532
Г-46
К367835

ГИДРАВЛИКА

ГОСЭНЕРГОИЗДАТ
МОСКВА * 1944 * ЛЕНИНГРАД

532
Г-46
К367835

ГИДРАВЛИКА

ГОСЭНЕРГОИЗДАТ
МОСКВА * 1944 * ЛЕНИНГРАД

ИЗДАНИЯ ВОЕННЫХ ЛЕТ

1941-1945

Проф. И. И. АГРОСКИН, доц. Г. Т. ДМИТРИЕВ, доц. А. И. ИВАНОВ, проф. Ф. И. ПИКАЛОВ

ГИДРАВЛИКА

ДОПУЩЕНО ВСЕСОЮЗНЫМ КОМИТЕТОМ ПО ДЕЛАМ ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ ПРИ СНК СССР
В КАЧЕСТВЕ УЧЕБНИКА ДЛЯ ВУЗОВ ГИДРОТЕХНИЧЕСКИХ И ГИДРОМЕЛИОