_p} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2, \quad (40,2)$$

где $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ есть кинематическая вязкость, а вместо χ введён так называемый коэффициент температуропроводности, определяемый как

$$\chi = \frac{\kappa}{\rho c_p}. \quad (40,3)$$

В особенности просто выглядит уравнение передачи тепла в неподвижной жидкости, где перенос энергии обизан целиком теплопроводности. Опуская в (40,2) члены, содержащие скорость, получаем просто:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T. \quad (40,4)$$

Это уравнение называется в математической физике *уравнением теплопроводности* или *уравнением Фурье*. Оно может быть выведено, разумеется, и гораздо более простым образом, без помощи общего уравнения переноса тепла в движущейся жидкости. Согласно закону сохранения энергии количество тепла, поглощающееся в некотором объёме в единицу времени, должно быть равно полному потоку тепла, «втекающего» в этот объём через ограничивающую его поверхность. Как мы знаем, такой закон сохранения может быть выражен в виде «уравнения непрерывности» для количества тепла. Это уравнение получается приравниванием количества тепла, поглощающегося в единице объёма жидкости в единицу времени, дивергенции плотности потока тепла, взятой с обратным знаком. Первое из них равно $\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$; здесь должна быть взята теплоёмкость c_p , так как вдоль неподвижной жидкости давление должно быть, разумеется, постоянным. Приравнявая это выражение — $\operatorname{div} q = \chi \Delta T$, получим как раз уравнение (40,4).

Необходимо отметить, что применимость уравнения теплопроводности (40,4) к жидкостям практически сильно ограничена. Дело в том, что в жидкостях, реально находящихся в поле тяжести, уже малый градиент температуры приводит, в большинстве случаев, к возникновению заметного движения (так называемая конвекция, — см. § 46).

Поэтому реально можно иметь дело с неравномерным распределением температуры в неподвижной жидкости, разве только, если градиент температуры направлен противоположно силе тяжести или же если жидкость очень вязкая. Тем не менее, изучение уравнения теплопроводности в форме (40,4) весьма существенно, — мы увидим в дальнейшем (§ 142), что уравнением такого вида описываются процессы теплопроводности в твёрдых телах. Имея это в виду, мы займёмся здесь и в §§ 41, 42 более подробным его исследованием.

Если распределение температуры в неравномерно нагретой неподвижной среде поддерживается (посредством некоторых внешних источников тепла) постоянным во времени, то уравнение теплопроводности принимает вид

$$\Delta T = 0. \quad (40,5)$$

Таким образом, стационарное распределение температуры в неподвижной среде описывается уравнением Лапласа. В более общем случае, когда коэффициент χ нельзя считать постоянным, вместо (40,5) имеем уравнение:

$$\operatorname{div}(\chi \nabla T) = 0. \quad (40,6)$$

Если в жидкости имеются посторонние источники тепла, то к уравнению теплопроводности должен быть добавлен соответствующий дополнительный член (таким источником тепла может, например, являться нагревание электрическим током). Пусть Q есть количество тепла, выделяемое этими источниками в единице объёма жидкости в единицу времени; Q является, вообще говоря, функцией от координат и от времени. Тогда условие баланса тепла в единице объёма, т. е. уравнение теплопроводности, напишется в виде

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T + Q. \quad (40,7)$$

Напишем граничные условия для уравнения теплопроводности, которые должны иметь место на границе двух сред. Прежде всего, на границе должны быть равны температуры обеих сред:

$$T_1 = T_2. \quad (40,8)$$

Кроме того, поток тепла, выходящего из одной среды, должен быть равен потоку, входящему во вторую среду. Выбирая систему координат, в которой данный участок границы пойдёт, можно написать это условие в виде:

$$\chi_1 \nabla T_1 \, df = \chi_2 \nabla T_2 \, df$$

для каждого элемента df поверхности раздела. Написав $\nabla T \, df = = \frac{\partial T}{\partial n} \, df$, где $\frac{\partial T}{\partial n}$ — производная от T по направлению нормали к поверхности, получим граничное условие в виде

$$\chi_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} = \chi_2 \frac{\partial T_2}{\partial n}. \quad (40,9)$$

Если на поверхности раздела имеются посторонние источники тепла, выделяющие количество тепла $Q^{(s)}$ на единице площади этой поверхности в единицу времени, то вместо условия (40,9) надо написать

$$\alpha_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} - \alpha_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} = Q^{(s)}, \quad (40,10)$$

Задача

В неподвижную жидкость, в которой поддерживается постоянный градиент температуры, погружен шар. Определить возникающее стационарное распределение температуры в жидкости и шаре.

Решение. Распределение температуры определяется во всем пространстве уравнением $\Delta T = 0$ с граничными условиями

$$T_1 = T_2, \quad \alpha_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} = \alpha_2 \frac{\partial T_2}{\partial r}$$

при $r=R$ (R — радиус шара; величины с индексами 1 и 2 относятся соответственно к шару и жидкости) и условием $\nabla T = A$ на бесконечности (A — заданный градиент температуры). В силу симметрии условий задачи A есть единственный вектор, которым должно определяться искомое решение.

Таковыми решениями уравнения Лапласа являются $\text{const. } Ar$ и $\text{const. } A \nabla \frac{1}{r}$.

Замечая, кроме того, что решение должно оставаться конечным в центре шара, ищем температуры T_1 и T_2 в виде

$$T_1 = c_1 Ar, \quad T_2 = c_2 A \frac{r}{r_0} + Ar;$$

постоянные c_1 и c_2 определяются из условий при $r=R$, и в результате находим:

$$T_1 = \frac{3\alpha_2}{\alpha_1 + 2\alpha_2} Ar, \quad T_2 = \left[1 + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_1 + 2\alpha_2} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right] Ar.$$

§ 41. Теплопроводность в неограниченной среде

Рассмотрим теплопроводность в неограниченной неподвижной среде. Наиболее общей постановкой задачи является следующая. В начальный момент времени $t=0$ задано распределение температуры во всем пространстве:

$$T = T_0(x, y, z) \text{ при } t=0,$$

где T_0 — некоторая заданная функция координат. Требуется определить распределение температуры во всякий последующий момент времени t .

Разложим искомую функцию T в интеграл Фурье по координатам:

$$T = \int T_k(t) e^{i\alpha x} d\tau_k, \quad d\tau_k = dk_x dk_y dk_z, \quad (41,1)$$

где коэффициенты разложения определяются посредством

$$T_k(t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int T(x', y', z', t) e^{-i\alpha x'} dV', \quad dV' = dx' dy' dz'.$$

Подставляя в уравнение (40,4) выражение (41,1) для T , получаем:

$$\int \left(\frac{dT_k}{dt} + k^2 \chi T_k \right) e^{\chi t} d\tau_k = 0,$$

откуда

$$\frac{dT_k}{dt} + k^2 \chi T_k = 0.$$

Из этого уравнения находим зависимость T_k от времени:

$$T_k = e^{-k^2 \chi t} T_{0k}.$$

Подставляя это в (41,1), получаем:

$$T = \int T_{0k} e^{-k^2 \chi t} e^{\chi t} d\tau_k. \quad (41,2)$$

Поскольку при $t=0$ должно быть $T = T_0(x, y, z)$, то ясно, что T_{0k} представляют собой коэффициенты разложения функции $T_0(x, y, z)$ в интеграл Фурье:

$$T_{0k} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int T_0(x', y', z') e^{-i k x'} dV'.$$

Наконец, подставляя это выражение в (41,2), получаем:

$$T = \frac{1}{(2\pi)^3} \iint T_0(x', y', z') e^{-k^2 \chi t} e^{\chi t} dV' d\tau_k.$$

Интегрирование по $d\tau_k$ можно произвести. Интеграл по $d\tau_k$ разбивается на произведение трёх одинаковых интегралов, каждый из которых имеет вид

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k_x^2 \chi t} e^{i k_x (x-x')} dk_x = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\chi}{2} k_x^2} \cos k_x (x-x') dk_x$$

(аналогичный интеграл с \sin вместо \cos исчезает в силу нечётности функции \sin). С помощью известной формулы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \cos \beta x dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}} \quad (\alpha > 0)$$

получаем окончательно для $T(x, y, z, t)$ следующее выражение:

$$T(x, y, z, t) = \frac{1}{8(\pi \chi t)^{3/2}} \int T_0(x', y', z') e^{-\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}{4\chi t}} dV'. \quad (41,3)$$

Эта формула полностью решает поставленную задачу, определяя распределение температуры в любой момент времени по её заданному распределению в начальный момент времени.

Если начальное распределение температуры является функцией только от одной координаты, скажем, x , то, проинтегрировав в (41,3) интегрирование по $dy' dz'$, находим:

$$T(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} T_0(x') e^{-\frac{(x-x')^2}{4t}} dx'. \quad (41,4)$$

Некоторые существенные качественные результаты можно получить из рассмотрения следующего частного случая начального распределения температуры. Пусть при $t=0$ температура равна нулю во всём пространстве, за исключением бесконечно малого объёма в начале координат, где она принимает бесконечно большое значение, но так, что полное количество тепла, пропорциональное интегралу $\int T_0 dV$, остаётся конечным. Такое распределение температуры можно представить с помощью δ -функций¹⁾ в виде

$$T_0(x, y, z) = \text{const. } \delta(x) \delta(y) \delta(z).$$

¹⁾ δ -функция $\delta(x)$ определяется следующим образом. При всех $x \neq 0$ имеем $\delta(x) = 0$, а при $x=0$ $\delta(x)$ обращается в бесконечность, причём так, что её интеграл остаётся конечным и равным единице:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$$

(вместо $\pm \infty$ в этом интеграле можно выбрать любые другие пределы, такие, чтобы точка $x=0$ находилась между ними). Вообще

$$\int \delta(x-a) dx = 1,$$

если точка $x=a$ заключена между пределами интегрирования; в противном случае интеграл равен нулю. Очевидно, что δ -функция является чётной: $\delta(-x) = \delta(x)$. В приложениях особенно важным является следующее свойство

δ -функции. Рассмотрим интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x) dx$, где $f(x)$ — некоторая функция, конечная при $x=0$. Поскольку $\delta(x) = 0$ во всей области интегрирования кроме точки $x=0$, то в подынтегральном выражении можно написать $f(0)$ вместо $f(x)$ и вывести $f(0)$ из-под знака интеграла. В результате получаем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0).$$

Эта формула является частным случаем более общей формулы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a).$$

Интегрирование в формуле (41,3) сводится при такой функции $T_0(x', y', z')$ просто к замене x', y', z' нулями, в результате чего получаем:

$$T(r, t) = \text{const.} \frac{1}{8(\pi\chi t)^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{4\chi t}} \quad (41,5)$$

(r — расстояние от начала координат). По мере возрастания времени температура в точке $r=0$ падает обратно пропорционально $t^{3/2}$. Одновременно повышается температура в окружающем пространстве, причём область заметно отличной от нуля температуры постепенно расширяется (рис. 24). Ход этого расширения определяется экспоненциальным множителем в (41,5). Мы видим, что порядок величины l размеров этой области определяется соотношением $l^2/\chi t \sim 1$, откуда

$$l \sim \sqrt{\chi t}, \quad (41,6)$$

т. е. растёт пропорционально квадратному корню из времени.

Формулу (41,6) можно истолковать с несколько иной точки зрения. Пусть l есть порядок величины размеров тела. Тогда мы можем утверждать, что если это тело было неравномерно нагрето, то порядок величины времени t , в течение которого температуры в разных точках тела заметно выравняются, равен

$$t \sim \frac{l^2}{\chi}. \quad (41,7)$$

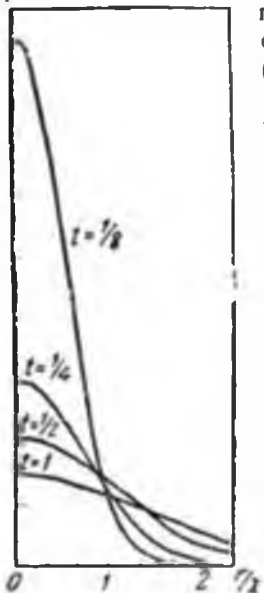


Рис. 24.

Время t , которое можно назвать «временем релаксации» для процессов теплопроводности, пропорционально квадрату размеров тела и обратно пропорционально коэффициенту теплопроводности.

§ 42. Теплопроводность в ограниченной среде

Теперь мы рассмотрим некоторые случаи теплопроводности в ограниченной неподвижной среде. В таких задачах задание начального распределения температуры недостаточно для однозначности решения, и необходимо ещё задание крайних условий на ограничивающей среде поверхности.

Мы ограничимся здесь исследованием теплопроводности в среде, ограниченной с одной стороны плоскостью $x=0$ и неограниченной с другой стороны (со стороны $x > 0$).

Рассмотрим сначала случай, когда на граничной поверхности среды поддерживается заданная постоянная температура. Эту температуру мы примем условно за нуль, т. е. будем отсчитывать от неё температуру

в других точках среды. В начальный момент времени попрежнему задано распределение температуры во всей среде. Таким образом, граничные и начальные условия суть:

$$T=0 \text{ при } x=0; \quad T=T_0(x, y, z) \text{ при } t=0, \quad x>0. \quad (42,1)$$

Решение уравнения теплопроводности с этими условиями можно свести к решению того же уравнения для среды, неограниченной в обоих направлениях оси x , при помощи следующего искусственного приёма. Представим себе, что среда распространяется и по левую сторону от плоскости $x=0$, причём в начальный момент времени распределение температуры в этой части среды описывается той же функцией T_0 , но только взятой с обратным знаком. Другими словами, в начальный момент времени распределение температуры во всём пространстве описывается некоторой функцией, нечётной по переменной x , т. е. такой, что

$$T_0(-x, y, z) = -T_0(x, y, z). \quad (42,2)$$

Из равенства (42,2) следует, что $T_0(0, y, z) = -T_0(0, y, z) = 0$, т. е. требуемое граничное условие (42,1) автоматически выполнено в начальный момент времени, и мы увидим из получающегося решения, что оно будет выполнено и во всякий другой момент времени.

Таким образом, задача свелась к решению уравнения (40,4) в неограниченной среде, с начальной функцией $T_0(x, y, z)$, удовлетворяющей (42,2), и без какого бы то ни было граничного условия. Поэтому мы можем воспользоваться непосредственно общей формулой (41,3).

Разобьём в (41,3) область интегрирования по dx' на две части: от $-\infty$ до 0 и от 0 до $+\infty$, и воспользуемся соотношением (42,2). Мы получим тогда:

$$T(x, y, z, t) = \frac{1}{8(\pi_1 t)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} T_0(x', y', z') \left\{ e^{-\frac{(x-x')^2}{4\lambda t}} - e^{-\frac{(x+x')^2}{4\lambda t}} \right\} e^{-\frac{(y-y')^2 + (z-z')^2}{4\lambda t}} dx' dy' dz'. \quad (42,3)$$

Эта формула полностью решает поставленную задачу, определяя температуру во всей среде, т. е. при всех $x > 0$. При $x=0$, она, действительно, даёт $T=0$.

Если начальное распределение температуры зависит только от x , то формула (42,3) приобретает вид

$$T(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi_1 t}} \int_0^{\infty} T_0(x') \left\{ e^{-\frac{(x-x')^2}{4\lambda t}} - e^{-\frac{(x+x')^2}{4\lambda t}} \right\} dx'. \quad (42,4)$$

В качестве примера рассмотрим распределение температуры в среде, если в начальный момент везде, кроме $x=0$, температура была равна заданной постоянной величине, которую, не ограничивая общности,

можно положить равной — 1; температура же на плоскости $x = 0$ всё время равна 0. Соответствующее решение получается непосредственно подстановкой $T_0(x) = -1$ в (42,4). Разобьём интеграл в (42,4) на два интеграла и в каждом из них произведём замену переменных типа

$$\frac{x^2 - x}{2\sqrt{\chi^2 t}} = \xi.$$

Тогда мы получим для $T(x, t)$ следующее выражение:

$$T(x, t) = \frac{1}{2} \left\{ \Phi \left(-\frac{x}{2\sqrt{\chi^2 t}} \right) - \Phi \left(\frac{x}{2\sqrt{\chi^2 t}} \right) \right\},$$

где функция $\Phi(x)$ определяется как

$$\Phi(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi \quad (42,5)$$

и называется интегралом Гаусса (заметим, что $\Phi(\infty) = 1$). Поскольку

$$\Phi(-x) = -\Phi(x),$$

то мы получаем окончательно

$$T(x, t) = -\Phi \left(\frac{x}{2\sqrt{\chi^2 t}} \right). \quad (42,6)$$

На рис. 25 изображено распределение температуры в разные моменты времени. С возрастанием t оно всё более сглаживается.

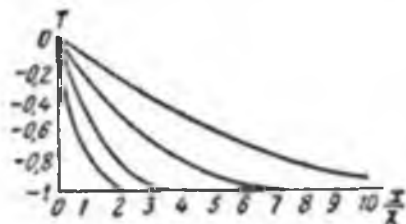


Рис. 25.

Рассмотрим теперь случай, когда граничная поверхность тела теплоизолирована. Другими словами, на плоскости $x = 0$ тепловой поток должен отсутствовать, а поскольку этот поток пропорционален $\frac{\partial T}{\partial x}$, то должно быть $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$. Таким образом, имеем теперь следующие граничные и начальные условия:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0; \quad T = T_0(x, y, z) \quad \text{при } t = 0, \quad x > 0. \quad (42,7)$$

Для нахождения решения поступим аналогично тому, как мы делали в предыдущем случае. Именно, опять представим себе среду неограниченной в обе стороны от плоскости $x = 0$. Распределение же температуры в начальный момент времени представим себе теперь симметричным плоскости $x = 0$. Другими словами, функцию $T_0(x, y, z)$ предположим теперь чётной по переменной x :

$$T_0(-x, y, z) = T_0(x, y, z). \quad (42,8)$$

Тогда $\frac{\partial T_0(x, y, z)}{\partial x} = -\frac{\partial T_0(-x, y, z)}{\partial x}$ и при $x = 0$ будет $\frac{\partial T_0}{\partial x} = 0$. Из полу-

чающегося решения видно, что это условие автоматически выполняется и во все последующие моменты времени.

Производя опять все произведённые выше вычисления, но только пользуясь (42,8) вместо (42,2), получим общее решение поставленной задачи в виде

$$T(x, y, z, t) = \frac{1}{8(\sqrt{\pi}t)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} T_0(x', y', z') \left\{ e^{-\frac{(x'-x)^2}{4\lambda t}} + e^{-\frac{x^2 + x'^2}{4\lambda t}} \right\} e^{-\frac{(y'-y)^2 + (z'-z)^2}{4\lambda t}} dx' dy' dz'. \quad (42,9)$$

Если T_0 есть функция только от x , то

$$T(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda t}} \int_0^{\infty} T_0(x') \left\{ e^{-\frac{(x'-x)^2}{4\lambda t}} + e^{-\frac{(x'+x)^2}{4\lambda t}} \right\} dx'. \quad (42,10)$$

Перейдём теперь к задачам с другого рода граничными условиями, тоже допускающими решение уравнения теплопроводности в общем виде. Рассмотрим среду, ограниченную плоскостью $x=0$, через которую извне подводится поток тепла, являющийся заданной функцией времени. Другими словами, имеем граничные и начальные условия:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -f(t) \text{ при } x=0; \quad T=0 \text{ при } t=-\infty, x>0, \quad (42,11)$$

где $f(t)$ — заданная функция. Предварительно решим вспомогательную задачу, в которой $f(t) = \delta(t)$. Легко сообразить, что эта задача физически эквивалентна задаче о распространении тепла в неограниченной среде от точечного источника, содержащего заданное полное количество тепла [т. е. задаче с начальным условием $T = \delta(x)$ при $t=0$; согласно (41,4) решение этой задачи есть

$$T(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda t}} e^{-\frac{x^2}{4\lambda t}}$$

Действительно, граничное условие $-x \frac{\partial T}{\partial x} = \chi \delta(t)$ при $x=0$ физически означает, что через каждую единицу площади плоскости $x=0$ мгновенно подводится количество тепла, равное χ . В задаче же с условием $T = \delta(x)$ при $t=0$ на той же площади в начальный момент времени сконцентрировано количество тепла c_p , из которого половина распространяется затем в направлении положительных x (а другая половина — к отрицательным x). Поэтому ясно, что искомое решение первой задачи получится просто путём умножения решения второй задачи на $2 \frac{\chi}{c_p} = 2\chi$:

$$T(x, t) = \sqrt{\frac{\chi}{c_p}} e^{-\frac{x^2}{4\lambda t}}$$

Поскольку, в силу линейности уравнений, эффекты от тепла, подводимого в различные моменты времени, просто складываются, то искомое общее решение уравнения теплопроводности с условиями (42,11) есть

$$T(x, t) = \int_{-\infty}^t \sqrt{\frac{1}{\pi(t-\tau)}} f(\tau) e^{-\frac{x^2}{4\kappa(t-\tau)}} d\tau. \quad (42,12)$$

В частности, на самой плоскости $x = 0$ температура меняется по закону:

$$T(0, t) = \int_{-\infty}^t \sqrt{\frac{1}{\pi(t-\tau)}} f(\tau) d\tau. \quad (42,13)$$

С помощью этих результатов можно непосредственно получить решение другой задачи, в которой заданной функцией времени является сама температура T на плоскости $x = 0$:

$$T = T_0(t) \text{ при } x = 0; \quad T = 0 \text{ при } t = -\infty, x > 0. \quad (42,14)$$

Для этого замечаем, что если некоторая функция $T(x, t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности, то этому же уравнению удовлетворяет и производная $\frac{\partial T}{\partial x}$. С другой стороны, дифференцируя по x выражение (42,12), получим:

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = - \int_{-\infty}^t \frac{x f(\tau)}{2\sqrt{\pi\kappa}(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4\kappa(t-\tau)}} d\tau.$$

Это есть функция, удовлетворяющая уравнению теплопроводности, причём $-f(t)$ есть [согласно (42,11)] её же значение при $x = 0$; очевидно, что она и даёт искомое решение задачи с условиями (42,14). Нанеся $T(x, t)$ вместо $\frac{\partial T}{\partial x}$ и $T_0(t)$ вместо $-f(t)$, получаем таким образом:

$$T(x, t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi\kappa}} \int_{-\infty}^t \frac{T_0(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4\kappa(t-\tau)}} d\tau. \quad (42,15)$$

Для потока тепла $q = -\gamma \frac{\partial T}{\partial x}$ через граничную поверхность $x = 0$ получаем после короткого преобразования:

$$q = \frac{\gamma x}{\sqrt{\pi\kappa}} \int_{-\infty}^t \frac{dT_0(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}. \quad (42,16)$$

Задача

Определять распределение температуры вокруг сферической поверхности (радиуса R), поддерживаемой при температуре $T = T_0(t)$.

Решение. Уравнение теплопроводности для центрально-симметричного распределения температуры в сферических координатах есть $\frac{\partial T}{\partial x} = \gamma \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2}$.

Подстановкой $T(r, t) = \frac{F(r, t)}{r}$ оно приводится к уравнению $\frac{\partial F}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}$ типа одномерного уравнения теплопроводности. Поэтому искомое решение можно написать непосредственно на основании решения (42,15) в виде

$$T(r, t) = \frac{R(r-R)}{2r\sqrt{\pi\chi}} \int_{-\infty}^t \frac{T_0(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{r-R}{\chi(t-\tau)}} d\tau.$$

§ 43. Закон подобия для теплопередачи

Процессы теплопередачи в жидкости осложняются, по сравнению с теплопередачей в твёрдых телах, возможностью движения жидкости. Погружённое в движущуюся жидкость нагретое тело охлаждается значительно быстрее, чем в неподвижной жидкости, где теплопередача происходит только с помощью процессов теплопроводности. О движении неравномерно нагретой жидкости говорят как о *конвекции*.

Будем предполагать, что имеющиеся в жидкости разности температур достаточно малы для того, чтобы её физические свойства можно было считать не зависящими от температуры. С другой стороны, эти разности будут предполагаться настолько большими, чтобы по сравнению с ними можно было пренебречь изменениями температуры, обусловленными выделением тепла, связанным с диссипацией энергии путём внутреннего трения (см. § 45). Тогда в уравнении (40,2) может быть опущен член, содержащий вязкость, так что остаётся

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (v\nabla)T = \chi \Delta T, \quad (43,1)$$

где $\chi = \frac{\kappa}{\rho c_p}$ есть коэффициент температуропроводности. Это уравнение вместе с уравнением Навье-Стокса и уравнением непрерывности полностью описывает конвекцию в рассматриваемых условиях.

В дальнейшем мы будем интересоваться только стационарным конвекционным движением¹⁾. Тогда все производные по времени выпадают, и мы получаем следующую систему основных уравнений:

$$v\nabla T = \chi \Delta T, \quad (43,2)$$

$$(v\nabla)v = -\nabla \frac{P}{\rho} + \nu \Delta v, \quad \text{div } v = 0. \quad (43,3)$$

В эту систему, в которой неизвестными функциями являются v , T и $\frac{P}{\rho}$, входят всего два постоянных параметра: ν и χ . Кроме того, решение этих уравнений зависит, через посредство граничных условий, ещё от некоторого характеристического параметра длины l , скорости U и характеристической разности температур $T_1 - T_0$.

¹⁾ Для того, чтобы конвекция могла быть стационарной, необходимо, строго говоря, чтобы в соприкасающихся с жидкостью твёрдых телах находились источники тепла, поддерживающие их при постоянной температуре.

Первые два определяют, как всегда, размеры фигурирующих в задаче твёрдых тел и скорость основного потока жидкости, а третий — разность температур между жидкостью и твёрдыми телами.

При составлении безразмерных величин из имеющихся в нашем распоряжении параметров возникает вопрос о том, какую размерность следует приписать температуре. Для этого замечаем, что температура определяется уравнением (43,2), являющимся линейным и однородным по T . Поэтому температура может быть умножена, без нарушения уравнений, на произвольный постоянный множитель. Другими словами, это значит, что единицы для измерения температуры могут быть выбраны произвольным образом. Возможность такого преобразования температуры может быть учтена формально посредством приписывания ей некоторой особой размерности, которая бы не входила в размерности остальных величин. Таковой является как раз размерность градуса — единицы, в которой температура обычно и измеряется.

Таким образом, конвекция характеризуется в рассматриваемых условиях пятью параметрами со следующими размерностями:

$$[\nu] = [\chi] = \text{см}^2/\text{сек}, [U] = \text{см}/\text{сек}, [l] = \text{см}, [T_1 - T_0] = \text{град.}$$

Из них можно составить две независимые безразмерные комбинации. В качестве таковых мы выберем число Рейнольдса $Re = \frac{Ul}{\nu}$ и так называемое число Прандтля, определяемое как отношение

$$Pr = \frac{\nu}{\chi}. \quad (43,4)$$

Всякая другая безразмерная величина может быть выражена через Re и Pr ¹⁾.

Что касается числа Прандтля, то оно представляет собой просто некоторую материальную константу жидкости и не зависит от свойств самого потока. У газов это число всегда порядка единицы (см. § 104). Значения же Pr для различных жидкостей лежат в более широком интервале. У очень вязких жидкостей Pr может достигать очень больших значений. Приведём в качестве примера значения Pr при 20°C для:

воды	6,75
спирта	16,6
глицерина	7250
ртути	0,044

Подобно тому, как было сделано в § 17, мы можем теперь заключить, что в стационарном конвекционном потоке распределение температуры и скорости имеет вид

$$\nu = Ut \left(\frac{r}{l}, Re, Pr \right), \quad T - T_0 = (T_1 - T_0) f \left(\frac{r}{l}, Re, Pr \right). \quad (43,5)$$

¹⁾ Иногда пользуются так называемым числом Пекле (Péclet):

$$Pe = \frac{Ul}{\chi} = Re \cdot Pr.$$

Два конвекционных потока подобны, если их числа Рейнольдса и Прандтля одинаковы.

Теплопередачу между твёрдыми телами и жидкостью характеризуют обычно так называемым *коэффициентом теплопередачи* или *числом Нуссельта* (Nusselt), определяемым как

$$Nu = \frac{iq}{S_2(T_1 - T_0)}, \quad (43,6)$$

где q — количество тепла, переходящего в 1 сек. от твёрдого тела к жидкости через единицу площади поверхности, а $T_1 - T_0$ есть разность температур тела и жидкости (вдали от тела). Если распределение температуры в жидкости известно, то коэффициент теплопередачи легко определить, вычисляя плотность потока тепла $q = -\chi \frac{\partial T}{\partial n}$ на границе жидкости (производная берётся по нормали к поверхности тела).

Число Нуссельта безразмерно. Из соображений подобия следует, что для каждого данного типа движения оно является определённой функцией только от чисел Рейнольдса и Прандтля:

$$Nu = f(Re, Pr). \quad (43,7)$$

Эта функция приобретает тривиальный вид при конвекции с достаточно малыми числами Рейнольдса. Малым Re соответствуют малые скорости движения. Поэтому в первом приближении в уравнении (43,2) можно пренебречь членом, содержащим скорость, так что распределение температуры определяется уравнением $\Delta T = 0$, т. е. обычным уравнением стационарной теплопроводности в неподвижной среде. Коэффициент теплопередачи не может, очевидно, зависеть теперь ни от скорости, ни от вязкости жидкости и потому должно быть просто

$$Nu = \text{const.}, \quad (43,8)$$

причём при вычислении этой постоянной можно рассматривать жидкость как неподвижную.

Задачи

Определить распределение температуры в жидкости, совершающей Пуасселевское течение по трубе кругового сечения, температура стенки которой меняется вдоль длины трубы по линейному закону.

Решение. Условия течения одинаковы во всех сечениях трубы, и распределение температуры можно искать в виде $T = Az + f(r)$, где Az — температура стенки (выбраны цилиндрические координаты с осью z по оси трубы).

Для скорости имеем согласно (15,10) $v_z = v = 2v_m \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$, где v_m — средняя скорость. Подставляя это в (43,2), находим уравнение

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) = \frac{2v_m A}{\chi} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right].$$

Решение этого уравнения, не имеющее особенностей при $r = 0$ и удовлетворяющее условию $f = 0$ при $r = R$, есть

$$f(r) = -\frac{v_m AR^2}{2\chi} \left[\frac{3}{4} - \left(\frac{r}{R}\right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{r}{R}\right)^4 \right].$$

Плотность потока тепла $q = \kappa \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R}$ равна

$$q = \rho c_p v_m \frac{AR}{2}.$$

Отметим, что она не зависит от коэффициента теплопроводности.

§ 44. Теплопередача в пограничном слое

Распределение температуры в жидкости при очень больших числах Рейнольдса обнаруживает особенности, аналогичные тем, которыми обладает и само распределение скоростей. Очень большие значения Re эквивалентны очень малой вязкости. Но поскольку число Прандтля $Pr = \frac{\nu}{\chi}$ не бывает очень малым, то вместе с ν должен рассматриваться как очень малый и коэффициент температуропроводности χ . Это соответствует тому, что при достаточно больших скоростях движения жидкость может приближённо рассматриваться как идеальная, — в идеальной жидкости должны отсутствовать как процессы внутреннего трения, так и процессы теплопроводности.

Такое рассмотрение, однако, опять будет неприменимо в пристеночном слое жидкости, поскольку при нём не будут выполняться на поверхности тела ни граничное условие прилипания, ни условие одинаковости температур жидкости и тела. В результате в пограничном слое будет происходить, наряду с быстрым падением скорости, также и быстрое изменение температуры жидкости до значения, равного температуре поверхности твёрдого тела. Пограничный слой будет характеризоваться наличием в нём больших градиентов как скорости, так и температуры.

Что касается распределения температуры в основном объёме жидкости, то легко видеть, что при обтекании нагретого тела (при больших Re) нагревание жидкости будет происходить практически только в области следа, между тем как вне следа температура жидкости не изменится. Действительно, при очень больших Re процессы теплопроводности в основном потоке не играют практически никакой роли. Поэтому температура изменится только в тех местах пространства, в которые попадает при своём движении нагретая в пограничном слое жидкость. Но мы знаем (см. § 28), что из пограничного слоя линии тока выходят в область основного потока только за линией отрыва, где они попадают в область турбулентного следа. Из области же следа линии тока в окружающее пространство тоже не выходят. Таким образом, текущая мимо поверхности нагретого тела в пограничном слое жидкость попадает целиком в область следа, в котором и остаётся. Мы видим, что тепло оказывается распределённым в тех же областях, в которых имеется отличный от нуля ротор скорости.

Внутри самой области турбулентного движения происходит весьма интенсивный теплообмен, обусловленный сильным перемешиванием жидкости, которое характерно для всякого турбулентного движения. Такой механизм теплопередачи можно назвать турбулентной теплопроводностью и характеризовать соответствующим коэффициентом $\chi_{\text{турб.}}$, подобно тому, как мы ввели понятие о коэффициенте турбулентной вязкости $\eta_{\text{турб.}}$ (§ 25). По порядку величины коэффициент «турбулентной теплопроводности» определяется такой же формулой, как и $\chi_{\text{турб.}}$ (25,2):

$$\chi_{\text{турб.}} \sim l \Delta u.$$

Таким образом, теплопередачи в ламинарном и турбулентном потоках являются принципиально различными. В предельном случае сколь угодно малых вязкости и теплопроводности в ламинарном потоке процессы теплопередачи вообще отсутствуют, и температура жидкости в каждом месте пространства не меняется. Напротив, в турбулентно движущейся жидкости в том же предельном случае теплопередача происходит и приводит к быстрому выравниванию температуры в различных участках потока.

Необходимо отметить, что когда мы говорим о температуре жидкости, совершающей турбулентное движение, то подразумевается усреднённое по времени значение температуры. Истинная температура испытывает в каждой точке пространства крайне нерегулярное изменение со временем, такого же характера, какое испытывает и скорость движения.

Рассмотрим сначала теплопередачу в ламинарном пограничном слое. Уравнения движения (32,10) сохраняют свой вид. Аналогичное упрощение должно быть произведено теперь и для уравнения (43,2). Написанное в раскрытом виде это уравнение имеет вид (все величины не зависят от координаты z):

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = \chi \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right).$$

В правой его части можно пренебречь производной $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ по сравнению с $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$, так что остаётся

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (44,4)$$

Из сравнения этого уравнения с первым из уравнений (32,10) ясно, что если число Прандтля порядка единицы, то порядок величины δ толщины слоя, в котором происходит падение скорости v_x и изменение температуры T , будет попрежнему определяться полученными в § 32 формулами, т. е. будет обратно пропорционален \sqrt{Re} . Поток тепла $q = -\chi \frac{\partial T}{\partial n}$ равен, по порядку величины, $q \sim \chi \frac{T_1 - T_0}{\delta}$. Поэтому мы приходим к результату, что q , а вместе с ним и число Нуссельта, прямо пропорционально \sqrt{Re} . Зависимость же Nu от Pr остаётся неопределённой. Таким образом, получаем:

$$Nu = \sqrt{Re} f(Pr). \quad (44,2)$$

В таком виде эта формула применима к конвекции при достаточно больших Re и любых Pr .

Перейдём теперь к теплопередаче в турбулентном пограничном слое. При этом удобно, как и в § 35, рассмотреть бесконечный плоско-параллельный турбулентный поток, текущий вдоль бесконечной плоской поверхности. Градиент температуры $\frac{dT}{dy}$ в таком потоке может быть определён из таких же соображений размерности, какие были использованы для нахождения градиента скорости $\frac{du}{dy}$. Обозначим посредством q плотность потока тепла вдоль оси y , вызванного наличием градиента температуры. Этот поток является, очевидно, такой же постоянной (не зависящей от y) величиной, какой является поток импульса σ , и наряду с ним может рассматриваться как заданный параметр, определяющий свойства потока. Кроме того, мы имеем теперь в качестве параметров плотность ρ и теплоёмкость c_p единицы массы жидкости. Вместо σ введём в качестве параметра величину v_0 ; q и c_p обладают размерностями соответственно $\frac{\text{эрг}}{\text{сек}\cdot\text{см}^2} = \frac{\text{г}}{\text{сек}^2}$ и $\frac{\text{эрг}}{\text{г}\cdot\text{град}} = \frac{\text{см}^2}{\text{сек}^2\cdot\text{град}}$. Что касается коэффициентов вязкости и теплопроводности, то они, как всегда при достаточно больших Re , не могут входить в $\frac{dT}{dy}$ явно.

В силу упоминавшейся уже в § 43 однородности уравнений по температуре можно изменить температуру в любое число раз без того, чтобы нарушить уравнения. Но при изменении температуры должен во столько же раз измениться и поток тепла. Поэтому q и T должны быть пропорциональны друг другу. Но из q , v_0 , ρ , c_p и y можно составить всего только одну величину, которая имеет размерность $\text{град}/\text{см}$ и в то же время пропорциональна q . Такой величиной является $\frac{q}{\rho c_p v_0} \frac{1}{y}$.

Поэтому должно быть

$$\frac{dT}{dy} = \beta \frac{q}{\rho c_p v_0} \frac{1}{y},$$

где β есть численная постоянная, которая должна быть определена экспериментально¹⁾. Отсюда имеем:

$$T = \beta \frac{q}{\rho c_p v_0} (\ln y + c). \quad (44,3)$$

Таким образом, температура, как и скорость, распределена по логарифмическому закону. Входящая сюда постоянная интегрирования c должна, как и при выводе (35,7), быть определена из условий в вязком подслое. Полная разность T между температурой жидкости в данной точке и температурой стенки (которую мы принимаем условно за нуль) складывается из падения температуры в турбулентном слое и её падения

¹⁾ Имеющиеся в настоящее время данные не дают возможности определить β сколько-нибудь точно.

в вязком подслое. Логарифмическим законом (44,3) определяется только первое из них. Поэтому, если написать (44,3) в виде

$$T = \beta \frac{q}{\rho c_p v_0} \left(\ln \frac{y v_0}{\nu} + \text{const.} \right),$$

вводя под знаком логарифма множителем толщину y_0 , то const. (умноженная на множитель, стоящий перед скобкой) должна представлять собой изменение температуры в вязком подслое. Это изменение зависит, конечно, и от коэффициентов ν и χ . Поскольку const. есть величина безразмерная, то она должна иметь вид некоторой функции от числа Pr , являющегося единственной безразмерной комбинацией, которую можно составить из имеющихся в нашем распоряжении величин $\nu, \chi, \rho, v_0, c_p$ (что касается потока тепла q , то он не может входить в const., поскольку T должно быть пропорционально q , а q входит уже в множитель перед скобкой). Таким образом, получаем закон распределения температуры в виде

$$T = \beta \frac{q}{\rho c_p v_0} \left[\ln \frac{v_0 y}{\nu} + f(Pr) \right]. \quad (44,4)$$

С помощью этой формулы легко можно рассчитать теплопередачу при турбулентном течении по трубе, теплопередачу от плоской пластинки при турбулентном пограничном слое и т. п. Мы не станем останавливаться здесь на этом.

Задачи

1. Определять зависимость числа Нуссельта от числа Прандтля в ламинарном пограничном слое при больших значениях Pr (и больших Re).

Решение. При больших Pr расстояние δ' , на котором происходит изменение температуры, мало по сравнению с толщиной δ слоя, в котором происходит падение скорости v_x (δ' может быть названо толщиной температурного пограничного слоя). Порядок величины δ' может быть получен оценкой членов уравнения (44,1). На расстоянии от $y=0$ до $y \sim \delta'$ температура испытывает изменение порядка ΔT , а скорость v_x — порядка $U \frac{y}{\delta}$ (полное изменение порядка U скорость испытывает на расстоянии δ). Поэтому при $y \sim \delta'$ член $v_x \frac{\partial T}{\partial x}$

в (44,1) — порядка $U \frac{\delta'}{\delta} \frac{\Delta T}{T}$, а член $\chi \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \sim \chi \frac{\Delta T}{\delta'^2}$. Сравнение обоих выражений

даёт $\delta'^2 \sim \chi \frac{\delta}{U}$. Подставляя $\delta \sim \frac{l}{\sqrt{Re}}$, получаем:

$$\delta' \sim \frac{l}{Re^{1/2} Pr^{1/3}}.$$

Поток тепла $q = -\chi \frac{\partial T}{\partial y} \sim \chi \frac{\Delta T}{\delta'}$ и окончательно находим для числа Нуссельта ¹⁾

$$Nu = \text{const.} \sqrt{Re} \cdot Pr^{1/3}.$$

1) В реальных случаях число Прандтля обычно не достигает больших значений, при которых мог бы иметь место полученный предельный закон. Он может, однако, иметь значение для диффузии, когда вместо изменения температуры надо говорить об изменении концентрации раствора, а роль числа Прандтля играет отношение $\frac{\chi}{D}$, где D — коэффициент диффузии. В числе Нуссельта вместо потока тепла надо подразумевать поток диффундирующего вещества.

2. Определить предельный вид функции $f(Pr)$ в логарифмическом законе распределения температуры (44,4) при больших значениях Pr .

Решение. Согласно сказанному в примечании на стр. 161 поперечная скорость в вязком подслое порядка величины $v_0 \left(\frac{y}{y_0}\right)^2$, а масштаб турбулентного движения — порядка $y_0 \left(\frac{y}{y_0}\right)^2$. «Турбулентная теплопроводность», следовательно, — порядка

$$\chi_{турб.} \sim v_0 y_0 \left(\frac{y}{y_0}\right)^4 \sim y \left(\frac{y}{y_0}\right)^4$$

[мы воспользовались здесь соотношением (35,5)]. $\chi_{турб.}$ сравнивается по порядку величины с обычным коэффициентом χ на расстояниях порядка $y_1 \sim \frac{y_0}{Pr^{1/4}}$. Поскольку $\chi_{турб.}$ очень быстро растёт с y , то ясно, что основное изменение температуры в вязком подслое происходит на расстояниях от стенки порядка y_1 , и его можно считать пропорциональным y_1 . Таким образом, функция $f(Pr)$ будет иметь вид

$$f(Pr) = \text{const. } Pr^{-\frac{1}{4}},$$

где const. — численная постоянная.

§ 45. Нагревание тела в движущейся жидкости

Термометр, погружённый в неподвижную жидкость, показывает температуру, равную температуре жидкости. Если же жидкость движется, то термометр покажет температуру несколько более высокую. Это обусловливается нагреванием благодаря внутреннему трению тормозящейся у поверхности термометра жидкости.

Общую задачу можно сформулировать следующим образом. Тело произвольной формы погружается в движущуюся жидкость; по истечении достаточного промежутка времени установится некоторое тепловое равновесие и требуется определить возникающую при этом разность температур $T_1 - T_0$ между ними.

Решение этой задачи определяется уравнением (40,2), в котором, однако, теперь уже нельзя пренебречь членом, содержащим вязкость, как это было сделано в (43,1); именно этот член определяет интересующий нас здесь эффект. Таким образом, для установившегося состояния имеем уравнение

$$(\nabla^2) T = \chi \Delta T + \frac{\nu}{2c_p} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right)^2. \quad (45,1)$$

К нему должны быть присоединены уравнения движения (43,3) самой жидкости и, строго говоря, ещё и уравнение теплопроводности внутри твёрдого тела. В предельном случае достаточно малой теплопроводности тела можно пренебречь ею вовсе и температуру каждой точки поверхности тела считать просто равной температуре жидкости в той же точке, получающейся в результате решения уравнения (45,1) с граничным условием $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$, т. е. условием исчезновения потока тепла через поверхность тела. В обратном предельном случае достаточно большой теплопро-

водности тела можно приближённо потребовать одинаковости температуры во всех точках его поверхности; производная $\frac{\partial T}{\partial n}$ при этом, вообще говоря, не обращается в нуль на всей поверхности и следует требовать исчезновения лишь полного потока тепла через всю поверхность тела (т. е. интеграла от $\frac{\partial T}{\partial n}$ по этой поверхности). В обоих этих предельных случаях коэффициент теплопроводности тела не входит явно в решение задачи; ниже мы будем для простоты предполагать, что имеем дело с одним из них.

В уравнения (45,1) и (43,3) входят постоянные параметры χ , ν и c_p и, кроме того, в их решение войдут размеры тела l и скорость U набегающего потока. (Разность же температур $T_1 - T_0$ не является теперь произвольным параметром, а должна сама быть определена в результате решения уравнений.) Из этих параметров можно составить две независимые безразмерные комбинации, в качестве которых выберем Re и Pr . Тогда можно утверждать, что искомая разность $T_1 - T_0$ равна какой-либо величине с размерностью температуры (в качестве таковой выберем $\frac{U^2}{c_p}$), умноженной на функцию от Re и Pr :

$$T_1 - T_0 = \frac{U^2}{c_p} f(Re, Pr). \quad (45,2)$$

Легко определить вид этой функции в случае очень малых чисел Рейнольдса, т. е. достаточно малых скоростей U . Тогда член $(\nu \nabla) T$ в (45,1) мал по сравнению с $\chi \Delta T$, так что уравнение (45,1) упрощается в

$$\chi \Delta T = - \frac{\nu}{2c_p} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2. \quad (45,3)$$

Температура и скорость испытывают заметное изменение на протяжении расстояний порядка размеров l тела. Поэтому оценка обеих сторон уравнения (45,3) даёт:

$$\frac{\chi(T_1 - T_0)}{l^3} \sim \frac{\nu^2}{c_p l^3},$$

откуда $T_1 - T_0 \sim \frac{\nu^2}{\chi c_p} U^2$. Таким образом, мы приходим к результату, что при малых Re

$$T_1 - T_0 = \text{const. } Pr \frac{U^2}{c_p}, \quad (45,4)$$

где const. — численная постоянная, зависящая от формы тела. Отметим, что разность температур оказывается пропорциональной квадрату скорости U .

Некоторые общие заключения о виде функции $f(Pr, Re)$ в (45,2) можно сделать и в обратном предельном случае больших Re , когда скорость и температура меняются только в узком пограничном слое. Пусть δ и δ' — расстояния, на которых меняются соответственно скорость и температура; δ и δ' отличаются друг от друга множителем, зависящим от Pr . В δ сек. в пограничном слое выделяется, благодаря вязкости жидкости, ко-

личество тепла, равное (на 1 см^2 поверхности тела) интегралу от $\frac{\nu \rho}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x_x} + \frac{\partial v_x}{\partial x_x} \right)^2$ по толщине слоя [см. (14,3)]. Этот интеграл — порядка величины $\nu \rho \frac{U^2}{\delta^2} \delta \sim \nu \rho \frac{U^2}{\delta}$. С другой стороны, это тепло должно быть равно теплу, теряемому телом и равному потоку $q = -\chi \frac{\partial T}{\partial n} \sim \chi c_p \rho \frac{T_1 - T_0}{\delta}$. Сравнивая оба эти выражения, приходим к результату:

$$T_1 - T_0 = \frac{U^2}{c_p} f(Pr). \quad (45,5)$$

Таким образом, и в этом случае функция f оказывается независимой от Re ; зависимость же её от Pr остаётся неопределённой.

Задачи

1. Определить распределение температуры при малых числах Рейнольдса в жидкости, совершающей Пуазейлевское течение по трубе кругового сечения, стенки которой поддерживаются при постоянной температуре T_0 .

Решение. В цилиндрических координатах с осью z по оси трубы имеем: $v_x = v = 2v_m \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$, где v_m — средняя скорость течения. Подстановка в (45,3) приводит к уравнению

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = - \frac{16v_m^2 \nu}{k^2 c_p} r^2.$$

Решение этого уравнения, конечное при $r=0$ и удовлетворяющее условию $T=T_0$ при $r=R$, есть

$$T - T_0 = v_m^2 \frac{Pr}{c_p} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right].$$

2. Определить разность температур между твёрдым шаром и обтекающей его жидкостью при малых числах Рейнольдса; теплопроводность шара предполагается большой.

Решение. Выбираем сферические координаты r, θ, φ сначала в центре шара и полярной осью вдоль направления скорости и натекающего потока. Вычисляя компоненты тензора $\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}$ с помощью формул (13,17) и формулы (18,9) для скорости жидкости, обтекающей шар, получаем уравнение (45,3) в виде

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = -A \frac{R^4}{r^4} \left[\cos^2 \theta \left(3 - \frac{6R^2}{r^2} + \frac{2R^4}{r^4} \right) + \frac{R^4}{r^4} \right],$$

где $A = \frac{9}{4} \nu^2 \frac{Pr}{c_p}$. Ищем $T(r, \theta)$ в виде

$$T = f(r) \cos^2 \theta + g(r)$$

и получаем, после отделения частей, зависящей и не зависящей от θ , два уравнения для f и g :

$$r^2 f'' + 2rf' - 6f = -A \left(\frac{3R^2}{r^2} - \frac{6R^4}{r^4} + \frac{2R^6}{r^6} \right), \quad r^2 g'' + 2rg' + 2f = -A \frac{R^6}{r^6}.$$

Из первого получаем:

$$f = A \left(\frac{3R^2}{4r^2} + \frac{R^4}{r^4} - \frac{1}{12} \frac{R^6}{r^6} \right) + \frac{c_1 R^2}{r^2}$$

(член вида $\text{const. } r^2$ опускаем как не исчезающий на бесконечности), после чего второе приводит к решению

$$e = -\frac{A}{2} \left(\frac{3}{2} \frac{R^2}{r^2} + \frac{1}{3} \frac{R^4}{r^4} + \frac{1}{18} \frac{R^6}{r^6} \right) - \frac{c_1 R^2}{3r^2} + \frac{c_2 R}{r} + c_3.$$

Постоянные c_1, c_2, c_3 определяются из условия $T = \text{const.}$ в $\int \frac{\partial T}{\partial r} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 0$ при $r=R$, что эквивалентно требованию $f(R)=0, g'(R) + \frac{1}{3} f'(R) = 0$; на бесконечности должно быть $T = T_0$. Находим:

$$c_1 = -\frac{5}{3} A, \quad c_2 = \frac{2}{3} A, \quad c_3 = T_0.$$

Для разности температур шара [$T_1 = T(R)$] и жидкости (T_0) получаем:

$$T_1 - T_0 = \frac{5}{8} Pr \frac{u^2}{c_p}.$$

Заметим, что найденное распределение температуры оказывается удовлетворяющим и условию $\frac{\partial T}{\partial r} = 0$ при $r=R$, т. е. $f'(R) = g'(R) = 0$. Поэтому оно является одновременно и решением той же задачи в случае малой теплопроводности шара.

§ 46. Свободная конвекция

Мы видели в § 3, что если в находящейся в поле тяжести жидкости имеет место механическое равновесие, то распределение температуры в ней должно зависеть только от высоты z : $T = T(z)$. Если же распределение температуры не удовлетворяет этому требованию, являясь в общем случае функцией всех трёх координат [$T = T(x, y, z)$], то механическое равновесие в жидкости невозможно. Больше того, даже если $T = T(z)$, то механическое равновесие всё же может оказаться невозможным, если вертикальный градиент температуры направлен вниз и по абсолютной величине превышает определённое предельное значение.

Отсутствие механического равновесия приводит к возникновению в жидкости внутренних течений, стремящихся перемешать жидкость так, чтобы в ней установилась постоянная температура. Такое возникающее в поле тяжести движение называют свободной конвекцией.

Выведем уравнения, описывающие конвекцию. Мы будем рассматривать жидкость как несжимаемую. Это значит, что давление предполагается достаточно мало меняющимся вдоль жидкости, так что изменением плотности под влиянием изменения давления можно пренебречь. Например, в атмосфере, где давление меняется с высотой, это значит, что мы не будем рассматривать слишком высоких её столбов, в которых изменение плотности с высотой становится существенным. Что же касается изменения плотности благодаря неравномерной нагреваемости жидкости, то этим изменением, конечно, нельзя пренебречь. Именно оно приводит к появлению сил, вызывающих конвекционное движение.

Обозначим посредством T_0 , ρ_0 , p_0 температуру, плотность и давление жидкости, которые имелись бы при равновесии. T_0 и ρ_0 являются просто некоторыми постоянными, а p_0 меняется с высотой согласно гидростатическому уравнению:

$$\frac{\nabla p_0}{\rho_0} = g. \quad (46,1)$$

Напишем переменную температуру $T(x, y, z)$ в виде $T = T_0 + T'$. Мы будем предполагать, что неравномерность T' температуры мала по сравнению с T_0 . Давление и плотность тоже напишем в виде $p = p_0 + p'$ и $\rho = \rho_0 + \rho'$. Для изменения ρ' плотности можно написать ввиду малости T' :

$$\rho' = \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p T' = -\rho_0 \beta T'. \quad (46,2)$$

Здесь $\beta = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} = \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial T}$ — коэффициент теплового расширения жидкости.

Начнём с преобразования уравнения Навье-Стокса, которое при наличии поля тяжести имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \nabla) v = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta v + g,$$

получающийся добавлением к правой стороне (13,7) действующей на единицу массы силы g . Подставим сюда $p = p_0 + p'$, $\rho = \rho_0 + \rho'$. С точностью до малых первого порядка имеем:

$$\frac{\nabla p}{\rho} = \frac{\nabla p_0}{\rho_0} + \frac{\nabla p'}{\rho_0} - \frac{\nabla p_0}{\rho_0^2} \rho',$$

или, подставляя (46,1) — (46,2):

$$\frac{\nabla p}{\rho} = g + \frac{\nabla p'}{\rho_0} + g T' \beta.$$

Подставляя это выражение в уравнение Навье-Стокса и опуская индекс у ρ , получаем окончательно:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \nabla) v = -\nabla \frac{p'}{\rho_0} + \nu \Delta v - \beta g T'. \quad (46,3)$$

В уравнении теплопроводности (40,2) член, содержащий вязкость, при свободной конвекции, как можно показать, всегда мал по сравнению с другими членами уравнения и потому может быть опущен. Таким образом, получаем:

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + (v \nabla) T' = \chi \Delta T'. \quad (46,4)$$

Уравнения (46,3) — (46,4) вместе с уравнением непрерывности $\text{div } v = 0$ представляют собой полную систему уравнений, описывающих свободную конвекцию.

Для стационарного движения уравнения конвекции принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} (v \Delta) v &= -\Delta \frac{p'}{\rho_0} - g \alpha T' + \nu \Delta v, \\ (v \Delta) T' &= \chi \Delta T', \text{ div } v = 0. \end{aligned} \right\} \quad (46,5)$$

В эту систему пяти уравнений, определяющих неизвестные функции v , χ , T , входят три параметра: ν , χ и $g\beta$. Кроме того, в их решение входит характеристическая длина l и разность $T_1 - T_0$ температур твёрдого тела и жидкости (вдали от тела). Характеристическая скорость теперь отсутствует, поскольку никакого вынужденного посторонними причинами потока нет и всё движение жидкости обуславливается её неравномерной нагретостью.

Таким образом, стационарная конвекция в поле тяжести характеризуется пятью параметрами, имеющими следующие размерности:

$$[\chi] = [\nu] = \frac{\text{см}^2}{\text{сек}}, \quad [T_1 - T_0] = \text{град}, \quad [l] = \text{см}, \quad [g\beta] = \frac{\text{см}}{\text{сек}^2 \text{град}}.$$

Из этих величин можно составить две независимые безразмерные комбинации. В качестве их обычно выбирают число Прандтля $Pr = \frac{\nu}{\chi}$ и так называемое число Грассхофа (Grasshof):

$$Gr = \frac{g\beta l^3 (T_1 - T_0)}{\nu}. \quad (46,6)$$

Закон подобия для свободной конвекции гласит, следовательно:

$$v = \frac{\nu}{l} f\left(\frac{l}{T}, Pr, Gr\right), \quad T = (T_1 - T_0) f\left(\frac{l}{T}, Pr, Gr\right). \quad (46,7)$$

Два течения подобны, если их числа Прандтля и Грассхофа одинаковы.

Теплопередачу при конвекции в поле тяжести, как и без учёта тяжести, характеризуют числом Нуссельта. Это число является теперь функцией только от Pr и Gr :

$$Nu = f(Pr, Gr). \quad (46,8)$$

Значение числа Грассхофа является важной характеристикой конвекционного движения жидкости. При достаточно малых значениях Gr свободная конвекция не существенна для процесса теплопередачи в жидкости; теплопередача осуществляется при этом в основном посредством обычной теплопроводности.

Конвекционное движение может быть как ламинарным, так и турбулентным. Для свободной конвекции не существует числа Рейнольдса (поскольку нет характеристических параметров скорости), и наступление турбулентности определяется числом Грассхофа, — конвекция становится турбулентной при очень больших значениях Gr .

Весьма своеобразным случаем конвекции является движение, возникающее в жидкости между двумя бесконечными горизонтальными плоскостями, нагретыми до различной температуры (причём температура T_2 нижней плоскости выше температуры T_1 верхней плоскости). Если разность температур $T_2 - T_1$ не слишком велика, то жидкость остаётся неподвижной и возникает режим чистой теплопроводности, причём температура жидкости является функцией только от вертикальной координаты z . Если же разность $T_2 - T_1$ превышает некоторое критическое значение (зависящее от расстояния l между пластинками), то возникает

конвекционное движение, обладающее своеобразным характером, — вся картина движения периодична в горизонтальной плоскости x, y . Пространство между твёрдыми плоскостями оказывается разделённым на правильно расположенные вертикальные области, в которых жидкость движется попеременно вверх или вниз. Критическое значение разности $T_2 - T_1$ определяется значением произведения $Pr \cdot Gr$; свободная конвекция возникает при

$$Pr \cdot Gr = \frac{g \beta^2 (T_2 - T_1)}{\nu} > 1700.$$

При очень больших Gr это движение становится неустойчивым и переходит в турбулентное.

Задача

Определить число Нуссельта при свободной конвекции у плоской вертикальной пластинки. Предполагается, что скорость и разность температур $T' = T - T_0$ (T_0 — температура жидкости на бесконечном расстоянии от пластинки) заметно отличны от нуля лишь в тонком пограничном слое у поверхности пластинки¹⁾.

Решение. Выбираем начало координат на нижнем краю пластинки, ось x вертикально в плоскости пластинки, а ось y — перпендикулярно ей. В пограничном слое давление не меняется вдоль оси y (ср. § 32) и потому везде равно гидростатическому давлению $p_0(x)$, так что $\nu' = 0$. С обычной для пограничного слоя точностью уравнения (46,5) принимают вид:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + g \beta (T - T_0); \quad (1)$$

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}; \quad (2)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

с граничными условиями $v_x = v_y = 0, T = T_1$ при $y = 0$ (T_1 — температура пластинки), $v_x = 0, T = T_0$ при $y = \infty$. Эти уравнения могут быть преобразованы с дифференциальными уравнения в полных производных введением в качестве независимой переменной величины

$$\xi = C \frac{y}{x^{1/4}}, \quad C = \left[\frac{g(T_1 - T_0) \beta}{4\nu^2} \right]^{1/4}. \quad (4)$$

Полагаем

$$v_x = 4\nu C^2 \sqrt{x} \varphi'(\xi), \quad T - T_0 = (T_1 - T_0) \theta(\xi). \quad (5)$$

Тогда (3) даёт $v_y = \nu C x^{-1/4} (\xi \varphi' - 3\varphi)$, а (1) и (2) дают уравнения для φ и θ :

$$\varphi''' + 3\varphi\varphi'' - 2\varphi'^3 + \theta = 0, \quad \theta'' + 3Pr\varphi\theta' = 0 \quad (6)$$

с граничными условиями $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0, \theta(0) = 1, \varphi'(\infty) = 0, \theta(\infty) = 0$

Из (4) — (5) следует, что толщина пограничного слоя — порядка $\delta \sim \frac{x^{1/4}}{C}$. Условие применимости решения гласит поэтому $\delta \ll l$ (где l — высота пластинки)

¹⁾ Решение этой задачи было получено Польгаузенем.

или $Gr^{1/4} \gg 1$. Полный поток тепла (отнесённый к единице площади поверхности пластинки) равен

$$q = -\frac{1}{l} \int_0^l x \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} dx = -\frac{4x}{3} \theta'(0; Pr) C (T_1 - T_0) l^{-1/4}.$$

Число Нуссельта равно

$$Nu = f(Pr) Gr^{1/4},$$

где функция $f(Pr)$ определяется решением уравнений (6).

ГЛАВА VI

ЗВУК

§ 47. Звуковые волны

Переходя к изучению движения сжимаемой жидкости (или газа), мы начнём с исследования малых колебаний в ней; колебательное движение с малыми амплитудами в сжимаемой жидкости называют *звуковыми волнами*. В каждом месте жидкости в звуковой волне происходят попеременные сжатия и разрежения.

В силу малости колебаний в звуковой волне скорость v в ней мала, так что в уравнении Эйлера можно пренебречь числом $(v\nabla)v$. По этой же причине относительные изменения плотности и давления в жидкости тоже малы. Мы будем писать переменные p и ρ в виде

$$p = p_0 + p', \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad (47,1)$$

где ρ_0, p_0 — постоянные равновесные плотность и давление жидкости, а ρ', p' — их изменения в звуковой волне ($\rho' \ll \rho_0, p' \ll p_0$).

Уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho v = 0$$

при подстановке в него (47,1) и пренебрежении малыми величинами второго порядка (ρ', p', v надо при этом считать малыми величинами первого порядка) принимает вид

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} v = 0. \quad (47,2)$$

Уравнение Эйлера

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \nabla) v = -\frac{\Delta p}{\rho}$$

в том же приближении сводится к уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\Delta p'}{\rho_0} = 0. \quad (47,3)$$

Уравнения (47,2) и (47,3) содержат неизвестные функции v , p' , ρ' . Для исключения одной из них замечаем, что звуковая волна в идеальной жидкости является, как и всякое другое движение в такой жидкости, адиабатическим. Поэтому малое изменение p' давления связано с малым изменением ρ' плотности уравнением

$$p' = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \rho' \quad (47,4)$$

(значение этой производной берётся, конечно, при $\rho = \rho_0$). Дифференцируя это равенство по времени:

$$\frac{\partial p'}{\partial t} - \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \frac{\partial \rho'}{\partial t} = 0$$

и подставляя $\frac{\partial \rho'}{\partial t}$ из (47,2), получаем:

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \operatorname{div} v = 0. \quad (47,5)$$

Два уравнения (47,3) и (47,5) с неизвестными v и p' полностью описывают звуковую волну.

Для того, чтобы получить уравнения, содержащие только по одной неизвестной функции, удобно ввести потенциал скорости из соотношения $v = \operatorname{grad} \varphi$. Из уравнения (47,3) получим:

$$p' = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (47,6)$$

(индекс у ρ_0 и ρ_0 здесь и ниже мы будем для краткости опускать), связывающее p' с φ . После этого найдём из (47,5) уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \Delta \varphi = 0, \quad (47,7)$$

которому должен удовлетворять потенциал φ ; здесь введено обозначение

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s}. \quad (47,8)$$

Уравнение вида (47,7) называется волновым. Применив к (47,7) операцию grad , найдём, что такому же уравнению удовлетворяет каждая из трёх компонент скорости v , а, взяв производную по времени от (47,7), найдём, что волновому уравнению удовлетворяет и давление p' (а потому и ρ').

Рассмотрим звуковую волну, в которой все величины зависят только от одной из координат, скажем, от x . Другими словами, всё движение однородно в плоскости y, z ; такая волна называется плоской. Волновое уравнение (47,7) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (47,9)$$

Для решения этого уравнения вводим вместо x, t новые переменные

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct.$$

Легко убедиться в том, что в этих переменных уравнение (47,9) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Интегрируя это уравнение по ξ , находим:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = F(\eta),$$

где $F(\eta)$ — произвольная функция. Интегрируя ещё раз, получим $\varphi = f_1(\xi) + f_2(\eta)$, где f_1 и f_2 — произвольные функции. Таким образом,

$$\varphi = f_1(x - ct) + f_2(x + ct). \quad (47,10)$$

Функциями такого же вида описывается распределение также и остальных величин (p' , ρ' , v) в плоской волне.

Будем говорить, для определённости, о плотности $\rho' = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$. Пусть, например, $f_2 = 0$, так что $\rho' = f_1(x - ct)$. Вясним наглядный смысл этого решения. В каждой плоскости $x = \text{const.}$ плотность меняется со временем; в каждый данный момент плотность различна для разных x . Очевидно, что плотность одинакова для координат x и моментов времени t , удовлетворяющих соотношениям $x - ct = \text{const.}$, или

$$x = \text{const.} + ct.$$

Это значит, что если в некоторый момент $t = 0$ в некоторой точке жидкости её плотность имеет определённое значение, то через промежуток времени t то же самое значение плотности имеет место на расстоянии ct вдоль оси x от первоначального места (и то же самое относится ко всем остальным величинам в волне). Мы можем сказать, что картина движется: распространяется в среде вдоль оси x со скоростью c , называемой скоростью звука.

Таким образом, $f_1(x - ct)$ представляет собой, как говорят, бегущую плоскую волну, распространяющуюся в положительном направлении оси x . Очевидно, что $f_2(x + ct)$ представляет собой волну, распространяющуюся в противоположном, отрицательном, направлении оси x .

Из трёх компонент скорости $v = \text{grad } \varphi$ в плоской волне отлична от нуля только компонента $v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$. Таким образом, скорость жидкости в звуковой волне направлена по направлению распространения волны. В связи с этим говорят, что звуковые волны в жидкости являются продольными.

В бегущей плоской волне скорость $v_x = v$ связана с давлением p' и плотностью ρ' простыми соотношениями. Написав $\varphi = f(x - ct)$, имеем $v = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = f'(x - ct)$ и $p' = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \rho c f'(x - ct)$. Сравнивая эти выражения, находим:

$$v = \frac{p'}{\rho c}. \quad (47,11)$$

Подставляя сюда согласно (47,4) и (47,8) $p' = c^2 \rho'$, имеем:

$$v = c \frac{\rho'}{p'}. \quad (47,12)$$

Формула (47,8) определяет скорость звука по адиабатической сжимаемости жидкости; вводя удельный объем $V = \frac{1}{\rho}$, имеем:

$$c = V \sqrt{-\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_s}. \quad (47,13)$$

Адиабатическая сжимаемость $\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s$ связана с изотермической сжимаемостью $\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$ известной термодинамической формулой:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_s = \frac{c_p}{c_v} \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T.$$

Поэтому скорость звука можно написать в виде

$$c = V \sqrt{-\frac{c_p}{c_v} \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T}. \quad (47,14)$$

Вычислим скорость звука в идеальном (в термодинамическом смысле слова) газе. Согласно формуле Клапейрона имеем:

$$pV = \frac{kT}{m}, \quad (47,15)$$

где k — постоянная Больцмана, а m — масса одной молекулы газа.

Тогда $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = -\frac{kT}{mV^2}$, и скорость звука (47,14) равна

$$c = \sqrt{\gamma \frac{kT}{m}},$$

где посредством γ обозначено отношение $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$. Поскольку γ мало зависит от температуры (при обычных температурах), то скорость звука в газе можно считать пропорциональной квадратному корню из температуры. Подчеркнем, что при заданной температуре скорость звука оказывается не зависящей от давления газа.

Весьма важным случаем волн являются так называемые монохроматические волны, в которых все величины являются простыми периодическими функциями времени. Такие функции обычно бывает удобным писать в виде действительной части комплексного выражения (см. начало § 20). Так, для потенциала скорости напишем:

$$\varphi = \text{Re} \left\{ \varphi_0(x, y, z) e^{-i\omega t} \right\}, \quad (47,16)$$

где ω есть частота волны. Функция φ_0 удовлетворяет уравнению

$$\Delta \varphi_0 + \frac{\omega^2}{c^2} \varphi_0 = 0, \quad (47,17)$$

получающиеся при подстановке (47,16) в (47,7).

Рассмотрим бегущую плоскую монохроматическую волну, распространяющуюся в положительном направлении оси x . В такой волне все величины являются функциями только от $x - ct$, и потому, скажем, потенциал имеет вид

$$\varphi = \operatorname{Re} \left\{ A e^{-ik(x - ct)} \right\}, \quad (47,18)$$

где A — постоянная, называемая комплексной амплитудой. Написав её в виде $A = ae^{i\alpha}$ с действительными постоянными a и α , будем иметь:

$$\varphi = a \cos \left(\frac{\omega}{c} x - \omega t + \alpha \right). \quad (47,19)$$

Постоянную a называют амплитудой, а аргумент под знаком \cos фазой волны. Обозначим посредством \mathbf{n} единичный вектор в направлении распространения волны. Вектор

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{n} \quad (47,20)$$

называется волновым вектором. Вводя этот вектор, можно написать (47,18) в виде

$$\varphi = \operatorname{Re} \left\{ A e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \right\}. \quad (47,21)$$

Монохроматические волны являются весьма важным случаем волн в связи с тем, что всякую вообще волну можно представить в виде совокупности плоских монохроматических волн с различными волновыми векторами и частотами. Такое разложение волны на монохроматические является не чем иным, как разложением в ряд или интеграл Фурье (о нём говорят также, как о спектральном разложении). Об отдельных компонентах этого разложения говорят, как о монохроматических компонентах волны или как о её компонентах Фурье.

Задача

Определить звуковую волну, распространяющуюся в атмосфере (в поле тяжести) в вертикальном направлении.

Решение. В поле тяжести ρ_0 , $\rho_0 s_0$ являются функциями вертикальной координаты z , причём согласно (3,1) $\frac{\partial \rho_0}{\partial z} = -\rho_0 g$. Уравнения непрерывности и сохранения энтропии гласят в рассматриваемом приближении:

$$\dot{\rho}' = -\frac{\partial}{\partial z} (\rho_0 v), \quad \dot{s}' = -v \frac{\partial s_0}{\partial z},$$

а уравнение Эйлера:

$$\ddot{v} = -\frac{1}{\rho_0 + \rho'} \frac{\partial (\rho_0 + \rho')}{\partial z} v - g \frac{\rho'}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial z} v - g \frac{\rho'}{\rho_0}.$$

Дифференцируя последнее уравнение по времени и подставляя ρ' из уравнения непрерывности, получим:

$$\ddot{v} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial z} v + \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial (\rho_0 v)}{\partial z}.$$

Для ρ'' пишем:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}'' &= \left(\frac{\partial \rho}{\partial z_0}\right)_t \dot{z}' + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t_0}\right)_z \dot{t}' = -\left(\frac{\partial \rho}{\partial z_0}\right)_t v \frac{\partial z_0}{\partial z} - \left(\frac{\partial \rho}{\partial t_0}\right)_z v \frac{\partial t_0}{\partial z} - \left(\frac{\partial \rho}{\partial t_0}\right)_z \rho_0 \frac{\partial v}{\partial z} = \\ &= -v \frac{\partial \rho_1}{\partial z} - c^2 \rho_0 \frac{\partial v}{\partial z} = \rho_0 v g - c^2 \rho_0 \frac{\partial v}{\partial z}. \end{aligned}$$

В результате получаем следующее уравнение для скорости v в волне:

$$\ddot{v} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho c^2 \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (1)$$

(индекс у ρ_0 опускаем).

Если рассматривать атмосферу как идеальный газ, находящийся в состоянии теплового равновесия, то c является функцией только от температуры T_0 , и поскольку температура постоянна вдоль атмосферы, то $c = \text{const}$. Для градиента плоскости имеем:

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\gamma}{c^2} g \rho$$

(где $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$). Внося это в (1), получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \gamma g \frac{\partial v}{\partial z}. \quad (2)$$

Ищем решения уравнения (2), пропорциональные $e^{i(\alpha z - \omega t)}$, и получаем для волнового вектора

$$k = -i \frac{\gamma g}{2c^2} \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\gamma^2 g^2}{4c^4}}$$

Если $\omega > \frac{\gamma g}{2c}$, то бегущая вверх волна имеет вид

$$v = \text{const} \cdot e^{-\frac{\gamma g}{2c^2} z} \cos\left(\alpha t - z \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\gamma^2 g^2}{4c^4}}\right).$$

Если же $\omega < \frac{\gamma g}{2c}$, то имеет место затухающее приращение

$$v = \text{const} \cdot e^{-\left(\frac{\gamma g}{2c^2} + \sqrt{\frac{\gamma^2 g^2}{4c^4} - \frac{\omega^2}{c^2}}\right) z}$$

(на двух значений k должно быть выбрано то, которое соответствует более быстрому затуханию).

§ 48. Энергия и импульс звуковых волн

Выведем выражение для энергии звуковой волны. Согласно общей формуле энергия единицы объема жидкости равна $\rho v + \frac{\rho v^2}{2}$. Подставим сюда $\rho = \rho_0 + \rho'$, $v = v_0 + v'$, где буквы со штрихом обозначают отклонения соответствующих величин от их значений в неподвижной жидкости. Член $\frac{\rho' v^2}{2}$ является величиной третьего порядка малости. Поэтому,

если ограничиться точностью до членов второго порядка включительно, получим:

$$\rho_0 \epsilon_0 + \rho' \frac{\partial(\rho \epsilon)}{\partial \rho_0} + \frac{\rho'^2 \epsilon_0}{2} \frac{\partial(\rho \epsilon)}{\partial \rho_0^2} + \frac{\rho_0 \rho'^2}{2}.$$

Производные берутся при постоянной энтропии, поскольку звуковая волна адиабатична. В силу термодинамического соотношения $d\epsilon = T ds - p dV = T ds - \frac{p}{\rho} d\rho$ имеем: $\left(\frac{\partial(\rho \epsilon)}{\partial \rho}\right)_s = \epsilon + \frac{p}{\rho} = w$, а вторая производная равна

$$\left(\frac{\partial^2(\rho \epsilon)}{\partial \rho^2}\right)_s = \left(\frac{\partial w}{\partial \rho}\right)_s = \left(\frac{\partial w}{\partial p}\right)_s \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \frac{c^2}{\rho}.$$

Таким образом, энергия единицы объема жидкости равна

$$\rho_0 \epsilon_0 + w_0 \rho' + \frac{c^2}{2\rho_0} \rho'^2 + \rho_0 \frac{\rho'^2}{2}.$$

Первый член в этом выражении ($\epsilon_0 \rho_0$) представляет собой энергию единицы объема неподвижной жидкости и не имеет отношения к звуковой волне. Что касается второго члена ($w_0 \rho'$), то это есть изменение энергии, связанное просто с изменением количества вещества (массы жидкости) в каждой данной единице объема. В полной энергии, получаемой интегрированием энергии единицы объема по всему объему жидкости, этот член выпадает; поскольку общее количество жидкости остаётся неизменным, то $\int \rho dV = \int \rho_0 dV$, так что $\int \rho' dV = 0$. Таким образом, полное изменение энергии жидкости, связанное с наличием звуковой волны, равно интегралу

$$\int \left(\frac{\rho_0 \rho'^2}{2} + \frac{c^2 \rho'^2}{2\rho_0} \right) dV.$$

Подынтегральное выражение можно рассматривать как плотность E звуковой энергии:

$$E = \frac{\rho_0 \rho'^2}{2} + \frac{c^2 \rho'^2}{2\rho_0}. \quad (48,1)$$

Это выражение упрощается в случае бегущей плоской волны. В такой волне $\rho' = \rho_0 \frac{v}{c}$ [см. (47,12)], и оба члена в (48,1) оказываются одинаковыми, так что

$$E = \rho_0 v^2. \quad (48,2)$$

В общем случае произвольной волны такое соотношение не имеет места. Аналогичную формулу можно написать в общем случае для среднего (по времени) значения полной звуковой энергии. Она следует непосредственно из известной общей теоремы механики о том, что во всякой системе, совершающей малые колебания, среднее значение полной потенциальной энергии равно среднему значению полной кинетической

энергии. Поскольку последняя равна в данном случае $\frac{1}{2} \int \rho_0 \bar{v}^2 dV$, то мы находим, что полная средняя звуковая энергия есть

$$\int \bar{E} dV = \int \rho_0 \bar{v}^2 dV. \quad (48,3)$$

Отметим, что если представить немонохроматическую волну в виде наложения ряда монохроматических волн, то средняя энергия волны будет равна сумме средних энергий каждой из монохроматических компонент. Действительно, если v представлено в виде суммы ряда членов с различными частотами, то в \bar{v}^2 войдут наряду с квадратами каждого из таких членов также произведения членов с различными частотами. Эти произведения содержат множители вида

$$e^{i(\omega - \omega')t},$$

являющиеся периодическими функциями времени. Но среднее значение простой периодической функции равно нулю, так что члены такого вида исчезают. Таким образом, в средней энергии остаются только члены, содержащие средние квадраты каждой из монохроматических компонент.

Далее, рассмотрим некоторый объем жидкости, в которой распространяется звук, и определим средний поток энергии через замкнутую поверхность, ограничивающую этот объем. Плотность потока энергии в жидкости равна согласно (5,3) $\rho v \left(\omega + \frac{v^2}{2} \right)$. В рассматриваемом случае можно пренебречь членом с $\frac{v^2}{2}$ как малым третьего порядка. Поэтому средняя плотность потока энергии в звуковой волне есть $\overline{\rho v \omega}$. Подставляя сюда $\omega = \omega_0 + \omega'$, имеем:

$$\overline{\rho v \omega} = \omega_0 \overline{\rho v} + \overline{\rho v' v}.$$

Для малого изменения ω' тепловой функции имеем $\omega' = \left(\frac{\partial \omega}{\partial p} \right)_s p'$. Поскольку $\left(\frac{\partial \omega}{\partial p} \right)_s = \frac{1}{\rho}$, то $\omega' = \frac{p'}{\rho}$ и, далее,

$$\overline{\rho v' v} = \omega_0 \overline{\rho v} + \overline{p' v}.$$

Полный поток энергии через рассматриваемую поверхность равен интегралу

$$\oint (\omega_0 \overline{\rho v} + \overline{p' v}) dt.$$

Но поскольку общее количество жидкости в данном объеме остаётся в среднем неизменным, то усреднённый по времени поток вещества $\oint \overline{\rho v} dt$ через замкнутую поверхность должен обращаться в нуль. Поэтому поток энергии есть просто

$$\oint \overline{p' v} dt.$$

Мы видим, что роль средней плотности потока звуковой энергии играет вектор

$$\bar{q} = \overline{p' v}. \quad (48,4)$$

Легко видеть, что имеет место соотношение

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \operatorname{div} p'v = 0. \quad (48,5)$$

В таком виде это уравнение выражает закон сохранения звуковой энергии, причём роль плотности потока этой энергии играет как раз вектор $q = p'v$. Отметим, кстати, что это выражение справедливо не только для среднего значения потока, но и для его значения в каждый данный момент времени.

В бегущей плоской волне изменение давления связано со скоростью посредством $p' = c\rho_0 v$. Вводя единичный вектор n в направлении распространения волны (совпадающем с направлением скорости v), получим $q = c\rho_0 v^2 n$, или

$$q = c\mathcal{E}n. \quad (48,6)$$

Таким образом, в плоской звуковой волне плотность потока энергии равна плотности энергии, помноженной на скорость звука, — результат, который естественно было ожидать.

Рассмотрим теперь звуковую волну, занимающую в каждый данный момент времени некоторую конечную область пространства ¹⁾ («волновой пакет»), и определим полный импульс жидкости в такой волне. Импульс единицы объёма жидкости совпадает с плотностью потока массы $j = \rho v$. Подставляя $\rho = \rho_0 + \rho'$, имеем $j = \rho_0 v + \rho'v$. Изменение плотности связано с изменением давления посредством $\rho' = \frac{\rho'}{c^2}$. С помощью (48,4) получаем поэтому

$$j = \rho_0 v + \frac{q}{c^2}. \quad (48,7)$$

Поскольку движение в звуковой волне потенциально, то можно написать $v = \nabla\varphi$ (подчеркнём, что это утверждение не связано с теми пренебрежениями, которые были сделаны в § 47 при выводе линейных уравнений движения, — решение с $\operatorname{rot} v = 0$ является точным решением уравнений Эйлера). Поэтому имеем:

$$j = \rho_0 \nabla\varphi + \frac{q}{c^2}.$$

Полный импульс волны равен интегралу $\int j dV$ по всему занимаемому ею объёму. Но интеграл от $\nabla\varphi$ может быть преобразован в интеграл по поверхности:

$$\int \nabla\varphi dV = \oint \varphi d\mathbf{f}$$

и обращается в нуль, так как вне занимаемого волной объёма $\varphi = 0$. Таким образом, полный импульс волны равен

$$\int j dV = \frac{1}{c^2} \int q dV. \quad (48,8)$$

¹⁾ Нигде не ограниченную твёрдыми стенками.

Эта величина, вообще говоря, отнюдь не обращается в нуль. Но наличие не равного нулю полного импульса означает, что имеет место перенос вещества. Мы приходим к результату, что распространение звукового волнового пакета сопровождается переносом вещества жидкости. Этот эффект является эффектом второго порядка малости (поскольку q есть величина второго порядка).

Наконец, вычислим среднее значение изменения p' давления в звуковой волне. В первом приближении, соответствующем обычным линейным уравнениям движения, p' является периодической знакопеременной функцией, и среднее значение p' обращается в нуль. Этот результат, однако, перестает иметь место, если обратиться к более высоким приближениям. Если ограничиться величинами второго порядка малости, то оказывается возможным выразить \bar{p}' через величины, вычисляемые с помощью линейных уравнений звука, так что не приходится прибегать к непосредственному решению нелинейных уравнений движения, получающихся при учёте величин высших порядков.

Будем исходить из уравнения Бернулли:

$$w + \frac{v^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \text{const.}$$

Усредним это равенство по времени. Среднее значение производной по времени $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ обращается в нуль¹⁾. Написав также $w = w_0 + w'$ и включив постоянную w_0 в const., получаем

$$\bar{w}' + \frac{\bar{v}^2}{2} = \text{const.}$$

Будем предполагать, что волна распространяется в неограниченном объёме жидкости, но на бесконечности затухает, т. е. v , w' и тому подобные величины обращаются в нуль. Поскольку const.⁴ одинакова во всём пространстве, то ясно, что должно быть const. = 0, так что

$$\bar{w}' + \frac{\bar{v}^2}{2} = 0. \quad (48,9)$$

Разложим, далее, w' в ряд по степеням p' ; с точностью до членов второго порядка имеем:

$$w' = \left(\frac{\partial w}{\partial p}\right)_0 p' + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial p^2}\right)_0 p'^2,$$

¹⁾ По общему определению средних величин имеем для среднего значения производной от какой-либо функции $f(t)$:

$$\frac{d\bar{f}}{dt} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \frac{df}{dt} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{f(T) - f(-T)}{2T}.$$

Если функция $f(t)$ остаётся конечной при всех t , то этот предел равен нулю, так что $\frac{d\bar{f}}{dt} = 0$.

и поскольку $\left(\frac{\partial w}{\partial p}\right)_s = 1/\rho$, то

$$w' = \frac{p'}{\rho_0} - \frac{p'^2}{2\rho_0^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s = \frac{p'}{\rho_0} - \frac{p'^2}{2c^2\rho_0^2}.$$

Подставляя это в (48,9), получим:

$$\bar{p} = -\frac{\rho_0 v^2}{2} + \frac{p'^2}{2\rho_0 c^2} = -\frac{\rho_0 v^2}{2} + \frac{p'^2 c^2}{2\rho_0}, \quad (48,10)$$

чем и определяется искомое среднее давление. Стоящее справа выражение является величиной второго порядка малости и для его вычисления надо пользоваться p' и v , получающимися при решении линейных уравнений движения. Для средней плотности имеем:

$$\bar{\rho}' = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p_0}\right)_s p' + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial p_0^2}\right)_s p'^2. \quad (48,11)$$

Если в рассматриваемом объёме волну можно считать бегущей плоской, то $v = c \frac{p'}{\rho_0}$, так что $v^2 = \frac{c^2}{\rho_0^2} p'^2$, и выражение (48,10) обращается в нуль,

т. е. в плоской волне среднее изменение давления является эффектом порядка более высокого, чем второй. Изменение же плотности

$\bar{\rho}' = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p_0}\right)_s \frac{p'^2}{2}$ в нуль не обращается. (Отметим, что производная $\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s$

является обычно величиной отрицательной и поэтому в бегущей волне

$\bar{\rho}' < 0$.) В этом же приближении имеем для среднего значения тензора

плотности потока импульса в бегущей плоской волне

$$\bar{p} + \overline{\rho v_i v_k} = p_0 + \rho_0 \overline{v_i v_k}.$$

Первый член связан с равновесным давлением и не имеет отношения к звуковой волне. Во втором же члене вводим единичный вектор \mathbf{n} в направлении \mathbf{v} (совпадающем с направлением распространения волны) и, воспользовавшись соотношением (48,2), будем иметь для плотности потока импульса в звуковой волне

$$\bar{\Pi}_{ik} = \bar{E} n_i n_k. \quad (48,12)$$

Если волна распространяется вдоль оси x , то отлична от нуля только компонента $\bar{\Pi}_{xx} = \bar{E}$. Таким образом, в рассматриваемом приближении в плоской звуковой волне имеется средний поток только x -компоненты импульса, причём переносится он в направлении оси x .

§ 49. Отражение и преломление звуковых волн

Когда звуковая волна попадает на границу между двумя различными средами (жидкостями или газами), с ней происходят явления отражения и преломления. Это значит, что наряду с падающей волной возникает ещё две; одна из них — отражённая — распространяется обратно от поверхности раздела в первой среде, а вторая — преломлённая — рас-

пространяется от поверхности раздела во второй среде. Следовательно, движение в первой среде является наложением двух волн (падающей и отражённой), во второй среде имеется одна (преломлённая) волна.

Связь между падающей, отражённой и преломлённой волнами определяется граничными условиями на поверхности раздела между обеими средами, требующими равенства давлений и нормальных к поверхности раздела компонент скорости.

Рассмотрим отражение и преломление монохроматической продольной волны в случае плоской границы раздела. Плоскость y, z выберем в качестве граничной. Легко видеть, что все три волны — падающая, отражённая и преломлённая — будут иметь одинаковые частоты ω и одинаковые компоненты k_y, k_z волнового вектора (но не компоненту k_x по направлению, перпендикулярному к плоскости раздела). Действительно, в неограниченной однородной среде монохроматическая волна с постоянными k и ω является решением уравнений движения. При наличии границы раздела добавляются лишь граничные условия, которые в нашем случае относятся к $x=0$, т. е. не зависят ни от времени, ни от координат y и z . Поэтому зависимость решения от t и от y, z остаётся неизменной во всём пространстве и времени, т. е. ω, k_y, k_z остаются теми же, какими они были в падающей волне.

Из этого результата могут быть непосредственно выведены соотношения, определяющие направления распространения отражённой и преломлённой волн. Пусть x, y — плоскость падения волны. Тогда в падающей волне $k_x = 0$; то же самое должно иметь место и для отражённой и преломлённой волн. Таким образом, направления распространения падающей, отражённой и преломлённой волн лежат в одной плоскости.

Пусть θ есть угол между направлением волны и осью x . Тогда из равенства величин $k_x = \frac{\omega}{c} \sin \theta$ для падающей и отражённой волн следует, что

$$\theta_1 = \theta'_1, \quad (49,1)$$

т. е. угол падения θ_1 равен углу отражения θ'_1 . Из аналогичного же равенства для падающей и преломлённой волн следует соотношение

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{c_1}{c_2} \quad (49,2)$$

между углом падения θ_1 и углом преломления θ_2 (c_1 и c_2 — скорости звука в обеих средах).

Для того, чтобы получить количественное соотношение между интенсивностями падающей, отражённой и преломлённой волн, пишем потенциалы скорости в этих волнах соответственно в виде

$$\varphi_1 = A_1 \exp \left\{ i\omega \left(\frac{x}{c_1} \cos \theta_1 + \frac{y}{c_1} \sin \theta_1 - t \right) \right\},$$

$$\varphi'_1 = A'_1 \exp \left\{ i\omega \left(-\frac{x}{c_1} \cos \theta_1 + \frac{y}{c_1} \sin \theta_1 - t \right) \right\},$$

$$\varphi_2 = A_2 \exp \left\{ i\omega \left(\frac{x}{c_2} \cos \theta_2 + \frac{y}{c_2} \sin \theta_2 - t \right) \right\}.$$

На поверхности раздела ($x=0$) должны быть равными давления ($p = -p'$) и нормальные скорости ($v_x = \partial \varphi / \partial x$) в обеих средах; эти условия приводят к равенствам

$$\rho_1 (A_1 + A_1') = \rho_2 A_2, \quad \frac{\cos \theta_1}{c_1} (A_1 - A_1') = \frac{\cos \theta_2}{c_2} A_2.$$

Коэффициент отражения R определяется как отношение средних (по времени) плотностей потока энергии в отражённой и падающей волнах. Поскольку плотность потока энергии в плоской волне равна [согласно (48,2), (48,6)] $c\rho v^2$, то имеем

$$R = \frac{c_1 \rho_1 v_1'^2}{c_1 \rho_1 v_1^2} = \frac{|A_1'|^2}{|A_1|^2}.$$

Простое вычисление приводит к результату

$$R = \left(\frac{\rho_2 \operatorname{tg}^2 \theta_2 - \rho_1 \operatorname{tg}^2 \theta_1}{\rho_2 \operatorname{tg}^2 \theta_2 + \rho_1 \operatorname{tg}^2 \theta_1} \right)^2 \quad (49,3)$$

(θ_1 и θ_2 связаны друг с другом соотношением (49,2)).

Для нормального падения ($\theta_1 = 0$) эта формула даёт просто

$$R = \left(\frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1} \right)^2. \quad (49,4)$$

При угле падения, определяющемся из

$$\operatorname{tg}^2 \theta_1 = \frac{\rho_2^2 c_2^2 - \rho_1^2 c_1^2}{\rho_1^2 (c_1^2 - c_2^2)}, \quad (49,5)$$

коэффициент отражения обращается в нуль, т. е. звуковая волна целиком преломляется, не отражаясь вовсе; такой случай возможен, если $c_2 > c_1$, но $\rho_2 c_2 > \rho_1 c_1$ (или наоборот).

Задача

Определить давление, оказываемое звуковой волной на границу раздела между двумя жидкостями.

Решение. Сумма полных потоков энергии в отражённой и преломлённой волнах должна быть равна падающему потоку энергии. Относя поток энергии к единице площади поверхности раздела, напишем это условие в виде

$$c_1 E_1 \cos \theta_1 = c_1 E_1' \cos \theta_1 + c_2 E_2 \cos \theta_2,$$

где E_1 , E_1' , E_2 — плотности энергии в падающей, отражённой и преломлённой волнах. Вводя коэффициент отражения $R = E_1'/E_1$, имеем отсюда

$$E_2 = \frac{c_1 \cos \theta_1}{c_2 \cos \theta_2} (1 - R).$$

Искомое давление p определяется как x -компонента импульса, теряемого в единицу времени звуковой волной (отнесённая к единице площади границы

раздела). С помощью выражения (48,12) для тензора плотности потока импульса в звуковой волне найдем:

$$p = \bar{E}_1 \cos^2 \theta_1 + \bar{E}_1 \cos^2 \theta_1 - \bar{E}_2 \cos^2 \theta_2$$

Подставляя выражение для \bar{E}_2 , вводя R и используя (49,2), получим:

$$p = \bar{E}_1 \sin \theta_1 \cos \theta_1 [\operatorname{ctg} \theta_1 \cdot (1 + R) - \operatorname{ctg} \theta_2 \cdot (1 - R)].$$

Для нормального падения ($\theta_1 = 0$) найдем с помощью (49,4):

$$p = 2\bar{E}_1 \left[\frac{\rho_1^2 c_1^2 + \rho_2^2 c_2^2 - 2\rho_1 \rho_2 c_1^2}{(\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2)^2} \right].$$

§ 50. Геометрическая акустика

Плоская волна отличается тем свойством, что направление её распространения и её амплитуда одинаковы во всем пространстве. Произвольные звуковые волны этим свойством, конечно, не обладают. Однако, возможны случаи, когда звуковую волну, не являющуюся 'плоской', в каждом небольшом участке пространства можно рассматривать как плоскую. Для этого, очевидно, необходимо, чтобы амплитуда и направление волны почти не менялись на протяжении расстояний порядка длины волны.

Если выполнено это условие, то можно ввести понятие о лучах как о линиях, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением распространения волны, и можно говорить о распространении звука вдоль лучей, отвлекаясь при этом от его волновой природы. Изучение законов распространения звука в таких случаях составляет предмет геометрической акустики. Можно сказать, что геометрическая акустика соответствует предельному случаю малых длин волн, $\lambda \rightarrow 0$.

Выведем основное уравнение геометрической акустики — уравнение, определяющее направление лучей. Напишем потенциал скорости волны в виде

$$\varphi = ae^{i\psi}. \quad (50,1)$$

В случае, когда волна не плоская, но геометрическая акустика применима, амплитуда a является медленно меняющейся функцией координат и времени, а фаза волны ψ есть «почти линейная» функция (напомним, что в плоской волне $\psi = \mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t + a$ с постоянными \mathbf{k} и ω). В малых участках пространства и малых интервалах времени фазу ψ можно разложить в ряд; с точностью до членов первого порядка имеем:

$$\psi = \psi_0 + \mathbf{r} \operatorname{grad} \psi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} t.$$

Соответственно тому, что в каждом небольшом участке пространства (и в небольших интервалах времени) волну можно рассматривать как плоскую, определяем волновой вектор и частоту волны в каждой точке как

$$\mathbf{k} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} = \operatorname{grad} \psi, \quad \omega = -\frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (50,2)$$

В звуковой волне в жидкости имеем $\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$. Подставляя сюда (50,2), получим следующее основное уравнение геометрической акустики:

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 = 0. \quad (50,3)$$

Если жидкость неоднородна, то коэффициент $\frac{1}{c^2}$ является, вообще говоря, функцией координат.

Как известно из механики, движение материальных частиц может быть определено с помощью уравнения Гамильтона-Якоби, являющегося, как и уравнение (50,3), уравнением в частных производных первого порядка. Аналогичной ψ величиной является при этом действие S частицы, а производные от действия определяют импульс \mathbf{p} и функцию Гамильтона H (энергию) частицы согласно формулам $\mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}}$, $H = -\frac{\partial S}{\partial t}$, аналогичным формулам (50,2). Известно, далее, что уравнение Гамильтона-Якоби эквивалентно уравнениям Гамильтона, имеющим вид: $\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}$, $\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}$. Ввиду указанной аналогии между механикой материальной частицы и геометрической акустикой мы можем непосредственно написать аналогичные уравнения для лучей:

$$\dot{\mathbf{k}} = -\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{r}}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}. \quad (50,4)$$

В однородной среде $\omega = ck$ с постоянным c , так что $\dot{\mathbf{k}} = 0$, $\dot{\mathbf{r}} = c\mathbf{n}$ (\mathbf{n} — единичный вектор вдоль направления \mathbf{k}), т. е., как и должно было быть, лучи являются прямыми линиями, вдоль которых звук распространяется со скоростью c .

Вторая из формул (50,4) определяет скорость распространения волн по известной зависимости частоты от компонент волнового вектора. Это — весьма важная формула, относящаяся не только к звуковым, но и ко всяким волнам вообще (мы уже пользовались, например, этой формулой в § 11 в применении к гравитационным волнам). Приведём здесь ещё один вывод этой формулы, полезный для уяснения смысла определяемой ею скорости. Рассмотрим волну (или, как говорят, волновой пакет), занимающую некоторую конечную область пространства. Предположим, что волна такова, что в её спектральное разложение входят монохроматические компоненты с частотами, лежащими в некотором малом интервале; то же самое относится и к компонентам их волновых векторов. Пусть ω есть некоторая средняя частота волны, а \mathbf{k} — средний волновой вектор. Тогда в некоторый начальный момент времени волна описывается функцией вида

$$\varphi = e^{i\Delta \mathbf{r}} f(\mathbf{r}). \quad (50,5)$$

Функция $f(\mathbf{r})$ заметно отлична от нуля только в некоторой области пространства. Её разложение в интеграл Фурье содержит, согласно сделанным предположениям, компоненты вида $e^{i\Delta \mathbf{k}}$, где $\Delta \mathbf{k}$ — малые величины.

Таким образом, каждая из монохроматических компонент волны пропорциональна в начальный момент времени множителю вида

$$\varphi_k = \text{const. } e^{nk + ikr}. \quad (50,6)$$

Соответствующая ей частота есть $\omega(k + \Delta k)$ (напомним, что частота является функцией волнового вектора). Поэтому в момент времени t та же компонента будет иметь вид

$$\varphi_k = \text{const. } e^{i(k + \Delta k)r - i\omega(k + \Delta k)t}.$$

Вспользуемся тем, что Δk мало, и разложим $\omega(k + \Delta k)$ в ряд, ограничившись первыми двумя членами:

$$\omega(k + \Delta k) = \omega + \frac{\partial \omega}{\partial k} \Delta k,$$

где $\omega = \omega(k)$ есть частота, соответствующая «среднему» волновому вектору. Тогда φ_k приобретает вид

$$\varphi_k = \text{const. } e^{i(kr - \omega t)} e^{i\Delta k \left(r - \frac{\partial \omega}{\partial k} t \right)}. \quad (50,7)$$

Если теперь произвести обратное суммирование всех монохроматических компонент волны со всеми имеющимися в ней Δk , то, как видно из сравнения (50,6) и (50,7), мы получим

$$\varphi = e^{i(kr - \omega t)} f \left(r - \frac{\partial \omega}{\partial k} t \right), \quad (50,8)$$

где f — та же функция, что и в (50,5). Сравнение с (50,5) показывает, что за время t вся картина распределения амплитуды в волне передвинулась в пространстве на расстояние $\frac{\partial \omega}{\partial k} t$ (экспоненциальный множитель перед f в (50,8) влияет только на фазу волны). Следовательно, скорость её равна

$$U = \frac{\partial \omega}{\partial k}. \quad (50,9)$$

Эта формула и определяет скорость распространения волны с произвольной зависимостью ω от k ¹⁾. В случае $\omega = ck$ с постоянным c она приводит, конечно, к обычному результату $U = \frac{\omega}{k} = c$. В общем же

1) Скорость, определяемую этой формулой, называют также групповой скоростью волны, а отношение $\frac{\omega}{k}$ — фазовой скоростью. Надо, однако, иметь в виду, что фазовая скорость не соответствует реальному физическому распространению чего бы то ни было.

По поводу приведённого в тексте вывода подчеркнём, что выражаемое формулой (50,8) передвижение волны без изменения её формы является приближённым и связано с предположенной малостью интервала Δk . Вообще же говоря, при наличии зависимости U от ω волна по мере своего распространения меняет свою форму; это, как говорят, размазывание волнового пакета пропорционально, как можно показать, квадрату величины интервала Δk волновых векторов, входящих в разложение волны.

случае произвольной зависимости $\omega(\mathbf{k})$ скорость распространения волны является функцией частоты (в таких случаях говорят о наличии дисперсии) и её направление может не совпадать с направлением волнового вектора.

§ 51. Эффект Доплера

Соотношение $\omega = ck$ между частотой и волновым вектором имеет место только для монохроматической звуковой волны, распространяющейся в неподвижной среде. Нетрудно получить аналогичное соотношение для волны, распространяющейся в движущейся жидкости (и наблюдаемой в неподвижной системе координат).

Рассмотрим однородный поток жидкости со скоростью \mathbf{u} . Назовём неподвижную систему координат x, y, z системой K и введём также систему K' координат x', y', z' , движущуюся относительно системы K со скоростью \mathbf{u} . В системе K' жидкость неподвижна, и монохроматическая волна в ней имеет обычный вид:

$$\varphi = \text{const. } e^{i(kx' - \omega t')}$$

Радиус-вектор \mathbf{r}' в системе K' связан с радиусом-вектором \mathbf{r} в системе K равенством $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{u}t$. Поэтому в неподвижной системе координат волна имеет вид

$$\varphi = \text{const. } e^{i(kr - (ck + \mathbf{u}\mathbf{k})t)}$$

Коэффициент при t в показателе есть частота ω волны. Таким образом, в движущейся среде частота связана с волновым вектором \mathbf{k} соотношением:

$$\omega = ck + \mathbf{u}\mathbf{k} \quad (51,1)$$

В некотором смысле обратным случаем является распространение в неподвижной среде звуковой волны, испускаемой движущимся источником. Пусть \mathbf{u} обозначает теперь скорость движения источника. Перейдём от неподвижной системы координат к системе K' , движущейся вместе с источником; в системе K' жидкость движется со скоростью $-\mathbf{u}$. В системе K' , где источник покоится, частота излучаемой им звуковой волны должна быть равна частоте ω_0 колебаний, совершаемых источником. Изменив в (51,1) знак перед \mathbf{u} и вводя угол θ между направлениями скорости \mathbf{u} и волнового вектора \mathbf{k} , будем иметь:

$$\omega_0 = ck \left(1 - \frac{u}{c} \cos \theta \right).$$

С другой стороны, в исходной неподвижной системе K частота связана с волновым вектором равенством $\omega = ck$. Таким образом, мы приходим к соотношению:

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 - \frac{u}{c} \cos \theta} \quad (51,2)$$

Этой формулой определяется связь между частотой ω_0 колебаний движущегося источника звука и частотой ω звука, слышимого неподвижным

наблюдателем. Изменение частоты звука при движении источника называется *эффектом Допплера*.

Если источник удаляется от наблюдателя, то угол θ между его скоростью и направлением приходящей в точку наблюдения волной заключён в пределах $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, так что $\cos \theta < 0$. Из (51,2) следует, таким образом, что если источник движется, удаляясь от наблюдателя, то частота слышимого наблюдателем звука уменьшается (по сравнению с ω_0).

Напротив, для приближающегося к наблюдателю источника $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, так что $\cos \theta > 0$, и частота $\omega > \omega_0$ и растёт при увеличении скорости u . При $u \cos \theta > c$ ω согласно формуле (51,2) делается отрицательной, что соответствует тому, что слышимый наблюдателем звук будет в действительности доходить до него в обратном порядке, т. е. звук, излучённый источником в более поздние моменты времени, дойдёт до наблюдателя раньше, чем звук, излучённый в более ранние моменты.

Задачи

1. Вывести уравнение, определяющее форму звуковых лучей, распространяющихся в стационарно движущейся жидкости с распределением скоростей $u(x, y, z)$, причём везде $u \ll c$.

Решение. Подставляя (51,1) в (50,4), получим уравнения распространения лучей в виде

$$\dot{\mathbf{k}} = -(\mathbf{k}\nabla)\mathbf{u} - [\mathbf{k} \operatorname{rot} \mathbf{u}],$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} = c \frac{\mathbf{k}}{k} + \mathbf{u}.$$

С помощью этих уравнений вычисляем, с точностью до членов первого порядка по u , производную $\frac{d}{dt}(k\mathbf{v})$; при вычислении используем равенство

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{u} = (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{u} \approx \frac{c}{k}(\mathbf{k}\nabla)\mathbf{u}.$$

$$\frac{d}{dt}(k\mathbf{v}) = -k\mathbf{v}[\mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{u}],$$

где \mathbf{n} — единичный вектор в направлении \mathbf{v} . С другой стороны,

$$\frac{d}{dt}(k\mathbf{v}) = \mathbf{n} \frac{d}{dt}(k\mathbf{v}) + k\mathbf{v} \frac{d\mathbf{n}}{dt}.$$

Поскольку \mathbf{n} и $\frac{d\mathbf{n}}{dt}$ взаимно перпендикулярны (из $\mathbf{n}^2 = 1$ следует, что $\mathbf{n} \frac{d\mathbf{n}}{dt} = 0$),

то из сравнения обоих выражений находим $\dot{\mathbf{n}} = [\operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}]$. Вводя элемент пройденной лучом длины $d\mathbf{l} = c \, dt$, пишем окончательно:

$$\frac{d\mathbf{n}}{dl} = \frac{1}{c} [\operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}].$$

Этим уравнением определяется форма лучей; \mathbf{n} есть единичный вектор касательной к лучу. При интегрировании \mathbf{n} правой части равенства следует писать в том же приближении, вместо \mathbf{n} единичный вектор \mathbf{n}_0 , соответствующий прямолинейному распространению луча.

2. Определить форму звуковых лучей в движущейся жидкости с распределением скоростей: $u_x = A_x$, $u_y = u_z = 0$.

Решение. Согласно (51,1) имеем: $(\omega - A y k_x)^2 = c^2 k^2 = c^2 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)$. Подставляя сюда (50,2), получаем уравнение геометрической акустики в виде

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + A y k_x \right)^2 = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2.$$

Ищем решение этого уравнения в виде $\psi = -\omega t + k_x x + k_y y + f(y)$ (с постоянными ω , k_x , k_y) и получаем для $f(y)$ уравнение

$$\left(\frac{df}{dy} \right)^2 = \frac{1}{c^2} (A y k_x - \omega)^2 - k_x^2 - k_y^2.$$

Таким образом,

$$\psi = -\omega t + k_x x + k_y y + \int \sqrt{\left(\frac{\omega - A y k_x}{c} \right)^2 - k_x^2 - k_y^2} dy.$$

Уравнение луча получается дифференцированием ψ по k_x и k_y и приравниванием этих производных постоянным (подобно тому, как определяется в механике траектория частицы с помощью уравнения Гамильтона-Якоби):

$$x = \frac{1}{c} \int \frac{(\omega - A y k_x) A y + c^2 k_x}{\sqrt{(\omega - A y k_x)^2 - k_x^2 c^2 - k_y^2 c^2}} dy$$

$$z = \frac{k_z}{c} \int \frac{dy}{\sqrt{(\omega - A y k_x)^2 - k_x^2 c^2 - k_y^2 c^2}}$$

Интегралы берутся элементарным образом.

§ 52. Собственные колебания

До сих пор мы рассматривали только колебательное движение в неограниченных средах. Мы видели, в частности, что в таких средах могут распространяться волны с произвольными частотами.

Положение существенно меняется при переходе к жидкости, находящейся в сосуде конечных размеров. Самые уравнения движения (волновые уравнения) остаются при этом, конечно, теми же, но к ним необходимо добавить теперь граничные условия, которые должны выполняться на поверхности твердых стенок (или на свободной поверхности жидкости). Мы будем рассматривать здесь только так называемые свободные колебания, т. е. колебания, происходящие в отсутствие переменных внешних сил (колебания, совершаемые под действием внешних сил, называются вынужденными).

Уравнения движения для ограниченной жидкости отнюдь не при всякой частоте имеют решение, удовлетворяющее соответствующим граничным условиям. Такие решения существуют лишь для ряда вполне определенных значений ω . Другими словами, в среде конечного объема могут происходить свободные колебания лишь с вполне определенными частотами. Эти частоты называются частотами собственных колебаний, или собственными частотами жидкости в данном сосуде.

Конкретные значения собственных частот зависят от формы и размеров сосуда. В каждом данном случае существует бесконечный ряд

возрастающих собственных частот. Нахождение их требует конкретного исследования уравнения движения с соответствующими граничными условиями.

Что касается первой, т. е. наименьшей, из собственных частот, то её порядок величины очевиден непосредственно из соображений размерности. Единственным, входящим в задачу, параметром с размерностью длины являются линейные размеры l тела. Ясно поэтому, что соответствующая первой собственной частоте длина волны λ_1 должна быть порядка величины l ; порядок величины самой частоты ω_1 получается делением скорости звука на λ_1 . Таким образом,

$$\lambda_1 \sim l, \quad \omega_1 \sim \frac{c}{l}. \quad (52,1)$$

Выясним характер движения при собственных колебаниях. Если искать периодическое по времени решение волнового уравнения, скажем, для потенциала скорости, в виде $\varphi = \varphi_0(x, y, z)e^{-i\omega t}$, то для φ_0 будем иметь уравнение

$$\Delta \varphi_0 + \frac{\omega^2}{c^2} \varphi_0 = 0. \quad (52,2)$$

В неограниченной среде, когда не надо учитывать никаких граничных условий, это уравнение обладает как действительными, так и комплексными решениями. В частности, оно имеет решение, пропорциональное $e^{i(kr - \omega t)}$, приводящее к потенциалу вида $\varphi = \text{const.} \cdot e^{i(kr - \omega t)}$. Такое решение представляет собой волну, распространяющуюся с определённой скоростью, или, как говорят, бегущую волну.

Но для среды конечного объёма комплексные решения, вообще говоря, не могут существовать. В этом можно убедиться путём следующего рассуждения. Уравнение, которому удовлетворяет φ_0 , действительно, и то же самое относится к граничным условиям. Поэтому, если $\varphi_0(x, y, z)$ есть решение уравнений движения, то и комплексно сопряжённое φ_0^* тоже есть решение. Поскольку, с другой стороны, решение уравнения при заданных граничных условиях, вообще говоря, однозначно¹⁾ (с точностью до постоянного множителя), то должно быть $\varphi_0^* = \text{const.} \cdot \varphi_0$, где const. — некоторая комплексная постоянная, модуль которой, очевидно, равен единице. Таким образом, φ_0 должно иметь вид

$$\varphi_0 = f(x, y, z) e^{-i\alpha}$$

с действительной функцией f и действительной постоянной α . Потенциал φ имеет, следовательно, вид (берём действительную часть от $\varphi e^{-i\omega t}$):

$$\varphi = f(x, y, z) \cos(\omega t - \alpha), \quad (52,3)$$

т. е. является произведением некоторой функции координат на простую периодическую функцию времени.

¹⁾ Это может не иметь места в случае формы сосуда, обладающей выской симметрией, например, в случае шара.

Такое решение имеет характер, совершенно отличный от бегущей волны. В бегущей волне [$\varphi = \text{const.} \cos(kr - \omega t + \alpha)$] фазы $kr - \omega t + \alpha$ колебаний в различных точках вдоль тела в один и тот же момент времени различны, будучи равными только в точках, удалённых друг от друга на расстояние, равное длине волны. В волне же (52,3) в каждый момент времени все точки тела колеблются в одной и той же фазе ($\omega t + \alpha$). Ни о каком «распространении» такой волны, очевидно, нельзя говорить. Такие волны называются «стоячими». Таким образом, собственные колебания представляют собой стоячие волны.

Рассмотрим плоскую стоячую звуковую волну, в которой все величины являются функцией только от одной координаты, скажем, x (и от времени). Написав общее решение уравнения

$$\frac{d^2 \varphi_0}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \varphi_0 = 0$$

в виде $\varphi_0 = a \cos\left(\frac{\omega}{c} x + \beta\right)$, будем иметь:

$$\varphi = a \cos(\omega t + \alpha) \cos\left(\frac{\omega}{c} x + \beta\right).$$

Надлежащим выбором начала координат и начала отсчёта времени можно обратить α и β в нуль, так что будет

$$\varphi = a \cos \omega t \cos \frac{\omega}{c} x. \quad (52,4)$$

Для скорости и давления в волне имеем:

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -a \frac{\omega}{c} \cos \omega t \sin \frac{\omega}{c} x;$$

$$p' = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \rho \omega \sin \omega t \cos \frac{\omega}{c} x.$$

В точках $x = 0, \frac{\pi c}{\omega}, \frac{2\pi c}{\omega}, \dots$, удалённых друг от друга на расстояние $\frac{\pi c}{\omega} = \frac{\lambda}{2}$, скорость v всегда равна нулю; эти точки называют «узлами»

волны для скорости. Посредине между ними (при $x = \frac{\pi c}{2\omega}, \frac{3\pi c}{2\omega}, \dots$) расположены точки, в которых амплитуда колебаний скорости со временем максимальна; эти точки называют «пучностями» волны. Что же касается давления p' , то для него, очевидно, первые точки являются пучностями, а вторые — узлами. Таким образом, в стоячей плоской звуковой волне пучности давления совпадают с узлами скорости, и наоборот.

Интересным случаем собственных колебаний являются колебания, скажем, газа, находящегося в сосуде, в котором имеется маленькое отверстие (такой сосуд называют резонатором). В замкнутом сосуде наименьшая из собственных частот, как мы знаем, — порядка величины $\frac{c}{l}$, где l — линейные размеры сосуда. При наличии же маленького отверстия появляется новый вид собственных колебаний со значительно меньшей частотой. Эти колебания связаны с тем, что если между газом

внутри и вне сосуда появляется разность давлений, то эта разность может выравниваться посредством входа и выхода газа из сосуда наружу. Таким образом, появляются колебания, сопровождающиеся обменом газа между резонатором и внешней средой. Поскольку отверстие мало, то этот обмен происходит медленно; поэтому период колебаний велик, а частота соответственно мала. Что касается обычных колебаний, имеющих в замкнутом сосуде, то их частоты под влиянием наличия отверстия практически не меняются (благодаря малости отверстия).

Задачи

1. Определить собственные частоты звуковых колебаний жидкости в сосуде, имеющем форму параллелепипеда.

Решение. Ищем решение уравнения (52,2) в виде

$$\varphi_0 = \text{const.} \cos qx \cos ry \cos sz,$$

причём $p^2 + q^2 + r^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$. На стенках сосуда имеем условия:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \text{ при } x=0, a;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \text{ при } y=0, b;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \text{ при } z=0, c,$$

где a, b, c — длины сторон параллелепипеда. Отсюда находим $q = \frac{m\pi}{a}$,

$r = \frac{n\pi}{b}$, $s = \frac{p\pi}{c}$, где m, n, p — произвольные целые числа. Таким образом, собственные частоты равны

$$\omega^2 = c^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{c^2} \right).$$

2. К отверстию резонатора присоединена трубочка (сечения S , длины d); определить собственную частоту колебаний.

Решение. Поскольку трубочка является тонкой, то при колебаниях, сопровождающихся входом и выходом газа из резонатора, можно считать, что заметной скоростью обладает только газ в трубочке, а скорость газа внутри сосуда практически равна нулю. Масса газа в трубочке есть $S\rho d$, а сила, действующая на него, есть $S(p_0 - p)$ (p, p_0 — давления газа соответственно внутри резонатора и во внешней среде); поэтому должно быть $S\rho d \dot{v} = S(p - p_0)$ (v — скорость газа в трубочке). С другой стороны, для производной от давления по времени имеем $\dot{p} = c^2 \dot{\rho}$, а уменьшение $-p$ плотности газа в резонаторе в единицу времени можно считать равным вытекающему в единицу времени количеству газа $S\rho v$, делённому на объём V резонатора. Таким образом, имеем

$\dot{p} = -\frac{c^2 S \rho}{V} v$, откуда

$$\ddot{p} = -\frac{c^2 S \rho}{V} \dot{v} = -\frac{c^2 S}{dV} (p - p_0).$$

Это уравнение даёт $p - p_0 = \text{const.} \sin \omega_0 t$, где собственная частота ω_0 равна

$$\omega_0 = c \sqrt{\frac{S}{dV}}.$$

§ 53. Сферические и цилиндрические волны

Рассмотрим звуковую волну, в которой распределение плотности, скорости и т. д. зависит только от расстояния до некоторого центра, т. е. обладает сферической симметрией. Такая волна называется сферической.

Определим общее решение волнового уравнения, описывающее сферическую волну. Будем писать волновое уравнение, например, для потенциала скорости:

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0.$$

Поскольку φ есть функция только от расстояния r до центра (и от времени t), то, воспользовавшись выражением для оператора Лапласа в сферических координатах, имеем:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right). \quad (53,1)$$

Будем искать решение в виде

$$\varphi = \frac{f(r, t)}{r}.$$

Подстановка приводит после простого вычисления к следующему уравнению для f :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}.$$

Но это есть обычное волновое уравнение в одном измерении, в котором роль координаты играет радиус r . Решение этого уравнения имеет, как мы знаем, вид

$$f = f_1(ct - r) + f_2(ct + r),$$

где f_1, f_2 — произвольные функции. Таким образом, общее решение уравнения (53,1) имеет вид

$$\varphi = \frac{f_1(ct - r)}{r} + \frac{f_2(ct + r)}{r}. \quad (53,2)$$

Первый член представляет собой расходящуюся волну, распространяющуюся во все стороны из начала координат. Второй же член есть волна, сходящаяся к центру. В отличие от плоской волны, амплитуда которой остаётся постоянной, в сферической волне амплитуда падает обратно пропорционально расстоянию до центра. Интенсивность же волны, определяющаяся квадратом амплитуды, обратно пропорциональна квадрату расстояния, как и должно было быть, поскольку полный поток энергии в волне распределяется по мере её распространения по поверхности, площадь которой растёт пропорционально r^2 .

Переменные части давления и плотности связаны с потенциалом посредством $p' = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}$, $\rho' = -\frac{\rho}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$, и их распределение определяется

формулами того же вида, что и (53,2). Распределение же скорости (радиальной), определяющейся градиентом потенциала, имеет вид

$$v = \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{f_1(ct-r) + f_2(ct+r)}{r} \right\}. \quad (53,3)$$

Если в начале координат нет излучающего звук тела, то потенциал (53,2) должен оставаться при $r=0$ конечным. Для этого необходимо, чтобы было $f_1(ct) = -f_2(ct)$, т. е. φ имеет вид

$$\varphi = \frac{f(ct-r) - f(ct+r)}{r}. \quad (53,4)$$

Если же в начале координат находится излучающее тело, то потенциал излучаемой им расходящейся волны есть $\varphi = \frac{f(ct-r)}{r}$ и не должен оставаться конечным при $r=0$, поскольку это решение вообще относится только к области вне тела.

Укажем ещё, что монохроматическая сферическая расходящаяся волна имеет вид

$$\varphi = A \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \quad (53,5)$$

(где $k = \frac{\omega}{c}$). Волна же (53,4) с φ конечным при $r=0$ есть

$$\varphi = A \frac{\sin kr}{r} e^{-i\omega t} \quad (53,6)$$

и представляет собой стоячую сферическую волну.

Предположим, что в некоторой конечной области пространства возникает некоторое сферически симметричное звуковое возмущение (оно может быть создано, например, телом, колебавшимся в течение некоторого промежутка времени). По истечении достаточно долгого времени волна приобретает характер расходящейся сферической волны, с распределением потенциала вида $\varphi = \frac{1}{r} f(ct-r)$. При $r \rightarrow 0$ φ должно оставаться конечным; отсюда следует, что функция $f(\xi)$ при достаточно больших значениях аргумента ξ ($r=0$ и достаточно большие t) должна обращаться в нуль. Из этого обстоятельства можно вывести интересное следствие, касающееся распределения сгущений и разрежений в сферической волне. Изменение давления p' в волне связано с потенциалом посредством $p' = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}$. Если проинтегрировать p' по всему времени при заданном значении r , то мы получим в результате нуль. Действи-

тельно, $\int_{-\infty}^{+\infty} p' dt = -\rho [\varphi(+\infty) - \varphi(-\infty)]$; но $\varphi(+\infty) = 0$ по указанным выше причинам, а $\varphi(-\infty) = 0$, поскольку при $t = -\infty$ никакой волны вообще ещё нет. Таким образом, по мере прохождения сферической волны через заданную точку пространства, в этой точке будут наблюдаться как сгущения ($p' > 0$), так и разрежения ($p' < 0$), причём

так, что полный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} p' dt$ обратится в нуль. В этом отношении сферическая волна существенным образом отличается от плоской, которая может состоять и из одних только сгущений или одних разрежений.

Рассмотрим теперь волну, в которой распределение всех величин однородно вдоль некоторого одного направления (которое мы выберем в качестве оси z) и к тому же обладает полной аксиальной симметрией вокруг этой оси. В такой, как говорят, цилиндрической волне имеем $\varphi = \varphi(R, t)$, где посредством R обозначается расстояние до оси z . Определим общий вид такого аксиально симметрического решения волнового уравнения. Это можно сделать непосредственно, исходя из общего вида сферически симметричного решения (53,2). R связано с r посредством $r^2 = R^2 + z^2$, так что φ , определяемое формулой (53,2), зависит, при заданных t и R , также и от z . Функцию, зависящую только от R и t и в то же время удовлетворяющую волновому уравнению, можно получить интегрированием выражения (53,2) по всем значениям z от $-\infty$ до $+\infty$, или, что то же, от 0 до $+\infty$. Перейдём от интегрирования по z к интегрированию по r . Поскольку $z = \sqrt{r^2 - R^2}$, то $dz = \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - R^2}}$; при изменении z от 0 до $+\infty$ r меняется в пределах между R и ∞ . Поэтому находим окончательно общий вид аксиально-симметричного решения:

$$\varphi = \int_R^{\infty} \frac{f_1(ct-r)}{\sqrt{r^2-R^2}} dr + \int_R^{\infty} \frac{f_2(ct+r)}{\sqrt{r^2-R^2}} dr, \quad (53,7)$$

где f_1, f_2 — произвольные функции. Первый член представляет собой расходящуюся, а второй — сходящуюся цилиндрическую волну.

Наконец, выведем выражение для потенциала монохроматической цилиндрической волны. Волновое уравнение в цилиндрических координатах для потенциала $\varphi(R, t)$ имеет вид

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0.$$

В монохроматической волне $\varphi = e^{-i\omega t} f(R)$ и для функции f получаем уравнение

$$f'' + \frac{1}{R} f' + k^2 f = 0.$$

Это есть уравнение функций Бесселя нулевого порядка. В стоячей цилиндрической волне φ должно оставаться конечным при $R=0$; соответствующим решением является $I_0(kR)$, где I_0 — функция Бесселя первого рода (обращающаяся при $R=0$ в нуль). Таким образом, в стоячей цилиндрической волне

$$\varphi = Ae^{-i\omega t} I_0(kR). \quad (53,8)$$

При достаточно больших R функцию I_0 можно заменить её известным асимптотическим выражением:

$$\varphi = A \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-i\omega t} \frac{\cos\left(Rk - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{R}}. \quad (53,9)$$

Решение же, соответствующее монохроматической бегущей расходящейся волне, есть

$$\varphi = Ae^{-i\omega t} H_0^{(1)}(kR), \quad (53,10)$$

где $H_0^{(1)}$ есть функция Ганкеля нулевого порядка первого рода. При больших R имеет место асимптотическая формула:

$$\varphi = A \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{i(kR - \omega t - \pi/4)}}{\sqrt{R}}. \quad (53,11)$$

Мы видим, что амплитуда цилиндрической волны падает (на больших расстояниях) обратно пропорционально корню из расстояния до оси, а интенсивность соответственно как $\frac{1}{\rho}$. Этот результат является естественным, поскольку по мере распространения волны полный поток энергии в ней распределяется по цилиндрической поверхности, площадь которой растёт пропорционально R .

Задача

В начальный момент времени газ внутри сферического объёма (радиуса a) сжат так, что $\rho = \text{const.} = \Delta$; вне этого объёма $\rho = 0$. Начальная скорость равна нулю во всём пространстве. Определить последующее движение газа.

Решение. Начальные условия для потенциала таковы: $\varphi|_{t=0} = 0$ при $r \leq a$; $\dot{\varphi}|_{t=0} = F(r)$, где $F(r) = 0$ при $r > a$ и $F(r) = -\Delta \frac{c^2}{\rho}$ при $r < a$. Ищем φ в виде

$$\varphi(r, t) = \frac{f(ct - r) - f(ct + r)}{r}.$$

Из начальных условий получаем:

$$f(-r) - f(r) = 0, \quad f'(-r) - f'(r) = \frac{r}{a} F(r).$$

Из первого уравнения имеем $f'(-r) + f'(r) = 0$ и вместе со вторым оно даёт $f'(r) = -f'(-r) = -\frac{r}{2c} F(r)$. Наконец, подставляя значение $F(r)$, получаем для производной $f'(\xi)$ и для самой функции $f(\xi)$ следующий результат:

$$\text{при } |\xi| > a: \quad f'(\xi) = 0, \quad f(\xi) = 0,$$

$$\text{при } |\xi| < a: \quad f'(\xi) = \frac{c\Delta}{2\rho} \xi, \quad f(\xi) = \frac{c\Delta}{4\rho} (\xi^2 - a^2),$$

чем и опреэляется решение задачи. Рассмотрим точку с $r > a$, т. е. вне области начального сжатия; для плотности ρ' имеем здесь:

$$\begin{aligned} \text{при } t < \frac{r-a}{c}: & \quad \rho' = 0; \\ \text{при } \frac{r-a}{c} < t < \frac{r+a}{c}: & \quad \rho' = \frac{\Delta}{2} \frac{r-ct}{r}; \\ \text{при } t > \frac{r+a}{c}: & \quad \rho' = 0. \end{aligned}$$

Волна проходит через данную точку в течение промежутка времени, равного $\frac{2a}{c}$; другими словами, волна имеет форму шарового слоя толщины $2a$, заключённого в момент t между сферами радиусов $ct - a$ и $ct + a$. Внутри этого слоя плотность меняется по линейному закону, причём в наружной его части ($r > ct$) имеется сжатие ($\rho' > 0$), а за нею следует область ($r < ct$) разрежения ($\rho' < 0$).

§ 54. Формула Пуассона

Выведем теперь общую формулу, определяющую решение волнового уравнения в неограниченной жидкости по заданным начальным условиям, т. е. определяющую распределение скоростей и давления в жидкости в произвольный момент времени по их распределению в начальный момент.

Предварительно получим некоторые вспомогательные формулы. Пусть будут $\varphi(x, y, z, t)$ и $\psi(x, y, z, t)$ — два каких-либо решения волнового уравнения, обращающиеся на бесконечности в нуль. Рассмотрим интеграл

$$I = \int (\varphi\dot{\psi} - \dot{\varphi}\psi) dV,$$

взятый по всему пространству, и вычислим его производную по времени. Помня, что φ и ψ удовлетворяют уравнениям $\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\ddot{\varphi} = 0$ и $\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\ddot{\psi} = 0$, имеем:

$$\frac{dI}{dt} = \int (\varphi\ddot{\psi} - \ddot{\varphi}\psi) dV = c^2 \int (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi) dV = c^2 \int \operatorname{div}(\varphi\nabla\psi - \psi\nabla\varphi) dV.$$

Последний интеграл может быть преобразован в интеграл по бесконечно удалённой поверхности и потому обращается в нуль. Таким образом, мы приходим к результату, что $\frac{dI}{dt} = 0$, т. е. I есть не зависящая от времени постоянная:

$$\int (\varphi\dot{\psi} - \dot{\varphi}\psi) dV = \text{const.} \quad (54,1)$$

Рассмотрим, далее, следующее частное решение волнового уравнения:

$$\phi = \frac{\delta[r - c(t_0 - t)]}{r}, \quad (54,2)$$

где r — расстояние от некоторой заданной точки O пространства, t_0 — некоторый определённый момент времени, а δ обозначает так назы-

ваемую δ -функцию (см. сноску на стр. 187). Вычислим интеграл от ψ по пространству. Имеем:

$$\int \psi dV = \int_0^{\infty} 4\pi\psi r^2 dr = 4\pi \int_0^{\infty} r \delta[r - c(t_0 - t)] dr.$$

Аргумент у δ -функции обращается в нуль при $r = c(t_0 - t)$ (предполагается, что $t_0 < t$). Поэтому в силу свойства δ -функции имеем:

$$\int \psi dV = 4\pi c(t_0 - t). \quad (54,3)$$

Дифференцируя это равенство по t , получаем также

$$\int \dot{\psi} dV = -4\pi c. \quad (54,4)$$

Подставим теперь в интеграл (54,1) в качестве ψ функцию (54,2), а под ψ будем понимать искомое общее решение волнового уравнения. Согласно (54,1) I есть величина постоянная; на этом основании напишем выражения для I в моменты времени $t=0$ и $t=t_0$ и приравняем их друг другу. При $t=t_0$ обе функции ψ и $\dot{\psi}$ отличны от нуля только при $r=0$. Поэтому при интегрировании можно положить r в ψ и $\dot{\psi}$ равным нулю (т. е. взять значения в точке O) и вынести ψ и $\dot{\psi}$ из-под знака интеграла:

$$I = \varphi(x, y, z, t_0) \int \dot{\psi} dV - \dot{\varphi}(x, y, z, t_0) \int \psi dV$$

(посредством x, y, z обозначены координаты точки O). Согласно (54,3)—(54,4) второй член здесь обращается при $t=t_0$ в нуль, а первый даёт

$$I = -4\pi c \varphi(x, y, z, t_0).$$

Вычислим теперь I при $t=0$. Написав $\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\partial \psi}{\partial t_0}$ и обозначая посредством φ_0 значение функции φ при $t=0$, имеем:

$$I = - \int \left(\varphi_0 \frac{\partial \psi}{\partial t_0} + \dot{\varphi}_0 \psi \right) dV = - \frac{\partial}{\partial t_0} \int \varphi_0 \psi \Big|_{t=0} dV - \int \dot{\varphi}_0 \psi \Big|_{t=0} dV.$$

Элемент объёма пишем в виде $dV = r^2 dr dO$, где dO — элемент телесного угла, и в силу свойств δ -функции получаем:

$$\int \varphi_0 \dot{\psi} \Big|_{t=0} dV = \int \varphi_0 r \delta(r - ct_0) dr dO = ct_0 \int \varphi_0 \Big|_{r=ct_0} dO$$

и аналогично для интеграла от $\dot{\varphi}_0 \psi$. Таким образом,

$$I = - \frac{\partial}{\partial t_0} \left(ct_0 \int \varphi_0 \Big|_{r=ct_0} dO \right) + ct_0 \int \dot{\varphi}_0 \Big|_{r=ct_0} dO.$$

Наконец, приравнявая оба выражения для I и опуская индекс нуль у t_0 , получаем окончательно:

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \int \varphi_0 \Big|_{r=ct} dO + t \int \dot{\varphi}_0 \Big|_{r=ct} dO \right\}. \quad (54,5)$$

Эта формула, называемая формулой Пуассона (Poisson), определяет распределение потенциала в пространстве в любой момент времени, если задано распределение потенциала и его производной по времени (что эквивалентно заданию распределения скорости и давления) в некоторый начальный момент времени. Мы видим, что значение потенциала в момент времени t определяется значениями φ и $\dot{\varphi}$, которые они имели в момент времени $t=0$ на поверхности сферы с радиусом $r=ct$ и центром в точке O .

Предположим, что в начальный момент времени φ_0 и $\dot{\varphi}_0$ были отличны от нуля только в некоторой конечной области пространства, ограниченной замкнутой поверхностью S (рис. 26). Рассмотрим значения, которые будет принимать φ в последующие моменты в некоторой точке O . Эти значения определяются значениями φ_0 , $\dot{\varphi}_0$ на расстоянии $r=ct$ от точки O . Но сферы радиусов ct проходят через область внутри поверхности только при $\frac{d}{c} < t < \frac{D}{c}$, где d и D — наименьшее и наибольшее расстояния от точки O до поверхности S . В другие моменты времени подинтегральные выражения в (54,5) обратятся в нуль. Таким образом, движение в точке O начнется в момент $t = \frac{d}{c}$ и закончится в момент $t = \frac{D}{c}$. Распространяющаяся из области S волна имеет два фронта — передний и задний. Движение в жидкости начинается, когда к данной её точке подходит поверхность переднего фронта, на заднем же фронте колебавшиеся ранее точки приходят в состояние покоя.



рис. 26.

Задача

Вместе формулу, определяющую потенциал по начальным условиям для волны, зависящей только от двух координат x и y .

Решение. Элемент поверхности сферы радиуса $r=ct$ можно, с одной стороны, написать в виде $df = c^2 \sin^2 \theta d\theta$, где $d\theta$ — элемент телесного угла.

С другой стороны, проекция df на плоскость x, y равна $dx dy = df \frac{\sqrt{(ct)^2 - \rho^2}}{ct}$, где ρ есть расстояние от центра шара до точки x, y . Сравнивая оба выражения, можно написать $d\theta = \frac{dx dy}{ct \sqrt{(ct)^2 - \rho^2}}$. Обозначая координаты точки, в которой мы ищем значение φ , посредством x, y , а координаты переменной точки в области интегрирования посредством ξ, η , мы можем, следовательно, в рассматриваемом случае заменить $d\theta$ в общей формуле (54,5) на $\frac{d\xi d\eta}{ct \sqrt{c^2 t^2 - (x - \xi)^2 - (y - \eta)^2}}$, удвоив при этом получающееся выражение, поскольку $dx dy$ представляет собой проекцию двух элементов поверхности

сферы, находящиеся по разные стороны от плоскости x, y . Таким образом окончательно получаем:

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \iint \frac{\varphi_0(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{c^2 t^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}} + \\ + \frac{1}{2\pi c} \iint \frac{\dot{\varphi}_0(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{c^2 t^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}},$$

где интегрирование производится по поверхности круга с центром в точке O и радиусом $r = ct$. Если в начальный момент $\varphi_0, \dot{\varphi}_0$ отличны от нуля только в конечной области S плоскости x, y (точнее — в некоторой цилиндрической области пространства с образующими, параллельными оси z), то колебания в точке O (рис. 26) начнутся в момент времени $t = \frac{d}{c}$, где d — ближайшее расстояние от O до этой области. Но в дальнейшем круги радиуса $ct > d$ с центром в точке O всегда будут заключать в себе часть или всю площадь области S , и φ будет стремиться к нулю только асимптотически. Таким образом, в отличие от «трёхмерных» волн рассмотренные здесь двумерные волны имеют передний, но не имеют заднего фронта.

§ 55. Излучение звука

Колеблющееся в жидкости тело производит вокруг себя периодическое сжатие и разрежение жидкости и таким образом приводит к возникновению звуковых волн. Источником энергии, уносимой этими волнами, является кинетическая энергия движущегося тела. Таким образом, можно говорить об излучении звука колеблющимися в жидкости телами.

В общем случае произвольно колеблющегося тела произвольной формы задача об излучении звуковых волн должна решаться следующим образом. Выберем в качестве основной величины потенциал скорости жидкости φ . Он удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (55,1)$$

На поверхности тела нормальная составляющая скорости жидкости должна быть равна соответствующей компоненте скорости u тела:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = u_n. \quad (55,2)$$

На больших же расстояниях от тела волна должна переходить в расходящуюся сферическую волну. Решение уравнения (55,1), удовлетворяющее этим граничным условиям и условию на бесконечности, определяет излучаемую телом звуковую волну.

Рассмотрим более подробно два предельных случая. Предположим сначала, что частота колебаний тела настолько велика, что длина излучаемой волны очень мала по сравнению с размерами l тела:

$$\lambda \ll l. \quad (55,3)$$

В таком случае можно разделить поверхность тела на участки, размеры которых, с одной стороны, настолько малы, что участки можно приближённо считать плоскими, но, с другой стороны, всё же велики

по сравнению с длиной волны. Тогда можно считать, что каждый такой участок излучает при своём движении плоскую волну, скорость жидкости в которой равна просто нормальной компоненте u_n скорости данного участка поверхности. Но средний поток энергии в плоской волне равен (см. § 48) $c\rho\bar{v}^2$, где v — скорость жидкости в волне. Подставляя $v = u_n$ и интегрируя по всей поверхности тела, мы приходим к результату, что средняя излучаемая телом в единицу времени в виде звуковых волн энергия, т. е. полная интенсивность излучаемого звука, есть

$$I = c\rho \int \overline{u_n^2} df. \quad (55,4)$$

Рассмотрим теперь противоположный предельный случай, когда длина излучаемой волны велика по сравнению с размерами тела:

$$\lambda \gg l. \quad (55,5)$$

Тогда вблизи тела (на расстояниях, малых по сравнению с длиной волны) в общем уравнении (55,1) можно пренебречь членом $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$. Действительно, этот член — порядка величины $\frac{\omega^2}{c^2} \varphi \sim \frac{a}{\lambda^2}$, между тем как $\Delta\varphi$ в рассматриваемой области — порядка $\frac{\varphi}{l^2}$.

Таким образом, вблизи тела движение определяется уравнением Лапласа $\Delta\varphi = 0$. Но это есть уравнение, определяющее потенциальное движение несжимаемой жидкости. Следовательно, вблизи тела жидкость движется в рассматриваемом случае как несжимаемая. Собственно звуковые волны, т. е. волны сжатия и разрежения, возникают лишь на больших расстояниях от тела.

На расстояниях, меньших и порядка размеров тела, искомое решение уравнения $\Delta\varphi = 0$ не может быть написано в общем виде и зависит от конкретной формы колеблющегося тела. Для расстояний же, больших по сравнению с l , но малых по сравнению с λ (так что уравнение $\Delta\varphi = 0$ ещё применимо), можно найти общий вид решения, воспользовавшись тем, что φ должно убывать с увеличением расстояния. С такими решениями уравнения Лапласа нам уже приходилось иметь дело в § 10. Как и там, пишем общий вид решения в виде

$$\varphi = -\frac{a}{r} + A \left(\nabla \frac{1}{r} \right) \quad (55,6)$$

(r — расстояние до начала координат, выбранного где-нибудь внутри тела). (При этом, конечно, существенно, что расстояния, о которых идёт речь, всё же велики по сравнению с размерами тела. Только по этой причине можно ограничиться в φ членами, наименее быстро убывающими с ростом r . Мы оставляем в (55,6) оба написанных члена, имея в виду, что первый член не во всех случаях присутствует (см. ниже).

Выясним, в каких случаях этот член $-\frac{a}{r}$ отличен от нуля. В § 10 было выяснено, что потенциал $-\frac{a}{r}$ приводит к наличию отличного от

нуля потока жидкости через поверхность, окружающую тело; этот поток равен $4\pi r a$. Но в несжимаемой жидкости такой поток может иметь место только за счёт изменения общего объёма жидкости, заключённой внутри замкнутой поверхности. Другими словами, должно происходить изменение объёма тела, что и будет приводить к вытеснению жидкости из рассматриваемого объёма пространства или, наоборот, к «засасыванию» жидкости в него. Таким образом, первый член в (55,6) присутствует в тех случаях, когда излучающее тело производит пульсации, сопровождающиеся изменением его объёма.

Предположим, что это имеет место, и определим полную интенсивность излучаемого звука. Объём $4\pi a$ жидкости, протекающей через замкнутую поверхность, должен быть, согласно сказанному выше, равен изменению объёма V тела в единицу времени, т. е. производной $\frac{dV}{dt}$ (объём V является заданной функцией времени):

$$4\pi a = \dot{V}.$$

Таким образом, на расстояниях r , удовлетворяющих условию $l \ll r \ll \lambda$, движение жидкости описывается функцией

$$\varphi = \frac{\dot{V}(t)}{4\pi r}.$$

С другой стороны, на расстояниях $r \gg \lambda$ волна должна представлять собой расходящуюся сферическую волну, т. е. должна иметь вид

$$\varphi = \frac{f\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}.$$

Поэтому мы непосредственно приходим к результату, что излучаемая волна имеет на всех расстояниях (больших по сравнению с l) вид

$$\varphi = \frac{\dot{V}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{4\pi r}. \quad (55,7)$$

получающийся заменой в $\dot{V}(t)$ аргумента t на $t - \frac{r}{c}$.

Скорость $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$ направлена в каждой точке по радиусу-вектору и по величине равна $v = \frac{\partial \varphi}{\partial r}$. При дифференцировании (55,7) надо (для расстояний $r \gg \lambda$) брать производную только от числителя; дифференцирование знаменателя привело бы к члену высшего порядка по $\frac{1}{r}$, которым следует пренебречь. Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial r} \dot{V}\left(t - \frac{r}{c}\right) = -\frac{1}{c} \ddot{V}\left(t - \frac{r}{c}\right),$$

то мы получаем (\mathbf{n} — единичный вектор в направлении r):

$$\mathbf{v} = -\frac{\ddot{V}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{4\pi c r} \mathbf{n}. \quad (55,8)$$

Интенсивность излучения, определяющаяся квадратом скорости, оказывается здесь не зависящей от направления излучения, т. е. излучение симметрично по всем направлениям. Среднее значение полной излучаемой в единицу времени энергии есть

$$I = \rho c \oint \frac{\partial^2}{\partial t^2} df = \frac{\rho}{16\pi c^3} \oint \frac{\dot{V}^2}{r^2} df,$$

где интегрирование производится по замкнутой поверхности вокруг начала координат. Выбирая в качестве этой поверхности сферу радиуса r и замечая, что подынтегральное выражение зависит только от расстояния до центра, получаем окончательно:

$$I = \frac{\rho \dot{V}^2}{4\pi c}. \quad (55,9)$$

Это есть полная интенсивность излучаемого звука. Мы видим, что она определяется квадратом второй производной по времени от объема тела.

Если тело совершает пульсационные колебания по гармоническому закону с частотой ω , то вторая производная от объема по времени получается умножением самого объема на ω^2 , а средний её квадрат пропорционален ω^4 . Таким образом, интенсивность излучения (при данной амплитуде колебаний) пропорциональна ω^4 .

Рассмотрим теперь излучение звука телом, колеблющимся без изменения объема. Тогда в (55,6) остаётся только второй член, который мы напомним в виде

$$\varphi = \text{div} \left(A(t) \frac{\mathbf{r}}{r} \right).$$

Как и в предыдущем случае, заключаем, что общий вид решения из всех расстояниях $r \gg l$ есть

$$\varphi = \text{div} \frac{A \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r}.$$

То, что это выражение действительно является решением волнового

уравнения, видно непосредственно из того, что функция $\frac{A \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r}$ удовлетворяет этому уравнению, а потому удовлетворяют ему и производные указанной функции по координатам. Дифференцируя опять только числитель, получаем (для расстояний $r \gg \lambda$):

$$\varphi = - \frac{\dot{A} \left(t - \frac{r}{c} \right) r}{c r^2}. \quad (55,10)$$

При вычислении скорости $\mathbf{v} = \nabla \varphi$ надо опять дифференцировать только A . Поэтому имеем согласно известным из векторного анализа правилам дифференцирования функций от скалярного аргумента:

$$\mathbf{v} = - \frac{\dot{A} \left(t - \frac{r}{c} \right) r}{c^2 r^3} \nabla \left(t - \frac{r}{c} \right)$$

и подставляя $\bar{v} \left(t - \frac{r}{c} \right) = -\frac{1}{c} \bar{v}_r = -\frac{n}{c}$, получаем окончательно

$$v = \frac{1}{c^2 r} n (n \bar{\Lambda}). \quad (55,11)$$

Интенсивность излучения, определяющаяся квадратом скорости, пропорциональна квадрату косинуса угла между направлением излучения (направлении n) и вектором Λ (такое излучение называют иногда «дипольным»). Полное же излучение равно интегралу

$$I = \frac{p}{c^2} \int \frac{(n \bar{\Lambda})^2}{r^2} df.$$

Опять выбираем в качестве поверхности интегрирования сферу радиуса r , причём введём сферические координаты с полярной осью вдоль вектора Λ . Простое интегрирование приводит к окончательной формуле для полного излучения в единицу времени:

$$I = \frac{4\pi p}{3c^3} \bar{\Lambda}^2. \quad (55,12)$$

Компоненты вектора Λ являются линейными функциями компонент скорости u тела (см. § 10). Таким образом, интенсивность излучения является здесь квадратичной функцией вторых производных от компонент скорости тела по времени.

Если тело совершает гармоническое колебательное движение с частотой ω , то, как и в предыдущем случае, заключаем, что интенсивность излучения пропорциональна ω^4 — при заданном значении амплитуды колебаний скорости. При заданной же линейной амплитуде колебаний тела амплитуда скорости сама пропорциональна частоте, и потому излучение пропорционально ω^6 .

В заключение необходимо сделать следующее замечание. Мы полностью пренебрегали здесь влиянием вязкости жидкости и соответственно этому считали движение в излучаемой волне потенциальным. В действительности, однако, в слое жидкости толщиной порядка $\sqrt{\frac{\nu}{\omega}}$ вокруг колеблющегося тела движение не является потенциальным (см. § 20). Поэтому для применимости формул (55,6)—(55,12) необходимо, чтобы толщина этого слоя была мала по сравнению с размерами l тела:

$$\sqrt{\frac{\nu}{\omega}} \ll l. \quad (55,13)$$

Это условие может не выполняться при слишком малых частотах или слишком малых размерах тела.

ЗАДАЧИ

1. Определить полную интенсивность излучения звука шаром, совершающим гармоническое колебательное движение с частотой ω , причём длина волны сравнима по величине с радиусом R шара.

Решение. Скорость шара пишем в виде $u = u_0 e^{-i\omega t}$; тогда φ зависит от времени тоже посредством множителя $e^{-i\omega t}$ и удовлетворяет уравнению $\Delta \varphi +$

$+k^2\varphi=0$, где $k=\frac{\omega}{c}$. Ищем решение в виде $\varphi=u\nabla f(r)$ (начало координат выбрано в точке нахождения центра шара в данный момент времени). Для f получаем уравнение $(u\nabla)(\Delta f+k^2f)=0$, откуда $\Delta f+k^2f=\text{const}$. С точностью до несущественной аддитивной постоянной имеем отсюда $f=A\frac{e^{ikr}}{r}$. Постоянная A определяется из условия $\frac{\partial\varphi}{\partial r}=u$, при $r=R$, и в результате получаем:

$$\varphi=(ur)e^{ik(r-R)}\left(\frac{R}{r}\right)^2\frac{ikr-1}{2-2ikR-k^2R^2}.$$

Излучение имеет, следовательно, дипольный характер. На достаточно больших расстояниях от шара можно пренебречь 1 по сравнению с ikr , и φ приобретает вид (55,10) с вектором \mathbf{A} , равным

$$\mathbf{A}=-u_0\frac{ik(r-R)}{2-2ikR-k^2R^2}R^3\frac{e^{ikr}}{r}.$$

Замечая, что $(\text{Re}\{\mathbf{A}\})^2=\frac{|\mathbf{A}|^2}{2}$ (см. сноску на стр. 85), получаем для полного излучения согласно (55,12):

$$I=\frac{2\pi\rho}{3c^3}|u_0|^2\frac{R^6\omega^4}{4+\frac{\omega^2R^2}{c^2}}.$$

При $\frac{\omega}{c}R\ll 1$ это выражение переходит в

$$I=\frac{\pi\rho R^6}{6c^3}|u_0|^2\omega^4$$

(это может быть получено непосредственно подстановкой в (55,12) выражения для \mathbf{A} из задачи к § 10). При $\frac{\omega}{c}R\gg 1$ имеем:

$$I=\frac{2\pi\rho}{3}R^2|u_0|^2,$$

что соответствует формуле (55,4).

Действующая на шар сила сопротивления жидкости получается интегрированием проекции сил давления ($p'=-\rho\varphi|_{r=R}$) на направление u по поверхности шара и равна

$$\mathbf{F}=\frac{4\pi}{3}i\rho\omega R^2u\frac{1-ikR}{2-2ikR-k^2R^2}.$$

2. Определить интенсивность излучения звука шаром, совершающим гармоническое колебательное движение, причём радиус R шара сравним по величине с $\sqrt{\frac{\nu}{\omega}}$ (но в то же время $\lambda\gg R$).

Решение. Если размеры тела невелики по сравнению с $\sqrt{\frac{\nu}{\omega}}$, то для определения излучаемой волны надо исходить не из уравнения $\Delta\varphi=0$, а из уравнения движения несжимаемой вязкой жидкости. Соответствующее решение этого уравнения для шара определяется формулами (1), (2) в задаче 5

§ 20. При переходе к большим расстояниям первый член в (1), экспоненциально затухающий с r , можно опустить. Второй же член приводит к скорости

$$v = -b(u\Gamma)\nabla\frac{1}{r}.$$

Сравнение с (55,6) показывает, что $\Lambda = -bu = \frac{R^3}{2} \left[1 - \frac{3}{(1-i)x} - \frac{9}{2x^2} \right] u$,

где $x = R\sqrt{\frac{\omega}{2v}}$, т. е. отличается от соответствующего выражения для идеальной жидкости множителем, стоящим в скобках. В результате получаем:

$$I = \frac{\pi\rho\mu_0^2 R^6}{6c^2} \omega^4 \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{9}{2x^2} + \frac{9}{2x^3} + \frac{9}{4x^4} \right).$$

При $x \gg 1$ это выражение переходит в приведенную в задаче 1 формулу, а при $x \ll 1$ получаем:

$$I = \frac{8\pi\rho\mu_0^2 R^3 v^2}{2c^2} \omega^4,$$

т. е. излучение пропорционально не четвертой, а второй степени частоты.

3. Определить волну, излучаемую шаром (радиуса a), совершающим радиальные пульсационные колебания; радиальная скорость точек его поверхности есть произвольная функция времени $u(t)$.

Решение. Решение ищем в виде $\varphi = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r-a}{c}\right)$ и определяем f

из граничного условия $\left. \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right|_{r=a} = u(t)$, которое приводит к уравнению:

$$\frac{df}{dt} + \frac{cf(t)}{a} = -acu(t).$$

Решая это линейное уравнение и заменяя в решении аргумент t на $t - \frac{r-a}{c}$, получаем:

$$\varphi(r, t) = -\frac{ca}{r} e^{-\frac{c}{a}\left(t - \frac{r-a}{c}\right)} \int_{-\infty}^{\frac{r-a}{c}} u(\tau) e^{\frac{c}{a}\tau} d\tau.$$

Если колебания шара прекращаются, например, в момент времени $t=0$ (т. е. $u(\tau) = 0$ при $\tau > 0$), то на расстоянии r от центра, начиная с момента времени

$t = \frac{r-a}{c}$, потенциал как функция времени будет иметь вид $\varphi = \text{const.} e^{-\frac{ct}{a}}$,

т. е. движение будет затухать экспоненциально.

4. Определить движение, возникающее в идеальной сжимаемой жидкости при произвольном движении в ней шара радиуса a (скорость движения мала по сравнению со скоростью звука).

Решение. Ищем решение в виде

$$\varphi = \text{div} \frac{t\left(t - \frac{r-a}{c}\right)}{r} \quad (1)$$

(r — расстояние от начала координат, выбранного в точке нахождения центра шара в момент времени $t' = t - \frac{r-a}{c}$; если скорость шара мала по сравне-

нию со скоростью звука, то эффектом перемещения начала координат можно пренебречь). Радиальная составляющая скорости равна

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{2}{r^2} f n + \frac{2}{cr^2} f' n + \frac{1}{c^2 r} n f'' \quad (2)$$

(n — единичный вектор вдоль направления r ; ' означает дифференцирование вектора f по его аргументу). Граничное условие гласит $v_r = 0$ при $r = a$, откуда

$$f''(t) + \frac{2c}{a} f'(t) + \frac{2c^2}{a^2} f(t) = ac^2 u(t).$$

Решая это уравнение методом вариации постоянных, получаем для функции $f(t)$ общее выражение:

$$f(t) = ca^2 e^{-\frac{c}{a}t} \int_{-\infty}^t u(\tau) \sin \frac{c}{a}(t-\tau) e^{\frac{c}{a}\tau} d\tau. \quad (3)$$

При подстановке в (1) здесь надо писать $\left|t - \frac{r-a}{c}\right|$ вместо t . В качестве нижнего предела выбрано $-\infty$, так, чтобы было $f=0$ при $t=-\infty$.

5. Шар радиуса a в момент времени $t=0$ начинает двигаться с постоянной скоростью $u = u_0$. Определить движение в жидкости на больших расстояниях от шара.

Решение. Полагая в формуле (3) задачи 4 $u(\tau) = 0$ при $t < 0$ и $u(\tau) = u_0$ при $t > 0$ и подставляя в формулу (2), сохранив в последней только третий член (наименее быстро убывающий с расстоянием), получим:

$$v = -(nu_0) \frac{a\sqrt{2}}{r} e^{-\frac{c}{a}r} \sin\left(\frac{c}{a}t' - \frac{\pi}{4}\right)$$

(где $t' = t - \frac{r-a}{c}$).

6. Точечный источник, излучающий сферическую волну, находится на расстоянии l от твердой (полностью отражающей звук) стенки, ограничивающей заполненное жидкостью полупространство. Определить отношение полной интенсивности излучаемого источником звука к интенсивности излучения, которое имело бы место в неограниченной среде, а также зависимость интенсивности от направления на больших расстояниях от источника.

Решение. Совокупность излучаемой и отраженной от стенки волн описывается решением волнового уравнения, удовлетворяющим условию равенства нулю нормальной скорости $v_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n}$ на стенке. Таким решением является

$$\varphi = \left(\frac{e^{ikr}}{r} + \frac{e^{ikr'}}{r'}\right) e^{-i\omega t}$$

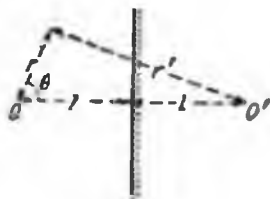


Рис. 27.

(постоянный множитель для краткости опускаем), где r — расстояние от источника звука O (рис. 27), а r' — расстояние от точки O' , расположенной относительно поверхности стенки симметрично с O . На больших расстояниях от источника имеем: $r' \approx r - 2l \cos \theta$, так что

$$\varphi = \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} (1 + e^{-2ikl \cos \theta})$$

Зависимость интенсивности излучения от направления определяется здесь множителем $\cos^2(kl \cos \theta)$.

Для определения полной интенсивности излучения интегрируем поток энергии $\bar{q} = \bar{p}'v = -\rho \bar{v} \nabla \varphi$ (см. (49,4)) по поверхности сферы сколь угодно малого радиуса с центром в точке O . Это даёт $2\pi r k \omega \left(1 + \frac{\sin 2kl}{2kl}\right)$. В неограниченной же среде мы имеем бы чисто сферическую волну $\varphi = \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r}$ с полным потоком энергии $2\pi r k \omega$. Таким образом, искомое отношение интенсивностей равно

$$1 + \frac{\sin 2kl}{2kl}.$$

7. То же в жидкости, ограниченной свободной поверхностью.

Решение. На свободной поверхности должно выполняться условие $p' = \rho' = 0$; в монохроматической волне это эквивалентно требованию $\varphi = 0$. Соответствующее решение волнового уравнения есть

$$\varphi = \left(\frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{i(kr')}}{r'} \right) e^{-i\omega t}.$$

На больших расстояниях от источника интенсивность излучения определяется множителем $\sin^2(kl \cos \theta)$.

Искомое отношение интенсивностей равно

$$1 - \frac{\sin 2kl}{2kl}.$$

§ 56. Принцип взаимности

При выводе уравнений звуковой волны в § 47 предполагалось, что среда, в которой волна распространяется, является однородной. В частности, плотность среды ρ_0 и скорость звука в ней c рассматривались как постоянные величины. Имея в виду получить некоторые общие соотношения, применимые и в общем случае произвольной неоднородной среды, выведем предварительно уравнение распространения звука в такой среде.

Напишем уравнение непрерывности в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \operatorname{grad} \rho + \rho \operatorname{div} v = 0.$$

Введём вместо производных от плотности производные от давления и энтальпии согласно

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s \frac{\partial p}{\partial t} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_p \frac{\partial s}{\partial t}; \quad \nabla \rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s \nabla p + \left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_p \nabla s.$$

Подставляя в уравнение непрерывности, получаем:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s \left(\frac{\partial p}{\partial t} + v \nabla p \right) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_p \left(\frac{\partial s}{\partial t} + v \nabla s \right) + \rho \operatorname{div} v = 0.$$

Но в силу адиабатичности звука имеем:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + v \nabla s = 0,$$

и уравнение непрерывности приводится к виду

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \rho + \rho c^2 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Положим, как обычно, $\rho = \rho_0 + \rho'$, причём ρ_0 является теперь заданной функцией координат. Что же касается давления, то в $\rho = \rho_0 + \rho'$ должно попрежнему быть $p_0 = \text{const.}$, поскольку в равновесии давление должно быть постоянно вдоль всей среды (если, конечно, отсутствует внешнее поле). Таким образом, с точностью до величин второго порядка малости имеем:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 c^2 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Это уравнение совпадает по форме с уравнением (47,5), но коэффициент $\rho_0 c^2$ в нём есть функция координат. Что касается уравнения Эйлера, то мы имеем, как и в § 47:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = - \frac{\nabla p'}{\rho_0}.$$

Исключая \mathbf{v} из обоих этих уравнений (и опуская индекс у ρ_0), получаем окончательно уравнение распространения звука в неоднородной среде:

$$\operatorname{div} \frac{\nabla p'}{\rho} - \frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0. \quad (56,1)$$

Если речь идёт о монохроматической волне с частотой ω , то $\bar{p}' = -\omega^2 p'$, так что

$$\operatorname{div} \frac{\nabla p'}{\rho} + \frac{\omega^2}{\rho c^2} p' = 0. \quad (56,2)$$

Рассмотрим звуковую волну, излучаемую источником небольших размеров, совершающим пульсационные колебания (такое излучение, как мы видели в § 55, симметрично). Обозначим точку, в которой находится источник, посредством A , а давление p' в излучаемой им волне в точке B ¹⁾ посредством $p_A(B)$. Если тот же самый источник помещается в точку B , то создаваемое им в точке A давление обозначим соответственно посредством $p_B(A)$. Выведем соотношение между $p_A(B)$ и $p_B(A)$.

Для этого воспользуемся уравнением (56,2), применив его один раз к излучению источника, находящегося в точке A , а другой раз — к излучению источника, находящегося в B :

$$\operatorname{div} \frac{\nabla p_A}{\rho} + \frac{\omega^2}{\rho c^2} p_A = 0, \quad \operatorname{div} \frac{\nabla p_B}{\rho} + \frac{\omega^2}{\rho c^2} p_B = 0.$$

Умножим первое уравнение на p_B , а второе на p_A , и вычтем второе из первого. Получаем:

$$p_B \operatorname{div} \frac{\nabla p_A}{\rho} - p_A \operatorname{div} \frac{\nabla p_B}{\rho} = 0.$$

¹⁾ Размеры источника должны быть малы по сравнению с расстоянием между A и B , а также по сравнению с длиной волны.

Проинтегрируем это уравнение по объёму, заключённому между бесконечно удалённой замкнутой поверхностью S и двумя малыми сферами S_A и S_B , окружающими соответственно точки A и B . Согласно теореме Гаусса имеем:

$$\begin{aligned} \int p_B' \operatorname{div} \frac{\nabla p_A'}{\rho} dV &= \int \operatorname{div} \frac{p_B' \nabla p_A'}{\rho} dV - \int \nabla p_B' \frac{\nabla p_A'}{\rho} dV = \\ &= \int_{C+S_A+S_B} \frac{p_B' \nabla p_A'}{\rho} d\Omega - \int \frac{\nabla p_A' \nabla p_B'}{\rho} dV, \end{aligned}$$

где первый интеграл справа берётся по трём поверхностям S , S_A , S_B . При этом интеграл по S обращается в нуль, поскольку на бесконечности звуковое поле исчезает. Применяя такое же преобразование к интегралу от $p_A' \operatorname{div} \frac{\nabla p_B'}{\rho}$ и вычитая результаты один из другого, получаем:

$$\int_{S_A+S_B} \left(p_B' \frac{\nabla p_A'}{\rho} - p_A' \frac{\nabla p_B'}{\rho} \right) d\Omega = 0. \quad (56,3)$$

Внутри малой сферы S_A давление p_A' в волне, создаваемой источником, находящимся в A , быстро меняется с расстоянием от A , и потому градиент $\nabla p_A'$ велик. Давление же p_B' , создаваемое источником, находящимся в B , в области вблизи точки A , значительно удалённой от B , является медленно меняющейся функцией координат, так что его градиент $\nabla p_B'$ относительно мал. При достаточно малом радиусе сферы S_A интегралом $\int_{S_A} p_A' \frac{\nabla p_B'}{\rho} d\Omega$ можно поэтому пренебречь по сравнению с интегралом $\int_{S_A} p_B' \frac{\nabla p_A'}{\rho} d\Omega$, а в последнем можно вынести почти

постоянную величину p_B' из-под знака интеграла, заменив её значением в точке A . Аналогичные рассуждения применимы к интегралу по сфере S_B , и в результате мы получаем из (56,3) следующее соотношение:

$$p_B'(A) \int_{S_A} \frac{\nabla p_A'}{\rho} d\Omega = p_A'(B) \int_{S_B} \frac{\nabla p_B'}{\rho} d\Omega.$$

Но $\frac{\nabla p'}{\rho} = -\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$; поэтому это равенство можно переписать в виде

$$p_B'(A) \frac{\partial}{\partial t} \int_{S_A} \mathbf{v}_A d\Omega = p_A'(B) \frac{\partial}{\partial t} \int_{S_B} \mathbf{v}_B d\Omega.$$

Интеграл $\int_{C_A} v_A dt$ представляет собой количество жидкости, протекающей через поверхность сферы C_A в единицу времени, т. е. изменение (в 1 сек.) объема пульсирующего источника звука. Поскольку источники в точках A и B тождественны, то ясно, что

$$\int_{C_A} v_A dt = \int_{C_B} v_B dt$$

и следовательно:

$$p'_A(B) = p'_B(A). \quad (56,4)$$

Это равенство представляет собой содержание так называемого принципа взаимности: давление, создаваемое в точке B источником, находящимся в точке A , равно давлению, создаваемому в A таким же источником, находящимся в B . Подчеркнем, что этот результат относится, в частности, и к тому случаю, когда среда представляет собой совокупность нескольких различных областей, каждая из которых однородна. При распространении звука в такой среде на поверхностях раздела различных областей происходит отражение и преломление. Таким образом, принцип взаимности применим и в тех случаях, когда на пути своего распространения от точки A к B и обратно волна испытывает отражения и преломления.

Принцип взаимности в форме (56,4) применим, как это явствует из его вывода, только для симметричного звукового излучения. Выведем теперь аналогичное соотношение для дипольного излучения, создаваемого источником, совершающим поступательное колебательное движение без изменения объема. В этом случае интеграл $\int_{C_A} v_A dt$ тождественно равен нулю, и при вычислении интегралов в (56,3) необходимо учесть следующее приближение. Для этого пишем, с точностью до членов первого порядка:

$$p'_B = p'_B(A) + r \nabla p'_B,$$

где r — радиус-вектор из точки A . В интеграле

$$\int_{C_A} \left(p'_B \frac{\nabla p'_A}{r} - p'_A \frac{\nabla p'_B}{r} \right) dt \quad (56,5)$$

оба члена имеют теперь одинаковый порядок величины. Подставляя сюда для p'_B написанное выше разложение и помня, что интеграл $\int_{C_A} \frac{\nabla p'_A}{r} dt$ обращается теперь в нуль, получаем:

$$\int_{C_A} \left\{ (r \nabla p'_B) \frac{\nabla p'_A}{r} - p'_A \frac{\nabla p'_B}{r} \right\} dt.$$

Далее, вынесем почти постоянную величину $\bar{v} p'_B = -\rho_B \dot{v}_B$ из-под знака интеграла и заменим её значением в точке A :

$$\rho_B \dot{v}_B \int_{S_A} \left\{ \frac{p'_A}{\rho} dt - v (\nabla p'_A dt) \right\}$$

(ρ_B — плотность среды в точке B). Для вычисления стоящего здесь интеграла замечаем, что вблизи источника жидкость можно считать несжимаемой (см. § 55), и поэтому для давления p'_A внутри малой сферы S_A мы можем написать согласно (10,1):

$$p'_A = -\rho \dot{\varphi} = \rho \frac{\dot{A} r}{r^3}.$$

Простое вычисление приводит к значению $-\frac{8\pi}{3} \dot{A}$ для интеграла. Наконец, в монокроматической волне $\dot{v} = -i\omega v$, $\dot{A} = -i\omega A$; вводя также единичный вектор n_A в направлении вектора A для источника, находящегося в точке A , получаем окончательно для интеграла (56,5):

$$\frac{8\pi}{3} \omega^2 \rho_B v_B(A) n_A.$$

Аналогично, интеграл по сфере S_B оказывается равным

$$-\frac{8\pi}{3} \omega^2 \rho_A v_A(B) n_B$$

и, приравняв сумму нулю, получаем искомое соотношение:

$$\frac{v_A(B) n_B}{\rho_B} = \frac{v_B(A) n_A}{\rho_A}. \quad (56,6)$$

Это равенство выражает собой принцип взаимности для дипольного звукового излучения.

§ 57. Распространение звука по трубке

Рассмотрим распространение звуковой волны вдоль длинной узкой трубки. Под узкой подразумевается трубка, ширина которой мала по сравнению с длиной волны. Сечение трубки может меняться вдоль её длины как по форме, так и по площади. Важно только, чтобы это изменение происходило достаточно медленно, — площадь S сечения должна мало меняться на расстояниях порядка ширины трубки.

В этих условиях можно считать, что вдоль каждого поперечного сечения трубки все величины (скорость, плотность и т. п.) постоянны. Направление же распространения волны можно считать везде совпадающим с направлением оси трубки. Уравнение, определяющее распространение такой волны, удобнее всего вывести методом, аналогичным применённому в § 12 для вывода уравнения распространения гравитационных волн в каналах.

В единицу времени через сечение трубки проходит масса $S\rho v$ жидкости. Поэтому количество (масса) жидкости в объёме между двумя бесконечно близкими поперечными сечениями трубки уменьшается в 1 сек.

$$(S\rho v)_{x+dx} - (S\rho v)_x = \frac{\partial(S\rho v)}{\partial x} dx$$

(координата x вдоль оси трубки). Поскольку самый объём между обонми сечениями остаётся неизменным, то это уменьшение может произойти только за счёт изменения плотности жидкости. Изменение плотности в единицу времени есть $\frac{\partial \rho}{\partial t}$, а соответствующее уменьшение массы жидкости в объёме $S dx$ между двумя сечениями равно

$$- S \frac{\partial \rho}{\partial t} dx.$$

Приравнивая оба выражения, получаем уравнение:

$$S \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial(S\rho v)}{\partial x}, \quad (57,1)$$

представляющее собой «уравнение непрерывности» для жидкости в трубке.

Далее, напишем уравнение Эйлера, опуская в нём квадратичный по скорости член:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (57,2)$$

Продифференцируем (57,1) по времени; при дифференцировании правой части этого уравнения надо считать ρ не зависящим от времени, так как при дифференцировании ρ возникнет член, содержащий $v \frac{\partial \rho}{\partial t} = v \frac{\partial \rho'}{\partial t}$ и потому малый второго порядка. Таким образом,

$$S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = - \frac{\partial}{\partial x} \left(S \rho \frac{\partial v}{\partial t} \right).$$

Подставляем сюда для $\frac{\partial v}{\partial t}$ выражение (57,2), а стоящую слева производную от плотности выражаем через производную от давления согласно

$$\bar{\rho} = \frac{\partial \rho}{\partial p} \bar{p} = \frac{1}{c^2} \bar{p}.$$

В результате получаем следующее уравнение распространения звука в трубке:

$$\frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial x} \left(S \frac{\partial p}{\partial x} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0. \quad (57,3)$$

В монохроматической волне p^1) зависит от времени посредством множителя e^{-ikt} и (57,3) переходит в

$$\frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial x} \left(S \frac{\partial p}{\partial x} \right) + k^2 p = 0 \quad (57,4)$$

($k = \frac{\omega}{c}$ — волновой вектор).

¹⁾ Здесь и в задачах к этому параграфу под p подразумевается везде переменная часть давления (которую мы раньше обозначали посредством p').

Наконец, остановимся на вопросе об излучении звука из открытого конца трубки. Разность давлений между газом в конце трубки и газом в окружающем трубку пространстве мала по сравнению с разностями давлений внутри трубки. Поэтому в качестве граничного условия на открытом конце трубки надо, с достаточной точностью, потребовать обращения давления p в нуль. Скорость же газа w у конца трубки при этом оказывается отличной от нуля; пусть w_0 есть её значение здесь. Произведение $S w_0$ есть количество (объём) газа, выходящего в единицу времени из конца трубки.

Мы можем теперь рассматривать открытый конец трубки как некоторый «источник» газа с «производительностью» $S w_0$. Задача об излучении из трубки делается эквивалентной задаче об излучении пульсирующего тела, определяющемся формулой (55,9). Вместо производной V от объёма тела по времени мы должны теперь писать величину $S w_0$. Таким образом, полная интенсивность излучаемого звука есть

$$I = \frac{\rho S^2 w_0^3}{4\pi c}. \quad (57,5)$$

Задачи

1. Определить коэффициент прохождения звука при переходе его из трубки сечения S_1 в трубку сечения S_2 .

Решение. В первой трубке имеем две волны: падающую $p_1 = a_1 e^{i(kx - \omega t)}$ и отражённую $p'_1 = a'_1 e^{-i(kx + \omega t)}$. Во второй трубке имеется прошедшая волна $p_2 = a_2 e^{i(kx - \omega t)}$. В месте соединения трубок ($x = 0$) должны быть равны давления и количества $S w$ газа, переходящие из одной трубки в другую. Эти условия дают:

$$a_1 + a'_1 = a_2, \quad S_1(a_1 - a'_1) = S_2 a_2,$$

откуда $a_2 = a_1 \frac{2S_1}{S_1 + S_2}$. Отношение T потока энергии в прошедшей волне к потоку энергии в падающей волне

($T = \frac{S_2 \rho v_2^2}{S_1 \rho v_1^2} = \frac{S_2 \overline{v_2^2}}{S_1 \overline{v_1^2}}$) равно

$$T = \frac{4S_1 S_2}{(S_1 + S_2)^2} = 1 - \left(\frac{S_2 - S_1}{S_2 + S_1} \right)^2.$$

2. Определить количество энергии, излучаемой из открытого конца цилиндрической трубки.

Решение. В граничном условии $p = 0$ на открытом конце трубки можно приближённо пренебречь излучаемой волной (мы увидим, что интенсивность излучения из конца трубки мала). Тогда имеем условие $p_1 = -p'_1$, где p_1 и p'_1 — давления в падающей волне и в волне, отражённой обратно в трубку, для скоростей будем соответственно иметь $v_1 = v'_1$, так что суммарная скорость на выходе из трубки есть $v_0 = v_1 + v'_1 = 2v_1$. Поток энергии в падающей волне равен $S \rho v_1^2 = \frac{1}{4} S \rho v_0^2$. С помощью (57,5) получаем для отношения излучаемой энергии к потоку в падающей волне:

$$T = \frac{S w^2}{\pi c^3}.$$

Для трубки кругового сечения (радиуса R) имеем $T = \frac{R^2 \omega^2}{c^2}$. Поскольку по предположению $R \ll \frac{c}{\omega}$, то $T \ll 1$.

3. Одно из отверстий цилиндрической трубки закрыто излучающей звук мембраной, совершающей заданное колебательное движение; другой конец трубки открыт. Определить излучение звука из трубки.

Решение. В общем решении $p = (ae^{ikx} + be^{-ikx})e^{-i\omega t}$ определяем постоянные a и b из условий $v = u$ ($u = u_0 e^{-i\omega t}$ — заданная скорость колебаний мембраны) на закрытом конце трубки ($x = 0$) и условия $p = 0$ на открытом конце ($x = l$). Эти условия дают

$$ae^{ikl} + be^{-ikl} = 0, \quad a - b = c\rho u_0.$$

Определяя a и b , находим для скорости газа на открытом конце трубки величину $v_0 = \frac{u}{\cos kl}$. Если бы трубки не было, то интенсивность излучения колеблющейся мембраной определялась бы средним квадратом $S^2 \bar{u}^2 = S^2 \omega^2 \bar{u}^2$ согласно формуле (55,9) с Su вместо \dot{V} ; S — площадь поверхности мембраны. Излучение же из конца трубки пропорционально $S^2 v_0^2 \omega^2$. Определяя «коэффициент усиления» звука трубкой как $A = \frac{S^2 v_0^2}{S^2 u^2}$, получаем:

$$A = \frac{1}{\cos^2 kl}.$$

Он обращается в бесконечность при частотах колебаний мембраны, равных собственным частотам трубки; в действительности, конечно, он всё же остаётся конечным благодаря различию пренебрежённых здесь эффектов (например, трения, влияния излучения звука).

4. То же для конической трубки (мембрана закрывает меньшее из отверстий трубки).

Решение. Для сечения трубки имеем $S = S_0 x^2$, меньшему и большему отверстиям трубки пусть соответствуют значения x_1 и x_2 координаты x , так что длина трубки есть $l = x_2 - x_1$. Общее решение уравнения (57,3) есть

$$p = \frac{1}{x} (ae^{ikx} + b e^{-ikx}) e^{-i\omega t};$$

a и b определяются из условий $v = u$ при $x = x_1$ и $p = 0$ при $x = x_2$. Для коэффициента усиления $A = \frac{S_0 x_2^2 v_2^2}{S_0 x_1^2 u^2}$ (v_2 — значение скорости при $x = x_2$) получаем:

$$A = \frac{k^2 x_2^2}{(\sin kl + kx_1 \cos kl)^2}.$$

5. То же для трубки, сечение которой меняется вдоль её длины по экспоненциальному закону $S = S_0 e^{mx}$.

Решение. Уравнение (57,4) приобретает вид

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + m \frac{\partial p}{\partial x} + k^2 p = 0,$$

откуда

$$p = e^{-\frac{m}{2} x} (ae^{imx} + b e^{-imx}) e^{-i\omega t}, \quad m = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}.$$

Определяя a и b из условий $v=u$ при $x=0$ и $p=0$ при $x=l$, находим для коэффициента усиления $A = \frac{S_0 e^{a^2 v_0^2}}{S_0 \mu^2}$:

$$A = \frac{e^{a^2 l}}{\left(\frac{a}{2} \frac{\sin ml}{ml} + \frac{1}{2} \cos ml\right)^2}$$

при $k > \frac{a}{2}$ и

$$A = \frac{e^{a^2 l}}{\left(\frac{a}{2} \frac{\operatorname{sh} m'l}{m'} + \operatorname{ch} m'l\right)^2}, \quad m' = \sqrt{\frac{a^2}{4} - k^2}$$

при $k < \frac{a}{2}$.

§ 58. Рассеяние звука

Если на пути распространения звуковой волны находится какое-либо тело, то происходит, как говорят, рассеяние звука: наряду с падающей волной появляются дополнительные (рассеянные) волны, распространяющиеся во все стороны от рассеивающего тела. Рассеяние звуковой волны происходит уже благодаря самому факту наличия тела на её пути. Кроме того, под влиянием падающей волны само тело приходит в движение; это движение, в свою очередь, обуславливает некоторое дополнительное излучение звука телом, т. е. некоторое дополнительное рассеяние. Однако, если плотность тела велика по сравнению с плотностью среды, в которой происходит распространение звука, а его сжимаемость мала, то рассеяние, обусловленное движением тела, представляет собой лишь малую поправку к основному рассеянию, обусловленному самым наличием тела. Этой поправкой мы будем в дальнейшем пренебрегать и потому будем считать рассеивающее тело неподвижным.

Если длина волны звука λ мала по сравнению с размерами l тела, то рассеяние сводится к простому отражению от поверхности тела. Здесь же мы будем рассматривать предельный случай, когда $\lambda \gg l$. Тогда для вычисления рассеянной волны можно воспользоваться формулами (55,7) — (55,12). Рассеянную волну мы при этом рассматриваем как волну, излучаемую телом; разница заключается только в том, что вместо движения тела в жидкости мы имеем теперь дело с движением жидкости относительно тела. Обе задачи, очевидно, эквивалентны.

Для потенциала излучаемой волны мы получили выражение

$$\varphi = \frac{V}{4\pi r} - \frac{\dot{A}r}{cr^2}$$

[см. (55,7) и (55,10)]. В этой формуле V было объёмом тела. Теперь же объём самого тела остаётся неизменным и под V надо подразумевать не скорость изменения объёма тела, а то количество (объём) жидкости, которое вошло бы в единицу времени в объём, занимаемый телом (этот объём обозначим посредством V_0), если бы этого тела вообще не было. Действительно, при наличии тела это количество жидкости не проникает внутрь занимаемого телом объёма, что эквивалентно выбра-

сыванию этого же количества из объема V_0 . Коэффициент же при $\frac{1}{4\pi r}$ в первом члене в φ должен, как мы видели в предыдущем параграфе, быть равен как раз количеству «выбрасываемой» в 1 сек. из начала координат жидкости. Это количество легко вычислить. Изменение массы жидкости в единицу времени в объеме, равном объему тела, равно $V_0 \dot{\rho}$, где функция ρ определяет изменение со временем плотности жидкости в падающей звуковой волне (поскольку длина волны велика по сравнению с размерами тела, то на протяжении расстояний порядка этих размеров плотность ρ можно считать постоянной; поэтому мы можем писать изменение массы жидкости в объеме V_0 просто в виде $V_0 \dot{\rho}$, где $\dot{\rho}$ одинаково вдоль всего объема V_0). Изменение объема жидкости, соответствующее изменению массы $\dot{\rho} V_0$, есть, очевидно, $V_0 \frac{\dot{\rho}}{\rho}$. Таким образом, вместо \dot{V} надо писать в выражении для φ величину $V_0 \frac{\dot{\rho}}{\rho}$. В падающей плоской волне переменная часть плотности ρ' связана со скоростью посредством $\rho' = \rho \frac{v}{c}$; поэтому $\dot{\rho} = \dot{\rho}' = \rho \frac{\dot{v}}{c}$, и вместо $V_0 \frac{\dot{\rho}}{\rho}$ мы можем писать $V_0 \frac{\dot{v}}{c}$.

Что касается вектора A , то при движении тела в жидкости он определяется формулами (10,5) — (10,6): $4\pi r A_i = m_{ik} u_k + \rho V_0 u_i$. Теперь же мы должны писать вместо скорости u тела взятую с обратным знаком скорость v жидкости в падающей волне (которую она имела бы в месте нахождения тела, если бы тела вовсе не было). Таким образом,

$$A_i = -\frac{1}{4\pi r} m_{ik} v_k - \frac{V_0}{4\pi} v_i \quad (58,1)$$

Окончательно получаем для потенциала рассеянной волны:

$$\varphi^{(расс.)} = \frac{V_0 \dot{v}}{4\pi c} - \frac{\dot{A} r}{c r^2} \quad (58,2)$$

[с вектором A , определяющимся формулой (58,1)]. Для распределения скоростей в рассеянной волне получаем отсюда

$$v^{(расс.)} = -\frac{V_0 \ddot{v} n}{4\pi c r^2} + \frac{n(n \cdot \dot{A})}{r c^2} \quad (58,3)$$

(см. § 55; n — единичный вектор в направлении рассеяния).

Среднее количество рассеиваемой (в 1 сек.) в данном элементе $d\Omega$ телесного угла энергии определяется потоком энергии, равным $c \rho \sqrt{(\text{расс.})^2} r^2 d\Omega$. Полная интенсивность $I^{(расс.)}$ рассеяния получается интегрированием этого выражения по всем направлениям. При этом интегрировании удвоенное произведение обоих членов в (58,3), пропорциональное первой степени косинуса угла между направлением рассеяния и направлением распространения падающей волны, исчезает и остается [см. (55,9) и (55,12)]:

$$I^{(расс.)} = \frac{V_0^2 \overline{\dot{v}^2}}{4\pi c^3} + \frac{4\pi}{3c^3} \overline{\dot{A}^2} \quad (58,4)$$

Рассеяние принято характеризовать так называемым эффективным сечением рассеяния. Эффективным сечением $d\sigma$ называется отношение средней (по времени) рассеиваемой в данном элементе телесного угла энергии к средней плотности потока энергии в падающей волне. Полное эффективное сечение σ равно интегралу от $d\sigma$ по всем направлениям рассеяния, т. е. равно отношению полной интенсивности рассеяния к плотности падающего потока энергии. Эффективное сечение имеет, очевидно, размерность площади.

Средняя плотность потока энергии в падающей волне есть $c\rho\bar{v}^2$. Поэтому дифференциальное эффективное сечение рассеяния равно отношению $\frac{c\rho v^2 d\sigma}{c\rho\bar{v}^2} r^2 d\Omega$, т. е.

$$d\sigma = \frac{v^2 d\sigma_{\text{расп.}}}{\bar{v}^2} r^2 d\Omega. \quad (58,5)$$

Полное эффективное сечение равно

$$\sigma = \frac{V_0^2 \bar{v}^2}{4\pi c^4 \bar{v}^2} + \frac{4\pi \bar{\lambda}^2}{3c^4 \bar{v}^2}. \quad (58,6)$$

Для монохроматической падающей волны среднее значение квадрата второй производной от скорости по времени пропорционально четвертой степени частоты. Таким образом, эффективное сечение рассеяния звуком телом, размеры которого малы по сравнению с длиной волны, пропорционально четвертой степени частоты.

Задачи

1. Определить эффективное сечение рассеяния плоской звуковой волны твердым шариком, радиус R которого мал по сравнению с длиной волны.

Решение. Для скорости в плоской волне имеем $v = A \cos \omega t$ (в данной точке пространства). Вектор A равен в случае шара (см. задачу к § 10) $A = -v \frac{e^{i\omega t}}{2}$. Для дифференциального эффективного сечения получаем:

$$d\sigma = \frac{\omega^4 R^2}{9c^4} \left(1 + \frac{3 \cos \theta}{2}\right)^2 d\Omega$$

(θ — угол между направлением падающей волны и направлением рассеяния). Полное эффективное сечение равно

$$\sigma = \frac{7\pi}{9} \left(\frac{R^2 \omega^2}{c^2}\right)^2.$$

2. Определить эффективное сечение рассеяния звука жидкой каплей с учетом сжимаемости жидкости и движения капли под влиянием падающей волны.

Решение. При адиабатическом изменении давления газа, в котором находится капля, ее ρ' объем капли уменьшается на $\frac{V_0}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial p}\right) \rho'$ (ρ_0 — плотность жидкости в капле). Но $\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s$ есть квадрат скорости звука c_0 в жидкости, а изменение давления в плоской волне связано со скоростью посредством $\rho' = \rho c \rho$ (ρ — плотность газа). Таким образом, уменьшение объема капли в 1 сек.

равно $V_0 \frac{vcs}{c_0^2 \rho_0}$. В выражениях (58,2)–(58,3) вместо $V_0 \frac{v}{c}$ надо писать теперь разность $V_0 \frac{v}{c} - \frac{vcs}{c_0^2 \rho_0}$. Далее, в выражении для A надо писать теперь вместо $-v$ разность $\dot{u} - v$, где u — скорость тела, приобретаемая им под влиянием падающей волны. Для шара получаем с помощью результатов задачи к § 10 $A = R^3 v \frac{\rho - \rho_0}{2\rho_0 + \rho}$. Подстановка этих выражений приводит к эффективному сечению

$$d\sigma = \frac{\omega^4 R^6}{9c^4} \left(\left(1 - \frac{c^2 \rho}{c_0^2 \rho_0} \right) + 3 \cos \theta \frac{\rho_0 - \rho}{2\rho_0 + \rho} \right)^2 dO.$$

Полное эффективное сечение равно

$$\sigma = \frac{4\pi \omega^4 R^6}{9c^4} \left(\left(1 - \frac{c^2 \rho}{c_0^2 \rho_0} \right)^2 + \frac{3(\rho_0 - \rho)^2}{(2\rho_0 + \rho)^2} \right).$$

3. Определить эффективное сечение рассеяния звука твёрдым шариком радиус R которого сравним по величине с $\sqrt{\frac{v}{\omega}}$.

Решение. В этом случае связанный с вектором A член в общей формуле для излучения звука, а потому и в формуле (58,4) для интенсивности излучения рассеяния, должен быть изменён указанным в задаче 2 § 55 образом. Член же, связанный с изменением объёма, остается неизменным. Действительно, этот член связан с центрально-симметричным движением жидкости, в котором скорость направлена везде по радиусу и зависит только от r . С другой стороны, поскольку жидкость вблизи излучающего тела должна рассматриваться как несжимаемая (при выполнении условия $\lambda \gg r$), то везде, кроме начала координат, должно выполняться уравнение $\text{div } v = 0$ независимо от того, идеальна ли жидкость или вязка. Но такое уравнение имеет только одно центрально-симметрическое решение (в котором $v = \text{const.} \frac{1}{r^2}$). В результате получаем для полного эффективного сечения:

$$\sigma = \frac{\pi R^6 \omega^4}{36c^4} \left(28 + 36 \cdot \frac{1}{x} + 54 \cdot \frac{1}{x^2} + 54 \cdot \frac{1}{x^3} + 27 \cdot \frac{1}{x^4} \right),$$

где $x = R \sqrt{\frac{\omega}{v}}$. При $x \ll 1$ имеем:

$$\sigma \approx \frac{3\pi R^6 \omega^2 v^2}{c^4}.$$

4. Определить среднюю силу, действующую на твёрдый шарик, рассеивающий плоскую звуковую волну.

Решение. Передаваемый в единицу времени от падающей волны шарик импульс, т. е. искомая сила, равен разности импульса, приносимого рассеиваемой волной, и полного потока импульса в рассеянной волне. Из падающей волны рассеивается поток энергии, равный $\omega c E_0$, где E_0 — плотность энергии в падающей волне; соответствующий поток импульса получается делением на c , т. е. равен ωE_0 . В рассеянной волне поток импульса в телесном угле dO равен $E^{(\text{рассея})} r^2 dO = E_0 d\sigma$; проектируя его на направление распространения падающей волны (очевидно, что искомая сила имеет это направление) и интегрируя по

всем углам, получим $\vec{E}_0 \int \cos \theta d\sigma$. Таким образом, действующая на шарик сила равна

$$F = \vec{E}_0 \left(\sigma - \int \cos \theta d\sigma \right).$$

Подставляя сюда $d\sigma$ и σ из задачи 1, получим:

$$F = \vec{E}_0 \frac{7\pi^2 R^2}{3c^4}.$$

§ 59. Поглощение звука

Наличие вязкости и теплопроводности приводит к диссипации энергии звуковых волн, в связи с чем звук, как говорят, поглощается, т. е. его интенсивность постепенно уменьшается. Для вычисления диссипируемой в единицу времени энергии $E_{\text{мех}}$ воспользуемся следующими общими соображениями. Механическая энергия представляет собой нечто иное, как максимальную работу, которую можно получить при переходе из данного неравновесного состояния в состояние термодинамического равновесия. Как известно из термодинамики¹⁾, максимальная работа совершается, если переход происходит обратимым образом (т. е. без изменения энтропии), и равна соответственно этому

$$E_{\text{мех.}} = E_0 - E(S),$$

где E_0 есть заданное начальное значение энергии тела в исходном состоянии, а $E(S)$ — энергия тела в состоянии равновесия с той же энтропией S , которую тело имело вначале. Дифференцируя по времени получаем:

$$\dot{E}_{\text{мех.}} = -\dot{E}(S) = -\frac{\partial E}{\partial S} \dot{S}.$$

Производная от энергии по энтропии есть температура. Поэтому $\frac{\partial E}{\partial S}$ есть температура, которую имело бы тело, если бы оно находилось в состоянии термодинамического равновесия (с заданным значением энтропии). Обозначая эту температуру как T_0 , имеем, следовательно:

$$\dot{E}_{\text{мех.}} = -T_0 \dot{S}. \quad (59,1)$$

Воспользуемся для \dot{S} выражением (39,5), включающим в себя возрастание энтропии, обусловленное как теплопроводностью, так и вязкостью. Поскольку температура T мало меняется вдоль жидкости и мало отличается от T_0 , то можно вынести её из-под знака интеграла и писать T вместо T_0 :

$$\begin{aligned} \dot{E}_{\text{мех.}} = & -\frac{\kappa}{T} \int (\nabla T)^2 dV - \frac{\eta}{2} \int \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2 dV - \\ & - \zeta \int (\text{div } \mathbf{v})^2 dV. \end{aligned} \quad (59,2)$$

¹⁾ См., например, 2-й том этого курса («Статистическая физика»), изд. 2-е, § 14.

Эта формула представляет собой обобщение формулы (14,3) на случай сжимаемой жидкости и наличия теплопроводности.

Пусть ось x совпадает с направлением распространения звуковой волны. Тогда

$$v_x = v_0 \cos(kx - \omega t), \quad v_y = v_z = 0.$$

Два последних члена в (59,2) дают:

$$-\left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right) \int \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 dV = -k^2 \left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right) v_0^2 \int \sin^2(kx - \omega t) dV.$$

Нас, конечно, интересует среднее по времени значение величин; усреднение даёт:

$$-k^2 \left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right) \frac{1}{2} v_0^2 V_0.$$

(V_0 — объём жидкости).

Далее, вычислим первый член в (59,2). Отклонение T температуры в звуковой волне от своего равновесного значения связано со скоростью посредством

$$T = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s p' = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s \rho c v$$

(производная берётся при постоянной энтропии в связи с адиабатичностью звука). Согласно известной термодинамической формуле имеем:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s = \frac{T}{c_p} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{T}{\rho c_p} \alpha$$

(где $\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ есть коэффициент теплового расширения). Таким

образом, $T = \frac{cT_0}{c_p} v$, а градиент температуры равен

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \alpha \frac{cT}{c_p} \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\alpha cT}{c_p} v_0 k \sin(kx - \omega t).$$

Для среднего по времени значения от первого члена в (59,2) получаем:

$$-\frac{\alpha^2 c^2 T_0^2}{2c_p^2} v_0^2 k^2 V_0.$$

С помощью известных термодинамических формул

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \frac{c_p}{c_v} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T, \quad c_p - c_v = T\alpha^2 \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_T$$

можно переписать это выражение в виде

$$-\frac{\alpha}{2} \left(\frac{1}{c_p} - \frac{1}{c_v}\right) k^2 v_0^2 V_0.$$

Собирая полученные выражения, находим среднее значение диссипации энергии в виде

$$\bar{E}_{\text{мех.}} = -\frac{k^2 v_0^2 V_0}{2} \left[\left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right) + \alpha \left(\frac{1}{c_p} - \frac{1}{c_v}\right) \right]. \quad (59,3)$$

Полная же энергия звуковой волны равна

$$\bar{E} = \frac{\rho v_0^2}{2} V_0. \quad (59,4)$$

Введённый в § 21 коэффициент затухания волны β определяет закон уменьшения интенсивности со временем. В случае звука, однако, фактически обычно приходится иметь дело с несколько иной постановкой задачи, в которой звуковая волна распространяется вдоль жидкости и её интенсивность падает с увеличением пройденного расстояния x . Очевидно, что это уменьшение будет происходить по закону $e^{-\gamma x}$, а для амплитуды — как $e^{-\frac{\gamma}{2}x}$, где «коэффициент поглощения» γ связан с β посредством $\gamma = \frac{\beta}{c}$, т. е.

$$\gamma = \frac{|\bar{E}_{\text{max}}|}{2c\bar{E}}. \quad (59,5)$$

Подставляя сюда (59,3) — (59,4), находим, таким образом, следующее выражение для коэффициента поглощения звука в жидкости:

$$\gamma = \frac{u^2}{2\rho c^2} \left[\left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right) + \kappa \left(\frac{1}{c_p} - \frac{1}{c_v} \right) \right]. \quad (59,6)$$

Отметим, что он пропорционален квадрату частоты звука.

В особенности сильное поглощение звука происходит при отражении распространяющейся в жидкости звуковой волны от твёрдой стенки. Причина этого явления заключается в следующем.

В звуковой волне наряду с плотностью и давлением испытывает периодические колебания около своего среднего значения также и температура. Поэтому вблизи твёрдой стенки имеется периодически меняющаяся по величине разность температур между жидкостью и стенкой, даже если средняя температура жидкости равна температуре стенки. Между тем, на самой поверхности температуры соприкасающихся жидкости и стенки должны быть одинаковыми. В результате в тонком пристеночном слое жидкости возникает большой градиент температуры; температура быстро меняется от своего значения в звуковой волне до температуры стенки. Наличие же больших градиентов температуры приводит к большой диссипации энергии путём теплопроводности.

По аналогичной причине к большому поглощению звука приводит и вязкость жидкости. Это поглощение, правда, имеет место лишь при наклонном падении волны. При таком падении скорость жидкости в волне (направленная по направлению распространения волны) имеет отличную от нуля касательную к поверхности стенки компоненту. Между тем, на самой поверхности жидкость должна полностью «прилипать» к стенке. Поэтому в пристеночном слое жидкости возникает большой градиент касательной составляющей скорости¹⁾, что и приводит к большой диссипации энергии путём вязкости (ср. § 20).

¹⁾ Что касается нормальной составляющей скорости, то на стенке она равна нулю уже в силу граничных условий для идеальной жидкости.

При поглощении звука соотношение между волновым вектором и частотой можно, очевидно, написать в виде

$$k = \frac{\omega}{c} + i\alpha\omega^2 \quad (59,7)$$

(где посредством α обозначен коэффициент при ω^2 в коэффициенте поглощения $\gamma = a\omega^2$). Легко сообразить, соответственно этому, каким образом надо видоизменить уравнение бегущей звуковой волны для того, чтобы учесть в нём эффект поглощения. Для этого замечаем, что в отсутствие поглощения дифференциальное уравнение для, скажем, давления $p' = p'(x - ct)$ можно написать в виде

$$\frac{\partial p'}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{\partial p'}{\partial t}.$$

Для того, чтобы получить отсюда уравнение, решимое которого была бы функция $e^{i(kx - \omega t)}$ с k из (59,7), надо, очевидно, написать:

$$\frac{\partial p'}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{\partial p'}{\partial t} + a \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2}. \quad (59,8)$$

Если ввести вместо t переменную $\tau = t - \frac{x}{c}$, то это уравнение перейдёт в

$$\frac{\partial p'}{\partial x} = a \frac{\partial^2 p'}{\partial \tau^2}.$$

т. е. уравнение типа одномерного уравнения теплопроводности.

Общее решение этого уравнения можно написать в виде (см. § 41)

$$p'(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a x}} \int p'_0(\tau') e^{-\frac{(\tau - \tau')^2}{4ax}} d\tau' \quad (59,9)$$

(где $p'_0(\tau) = p'(0, \tau)$). Если волна излучалась в течение ограниченного промежутка времени, то на достаточно больших расстояниях от источника это выражение переходит в

$$p'(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a x}} e^{-\frac{\tau^2}{4ax}} \int p'_0(\tau') d\tau'. \quad (59,10)$$

Другими словами, на больших расстояниях профиль волны определяется гауссовой кривой. Его «ширина» — порядка величины \sqrt{ax} , т. е. растёт пропорционально корню из пройденного волной расстояния, «амплитуда» же волны падает обратно пропорционально \sqrt{x} . Отсюда легко заключить, что полная энергия волны тоже падает как $\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Легко вывести аналогичные формулы и для шаровых волн; при этом надо учитывать тот факт, что для такой волны $\int p' dt = 0$ (см. § 53). Вместо (59,10) получим теперь:

$$p'(r, \tau) = \text{const.} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \tau} e^{-\frac{\tau^2}{4ax}} \frac{1}{\sqrt{r}}$$

или

$$p'(r, \tau) = \text{const.} \frac{e^{-\frac{r}{2l}}}{r} e^{-i\omega\tau}. \quad (59,11)$$

ЗАДАЧИ

1. Определить долю энергии, поглощаемой при отражении звуковой волны от твердой стенки. Плотность вещества стенки предполагается настолько большой, что звук практически не проникает в него, а теплоемкость — настолько большой, что температуру стенки можно считать постоянной.

Решение. Выбираем плоскость стенки в качестве плоскости $x=0$, а плоскость падения в качестве плоскости x, y . Угол падения (равный углу отражения) есть θ . Изменение плотности в падающей волне в некоторой точке на поверхности (скажем, в точке $x=y=0$) есть $\rho_1 = A e^{-i\omega t}$. Отраженная волна имеет ту же амплитуду, так что у стенки в ней $\rho_2 = \rho_1$. Реальное изменение плотности жидкости, в которой распространяются одновременно обе волны (падающая и отраженная), есть $\rho' = 2A e^{-i\omega t}$. Скорость жидкости в волне определяется согласно $v_1 = \frac{c}{\rho} \rho_1' \sin \theta$, $v_2 = \frac{c}{\rho} \rho_2' \sin \theta$. Полная скорость на

стенке $v = v_1 + v_2$ есть поэтому $v = v_y = 2A \sin \theta \frac{c}{\rho} e^{-i\omega t}$ (вернее, это есть то значение скорости, которое она имеет без учета верных граничных условий на поверхности стенки при наличии вязкости). Истинный ход скорости v , вблизи стенки определяется формулой (20,11), а связанная с вязкостью диссипация энергии — формулой (20,12), в которые надо вместо $v_0 e^{-i\omega t}$ подставить полученное выше выражение для v .

Отклонение T температуры от своего среднего значения (равного температуре стенки) без учета правильных граничных условий на стенке получилось бы равным $T = \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_r = \rho' = 2A \frac{c^2 \rho_0}{c \rho^2} e^{-i\omega t}$. В действительности же распределение температуры определяется уравнением теплопроводности с граничным условием $T=0$ при $x=0$ и соответственно этому изображается формулой, в точности аналогичной (20,11).

Вычисляя связанную с теплопроводностью диссипацию энергии согласно первому члену формулы (59,2), получим в результате для полной диссипации энергии, отнесенной к единице площади поверхности стенки:

$$\bar{E}_{\text{diss.}} = -\frac{A^2 c^2 \sqrt{2\omega}}{\rho} \left[\sqrt{l} \left(\frac{c_p}{c_v} - 1 \right) + \sin^2 \theta \cdot \sqrt{v} \right].$$

Средняя плотность потока энергии, падающего на единицу поверхности стенки с падающей волной, равна $c \rho v_1^2 \cos \theta = \frac{c^3 \rho^2}{2\rho} \cos \theta$. Поэтому доля энергии, поглощаемой при отражении, есть

$$2 \frac{\sqrt{2\omega}}{c \cos \theta} \left[\sin^2 \theta \cdot \sqrt{v} + \left(\frac{c_p}{c_v} - 1 \right) \sqrt{l} \right].$$

Эта формула справедлива только в случае выполнения условий (20,9), когда только и применим результат (20,11). В этих условиях роль размерности l играет теперь для $\lambda = \frac{c}{\omega}$ звуковой волны, так что должно выполняться неравенство $\omega \ll \frac{c^2}{v}$.

2. Определить коэффициент поглощения звука, распространяющегося по цилиндрической трубе.

Решение. Основная доля поглощения обусловлена рассмотренным в задаче 1 эффектом, происходящим от наличия стенок. Коэффициент поглощения γ равен энергии, диссипируемой в единицу времени на поверхности единицы длины стенки, деленной на удвоенный полный поток энергии через сечение трубы (тогда амплитуда волны затухает вдоль длины трубы по закону $e^{-\gamma x}$, а интенсивность — как $e^{-2\gamma x}$). Вычисление, полностью аналогичное произведению в задаче 1, приводит к результату:

$$\gamma = \frac{V_0}{V_0^2 c_0} \left[V_0^2 + \left(\frac{c_0}{c_0} - 1 \right) V_0^2 \right]$$

(r — радиус трубы).

§ 60. Вторая вязкость

Второй коэффициент вязкости ζ (мы будем говорить о нём просто как о второй вязкости) имеет, вообще говоря, тот же порядок величины, что и коэффициент вязкости η . Существуют, однако, случаи, когда ζ может достигать значений, значительно превышающих значения η . Как мы знаем, вторая вязкость проявляется в тех процессах, которые сопровождаются изменением объема (т. е. плотности) жидкости. При сжатии или расширении, как и при всяком другом быстром изменении состояния, в жидкости (или газе) нарушается термодинамическое равновесие, в связи с чем в ней начинаются внутренние процессы, стремящиеся восстановить это равновесие. Обычно эти процессы настолько быстры (т. е. их время релаксации настолько мало), что восстановление равновесия успевает практически полностью следовать за ходом изменения объема, если только, конечно, скорость этого изменения не слишком велика.

Существуют, однако, случаи, когда время релаксации процессов установления равновесия в теле велико, т. е. эти процессы протекают сравнительно медленно. Так, если мы имеем дело с жидкостью или газом, представляющими собою смесь веществ, между которыми может происходить химическая реакция, то при каждом данном состоянии и температуре существует определенное состояние химического равновесия, характеризующееся определенными концентрациями веществ в смеси. Если, например, сжать жидкость, то состояние равновесия нарушится и начнётся происходить реакция, в результате которой концентрации веществ будут стремиться принять равновесные значения, соответствующие новому значению плотности (и температуры). Если скорость этой реакции не слишком велика, то установление равновесия происходит сравнительно медленно и не будет поспевать за изменением сжатия. Процесс сжатия будет сопровождаться тогда внутренними процессами приближения к состоянию равновесия. Но процессы установления равновесия являются процессами необратимыми; они сопровождаются возрастанием энтропии и, следовательно, диссипацией энергии. Поэтому, если время релаксации этих процессов велико, то при сжатии или расширении жидкости происходит значительная диссипация энергии, и поскольку эта диссипация должна определяться второй вязкостью, то мы приходим к выводу, что ζ велико¹⁾.

¹⁾ Медленным процессом, приводящим к большому ζ , часто является передача энергии от поступательных степеней свободы молекул к колебательным (внутримолекулярным) степеням свободы.

Пусть ξ есть некоторая физическая величина, характеризующая состояние тела, а ξ_0 — её значение в состоянии равновесия; ξ_0 является функцией от плотности и температуры. Так, для жидких (или газовых) смесей величиной ξ может являться концентрация одного (любого) из веществ в смеси, а ξ_0 есть тогда значение концентрации при химическом равновесии.

Если тело не находится в состоянии равновесия, то величина ξ будет меняться со временем, стремясь принять значение ξ_0 . В состояниях, близких к равновесному, разность $\xi - \xi_0$ мала, и можно разложить скорость $\dot{\xi}$ изменения ξ в ряд по этой разности. Член нулевого порядка в этом разложении должен, очевидно, отсутствовать, так как $\dot{\xi}$ должно обратиться в нуль в состоянии равновесия, т. е. при $\xi = \xi_0$. Поэтому с точностью до членов первого порядка имеем:

$$\dot{\xi} = -\frac{1}{\tau} (\xi - \xi_0). \quad (60,1)$$

Коэффициент пропорциональности между $\dot{\xi}$ и $\xi - \xi_0$ должен быть отрицательным, так как в противном случае ξ не стремилось бы к конечному пределу. Положительная постоянная τ имеет размерность времени и может рассматриваться как время релаксации для данного процесса; чем τ больше, тем медленнее происходит приближение к равновесию.

В дальнейшем мы будем рассматривать процессы, в которых жидкость подвергается периодическому адиабатическому¹⁾ сжатию и расширению, так что переменная часть плотности (и других термодинамических величин) зависит от времени посредством множителя $e^{-i\omega t}$; речь может идти, например, о звуковой волне в жидкости. Вместе с плотностью и другими величинами меняется также и положение равновесия, так что ξ_0 можно написать в виде $\xi_0 = \xi_{00} + \xi'_0$, где ξ_{00} — постоянное значение ξ_0 , соответствующее среднему значению плотности, а ξ'_0 — периодическая часть, пропорциональная $e^{-i\omega t}$. Написав истинное значение ξ в виде $\xi = \xi_{00} + \xi'$, мы заключаем из уравнения (60,1), что ξ' тоже является периодической функцией времени и связано с ξ'_0 посредством

$$\xi' = \frac{\xi'_0}{1 - i\omega\tau}. \quad (60,2)$$

Вычислим производную от давления по плотности при рассматриваемом процессе. Давление должно теперь рассматриваться как функция от значений плотности и величины ξ в данном состоянии, а также от энтропии, которая предполагается постоянной и которую мы будем для краткости просто опускать. Имеем:

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\xi} + \left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)_{\rho} \frac{\partial \xi}{\partial \rho}.$$

Согласно (60,2) подставляем сюда

$$\frac{\partial \xi}{\partial \rho} = \frac{\partial \xi'}{\partial \rho} = \frac{1}{1 - i\omega\tau} \frac{\partial \xi'_0}{\partial \rho} = \frac{1}{1 - i\omega\tau} \frac{\partial \xi_0}{\partial \rho}$$

¹⁾ Изменение энтропии при процессе (в состояниях, близких к равновесному) является величиной второго порядка малости. Поэтому с точностью до величин первого порядка можно говорить об адиабатичности процесса.

и получаем:

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} = \frac{1}{1 - i\omega\tau} \left\{ \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\xi} + \left(\frac{\partial p}{\partial \zeta} \right)_{\rho} \frac{\partial \zeta_0}{\partial \tau} - i\omega\tau \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\xi} \right\}.$$

Сумма

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\xi} + \left(\frac{\partial p}{\partial \zeta} \right)_{\rho} \frac{\partial \zeta_0}{\partial \tau}$$

есть не что иное, как производная от p по ρ при процессе настолько медленном, что жидкость находится всё время в состоянии равновесия;

обозначая её посредством $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\text{равн.}}$, имеем окончательно:

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} = \frac{1}{1 - i\omega\tau} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\text{равн.}} - i\omega\tau \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\xi} \right]. \quad (60,3)$$

Пусть, далее, p_0 есть давление в состоянии термодинамического равновесия; p_0 связано с другими термодинамическими величинами уравнением состояния жидкости (или газа) и является при заданных плотности и энтропии вполне определённой величиной. Давление же p в неравновесном состоянии отлично от p_0 и является функцией также и от ξ . Если плотность получает адиабатическое приращение $\delta\rho$, то равновесное давление меняется на $\delta p_0 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\text{равн.}} \delta\rho$, между тем как полное приращение давления есть $\frac{\partial p}{\partial \rho} \delta\rho$, где $\frac{\partial p}{\partial \rho}$ определяется формулой (60,3). Поэтому разность $p - p_0$ между истинным и равновесным давлениями в неравновесном состоянии с плотностью $\rho + \delta\rho$ равна

$$p - p_0 = \left[\frac{\partial p}{\partial \rho} - \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\text{равн.}} \right] \delta\rho = \frac{i\omega\tau}{1 - i\omega\tau} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\text{равн.}} - \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\xi} \right] \delta\rho.$$

Нас интересуют здесь те изменения плотности, которые обусловлены движением жидкости. Тогда $\delta\rho$ связано со скоростью уравнением непрерывности, которое мы напомним в виде

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Мы вынесли в $\operatorname{div} \rho \mathbf{v}$ плотность из-под знака div , поскольку \mathbf{v} и $\delta\rho$ должны рассматриваться как малые величины одинакового порядка малости, так что выражение $\mathbf{v} \nabla \delta\rho$ является малой высшего порядка.

При периодическом движении имеем: $\frac{\partial \delta \zeta}{\partial t} = -i\omega \delta\rho$, и поэтому

$$\delta\rho = \frac{\rho}{i\omega} \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

Подставляя это выражение в $p - p_0$, получаем:

$$p - p_0 = \frac{\tau\rho}{1 - i\omega\tau} (c_0^2 - c_{\text{ст}}^2) \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad (60,4)$$

где введены обозначения

$$c_0^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\text{стат.}}, \quad c_\infty^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_\zeta, \quad (60,5)$$

смысл которых выяснится ниже.

Для того, чтобы связать полученные выражения с вязкостью жидкости, напишем тензор напряжений σ_{ik} . В этот тензор давление входит в виде члена $-p\delta_{ik}$. Выделяя отсюда давление p_0 , определяющееся уравнением состояния, находим, что в неравновесном состоянии в σ_{ik} входит дополнительный член

$$-(p - p_0)\delta_{ik} = \frac{\tau\varphi}{1 - i\omega\tau} (c_\infty^2 - c_0^2)\delta_{ik} \operatorname{div} v.$$

С другой стороны, сравнивая это с общим выражением (13,2) — (13,3) для тензора напряжений, в которое $\operatorname{div} v$ входит в виде $\zeta \operatorname{div} v$, мы приходим к результату, что наличие медленных процессов установления равновесия макроскопически эквивалентно наличию второй вязкости, равной

$$\zeta = \frac{\tau\varphi}{1 - i\omega\tau} (c_\infty^2 - c_0^2). \quad (60,6)$$

На обычную же вязкость η эти процессы не влияют. При процессах, настолько медленных, что $\omega\tau < 1$, ζ равно

$$\zeta = \tau\varphi (c_\infty^2 - c_0^2). \quad (60,7)$$

ζ растёт с увеличением времени релаксации τ в согласии со сказанным выше. При больших же частотах ζ оказывается функцией частоты и не является постоянной величиной, которая была бы одинакова при всех движениях.

Рассмотрим теперь вопрос о том, каким образом влияет наличие процессов с большим временем релаксации (для определённости будем говорить о химических реакциях) на распространение звука в жидкости. Для этого можно было бы исходить из уравнения движения вязкой жидкости с ζ , определяемым формулой (60,6). Проще, однако, рассматривать движение формально как не вязкое, но с давлением p , определяющимся не уравнением состояния, а полученными здесь формулами. Тогда все известные нам уже из § 47 общие соотношения остаются формально применимыми. В частности, связь волнового вектора с

частотой попрежнему определяется формулой $k = \frac{\omega}{c}$, где $c = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}}$, причём производная $\frac{\partial p}{\partial \rho}$ равна выражению (60,3). (Величина c не имеет, однако, теперь смысла скорости звука уже хотя бы потому, что она комплексна.) Таким образом, получаем¹⁾:

$$k = \omega \sqrt{\frac{1 - i\omega\tau}{c_0^2 - c_\infty^2 i\omega\tau}}. \quad (60,8)$$

¹⁾ Эта формула была выведена в общем виде Л. Мандельштамом и М. Леоновичем.

Определяемый этой формулой «волновой вектор» является величиной, вообще говоря, комплексной. Легко выяснить смысл этого обстоятельства. В плоской волне все величины зависят от координаты x (в направлении распространения) посредством множителя e^{ikx} . Написав k в виде $k = k_1 + ik_2$ с действительными k_1 и k_2 , получаем $e^{ikx} = e^{i k_1 x} e^{-k_2 x}$, т. е. наряду с периодическим множителем $e^{i k_1 x}$ получается также затухающий множитель $e^{-k_2 x}$ (k_2 должно быть, конечно, положительным). Таким образом, комплексность волнового вектора является формальным выражением того, что волна затухает, т. е. имеет место поглощение звука. При этом действительная часть комплексного «волнового вектора» определяет изменение фазы волны с расстоянием, а мнимая его часть есть коэффициент поглощения.

Нетрудно отделить в (60,8) действительную и мнимую части; в общем случае произвольных ω выражения для k_1 и k_2 довольно громоздки, и мы не выписываем их здесь. Существенно, что k_1 (как и k_2) является функцией частоты. Таким образом, если в жидкости могут происходить химические реакции, то распространение звука (с достаточно большими частотами) сопровождается дисперсией.

В предельном случае малых частот ($\omega\tau \ll 1$) формула (60,8) даёт в первом приближении $k = \frac{\omega}{c_0}$, что соответствует распространению звука со скоростью c_0 . Так, разумеется, и должно было быть: условие $\omega\tau \ll 1$ означает, что период $\frac{1}{\omega}$ звуковой волны велик по сравнению со временем релаксации; другими словами, установление химического равновесия практически успевает следовать за колебаниями плотности в звуковой волне, и поэтому скорость звука должна определяться равновесной производной $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\text{равн}}$. В следующем приближении имеем:

$$k = \frac{\omega}{c_0} + i \frac{\omega^2 \tau}{2c_0^3} (c_\infty^2 - c_0^2), \quad (60,9)$$

т. е. появляется затухание с коэффициентом, пропорциональным квадрату частоты. С помощью (60,7) мнимую часть k можно написать в виде $k_2 = \frac{\omega^2 \tau c_0}{2\rho c_0^3}$; это совпадает с зависящей от ζ частью коэффициента поглощения γ (59,6), полученного без учёта дисперсии.

В обратном предельном случае больших частот ($\omega\tau \gg 1$) имеем в первом приближении $k = \frac{\omega}{c_\infty}$, т. е. распространение звука со скоростью c_∞ — результат опять-таки естественный, поскольку при $\omega\tau \gg 1$ можно считать, что за время одного периода реакция вовсе не успевает произойти; поэтому скорость звука должна определяться производной $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_t$, взятой при постоянных концентрациях. В следующем приближении имеем:

$$k = \frac{\omega}{c_\infty} + i \frac{c_\infty^2 - c_0^2}{2\tau c_\infty^3}, \quad (60,10)$$

Коэффициент поглощения оказывается не зависящим от частоты. При переходе от $\omega \ll \frac{1}{\tau}$ к $\omega \gg \frac{1}{\tau}$ этот коэффициент монотонно возрастает, стремясь к постоянному значению, определяемому формулой (60,10). Заметим, что величина $\frac{\kappa_1}{\kappa_2}$, характеризующая поглощение на расстоянии, равном длине волны, оказывается в обоих предельных случаях малой ($\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \ll 1$); она имеет максимум при некоторой промежуточной частоте.

Уже из формулы, например, (60,7) видно, что

$$c_{\infty} > c_0 \quad (60,11)$$

(поскольку должно быть $\zeta > 0$). В том же самом можно убедиться с помощью простых рассуждений на основании принципа Ле-Шателье-Брауна.

Предположим, что под влиянием внешнего воздействия объем системы уменьшается (а плотность увеличивается). Этим система выводится из состояния равновесия, и согласно принципу Ле-Шателье-Брауна в ней должны начаться процессы, стремящиеся уменьшить давление. Это значит, что величина $\frac{\partial p}{\partial \rho}$ будет уменьшаться, и когда система вновь вернется в состояние равновесия, значение $\frac{\partial p}{\partial \rho} = c^2$ будет меньше, чем оно было в неравновесном состоянии.

При выводе всех формул мы предполагали, что имеется всего один медленный внутренний процесс релаксации. Возможны, однако, также и случаи, когда имеется одновременно несколько различных таких процессов. Все формулы могут быть без труда обобщены на такой случай. Вместо одной величины ξ мы будем иметь теперь ряд величин ξ_1, ξ_2, \dots , характеризующих состояние тела, и, соответственно, ряд времён релаксации τ_1, τ_2, \dots . Выберем величины ξ_n таким образом, чтобы каждая из производных $\dot{\xi}_n$ зависела только от соответствующего ξ_n , т. е. чтобы было

$$\dot{\xi}_n = -\frac{1}{\tau_n} (\xi_n - \xi_{n1}). \quad (60,12)$$

Вычисления, вполне аналогичные предыдущим, приводят тогда к формуле

$$c^2 = c_{\infty}^2 + \sum_n \frac{a_n}{1 - i\omega\tau_n}, \quad (60,13)$$

где $c_{\infty}^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\xi}$, а постоянные a_n равны:

$$a_n = \frac{\partial p}{\partial \xi_n} \left(\frac{\partial \xi_n}{\partial \rho}\right)_{\text{равн.}} \quad (60,14)$$

При всего одной величине ξ эта формула, как и должно быть, переходит в формулу (60,3).

ГЛАВА VII

РАЗРЫВЫ

§ 61. Угол Маха

Когда скорость движения жидкости делается сравнимой со скоростью звука или превышает её, на передний план выдвигаются эффекты, связанные с сжимаемостью жидкости. С такого рода движениями приходится на практике иметь дело у газов. Поэтому о гидродинамике больших скоростей говорят обычно как о газодинамике.

Движения со скоростями, меньшими скорости звука («дозвуковые» скорости), отличаются от движений со «сверхзвуковыми» скоростями не только в чисто количественном, но и в качественном отношении. Наиболее существенным принципиальным отличием стационарного сверхзвукового потока является возможность существования в нём так называемых разрывов, свойства которых будут подробно рассмотрены в следующих параграфах. Здесь же мы рассмотрим другую характерную особенность сверхзвукового движения, связанную со свойствами распространения в жидкости малых возмущений.

Если в каком-нибудь месте жидкость подвергается слабому возмущению, то влияние этого возмущения распространяется затем по жидкости со скоростью (относительно самой жидкости), равной скорости звука. Скорость же распространения возмущения относительно неподвижной системы координат складывается из двух частей: во-первых, возмущение «сносится» потоком жидкости со скоростью v (данного элемента объёма жидкости) и, во-вторых, распространяется относительно жидкости со скоростью c в некотором направлении n . Рассмотрим для простоты однородный плоско-параллельный поток жидкости с постоянной скоростью v . Пусть в некоторой (неподвижной в пространстве) точке O жидкость подвергается малому возмущению, — например, в этой точке может находиться какое-нибудь малое препятствие. Скорость $v + cn$ распространения исходящего из точки O возмущения (относительно неподвижной системы координат) имеет различное значение в зависимости от направления единичного вектора n . Все возможные её значения мы получим, отложив из точки O вектор v , а из его конца как из центра построив сферу радиуса c ; векторы, проведённые из O в точки этой сферы, и определяют возможные величины и направления скорости распространения возмущения. Предположим сначала, что $v < c$. Тогда векторы $v + cn$ могут иметь любое направление в пространстве (рис. 28, а). Другими словами, в дозвуковом потоке возмущение, исходящее из некоторой точки, распространяется в конце концов по всей жидкости.

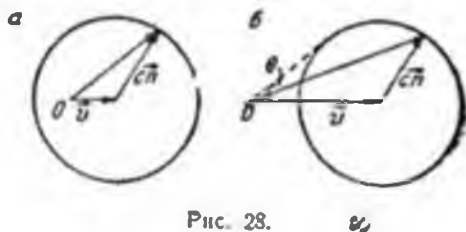


Рис. 28.

Напротив, в сверхзвуковом потоке, $v > c$, направления векторов $v \frac{1}{r} \text{сп}$, как видно из рис. 28,б, могут лежать только внутри конуса с вершиной в точке O , касающегося построенной из конца вектора v , как из центра, сферы. Для угла раствора 2θ этого конуса, который мы будем называть «звуковым конусом», имеем, как видно из чертежа:

$$\sin \theta = \frac{c}{v}. \quad (61,1)$$

Определяемый этим равенством угол называется углом Маха¹⁾. Таким образом, в сверхзвуковом потоке исходящее из некоторой точки возмущение распространяется только внутри конуса с углом раствора тем меньшим, чем меньше отношение $\frac{c}{v}$. На всей области потока вне «звукового конуса» наличие препятствия в точке O не отразится вовсе.

В общем случае произвольного стационарного течения поверхность, ограничивающая область, куда достигает возмущение, не является уже конической во всём объёме потока. Можно, однако, попрежнему утверждать, что эта поверхность пересекает в каждой своей точке линию тока под углом, равным углу Маха²⁾. Значение же угла Маха меняется от точки к точке соответственно изменению скоростей v и c . Подчеркнём здесь, кстати, то обстоятельство, что при движении с большими скоростями скорость звука различна в разных местах жидкости,—она меняется вместе с термодинамическими величинами (давлением, плотностью и т. д.), функцией которых она является³⁾. О скорости звука как функции координат точки в жидкости говорят иногда как о «местной скорости звука».

Говоря о «возмущении» состояния жидкости, мы подразумеваем слабое изменение каких-либо характеризующих это состояние величин — скорости, плотности, давления и т. п. По этому поводу необходимо сделать одну оговорку. Именно, всё сказанное (о распространении со скоростью звука) не относится к возмущениям значений энтропии жидкости и ротора её скорости. Эти возмущения, раз возникнув, не распространяются вовсе относительно жидкости, а относительно неподвижной системы координат переносятся вместе с жидкостью со скоростью, равной скорости каждого данного её элемента. Для энтропии это является непосредственным следствием закона её сохранения (в идеальной жидкости): $\frac{ds}{dt} \equiv \frac{ds}{dt} + (v \nabla) s = 0$, что как раз и означает, что энтропия каждого элемента объёма жидкости остаётся неизменной при его перемещении, или, другими словами, каждое значение s переносится вместе с той точкой жидкости, к которому оно относится. Для ротора скорости то же самое следует из закона сохранения циркуляции.

1) Самое же отношение $\frac{v}{c}$ называют числом Маха (или иногда числом Бэрстоу, Bairsfow).

2) Такие поверхности называют поверхностями Маха; по-английски употребителен термин wavelet.

3) При изучении звуковых волн в гл. VI мы могли считать скорость звука постоянной величиной.

§ 62. Поверхности разрыва

До сих пор мы рассматривали только такие движения жидкости (или газа), при которых распределение всех величин (скорости, давления, плотности, температуры и т. д.) в жидкости непрерывно. Возможны, однако, и такие движения, при которых возникают разрывы непрерывности в распределении этих величин. Обычно приходится иметь дело с такими разрывами при движении газов; поэтому мы будем говорить ниже о газах.

Разрыв непрерывности в движении газа имеет место вдоль некоторых поверхностей; при прохождении через такую поверхность указанные величины испытывают скачок. Эти поверхности называются поверхностями разрыва. При нестационарном движении газа поверхности разрыва не остаются, вообще говоря, неподвижными; необходимо при этом подчеркнуть, что скорость движения поверхности разрыва не имеет ничего общего со скоростью движения самого газа. Частицы газа при своём движении могут проходить через эту поверхность, пересекая её.

На поверхностях разрыва должны выполняться определённые граничные условия. Для формулирования этих условий рассмотрим какой-нибудь элемент поверхности разрыва и воспользуемся системой координат, движущейся вместе с этим элементом ¹⁾. Ось x выберем по направлению нормали к рассматриваемому элементу.

Во-первых, на поверхности разрыва должен быть непрерывен поток вещества: количество газа, входящего с одной стороны, должно быть равно количеству газа, выходящему с другой стороны поверхности. Поток газа через рассматриваемый элемент поверхности (отнесённый на единицу площади) равен ρv_x . Поэтому должно выполняться условие $\rho_1 v_{1x} = \rho_2 v_{2x}$, где индексы 1 и 2 относятся к двум сторонам поверхности разрыва.

Разность значений какой-либо величины с обеих сторон поверхности разрыва мы будем ниже обозначать посредством квадратных скобок; так,

$$[\rho v_x] = \rho_1 v_{1x} - \rho_2 v_{2x},$$

и полученное условие напишется в виде

$$[\rho v_x] = 0. \quad (62,1)$$

Далее, должен быть непрерывным поток энергии. Поток энергии определяется выражением (5,3). Поэтому мы получаем условие

$$\left[\rho v_x \left(\frac{v^2}{2} + \omega \right) \right] = 0. \quad (62,2)$$

Наконец, должен быть непрерывен поток импульса, т. е. должны быть равны силы, с которыми действуют друг на друга газы по обеим сторонам поверхности разрыва. Поток импульса через единицу площади равен (см. § 6)

$$\rho n_i + \rho v_i v_k n_k$$

¹⁾ Если движение нестационарно, то мы рассматриваем элемент поверхности в течение бесконечно малого интервала времени.

Вектор нормали n направлен по оси x . Поэтому непрерывность x -компоненты потока импульса приводит к условию

$$[p + \rho v_x^2] = 0, \quad (62,3)$$

а непрерывность y - и z -компонент даёт

$$[\rho v_x v_y] = 0, \quad [\rho v_x v_z] = 0. \quad (62,4)$$

Уравнения (62,1) — (62,4) представляют собой полную систему граничных условий на поверхности разрыва. Из них можно сразу сделать вывод о возможности существования двух типов поверхностей разрыва.

Предположим, что через поверхность разрыва нет потока вещества. Это значит, что $\rho_1 v_{1,x} = \rho_2 v_{2,x} = 0$. Поскольку ρ_1 и ρ_2 отличны от нуля, то это значит, что должно быть $v_{1,x} = v_{2,x} = 0$. Условия (62,2) и (62,4) в этом случае удовлетворяются автоматически, а условие (62,3) даёт $p_1 = p_2$. Таким образом, по поверхности разрыва в этом случае непрерывны нормальная компонента скорости и давление газа:

$$v_{1,x} = v_{2,x} = 0, \quad [p] = 0. \quad (62,5)$$

Тангенциальные же скорости v_y, v_z и плотность (а также другие термодинамические величины, кроме давления) могут испытывать произвольный скачок. Такие разрывы мы будем называть тангенциальными.

Во втором случае $v_{1,x}$ и $v_{2,x}$ отличны от нуля. Тогда из (62,1) и (62,4) имеем:

$$[v_y] = 0, \quad [v_z] = 0, \quad (62,6)$$

т. е. тангенциальная скорость непрерывна на поверхности разрыва. Плотность же, давление (а потому и другие термодинамические величины) и нормальная скорость испытывают скачок, причем скачки этих величин связаны соотношениями (62,1), (62,2), (62,3). В условии (62,2) мы можем в силу (62,1) сократить ρv_x , а вместо v^2 можно, в силу непрерывности v_y и v_z , писать v_x^2 . Таким образом, на поверхности разрыва в рассматриваемом случае должны иметь место условия:

$$[\rho v_x] = 0, \quad \left[\frac{v_x^2}{2} + w \right] = 0, \quad [p + \rho v_x^2] = 0. \quad (62,7)$$

Разрывы этого типа называют ударными волнами.

Если теперь вернуться к неподвижной системе координат, то вместо v_x надо везде писать разность между нормальной к поверхности разрыва компонентой v_n скорости газа и скоростью u самой поверхности, направленной, по определению, по нормали к ней:

$$v_x = v_n - u. \quad (62,8)$$

(Скорости v_n и u берутся относительно неподвижной системы отсчёта.) Скорость v_x есть скорость движения газа относительно поверхности

разрыва; иначе можно сказать, что $-v_x = u - v_n$ есть скорость распространения самой поверхности разрыва относительно газа. Обращаем внимание на то, что эта скорость различна по отношению к газу с обеих сторон поверхности (если v_x испытывает разрыв).

§ 63. Устойчивость тангенциальных разрывов

Из двух описанных типов поверхностей разрыва реально осуществляется только второй. Тангенциальные разрывы оказываются, как будет здесь показано, неустойчивыми. Мы произведём соответствующие вычисления полностью для тангенциального разрыва, в котором скачок скорости мал по сравнению со скоростью звука.

В разрыве рассматриваемого типа скорости газа по обеим сторонам поверхности направлены по касательным к этой поверхности. Пусть эти скорости суть v_1 и v_2 . Не ограничивая общности, можно считать, что одна из них равна нулю; этого всегда можно добиться соответствующим определением системы координат (если бы v_1 и v_2 имели также и нормальную компоненту, то нельзя было бы выбрать систему координат так, чтобы в ней рассматриваемый элемент поверхности покоился и в то же время v_1 или v_2 было равно нулю). Пусть, например, $v_2 = 0$, а v_1 обозначим просто как v ; направление v выберем в качестве оси y . Будем рассматривать небольшой участок газа около данного элемента поверхности разрыва; в малом участке скорость v можно считать постоянной.

Для того, чтобы убедиться в неустойчивости поверхности разрыва, достаточно доказать эту неустойчивость хотя бы по отношению к возмущению какого-нибудь одного типа. Пусть поверхность разрыва испытывает слабое возмущение, при котором все величины — координаты точек самой поверхности, давление и скорость газа — являются периодическими функциями, пропорциональными множителю типа $e^{i(ky - \omega t)}$ (зависимому только от одной координаты y) со сколь угодно большим «волновым вектором» k . Функция e^{iky} быстро меняется на протяжении рассматриваемой малой области газа, что и даёт возможность рассматривать невозмущённые скорости v_1, v_2 как постоянные.

Поскольку скорость газа предполагается малой по сравнению со скоростью звука, то газ можно рассматривать с каждой из сторон от поверхности разрыва как несжимаемый. Рассмотрим газ с той стороны от поверхности разрыва, где его скорость равна v . Обозначим посредством v' малое изменение скорости при возмущении. Тогда истинная скорость газа есть $v + v'$. Уравнение непрерывности для несжимаемого газа гласит $\text{div}(v + v') = 0$ или, в силу постоянства v ,

$$\text{div } v' = 0. \quad (63,1)$$

По той же причине в уравнении Эйлера

$$\frac{\partial(v + v')}{\partial t} + (v + v') \nabla(v + v') = - \frac{\nabla(p + p')}{\rho}$$

остаются только члены

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + (v\Gamma) v' = -\frac{\Gamma p'}{\rho}$$

(член $(v'\Gamma) v'$ опускаем как малую величину второго порядка). Поскольку v направлено по оси y , то $v\Gamma = v \frac{\partial}{\partial y}$, так что

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + v \frac{\partial v'}{\partial y} = -\frac{\Gamma p'}{\rho}. \quad (63,2)$$

Если применить к обеим сторонам этого уравнения операцию div , то слева мы получим в силу (63,1) нуль, так что p' должно удовлетворять уравнению Лапласа

$$\Delta p' = 0. \quad (63,3)$$

Пусть $\zeta = \zeta(y, t)$ есть смещение вдоль оси x точек поверхности разрыва при возмущении. Производная $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$ есть скорость изменения координаты ζ поверхности при заданной координате y . Воспользуемся тем, что в тангенциальном разрыве нормальная к его поверхности компонента скорости жидкости равна скорости перемещения самой поверхности. Соответственно этому имеем, в требуемом приближении:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = v'_x - v \frac{\partial \zeta}{\partial y} \quad (63,4)$$

(для v'_x и v надо, конечно, брать их значения на самой поверхности).

Будем искать p' в виде

$$p' = f(x) e^{i(ky - \omega t)}.$$

Подстановка в (63,3) даёт для $f(x)$ уравнение

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - k^2 f = 0,$$

откуда $f = \text{const.} e^{\pm kx}$. Пусть пространство с рассматриваемой стороны поверхности разрыва соответствует положительным x . Тогда мы должны взять $f = \text{const.} e^{-kx}$, так что

$$p' = A e^{i(ky - \omega t)} e^{-kx}. \quad (63,5)$$

Подставляя это выражение в x -компоненту уравнения (63,2):

$$\frac{\partial v'_x}{\partial t} + v \frac{\partial v'_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x},$$

найдем ¹⁾:

$$v'_x = \frac{k p'}{i\rho(kv - \omega)}. \quad (63,6)$$

¹⁾ Случай $k\omega = \infty$, принципиально возможный, нас не может интересовать, так как неустойчивость может быть связана только с комплексными, а не действительными «частотами» ω .

Смещение ζ тоже ищем в виде, пропорциональном такому же экспоненциальному множителю $e^{i(kx - \omega t)}$, и получаем из (63,4):

$$v'_x = \zeta i (kv - \omega).$$

Вместе с (63,6) это даёт:

$$\zeta = - \frac{kp'}{\rho (kv - \omega)^2}. \quad (63,7)$$

Значение p' должно быть взято здесь на самой поверхности разрыва, т. е. при $x = \zeta$. Однако, в рассматриваемом приближении можно взять в p' $x = 0$ вместо $x = \zeta$.

Наконец, мы должны определить самую частоту ω . Это легко сделать из условия равенства давлений на обеих сторонах поверхности разрыва, которое должно выполняться в тангенциальных разрывах.

Вводя в (63,7) индекс 1 у p' и ρ для обозначения области газа с соответствующей стороны поверхности разрыва, напишем:

$$p'_1 = - \zeta \frac{\rho_1 (kv - \omega)^2}{k}. \quad (63,8)$$

Давление p'_2 по другую сторону поверхности выразится такой же формулой, в которой надо теперь положить $v = 0$ и, кроме того, изменить общий знак (соответственно тому, что в этой области $x < 0$ и все величины должны быть пропорциональны e^{ikx} , а не e^{-ikx}). Таким образом,

$$p'_2 = \zeta \frac{\rho_2 \omega^2}{k}. \quad (63,9)$$

Из условия равенства p'_1 и p'_2 на поверхности разрыва получаем:

$$\rho_1 (kv - \omega)^2 = - \rho_2 \omega^2,$$

откуда

$$\omega = kv \frac{\rho_1 \pm i\sqrt{\rho_1 \rho_2}}{\rho_1 + \rho_2}. \quad (63,10)$$

Мы видим, что ω оказывается комплексной величиной, причём всегда имеется ω с положительной мнимой частью. Но это значит, что множитель $e^{-i\omega t}$ в ζ будет неограниченно возрастать со временем, т. е. возмущение будет стремиться увеличиться. Таким образом, тангенциальные разрывы с малым по сравнению со скоростью звука скачком скорости оказываются абсолютно неустойчивыми; они неустойчивы уже по отношению к бесконечно малым возмущениям¹⁾.

Этот результат оказывается, однако, неприменимым, если скорости газа настолько велики, что газ не может рассматриваться как несжимаемый. Аналогичное исследование (см. задачу в конце этого параграфа) показывает, что когда скачок v скорости в разрыве становится больше некоторого определённого значения v_k , то тангенциальный раз-

1) Это не относится к тем тангенциальным разрывам, в которых наряду с нормальной скоростью и давлением непрерывна также и тангенциальная скорость, а скачок испытывают только плотность, температура и т. п.

рыв делается устойчивым по отношению к бесконечно малым возмущениям; значение v_k — порядка скорости звука.

Однако, даже при $v > v_k$ тангенциальные разрывы возможно остаются неустойчивыми по отношению к возмущениям конечной величины. Эта неустойчивость подобна той, которой обладает, например, Пуазейлевское течение по трубе при $Re > Re_{кр}$.

Неустойчивость тангенциальных разрывов приводит к тому, что в тех местах, где согласно уравнениям движения должен был бы возникнуть такой разрыв, в действительности образуется область турбулентного движения. Примером может являться смешение двух потоков, текущих вдоль сторон угла, образованного двумя пересекающимися плоскостями; возникающая при таком обтекании угла турбулентная область была рассмотрена в § 29.

Задача

Вывести условие устойчивости тангенциального разрыва в сжимаемом газе. Газ рассматривается как идеальный, с не зависящей от температуры теплоемкостью, причём отношение $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ одинаково для газов с обеих сторон поверхности разрыва ¹⁾.

Решение. В газе 2 (со скоростью $v_2 = 0$; $x < 0$) давление p_2' удовлетворяет волновому уравнению $\Delta p_2' - \frac{1}{c_2^2} p_2'' = 0$ [вместо уравнения Лапласа (63,3), имевшего место в несжимаемом газе]. Ищем p_2' в виде

$$p_2' = \text{const.} e^{-i\omega t + ik_x x + i\omega x_2}$$

(если x_2 комплексно, то оно должно быть выбрано так, чтобы мнимая часть была отрицательна). Волновое уравнение приводит к соотношению

$$\frac{\omega^2}{c_2^2} = k^2 + x_2^2. \quad (1)$$

Совершенно так же, как и в тексте, получаем теперь вместо (63,9):

$$p_2' = \zeta \frac{\rho_2 \omega^2}{i k_x}.$$

В газе 1 ($x > 0$) ищем p_1' в виде

$$p_1' = \text{const.} e^{-i\omega t + ik_x x - i\omega x_1};$$

соотношение между ω , k и x_1 не может быть найдено непосредственно из волнового уравнения, так как последнее справедливо только в неподвижной, как целое, среде. Если перейти от системы координат x, y к системе $x' = x, y' = y - vt$, то в этой новой системе газ 1 будет покоиться и волновое уравнение применимо. Для p_1' имеем в этих координатах $p_1' = \text{const.} e^{-i\omega t + i\omega kt + ik_x x' - i\omega x_1'}$, и волновое уравнение даёт

$$\frac{(\omega - v k)^2}{c_1^2} = k^2 + x_1'^2. \quad (2)$$

¹⁾ Эта задача была решена Л. Лавдау.

Вместо (63,8) получаем теперь

$$p_1' = -\zeta \frac{(\omega - kv)^2 p_1}{kx_1}.$$

Из условия $p_1' = p_2'$ получаем:

$$\frac{x_1}{\rho_1 (\omega - kv)^2} + \frac{v_2}{\rho_2 \omega^2} = 0. \quad (3)$$

Для идеального газа $c = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}$; поскольку давления с обеих сторон разрыва должны быть одинаковыми, а γ одинаковы по условию, то $\rho_1 c_1^2 = \rho_2 c_2^2$. Учитывая это, получаем после исключения x_1, x_2 из (1) — (3) следующее уравнение для ω :

$$\frac{1}{c_1^2 c_2^2} = k^2 \left(\frac{1}{c_2^2 (\omega - kv)^2} \right)^2 + \frac{1}{c_1^2 \omega^2}. \quad (4)$$

Это уравнение четвертой степени имеет всегда два действительных корня, а другая пара корней действительна только при v , превышающем некоторое значение v_k ; при $v = v_k$ имеется кратный корень. Значение v_k можно получить, исключая ω из уравнения (4) и уравнения, получающегося дифференцированием (4) по ω . В результате получаем условие устойчивости тангенциального разрыва по отношению к бесконечно малым возмущениям ($v > v_k$) в виде

$$v^{2/3} > c_1^{2/3} + c_2^{2/3}. \quad (5)$$

Если температура с обеих сторон разрыва одинакова, то $c_1 = c_2 = c$ и разрыв устойчив при $v > 2\sqrt{2}c$.

§ 64. Адиабата Гюгоньо

Таким образом, реально осуществляются лишь разрывы второго из рассмотренных в § 62 типов. Мы видели, что в этих разрывах (ударных волнах) тангенциальная компонента скорости газа непрерывна. Можно поэтому выбрать такую систему координат, в которой рассматриваемый элемент поверхности разрыва покоится, а тангенциальная компонента газа по обе стороны поверхности равна нулю. Тогда можно написать вместо нормальной компоненты v_n просто v , и условия (62,7) напишутся в виде

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 = j, \quad (64,1)$$

$$p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2, \quad (64,2)$$

$$\omega_1 + \frac{v_1^2}{2} = \omega_2 + \frac{v_2^2}{2}. \quad (64,3)$$

Буквой j мы будем обозначать плотность потока газа через поверхность разрыва. Мы будем считать j положительным, если газ переходит со стороны 1 на сторону 2 (т. е. поверхность разрыва движется от газа 2 к газу 1).

Выведем ряд соотношений, являющихся следствием написанных условий. Введём удельные объёмы $V_1 = 1/\rho_1$, $V_2 = 1/\rho_2$ газа. Из (64,1) имеем:

$$v_1 = jV_1, \quad v_2 = jV_2 \quad (64,4)$$

и, подставляя в (64,2):

$$p_1 + j^2 V_1 = p_2 + j^2 V_2, \quad (64,5)$$

или

$$j^2 = \frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2}. \quad (64,6)$$

Эта формула [вместе с (64,4)] связывает скорость распространения ударной волны с давлениями и плотностями газа по обеим сторонам поверхности.

Поскольку j^2 — величина положительная, то мы видим, что должно быть одновременно $p_2 > p_1$, $V_1 > V_2$ или $p_2 < p_1$, $V_1 < V_2$. Таким образом, если давление возрастает при переходе через поверхность разрыва, то удельный объём падает, и наоборот.

Отметим ещё следующую полезную формулу для разности скоростей $v_1 - v_2$. Подставляя (64,6) в $v_1 - v_2 = j(V_1 - V_2)$, получаем:

$$v_1 - v_2 = \sqrt{(p_2 - p_1)(V_1 - V_2)}. \quad (64,7)$$

Далее, пишем (64,3) в виде

$$\omega_1 + \frac{j^2 V_1^2}{2} = \omega_2 + \frac{j^2 V_2^2}{2} \quad (64,8)$$

и, подставляя j^2 из (64,6), получаем:

$$\omega_1 - \omega_2 + \frac{1}{2}(V_1 + V_2)(p_2 - p_1) = 0. \quad (64,9)$$

Если ввести вместо тепловой функции внутреннюю энергию ϵ согласно $\epsilon = \omega + pV$, то полученное соотношение можно написать в виде

$$\epsilon_1 - \epsilon_2 + \frac{1}{2}(V_1 - V_2)(p_1 + p_2) = 0. \quad (64,10)$$

Эти соотношения определяют связь между термодинамическими величинами по обе стороны поверхности разрыва.

При заданных p_1 , V_1 уравнение (64,9) или (64,10) определяет зависимость между p_2 и V_2 . Об этой зависимости говорят как об адиабате Гюгонио (Hugoniot plot). Графически она изображается (рис. 29) в плоскости p , V кривой, проходящей через заданную точку p_1 , V_1 [при $p_1 = p_2$, $V_1 = V_2$ имеем также

$\epsilon_1 = \epsilon_2$, так что (64,10) удовлетворяется тождественно]. Отметим, что адиабата Гюгонио не может пересечь вертикальной прямой $V = V_1$ нигде, кроме только точки p_1 , V_1 . Действительно, наличие такого пересечения означало бы, что одному и тому же объёму соответствуют два различных давления p_1 , p_2 , удовлетворяющих уравнению (64,10).

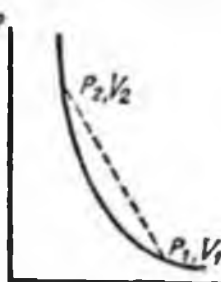


Рис. 29.

Между тем, при $V_1 = V_2$ имеем из (64,10) также и $e_1 = e_2$, а при одинаковых объёмах и энергиях давления тоже должны быть одинаковыми. Таким образом, прямая $V = V_1$ делит адиабату Гюгонно на две части, из которых каждая находится целиком по одну сторону от этой прямой. По аналогичной причине адиабата Гюгонно пересекает только в одной точке (p_1, V_1) также и горизонтальную прямую $p = p_1$.

Пусть aa' (рис. 30) есть адиабата Гюгонно, проведённая через точку p_1, V_1 в качестве состояния газа 1. Выберем на ней какую-нибудь точку p_2, V_2 и проведём через неё другую адиабату (bb') , для которой бы значения p_2, V_2 соответствовали состоянию газа 1. Очевидно, что пара значений p_1, V_1 будет удовлетворять также и уравнению этой второй адиабаты. Таким образом, адиабаты aa' и bb' пересекутся в обеих точках p_1, V_1 и p_2, V_2 . Подчеркнём тот факт, что обе эти адиабаты отнюдь не совпадают полностью друг с другом, как это имело бы место для адиабат Пуассона, проведённых через заданную точку.

Укажем здесь на следующее удобное графическое истолкование формулы (64,6). Если соединить хордой точку p_1, V_1 на адиабате Гюгонно (рис. 29) с некоторой произвольной точкой p_2, V_2 на ней, то $\frac{p_2 - p_1}{V_2 - V_1} = -j^2$ есть не что иное, как тангенс угла наклона этой хорды к оси абсцисс (к её положительному направлению). Таким образом, значение j , а с ним и скорости ударной волны, определяются в каждой точке адиабаты Гюгонно углом наклона хорды, проведённой в эту точку из точки p_1, V_1 .

Наряду с другими термодинамическими величинами испытывает разрыв также и энтропия s газа. В единицу времени через единицу площади поверхности разрыва проходит количество газа j . Это количество газа обладало сначала энтропией js_1 , а после прохождения через поверхность разрыва — энтропией js_2 . Поэтому изменение энтропии в единицу времени, отнесённое к единице площади поверхности разрыва, равно $j(s_2 - s_1)$. Но энтропия может согласно второму закону термодинамики только расти. Следовательно, должно выполняться неравенство

$$j(s_2 - s_1) > 0.$$

В дальнейшем мы условимся считать j всегда положительным, т. е. будем называть газом 1 тот, в сторону которого движется поверхность разрыва, а газом 2 — газ, остающийся за поверхностью. Тогда мы можем переписать полученное неравенство в виде

$$s_2 > s_1 \quad (64,11)$$

Таким образом, энтропия (отнесённая к единице массы газа) возрастает при прохождении газа через поверхность разрыва.

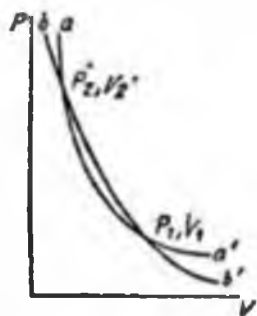


Рис. 30.

Подчеркнём здесь следующее обстоятельство. Наличие разрывов приводит к возрастанию энтропии даже при отсутствии процессов теплопроводности и вязкости. Возрастание энтропии означает необратимость движения, т. е. наличие диссипации энергии. Таким образом, разрывы являются механизмом, который приводит к диссипации энергии при движении «идеальной жидкости».

Возрастание энтропии в разрыве оказывает ещё и другое влияние на движение. Полученный нами в § 7 результат, что $\text{rot } v = 0$ вдоль всей линии тока, если $\text{rot } v = 0$ хотя бы в одной её точке, был основан на постоянстве энтропии жидкости (именно, мы пользовались уравнением Эйлера с членом $-\frac{\nabla p}{\rho}$, написанным в виде $-\nabla w$, что возможно лишь при $s = \text{const.}$). Но при распространении разрыва энтропия газа меняется, увеличиваясь на $s_2 - s_1$ при его прохождении через поверхность разрыва, причём $s_2 - s_1$ различно в разных точках этой поверхности. Поэтому указанный результат в данном случае теряет силу. При распространении поверхности разрыва в потенциально движущемся газе движение газа за этой поверхностью делается, вообще говоря, вихревым.

Рассмотрим разрыв, в котором все величины испытывают лишь небольшой скачок; о таких разрывах мы будем говорить как о разрывах слабой интенсивности. Преобразуем соотношение (64,9), произведя в нём разложение по степеням малых разностей $s_2 - s_1$ и $p_2 - p_1$. Мы увидим, что при таком разложении в (64,9) сокращаются члены первого и второго порядка по $p_2 - p_1$; поэтому необходимо производить разложение по $p_2 - p_1$ до членов третьего порядка включительно. По разности же $s_2 - s_1$ достаточно разложить до членов первого порядка. Имеем:

$$\begin{aligned} w_2 - w_1 = & \left(\frac{\partial w}{\partial s_1} \right)_p (s_2 - s_1) + \left(\frac{\partial w}{\partial p_1} \right) (p_2 - p_1) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial p_1^2} \right) (p_2 - p_1)^2 + \\ & + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial p_1^3} \right) (p_2 - p_1)^3. \end{aligned}$$

Но согласно термодинамическому тождеству $dw = T ds + V dp$ имеем для производных

$$\left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)_p = T, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial p} \right)_s = V.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} w_2 - w_1 = & T_1 (s_2 - s_1) + V_1 (p_2 - p_1) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial p_1} \right)_s (p_2 - p_1)^2 + \\ & + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 V}{\partial p_1^3} \right) (p_2 - p_1)^3. \end{aligned}$$

Объём V_2 достаточно разложить только по $p_2 - p_1$, поскольку во втором члене уравнения (64,9) имеется уже малая разность $p_2 - p_1$, и разложение по $s_2 - s_1$ дало бы член порядка $(s_2 - s_1)(p_2 - p_1)$, не интересующий нас. Таким образом,

$$V_2 - V_1 = \left(\frac{\partial V}{\partial p_1} \right)_s (p_2 - p_1) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p_1^2} \right)_s (p_2 - p_1)^2.$$

Подставляя эти разложения в (64,9), получим следующее соотношение:

$$s_2 - s_1 = \frac{1}{12T_1} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p_1^2} \right)_s (p_2 - p_1)^3. \quad (64,12)$$

Таким образом, скачок энтропии является малой величиной третьего порядка по сравнению со скачком давления.

Во всех известных случаях адиабатическая сжимаемость $-\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s$ падает с увеличением давления, т. е. производная $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s$ положительна:

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s > 0. \quad (64,13)$$

Подчеркнём, однако, что это утверждение не является термодинамическим соотношением и не может быть получено термодинамическим путём. Поэтому принципиально возможны случаи, когда $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s$ отрицательно. В дальнейшем мы будем всегда считать $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s$ положительным.

Проведём через точку p_1, V_1 на p, V -диаграмме две кривые — адиабату Гюгонно и адиабату Пуассона. Уравнение адиабаты Пуассона есть $s_2 - s_1 = 0$. Из сравнения этого уравнения с уравнением (64,12) адиабаты Гюгонно вблизи точки p_1, V_1 видно, что обе кривые касаются в этой точке, причём имеет место касание второго порядка — совпадают не только их первые, но и вторые производные. Для того, чтобы выяснить взаимное расположение обеих кривых вблизи точки p_1, V_1 , воспользуемся тем, что согласно (64,12) — (64,13) при $p_2 > p_1$ на адиабате Гюгонно должно быть $s_2 > s_1$, между тем как на адиабате Пуассона остаётся $s_2 = s_1$. Поэтому абсцисса точки на адиабате Гюгонно должна быть, при той же ординате p_2 , больше абсциссы точки на адиабате Пуассона. Это следует непосредственно из того, что согласно известной термодинамической формуле

$$\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p = \frac{T}{c_p} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

энтропия растёт с увеличением объёма при постоянном давлении, — для всех тел, которые расширяются при нагревании, т. е. у которых

$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ положительно. Аналогично убеждаемся в том, что ниже точки p_1, V_1 (т. е. при $p_2 < p_1$) абсциссы точек адиабаты Пуассона должны быть больше абсциссы адиабаты Гюгонно. Таким образом, вблизи точки своего пересечения адиабаты Гюгонно и Пуассона расположены указанным на рис. 31 образом (HH' есть адиабата Гюгонно, а PP' — адиабата Пуассона)¹⁾.

1) В тех немногих случаях, когда $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ отрицательно, взаимное расположение обеих кривых обратно: на рис. 31 HH' есть тогда адиабата Пуассона, а PP' — адиабата Гюгонно.

При малых $p_2 - p_1$ и $V_2 - V_1$ формулу (64,6) можно написать, в первом приближении, в виде:

$$f^2 = - \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_s,$$

(мы пишем здесь производную при постоянной энтропии, имея в виду, что касательные к адиабатам Пуассона и Гюгонно в точке p_1, V_1 совпадают). Далее, скорости v_1 и v_2 , в том же приближении, одинаковы и равны

$$v = fV = \sqrt{-V^2 \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_s} = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s}.$$

Но $\sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s}$ есть не что иное, как скорость звука c . Таким образом, скорость распространения ударных волн слабой интенсивности равна, в первом приближении, скорости звука:

$$v = c. \quad (64,14)$$

Вблизи точки p_1, V_1 адиабата Гюгонно вогнута. Это видно уже непосредственно из того, что в разложении $V_2 - V_1$ единственный член второго порядка есть член, пропорциональный $(p_2 - p_1)^2$, а коэффициент при $(p_2 - p_1)^2$ в этом члене положителен в силу (64,13). Далее, из того, что адиабаты Пуассона и Гюгонно имеют в точке p_1, V_1 касание второго порядка, следует, что вблизи этой точки имеет место, с точностью до членов второго порядка, равенство первых производных вдоль них

$$\left(\frac{\partial p_2}{\partial V_2} \right)_H = \left(\frac{\partial p_1}{\partial V_1} \right)_{s_2} \quad (64,15)$$

(индекс H условно обозначает дифференцирование вдоль адиабаты Гюгонно).

Из полученных свойств адиабаты Гюгонно в окрестности точки p_1, V_1 (точка I) можно вывести ряд существенных следствий. Поскольку в ударной волне должно выполняться условие $s_2 > s_1$, то должно быть и

$$p_2 > p_1,$$

т. е. точки p_2, V_2 (точки 2) должны находиться выше точки 1. Далее, поскольку хорда 12 идет круче касательной к адиабате в точке 1 (рис. 29), а тангенс угла наклона этой касательной равен производной $\left(\frac{\partial p}{\partial V_1} \right)_{s_1}$, то пишем:

$$f^2 > - \left(\frac{\partial p}{\partial V_1} \right)_{s_1}.$$

Умножая это неравенство с обеих сторон на V_1^2 , находим:

$$f^2 V_1^2 = v_1^2 > - V_1^2 \left(\frac{\partial p}{\partial V_1} \right)_{s_1} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho_1} \right)_{s_1}.$$

Но $\left(\frac{\partial p}{\partial p_1}\right)_s$ есть квадрат скорости звука, соответствующей точке I . Таким образом,

$$v_1 > c_1.$$

Наконец, из того, что хорда $I2$ расположена менее круто, чем касательная в точке 2 , аналогичным образом следует, что

$$v_2 < c_2.$$

В следующем параграфе будет показано, что эти неравенства¹⁾ справедливы для ударных волн произвольной интенсивности; там же будет более подробно обсуждён их смысл.

§ 65. Теорема Цемплена

Дальнейшие общие свойства разрывов можно получить исследованием их устойчивости. При этом для ударных волн оказывается возможной неустойчивость нового (по сравнению с неустойчивостью тангенциальных разрывов, — см. § 63) типа. Именно, оказывается, что при некоторых условиях от поверхности разрыва могут излучаться звуковые волны. Ясно, с другой стороны, что если в некотором состоянии системы возможно самопроизвольное излучение, то такое состояние является абсолютно неустойчивым. Поэтому для устойчивости разрыва необходимо, в частности, чтобы от него не могли излучаться звуковые волны.

Пусть поверхность разрыва движется, как было условлено, от газа 2 в сторону газа 1, а направление этого движения выберем в качестве положительного направления оси x . Предположим, что скорость v поверхности относительно газа 1 превышает скорость звука c_1 в газе 1, а скорость $v_2 < c_2$, где c_2 — скорость звука в газе 2 (поскольку термодинамические величины газов 1 и 2 различны, то различны, конечно, и скорости звука в них). Тогда в газе 1, т. е. впереди поверхности разрыва, не может быть распространяющейся вдоль оси x звуковой волны, так как поверхность разрыва при своём движении «перегоняла» бы такую волну. В газе же 2 возможна звуковая волна, распространяющаяся назад от поверхности разрыва [скорость этой волны относительно неподвижной системы координат равна $-c_2$, а относительно разрыва равна $-(c_2 + v_2)$]. Однако, с помощью всего только одной волны невозможно удовлетворить всем граничным условиям на поверхности разрыва, и потому в рассматриваемом случае излучение волны вообще невозможно.

Предположим теперь, что $v_1 > c_1$, $v_2 > c_2$. Тогда по направлению вперёд от поверхности разрыва попержнему не может происходить излучения звуковой волны. В газе же 2 возможны теперь две волны, излучаемые поверхностью разрыва. Эти волны распространяются относительно газа со скоростями $-c_2$ и $+c_2$, а относительно разрыва — со скоростями,

¹⁾ Для точек адиабаты Гюгонно, лежащих вблизи точки I , но ниже неё, имели бы место обратные неравенства.

соответственно равными $-(c_2 + v_2)$ и $-(v_2 - c_2)$; обе эти последние скорости отрицательны, т. е. волны действительно распространяются назад от поверхности разрыва. Аналогично, если $v_1 < c_1$, $v_2 < c_2$, то возможно излучение тоже двух волн, однако, одна из них распространяется вперёд в газе 1 со скоростью $v_1 - c_1$ относительно разрыва, а другая — в газе 2 назад. Наконец, если $v_1 < c_1$, $v_2 > c_2$, то возможны три различные излучаемые волны: одна в газе 1 и две в газе 2 (все перечисленные четыре случая изображены схематически на рис. 32).

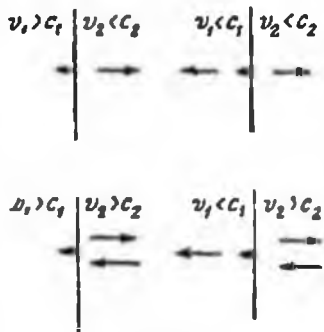


Рис. 32

Во всех трёх последних случаях число различных возможных излучаемых волн оказывается достаточным для того, чтобы удовлетворить граничным условиям на поверхности разрыва, т. е. такое излучение действительно возможно. Следовательно, во всех этих трёх случаях поверхности разрыва абсолютно неустойчивы и реально существовать не могут.

Таким образом, в реально осуществляющихся разрывах скорость распространения разрыва относительно газа, в сторону которого он движется, всегда больше скорости звука в этом газе, а скорость относительно газа, остающегося позади разрыва, всегда меньше скорости звука в этом втором газе:

$$v_1 > c_1, \quad v_2 < c_2 \quad (65,1)$$

Отметим сразу же существенное следствие из полученного результата. Мы знаем, что всякое возмущение состояния газа может распространяться в нём со скоростью не большей, чем скорость звука. Поэтому из $v_1 > c_1$ следует, что наличие поверхности разрыва вовсе не отражается на состоянии газа, находящегося впереди неё (до того момента, конечно, пока поверхность не дойдёт до рассматриваемого места в газе).

Что касается вопроса об устойчивости ударных волн, удовлетворяющих необходимому условию (65,1), то для его решения необходимо исследовать устойчивость по отношению к возмущениям рассмотренного в § 63 типа (эти возмущения характеризуются периодичностью в направлении вдоль поверхности разрыва и представляют собой как бы «рябь» на этой поверхности). Мы не будем приводить здесь соответствующих вычислений (аналогичных вычислениям в § 63, но только более громоздких) и укажем лишь, что ударные волны практически всегда устойчивы по отношению к таким возмущениям; неустойчивость может иметь место лишь при некоторых весьма специальных формах адиабаты Гюгонно, которые, кстати сказать, практически, повидимому, никогда не осуществляются в природе.

Таким образом, ударные волны должны всегда удовлетворять условиям, выражающимся неравенствами: $c_2 > v_2$, $v_1 > c_1$, $v_2 < c_2$. Ниже мы увидим, что практически во всех реальных случаях все эти три условия по существу эквивалентны, т. е. выполнение одного (любого) из них автоматически приводит к выполнению также и остальных двух.

Для этой цели произведём предварительно следующее вычисление. Продифференцируем соотношения (64,5) и (64,8) по величинам, относящимся к газу 2, считая состояние газа 1 неизменным. Это значит, что p_1 , V_1 , ω_1 рассматриваются как постоянные, а дифференцируются p_2 , V_2 , ω_2 и j (поток j тоже зависит от величин p_2 , V_2). Из (64,5) получаем:

$$V_1 d(j^2) = dp_2 + j^2 dV_2 + V_2 d(j^2),$$

или

$$dp_2 + j^2 dV_2 = (V_1 - V_2) d(j^2), \quad (65,2)$$

а из (64,8):

$$d\omega_2 + j^2 V_2 dV_2 = \frac{V_1^2 - V_2^2}{2} d(j^2),$$

или, раскрывая дифференциал $d\omega_2$:

$$T_2 ds_2 + V_2 dp_2 + j^2 V_2 dV_2 = \frac{V_1^2 - V_2^2}{2} d(j^2).$$

Подставляя это равенство в (65,2), получим соотношение

$$T_2 ds_2 = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2} d(j^2). \quad (65,3)$$

Отсюда видно, что

$$\frac{d(j^2)}{ds_2} > 0, \quad (65,4)$$

т. е. j^2 растёт с увеличением s_2 .

Покажем теперь, что на адиабате Гюгонио не может быть точек, в которых бы она касалась проведённой из точки p_1, V_1 прямой (как это имело бы место в точке O на рис. 33).

В такой точке угол наклона хорды (проведённой из точки p_1, V_1) имеет минимум, а j^2 — соответственно максимум, и потому

$$\frac{d(j^2)}{dp_2} = 0.$$

Из соотношения (65,3) видно, что в таком случае будет и

$$\frac{ds_2}{dp_2} = 0.$$

Далее, подставив в соотношение (65,2) дифференциал dV_2 в виде

$$dV_2 = \left(\frac{\partial V_2}{\partial p_2}\right)_{s_2} dp_2 + \left(\frac{\partial V_2}{\partial s_2}\right)_{p_2} ds_2,$$

взяв для ds_2 выражение (65,3) и разделив всё равенство на dp_2 , получим:

$$1 + j^2 \left(\frac{\partial V_2}{\partial p_2}\right)_{s_2} = (V_1 - V_2) \left[1 - \frac{j^2 (V_1 - V_2)}{T_2} \left(\frac{\partial V_2}{\partial s_2}\right)_{p_2} \right] \frac{d(j^2)}{dp_2}.$$

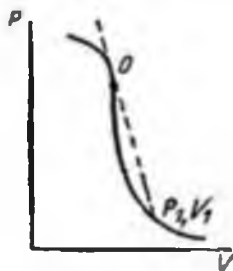


Рис. 33.

Отсюда видно, что при $\frac{d(j^2)}{d\rho_2} = 0$ должно быть

$$1 + j^2 \left(\frac{\partial V_2}{\partial \rho_2} \right)_{s_2} = 1 - \frac{v_2^2}{c_2^2} = 0,$$

т. е. $v_2 = c_2$; обратно, из $v_2 = c_2$ следует, что $\frac{d(j^2)}{d\rho_2} = 0$ ¹⁾.

Таким образом, все три равенства:

$$\frac{d(j^2)}{d\rho_2} = 0, \quad \frac{ds_2}{d\rho_2} = 0, \quad v_2 = c_2 \quad (65,5)$$

являются следствиями друг друга и имели бы одновременно место в точке O на кривой рис. 33. Наконец, для производной от $j^2 \left(\frac{\partial V_2}{\partial \rho_2} \right)_{s_2} = -\frac{v_2^2}{c_2^2}$ в точке O имеем:

$$\frac{d}{d\rho_2} \left(\frac{v_2^2}{c_2^2} \right) = -j^2 \left(\frac{\partial^2 V_2}{\partial \rho_2^2} \right)_{s_2}$$

Ввиду предполагаемой везде положительности производной $\left(\frac{\partial^2 V_2}{\partial \rho_2^2} \right)_{s_2}$ имеем, следовательно, в точке O :

$$\frac{d}{d\rho_2} \left(\frac{v_2^2}{c_2^2} \right) < 0. \quad (65,6)$$

Теперь уже легко доказать невозможность существования на адиабате Гюгонно такой точки. В точках, лежащих вблизи точки $I(\rho_1, V_1)$ над лею, имеем $\frac{v_2}{c_2} < 1$ (см. конец предыдущего параграфа). Поэтому равенство $\frac{v_2}{c_2} = 1$ может быть достигнуто только при увеличении $\frac{v_2}{c_2}$; другими словами, в точке O должно было бы быть $\frac{d}{d\rho_2} \left(\frac{v_2}{c_2} \right) > 0$, между тем как согласно (65,6) мы имеем как раз обратное неравенство. Совершенно аналогичным образом можно показать, что невозможно обращение $\frac{v_2}{c_2}$ в единицу и на нижней части адиабаты Гюгонно, под точкой I .

Имея в виду доказанную таким образом невозможность существования точек типа точки O , мы можем заключить непосредственно из графика адиабаты Гюгонно, что угол наклона хорды из точки ρ_1, V_1 в точку ρ_2, V_2 уменьшается с передвижением вверх по кривой, а j^2 соответственно увеличивается. Из этого свойства адиабаты Гюгонно и из неравенства (65,4) непосредственно следует, что при соблюдении необходимого условия $s_2 > s_1$ имеет место и

$$\rho_2 > \rho_1. \quad (65,7)$$

¹⁾ Одновременное с $v_2 = c_2$ обращение в нуль выражения, стоящего в квадратных скобках, могло бы произойти лишь чисто случайно и потому невероятно.

Мы приходим к результату, что через ударную волну газ движется от стороны с меньшим к стороне с большим давлением. Иначе можно сказать, что сама ударная волна передвигается относительно газа от большего давления к меньшему. Этот результат известен как теорема Цемплена (Zemprlen). Графически теорема Цемплена означает, что реальным смыслом обладает только верхняя (над точкой 1) часть адиабаты Гюгонно; ударные волны, соответствующие точкам на нижней части кривой, существовать не могут.

Легко, далее, убедиться в том, что на верхней части адиабаты Гюгонно справедливы также и неравенства $v_2 < c_2$, $v_1 > c_1$. Первое следует непосредственно из того, что оно справедливо вблизи точки 1, а сделаться равным единице отношение $\frac{v_1}{c_1}$ нигде не может. Второе следует из того, что ввиду невозможности такого перегиба адиабаты, какой изображен на рис. 33, всякая хорда из точки 1 в находящуюся над нею точку 2 расположена более круто, чем касательная к адиабате в точке 1.

Таким образом, на верхней части адиабаты Гюгонно выполняются все три условия (64,11), (65,1). Наоборот, на нижней части адиабаты они не выполняются. Таким образом, все эти три условия эквивалентны одному условию $p_2 > p_1$, а потому эквивалентны друг другу, что и требовалось доказать.

Укажем здесь ещё одно следствие теоремы Цемплена. Из замечания, сделанного по поводу формулы (64,6), и из формул (64,4) следует теперь, что должны иметь место также и неравенства:

$$V_2 < V_1, \quad v_2 < v_1. \quad (65,8)$$

Рассмотрим какую-нибудь линию тока, проходящую через поверхность разрыва (ab на рис. 34). Тангенциальная составляющая скорости газа не меняется при прохождении через поверхность разрыва. Нормальная же составляющая согласно второму из неравенств (65,8) падает. Поэтому ясно, что угол α_1 на рис. 34 будет больше угла α_2 . Таким образом, при прохождении через ударную волну линии тока «приближаются» к ней.

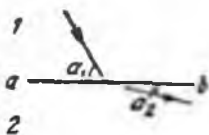


Рис. 34.

Задача

Определить соотношение между скачками различных величин в разрыве в длинной гравитационной волне, распространяющейся по каналу прямоугольного сечения.

Решение. В разрыве в длинной гравитационной волне, распространяющейся по каналу, испытывают скачок скорость v и глубина жидкости h . Поток жидкости через поперечное сечение канала равен $\rho a v h$ (a — ширина канала, h — глубина жидкости в нём). Из равенства потоков по обе стороны плоскости разрыва имеем:

$$v_1 h_1 = v_2 h_2 \quad (1)$$

(в силу несжимаемости жидкости $\rho_1 = \rho_2$). Плотность потока импульса в направлении вдоль длины канала есть $p + \rho v^2 = \rho g z + \rho v^2$ (z — высота точки над дном канала). Интегрируя по площади сечения канала, находим, что полный

поток импульса есть $\rho g \frac{h^2}{2} + \rho v^2 h$; отсюда получаем второе условие в разрыве:

$$v_1^2 h_1 + \frac{g h_1^2}{2} = v_2^2 h_2 + \frac{g h_2^2}{2} \quad (2)$$

[равенства (1) и (2) относятся, конечно, к системе отсчёта, движущейся вместе с разрывом]. Соотношения (1) — (2) определяют связь между четырьмя величинами: v_1, v_2, h_1, h_2 , две из которых могут быть заданы произвольно. Выражая скорости v_1, v_2 через высоты h_1, h_2 , получаем:

$$v_1^2 = \frac{g}{2} \frac{h_2}{h_1} (h_1 + h_2), \quad v_2^2 = \frac{g}{2} \frac{h_1}{h_2} (h_1 + h_2). \quad (3)$$

Соображения, в точности аналогичные приведённым в тексте об устойчивости разрывов (причём только надо говорить об излучении гравитационных волн вместо звуковых), показывают, что скорость разрыва относительно жидкости, в сторону которой он распространяется, должна быть больше, чем скорость длинных гравитационных волн на жидкости соответствующей глубины, а относительно жидкости, остающейся сзади, — меньше соответствующей скорости. Пусть разрыв движется от жидкости 2 в сторону жидкости 1. Поскольку скорость распространения длинных гравитационных волн равна \sqrt{gh} , то мы приходим к неравенствам:

$$v_1 > \sqrt{gh_1}, \quad v_2 < \sqrt{gh_2}. \quad (4)$$

Из сравнения с формулами (3) заключаем теперь, что

$$h_2 > h_1, \quad (5)$$

т. е. разрыв движется от стороны большей на сторону меньшей высоты.

Потоки энергии по обе стороны поверхности разрыва неодинаковы; их разность определяет количество энергии, диссипируемой (в 1 сек.) в разрыве. Плотность потока энергии есть $\left(\frac{\rho}{\rho} + \frac{v^2}{2}\right) \rho v = \left(gz + \frac{v^2}{2}\right) \rho v$, так что полный поток энергии через сечение канала есть $q = \frac{1}{2} (gh^2 + hv^2) \rho va$. Разность потоков можно написать с помощью (2) в виде

$$q_1 - q_2 = \frac{1}{4} \rho j (h_2 - h_1) (h_1^2 + h_2^2), \quad (6)$$

где $j = \rho avh$ — полный поток жидкости. Жидкость движется через разрыв со стороны 1 на сторону 2; тогда тот факт, что энергия в разрыве поглощается, означает, что должно быть $q_1 - q_2 > 0$, откуда опять получаем неравенство (5).

§ 66. Ударные волны в идеальном газе

В приложениях полученных выше общих соотношений (в также тех, которые будут выведены в дальнейших параграфах этой главы) особое место занимает идеальный газ¹⁾. Для идеального газа известны из термодинамики все соотношения между различными термодинамическими величинами, выражающиеся к тому же весьма простыми формулами. Это даёт возможность во многих случаях полностью решать конкретно общие уравнения газодинамики.

¹⁾ Во избежание недоразумений напомним, что слово «идеальный» употребляется здесь в известном из термодинамики смысле, а не в смысле «идеальность» жидкости в гидродинамике.

Выпишем здесь для справочных целей соотношения между различными термодинамическими величинами идеального газа, имея в виду, что нам придётся часто пользоваться ими в дальнейшем. Говоря об идеальном газе, мы будем всегда (за исключением только случаев, оговорённых особо) считать, что имеем дело с газом, теплоёмкость которого является постоянной величиной, не зависящей от температуры. Внутренняя энергия в такого газа равна $\epsilon = c_v T$, где c_v — теплоёмкость единицы массы газа при постоянном объёме (аддитивную постоянную в ϵ опускаем как несущественную). Согласно уравнению Клапейрона

$$pV = \frac{p}{\rho} = NkT,$$

где $N = \frac{1}{m}$ — число молекул в единице массы (m — масса молекулы), а k — постоянная Больцмана. Далее, для идеальных газов имеет место соотношение $c_p - c_v = Nk$, так что можно написать $T = \frac{pV}{Nk} = \frac{pV}{c_p - c_v}$.

Вводя, как это обычно принято, отношение $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$, имеем для внутренней энергии идеального газа:

$$\epsilon = c_v T = \frac{1}{\gamma - 1} pV. \quad (66,1)$$

Для тепловой функции имеет место аналогичная формула

$$\omega = c_p T = \frac{\gamma}{\gamma - 1} pV. \quad (66,2)$$

Число γ всегда больше единицы; для одноатомных газов $\gamma = \frac{5}{3}$, а для двухатомных $\gamma = \frac{7}{5}$ (при обычных температурах).

Скорость звука в идеальном газе была вычислена в § 47. Её можно написать в различных видах:

$$c^2 = \gamma \frac{kT}{m} = \gamma \frac{p}{\rho} = c_p (\gamma - 1) T. \quad (66,3)$$

Если выразить ϵ и ω через c , то получим:

$$\epsilon = \frac{c^2}{\gamma(\gamma - 1)}, \quad \omega = \frac{c^2}{\gamma - 1}. \quad (66,4)$$

Наконец, приведём соотношения между объёмом, давлением и температурой идеального газа, совершающего адиабатический процесс (т. е. уравнение адиабаты Пуассона):

$$pV^\gamma = \text{const.}, \quad TV^{\gamma-1} = \text{const.}, \quad T\rho^{\gamma-1} = \text{const.} \quad (66,5)$$

После этих предварительных замечаний перейдём к применению полученных в § 64 общих формул к разрывам в идеальном газе. Подставляя (66,2) в (64,9), получаем после простого преобразования формулу

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{(\gamma + 1) p_1 + (\gamma - 1) p_2}{(\gamma - 1) p_1 + (\gamma + 1) p_2}. \quad (66,6)$$

По этой формуле можно определить по трём из величин p_1, V_1, p_2, V_2 четвёртую (например, V_2 по p_1, V_1, p_2). Отношение $\frac{V_2^2}{V_1^2}$ является монотонно убывающей функцией отношения $\frac{p_2}{p_1}$, стремящейся к конечному пределу $\frac{\gamma-1}{\gamma+1}$. Кривая, изображающая зависимость между p_2 и V_2 при заданных p_1, V_1 (адиабата Гюгонио), представлена на рис. 35. Это есть равнобочная гиперболола с асимптотами $\frac{V_2^2}{V_1^2} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$ и $\frac{p_2}{p_1} = -\frac{\gamma-1}{\gamma+1}$. Реальным смыслом обладает, как мы знаем, только верхняя часть кривой над точкой $\frac{V_2^2}{V_1^2} = \frac{p_2}{p_1} = 1$, изображённая на рис. 35 жирной линией.

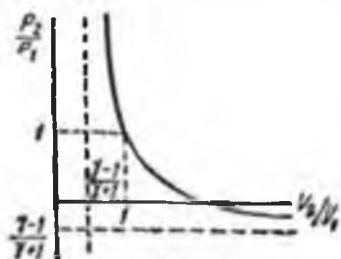


Рис. 35.

Для отношения температур с обеих сторон разрыва имеем согласно формуле Клапейрона и формуле (66,6):

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2 \left[(\gamma+1)p_1 + (\gamma-1)p_2 \right]}{p_1 \left[(\gamma-1)p_1 + (\gamma+1)p_2 \right]} \quad (66,7)$$

Отношение T_2/T_1 неограниченно растёт вместе с $\frac{p_2}{p_1}$, т. е. скачок температуры,

как и скачок давления, может быть сколь угодно большим, в противоположность скачку плотности.

Для потока f получаем из (64,6) и (66,6):

$$\rho = \frac{(\gamma-1)p_1 + (\gamma+1)p_2}{2V_1} \quad (66,8)$$

и отсюда для скорости распространения ударной волны относительно газов впереди и позади неё соответственно

$$v_1^2 = \frac{V_1^2}{2} [(\gamma-1)p_1 + (\gamma+1)p_2], \quad v_2^2 = \frac{V_1^2 [(\gamma+1)p_1 + (\gamma-1)p_2]^2}{2 [(\gamma-1)p_1 + (\gamma+1)p_2]}. \quad (66,9)$$

Наконец, выпишем предельные формулы для ударных волн очень большой интенсивности, в которых p_2 очень велико по сравнению с p_1 . Имеем из (66,6) и (66,7):

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \frac{p_2}{p_1}. \quad (66,10)$$

Таким образом, отношение удельных объёмов с обеих сторон ударной волны постоянно (не зависит от $\frac{p_2}{p_1}$); так, для одноатомного газа $V_2 = \frac{1}{4} V_1$, для двухатомного $V_2 = \frac{1}{6} V_1$. Отношение же температур пропорционально отношению давлений. Скорости распространения ударной волны большой интенсивности равны

$$v_1 = \sqrt{\frac{\gamma-1}{2} p_2 V_1}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{(\gamma-1)^2}{2(\gamma+1)} p_2 V_1}. \quad (66,11)$$

Они растут пропорционально квадратному корню из давления p_2 .

Задача

Определить отношение $\frac{P_2}{P_1}$ по заданным температурам T_1, T_2 для разрыва в идеальном газе с непостоянной теплоемкостью.

Решение. В общем случае идеального газа с непостоянной теплоемкостью можно лишь утверждать, что w (как в §) есть функция только от температуры и что p, V, T связаны уравнением Клапейрона $pV = RT$. Решая уравнение (64,9) относительно $\frac{P_2}{P_1}$, получаем:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2}{RT_1} (w_2 - w_1) - \frac{T_2 - T_1}{T_1} + \sqrt{\left[\frac{2}{RT_1} (w_2 - w_1) - \frac{T_2 - T_1}{T_1} \right]^2 + 4 \frac{T_2}{T_1}}$$

где $w_2 = w(T_2), w_1 = w(T_1)$.

§ 67. Ширина разрывов

Мы говорили до сих пор о поверхностях разрыва как о некоторых геометрических поверхностях, не обладающих толщиной. Рассмотрим теперь вопрос о структуре реальных физических поверхностей разрыва. Мы увидим, что разрывы с небольшими скачками величин представляют собой в действительности переходные слои конечной толщины, уменьшающейся при увеличении величины скачков. Если же скачки величин в разрыве не малы, то, действительно, разрыв происходит настолько резко, что не имеет смысла говорить о его толщине.

Для определения структуры и толщины переходного слоя надо учесть вязкость и теплопроводность газа, влиянием которых мы до сих пор пренебрегали.

Соотношения (64,1) — (64,3) на поверхности разрыва были получены из условий постоянства потоков вещества, импульса и энергии. Если рассматривать поверхность разрыва как слой конечной толщины, то эти условия надо писать не в виде равенства соответствующих величин по обе стороны разрыва, а в виде их постоянства вдоль всей толщины разрывного слоя. Первое из этих условий (64,1) не меняется:

$$\rho v = j = \text{const.} \quad (67,1)$$

В двух же других условиях надо учесть дополнительные потоки импульса и энергии, обусловленные внутренним трением и теплопроводностью.

Плотность потока импульса (вдоль оси x), обусловленного внутренним трением, определяется компонентой σ'_{xx} вязкого тензора напряжений; согласно формуле выражению (13,3) для этого тензора имеем:

$$\sigma'_{xx} = \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right) \frac{dv}{dx}.$$

Условие (67,1) приобретает теперь вид

$$\rho + \rho v^2 - \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right) \frac{dv}{dx} = \text{const.}$$

Как и в § 64, введём вместо скорости v удельный объём V согласно $v = jV$. Поскольку $j = \text{const.}$, то $\frac{dv}{dx} = j \frac{dV}{dx}$, так что

$$p + j^2 V - \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right) j \frac{dV}{dx} = \text{const.}$$

На большом расстоянии от поверхности разрыва термодинамические величины постоянны, т. е. не зависят от x ; в частности, и $\frac{dV}{dx} = 0$. Обозначим буквами с индексом 1 значения величин на большом расстоянии от поверхности разрыва по одну из её сторон. Тогда в написанном условии можно положить $\text{const.} = p_1 + j^2 V_1$, так что оно приобретает вид

$$p - p_1 + j^2 (V - V_1) - \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right) j \frac{dV}{dx} = 0. \quad (67,2)$$

Далее, плотность потока энергии, обусловленного теплопроводностью, есть $-x \frac{dT}{dx}$. Поток же энергии, связанный с внутренним трением, равен $\sigma'_x v$, или, поскольку скорость направлена тоже вдоль оси x , равен

$$\sigma'_x v = - \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right) v \frac{dv}{dx}.$$

Таким образом, условие (64,3) напишется в виде

$$pv \left(\omega + \frac{v^2}{2} \right) - \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right) v \frac{dv}{dx} - x \frac{dT}{dx} = \text{const.}$$

Вводя опять $v = jV$, пишем окончательно это условие в виде

$$\omega + \frac{j^2 V^2}{2} - j \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right) V \frac{dV}{dx} - \frac{x}{j} \frac{dT}{dx} = \omega_1 + \frac{j^2 V_1^2}{2}. \quad (67,3)$$

Мы будем рассматривать здесь разрывы, в которых все величины испытывают небольшой скачок. Тогда и все разности: $V - V_1$, $p - p_1$ и т. д. между значениями величин внутри переходного слоя и вне него тоже малы.

Разложим в (67,2) $V - V_1$ по степеням $p - p_1$ и $s - s_1$, выбрав давление и энтропию в качестве основных независимых переменных. Из получающихся ниже соотношений видно, что $\frac{1}{\delta}$ (где δ — ширина разрыва) есть величина первого порядка малости по $p - p_1$, а разность $s - s_1$ является малой величиной второго порядка ¹⁾. Поэтому с точностью до величины второго порядка пишем:

$$V - V_1 = \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_s (p - p_1) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_s (p - p_1)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial s} \right)_p (s - s_1).$$

¹⁾ Полный скачок энтропии $s_2 - s_1$ является, как мы видели в § 64, величиной третьего порядка по сравнению со скачком давления $p_2 - p_1$, между тем как $s - s_1$ всего лишь второго порядка по $p - p_1$. Это связано с тем, что, как будет ниже показано, давление в переходном слое монотонно меняется от значения p_1 до значения p_2 в то время как ход изменения энтропии не является монотонным; при своём изменении энтропия обнаруживает максимум, достигая наибольшего значения внутри слоя.

Во всех коэффициентах подразумеваются, конечно, их значения вне переходного слоя (т. е. при $p = p_1$, $s = s_1$). Подставляя это разложение в (67,2), имеем:

$$\left[1 + \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s j^2\right] (p - p_1) + \frac{j^2}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s (p - p_1)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p (s - s_1) j^2 = \\ = \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta\right) j \frac{dV}{dx}.$$

Производную $\frac{dV}{dx}$ напишем здесь в виде

$$\frac{dV}{dx} = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s \frac{dp}{dx} + \left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p \frac{ds}{dx}.$$

Дифференцирование по x увеличивает порядок малости величин на единицу (поскольку $\frac{1}{j}$ — первого порядка); поэтому производная $\frac{dp}{dx}$ есть величина второго порядка малости, а производная $\frac{ds}{dx}$ — третьего порядка. Ввиду этого член с производной от энтропии можно опустить. В результате получаем условие (67,2) в виде

$$\left[1 + \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s j^2\right] (p - p_1) + \frac{j^2}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s (p - p_1)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p (s - s_1) j^2 = \\ = \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta\right) \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s \frac{dp}{dx} j. \quad (67,4)$$

Далее, умножим уравнение (67,2) почленно на $\frac{1}{2}(V + V_1)$ и вычтем из уравнения (67,3). Тогда мы получим:

$$(w - w_1) - \frac{1}{2}(p - p_1)(V + V_1) - \\ - \frac{j}{2} \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta\right) (V - V_1) \frac{dV}{dx} - \frac{\kappa}{j} \frac{dT}{dx} = 0.$$

Третий член здесь, содержащий произведение $(V - V_1) \frac{dV}{dx}$, является малой величиной третьего порядка и может быть опущен:

$$(w - w_1) - \frac{1}{2}(p - p_1)(V + V_1) - \frac{\kappa}{j} \frac{dT}{dx} = 0.$$

Первые два члена представляют собой как раз то выражение, которое мы разлагали по степеням $p - p_1$ и $s - s_1$ в § 64 при выводе формулы (64,12). Члены первого и второго порядков по $p - p_1$ в этом разложении выпадают и с точностью до членов второго порядка остаётся просто $T(s - s_1)$. Производную же $\frac{dT}{dx}$ пишем в виде

$$\frac{dT}{dx} = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s \frac{dp}{dx} + \left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_p \frac{ds}{dx} \approx \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s \frac{dp}{dx}.$$

В результате получаем:

$$T(s - s_1) = \frac{\kappa}{j} \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s \frac{dp}{dx}. \quad (67,5)$$

Подставляя это выражение для $s = s_1$ в (67,4), получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_s (p - p_1)^2 + \left[1 + \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_s \right] (p - p_1) = \\ = \left\{ -\frac{x}{T} \left(\frac{\partial V}{\partial s} \right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s + \left(\frac{4}{3} \tau_1 + \zeta \right) \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_s \right\} \frac{dp}{dx} j. \end{aligned} \quad (67,6)$$

Поток j равен в первом приближении $j = \frac{v}{V} \approx \frac{c}{V}$ [см. (64,14)]. Это выражение можно подставить в правую сторону (67,6). В левой же стороне оно недостаточно, и нужно учесть члены следующего порядка в j^2 . Эти члены можно было бы получить, например, из (67,2). Проще, однако, воспользоваться следующими соображениями. На больших расстояниях по обе стороны от поверхности разрыва правая сторона (67,6) обращается в нуль вместе с $\frac{dp}{dx}$. На этих расстояниях давление равно соответственно p_1 и p_2 . Другими словами, можно сказать, что квадратный (по p) трёхчлен, стоящий в левой стороне (67,6), имеет корни $p = p_1$ и $p = p_2$. Согласно известной теореме алгебры он может быть поэтому написан в виде произведения $(p - p_1)(p - p_2)$, умноженного на коэффициент $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_s$, стоящий перед p^2 в трёхчлене.

Таким образом, получаем окончательно следующее дифференциальное уравнение, определяющее функцию $p(x)$:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_s (p - p_1)(p - p_2) = -\frac{V^3}{c^2} \left\{ \left(\frac{4}{3} \tau_1 + \zeta \right) + \frac{x}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s \left(\frac{\partial V}{\partial s} \right)_p c^2 p^2 \right\} \frac{dp}{dx}.$$

Согласно термодинамическим формулам преобразования производных $\left(\frac{\partial V}{\partial s} \right)_p = \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s$; легко видеть, что коэффициент при $-\frac{dp}{dx}$ в правой стороне этого уравнения равен $2V^2 a$, где a связан с коэффициентом поглощения звука γ (59,6) соотношением $\gamma = \omega^2 a$. Таким образом,

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{1}{4V^2 a} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_s (p - p_1)(p - p_2). \quad (67,7)$$

Интегрирование даёт:

$$\begin{aligned} x &= \frac{4V^2 a}{\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_s} \int \frac{dp}{\left[\left(\frac{p - p_1}{2} \right)^2 - \left(p - \frac{p_1 + p_2}{2} \right)^2 \right]} = \\ &= \frac{4aV^2}{\frac{p_2 - p_1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_s} \operatorname{arctg} \frac{p - \frac{p_1 + p_2}{2}}{\frac{p_2 - p_1}{2}} + \text{const.} \end{aligned}$$

Пологая $\text{const.} = 0$, имеем:

$$p - \frac{p_1 + p_2}{2} = \frac{p_2 - p_1}{2} \operatorname{th} \left[x \frac{\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_s (p_2 - p_1)}{8V^2 a} \right]. \quad (67,8)$$

Этим определяется ход изменения давления между значениями p_1 и p_2 , которые оно имеет на больших расстояниях по обе стороны разрыва. Точка $x=0$ соответствует месту, в котором давление равно полусумме $\frac{p_1+p_2}{2}$. При $x \rightarrow \pm \infty$ давление быстро приближается асимптотически к значениям p_1 и p_2 (рис. 36, где изображён график функции $y = \text{th } x$). Практически всё изменение от p_1 до p_2 происходит на протяжении расстояния порядка величины

$$\delta = \frac{8aV^2}{(p_2 - p_1) \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_s}, \quad (67,9)$$

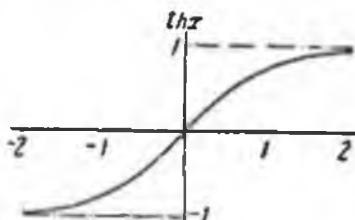


Рис. 36.

которое можно назвать шириной разрыва.

Мы видим, что ширина разрыва тем меньше, чем больше его интенсивность, т. е. скачок давления $p_2 - p_1$ в нём.

Для хода изменения энтропии внутри разрыва имеем из (67,5) и (67,8):

$$s - s_1 = \frac{x}{16caVT} \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_s (p_2 - p_1)^2 \frac{1}{\text{ch}^2 \left[x \frac{\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_s (p_2 - p_1)}{8aV^2} \right]}. \quad (67,10)$$

Отсюда видно, что энтропия меняется не монотонно, а имеет максимум внутри разрыва (при $x=0$). При $x = \pm \infty$ эта формула даёт одинаковые значения $s = s_1$; это связано с тем, что полное изменение энтропии $s_2 - s_1$ является величиной третьего порядка по $p_2 - p_1$ [ср. (64,12)], в то время как $s - s_1$ — второго.

Формула (67,8) применима количественно только при достаточно малых разностях $p_2 - p_1$. Однако, качественно мы можем применить формулу (67,9) для определения порядка величины ширины разрыва и в тех случаях, когда разность $p_2 - p_1$ порядка величины самих давлений p_1, p_2 . Сделаем это для идеального газа. Здесь скорость звука $c \sim \sqrt{\frac{\gamma RT}{m}}$, т. е. порядка тепловой скорости v молекул. Кинематическая вязкость $\frac{\eta}{\rho} \sim l v \sim l c$, где l — длина свободного пробега молекул (см. § 104). Поэтому $\alpha \sim \frac{l}{c^2}$ (оценка члена с теплопроводностью даёт то же самое). Наконец, $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_s \sim \frac{V}{p^2}$ и $pV \sim c^2$. Внося эти выражения в (67,9), получаем:

$$\delta \sim l. \quad (67,11)$$

Таким образом, ширина разрывов большой интенсивности оказывается порядка величины длины свободного пробега. Но в макроскопической газодинамике, в которой газ рассматривается как сплошная среда, длина свободного пробега должна рассматриваться как равная нулю. Другими словами, разрывы большой интенсивности должны трактоваться как не имеющие ширины.

§ 68. Слабые разрывы

Наряду с поверхностями разрывов, на которых испытывают скачок величины ρ , p , v и т. п., могут существовать также и такие поверхности, на которых эти величины как функции координат обладают какими-либо особенностями, оставаясь сами непрерывными. Эти особенности могут быть самого разнообразного характера. Так, на поверхности разрыва могут испытывать скачок первые производные по координатам от величин ρ , p , v и т. п. или же эти производные могут обращаться в бесконечность. Наконец, то же самое может иметь место не для первых, а для более высоких производных. Все такие поверхности мы будем называть поверхностями слабого разрыва в противоположность сильным разрывам, в которых испытывают скачок сами величины ρ , p , v ,...

Легко убедиться при помощи простых рассуждений в том, что поверхности слабого разрыва распространяются относительно жидкости (по обе стороны поверхности) со скоростью, равной скорости звука. Действительно, поскольку функции ρ , p , v ,... сами не испытывают скачка, то их можно «сгладить», заменив функциями, совпадающими с ними везде, кроме окрестности поверхности разрыва, а в этой окрестности отличающимися лишь на сколь угодно малые величины, но так, что «сглаженные» функции не имеют уже никаких особенностей. Истинное распределение, скажем, давления, можно таким образом представить в виде наложения совершенно плавного распределения p_0 без всяких особенностей и очень малого нарушения p' этого распределения вблизи поверхности разрыва. Последнее же, как и всякое малое возмущение, распространяется относительно жидкости со скоростью звука.

Подчеркнем, что в случае сильного разрыва «сглаженные» функции отличались бы от истинных на величины, вообще говоря, отнюдь не малые, и предыдущие рассуждения поэтому неприменимы. Однако, если скачок величин в сильном разрыве достаточно мал, то эти рассуждения вновь делаются применимыми, и такие разрывы тоже должны распространяться со скоростью звука, — этот результат был уже получен в § 64 другим способом.

Будем рассматривать теперь движение поверхности слабого разрыва относительно некоторой неподвижной системы координат, а не относительно жидкости, которая сама может совершать независимое движение. Каждый элемент поверхности разрыва обладает относительно жидкости скоростью, равной по величине скорости звука c и направленной по нормали n к поверхности, а кроме того, переносится с жидкостью со скоростью, равной проекции скорости жидкости v на нормаль n ¹⁾. Полная скорость u равна

$$u = c + v_n. \quad (68,1)$$

Если движение стационарно относительно данной системы координат, то поверхности разрыва неподвижны относительно этой системы, а жид-

¹⁾ Скорость каждого элемента поверхности направлена, по определению, по нормали n к нему. Скорость, направленная в каждой точке тангенциально к поверхности, вообще не привела бы к перемещению поверхности.

кость «протекает» через них. Скорость же поверхности разрыва относительно жидкости, с одной стороны, равна в этом случае по величине и противоположна по знаку нормальной компоненте жидкости и, с другой стороны, должна быть равна по величине скорости звука. Если обозначить посредством θ угол между направлением скорости жидкости и касательной плоскостью к поверхности, то должно быть $v \sin \theta = c$, или

$$\sin \theta = \frac{c}{v}, \quad (68,2)$$

т. е. направление поверхности слабого разрыва определяется углом Маха.

Поскольку $\sin \theta \leq 1$, то мы видим, что должно быть $c \leq v$. Мы приходим к важному выводу, что при стационарном движении слабые разрывы могут появиться только при скоростях, равных или превышающих скорость звука.

В отношении способов возникновения слабые разрывы существенно отличаются от сильных. Мы увидим, что сильные разрывы могут образовываться сами по себе, непосредственно в результате движения жидкости, при непрерывных граничных условиях (например, образование разрывов в звуковой волне — § 77). В противоположность им слабые разрывы не могут возникать сами по себе; их появление всегда связано с какими-либо особенностями в граничных или начальных условиях движения. Особенности эти могут быть, как и сами слабые разрывы, самого различного характера. Так, причиной образования слабого разрыва может являться наличие излома поверхности обтекаемого тела, т. е. наличие углов на ней; к образованию слабого разрыва приводит также и скачок кривизны поверхности тела без излома на ней (т. е. скачок вторых производных от координат точек поверхности) и т. п. Наконец, всякая особенность в изменении движения со временем влечёт за собой возникновение слабого разрыва.

Касательная к поверхности слабого разрыва компонента скорости протекающей через неё жидкости направлена всегда по направлению от того места (например, угла на поверхности тела), откуда исходят возмущения, вызывающие возникновение этого разрыва; можно сказать, что разрыв «исходит» из этого места. Это связано с тем, что при сверхзвуковом течении возмущения, исходящие из некоторой точки пространства, могут распространяться в жидкости только по направлениям, лежащим внутри конуса с вершиной в данной точке и осью, направленной по течению.

Наличие вязкости и теплопроводности приводит к возникновению «ширины» у слабого разрыва, так что слабые разрывы, как и сильные, представляют собой в действительности некоторые переходные слои. Однако, в отличие от сильных разрывов, ширина которых зависит только от их интенсивности и постоянна во времени, ширина слабого разрыва растёт со временем, начиная от момента образования разрыва. Легко определить закон, по которому происходит это возрастание. Для этого снова воспользуемся сделанным в начале этого параграфа замечанием о том, что движение каждого участка поверхности слабого разрыва

происходит по тем же уравнениям, как и распространение любого слабого возмущения в жидкости. При наличии вязкости и теплопроводности возмущение, сконцентрированное первоначально в малом элементе объёма («волновой пакет»), по мере своего перемещения с течением времени расширяется; закон этого расширения был определён в конце § 59. Поэтому мы можем сразу заключить, что ширина δ слабого разрыва — порядка величины

$$\delta \sim \sqrt{act}, \quad (68.3)$$

где t — время, прошедшее с момента возникновения разрыва, а a — коэффициент при квадрате частоты в коэффициенте поглощения звука. Если мы имеем дело со стационарной картиной, в которой разрыв покоится, то вместо времени t надо говорить о расстоянии l от места, из которого «исходит» разрыв (например, для слабого разрыва, возникающего в результате нарушения непрерывности плавности формы обтекаемого тела, l есть расстояние от этого тела); тогда $\delta \sim \sqrt{al}$. Таким образом, ширина слабого разрыва растёт пропорционально корню из времени с момента его возникновения или корню из расстояния от места, откуда он исходит.

В заключение этого параграфа необходимо сделать замечание, аналогичное сделанному в конце § 61. Там было отмечено, что среди различных возмущений состояния движущейся жидкости исключительными по своим свойствам являются возмущения энтропии и ротора скорости. Эти возмущения покоятся относительно жидкости, а не распространяются со скоростью звука. Поэтому поверхности слабого разрыва, на которых испытывает какой-либо «слабый» разрыв непрерывности энтропии жидкости, покоятся относительно жидкости, а относительно неподвижной системы координат переносятся вместе с самой жидкостью. Что касается возмущений ротора скорости, то им соответствуют здесь поверхности, на которых испытывает слабый разрыв касательная к этой поверхности компонента скорости жидкости (например, может испытывать скачок производная от касательной скорости, взятая по направлению нормали к поверхности). Такие «тангенциальные» слабые разрывы тоже покоятся относительно жидкости и проходят через линии тока. В этом отношении они вполне аналогичны сильным тангенциальным разрывам, на которых нормальная компонента скорости жидкости тоже должна всегда исчезать.

§ 69. Движение вблизи особой линии

Две поверхности сильного разрыва могут пересекаться друг с другом; это пересечение происходит вдоль некоторой линии. Линия пересечения сильных разрывов является в математическом отношении особой линией для функций, описывающих распределение всех величин в газе. Оказывается возможным исследовать свойства движения газа вблизи этой особой линии в самом общем виде.

Всю область вокруг линии пересечения можно разбить на ряд последовательных участков, каждый из которых расположен вокруг одного

из малых участков длины линии. Но малые участки линий могут рассматриваться как прямые. Поэтому достаточно рассмотреть случай прямой линии пересечения; в общем случае произвольной линии пересечения получаемые ниже результаты надо применять к отдельным достаточно малым её участкам.

Будем рассматривать пересечение в той системе координат, в которой линия пересечения неподвижна, и выберем эту прямую в качестве оси z цилиндрической системы координат r, φ, z . В непосредственной близости от линии пересечения разрывов все величины (скорость, давление, плотность) существенным образом зависят от угла φ , меняясь в пределах между своими значениями на различных сторонах поверхностей разрыва. Напротив, от координаты r все эти величины зависят лишь слабо и вблизи оси z , т. е. при достаточно малых r , можно считать их вообще не зависящими от r . Несущественна также зависимость величин от координаты z ; если картина движения меняется вдоль оси z , то достаточно рассматривать отдельные малые участки этой оси, на протяжении которых величины можно считать не зависящими от z . (Заметим, что, пренебрегая зависимостью величин от расстояния r от оси как эффектом высшего порядка, мы тем самым пренебрегаем и возможным вращением поверхностей разрыва вокруг неподвижной линии их пересечения; действительно, линейная скорость такого вращения пропорциональна r , т. е. мала при малых r .)

Таким образом, мы должны исследовать стационарное движение, при котором все величины являются функциями только от φ ¹⁾. Уравнение сохранения энтропии $v \nabla s = 0$ даёт $v_\varphi \frac{ds}{d\varphi} = 0$, откуда $s = \text{const.}$ ²⁾. Поэтому в уравнении Эйлера можно писать ∇w вместо $\frac{\nabla p}{\rho}$: $(v \nabla) v = -\nabla w$. В цилиндрических координатах получаем три уравнения:

$$\frac{v_\varphi dv_\varphi}{r d\varphi} - \frac{v_z^2}{r} = 0, \quad \frac{v_\varphi dv_\varphi}{r d\varphi} + \frac{v_r v_\varphi}{r} = -\frac{1}{r} \frac{dw}{d\varphi}, \quad v_\varphi \frac{dv_z}{d\varphi} = 0.$$

Из последнего имеем $v_z = \text{const.}$; без ограничения общности можно положить $v_z = 0$, — это сводится просто к соответствующему выбору скорости движения системы координат вдоль оси z . Первые два уравнения переписываем в виде

$$v_\varphi = \frac{dv_\varphi}{d\varphi}, \quad (69,1)$$

$$v_\varphi \left(\frac{dv_\varphi}{d\varphi} + v_r \right) = -\frac{1}{r} \frac{dw}{d\varphi} = -\frac{dw}{d\varphi}. \quad (69,2)$$

¹⁾ Излагаемое ниже решение принадлежит Прандтлю и Майеру (Meyer).

²⁾ Если положить $v_\varphi = 0$ (вместо $\frac{ds}{d\varphi} = 0$), то, как легко заключить из написанных ниже уравнений движения, получится $v_r = 0, v_z \neq 0$. Такое движение соответствовало бы пересечению поверхностей тангенциальных разрывов (со скачком скорости v_z) и ввиду неустойчивости таких разрывов не представляет интереса.

Подставляя (69,1) в (69,2), получаем:

$$v_\varphi \frac{dv_\varphi}{d\varphi} + v_r \frac{dv_r}{d\varphi} = - \frac{d\omega}{d\varphi},$$

или, интегрируя:

$$\omega + \frac{v_\varphi^2 + v_r^2}{2} = \text{const.} \quad (69,3)$$

Заметим, что равенство (69,1) означает, что $\text{rot } v = 0$, т. е. движение потенциально; в связи с этим и имеет место уравнение Бернулли (69,3).

Далее, уравнение непрерывности $\text{div}(\rho v) = 0$ дает:

$$\rho v_r + \frac{d}{d\varphi}(\rho v_\varphi) = \rho \left(v_r + \frac{dv_\varphi}{d\varphi} \right) + v_\varphi \frac{d\rho}{d\varphi} = 0. \quad (69,4)$$

Комбинируя (69,4) и (69,2), можно получить:

$$\left(\frac{dv_\varphi}{d\varphi} + v_r \right) \left(1 - v_\varphi^2 \frac{d\rho}{d\rho} \right) = 0.$$

Но производная $\frac{d\rho}{d\rho}$, которую правильнее писать в виде $\left(\frac{d\rho}{d\rho} \right)_s$, есть квадрат скорости звука. Таким образом,

$$\left(\frac{dv_\varphi}{d\varphi} + v_r \right) \left(1 - \frac{v_\varphi^2}{c^2} \right) = 0. \quad (69,5)$$

Этому уравнению можно удовлетворить двумя способами. Во-первых, может быть

$$\frac{dv_\varphi}{d\varphi} + v_r = 0.$$

Тогда из (69,2) и (69,4) имеем $\rho = \text{const.}$, $\rho = \text{const.}$, а из (69,2) и (69,3) получаем, что и $v^2 = v_\varphi^2 + v_r^2 = \text{const.}$, т. е. скорость постоянна по абсолютной величине. Легко видеть, что и направление скорости в этом случае постоянно. Угол χ , образуемый скоростью с некоторым заданным направлением в плоскости $z = \text{const.}$, равен (рис. 37)

$$\chi = \varphi + \text{arctg} \frac{v_\varphi}{v_r}. \quad (69,6)$$

Дифференцируя это выражение по φ и используя (69,1) и (69,2), получаем после простого преобразования:

$$\frac{d\chi}{d\varphi} = - \frac{v_r}{v_\varphi} \frac{dv_\varphi}{d\varphi}. \quad (69,7)$$

При $\rho = \text{const.}$ имеем, действительно, $\chi = \text{const.}$ Таким образом, приравняв нулю первый множитель в (69,5), мы получаем просто тривиальное решение — движение с постоянными скоростью и давлением.

Во-вторых, уравнению (69,5) можно удовлетворить, положив

$1 - \frac{v_\varphi^2}{c^2} = 0$, т. е. $v_\varphi = \pm c$. Радиальную же скорость можно определить



Рис. 37.

из (69,3). Обозначая в этом уравнении const. посредством ω_0 , получаем:

$$v_\varphi = \pm c, \quad v_r = \pm \sqrt{2(\omega_0 - \omega) - c^2}. \quad (69,8)$$

В этом решении перпендикулярная радиус-вектору составляющая v_φ скорости в каждой точке равна по величине местной скорости звука. Полная скорость $v = \sqrt{v_\varphi^2 + v_r^2}$, очевидно, больше местной скорости звука. Как абсолютная величина скорости, так и её направление меняются от точки к точке. Поскольку скорость звука не может пройти через нуль, то ясно, что непрерывная функция $v_\varphi(\varphi)$ должна быть равна везде $+c$ или же везде $-c$. Выбирая соответствующим образом направление отсчёта угла φ , мы можем условиться считать, что $v_\varphi = +c$. Отметим, что прямые $\varphi = \text{const.}$ пересекают в каждой точке линии тока под углом, равным углу Маха (его синус равен $\frac{v_\varphi}{v} = \frac{c}{v}$).

Легко видеть, что решение (69,8) не может иметь места во всей области вокруг особой линии. Действительно, согласно (69,1) имеем $\frac{dv_r}{d\varphi} = c > 0$, т. е. v_r есть монотонно возрастающая функция φ . Поэтому при полном обходе вокруг оси z , т. е. при изменении φ на 2π , мы бы получили для v_r значение, отличное от исходного, что нелепо. Ввиду этого истинная картина движения вокруг особой линии должна представлять собой совокупность областей, разделённых плоскостями $\varphi = \text{const.}$, являющимися поверхностями разрывов. В каждой из таких областей происходит либо движение, описываемое решением (69,8), либо движение с постоянной скоростью. Число и характер этих областей будут установлены в следующем параграфе. Сейчас отметим только, что граница между областью движения (69,8) и областью движения с $v = \text{const.}$ должна быть непременно поверхностью слабого разрыва. Действительно, эта граница (плоскость $\varphi = \text{const.}$) не может быть поверхностью тангенциального разрыва (разрыва скорости v_r), так как на ней не обращается в нуль нормальная к ней скорость $v_\varphi = c$. Она не может также быть поверхностью сильного разрыва, так как нормальная компонента скорости (v_φ) по одну сторону от такого разрыва должна быть больше, а по другую сторону меньше соответствующей скорости звука, между тем как в данном случае по одну из сторон от поверхности раздела мы во всяком случае имеем $v_\varphi = c$, так что ни то, ни другое из этих условий не выполняется. Таким образом, если при пересечении сильных разрывов образуется область движения (69,8), то при этом должны возникнуть два новых слабых разрыва.

Из сказанного можно вывести важное следствие. Возмущения, вызывающие появление слабых разрывов, исходят, очевидно, от оси z и распространяются по направлению от неё. Поэтому (см. § 68) в рассматриваемом движении радиальная скорость должна быть положительна, и мы должны выбрать знак $+$ перед корнем в (69,8).

Займёмся теперь более подробным исследованием решения (69,8). Из уравнения непрерывности (69,4) имеем $d\varphi = -\frac{d(\rho v_r)}{\rho v_r}$. Подставляя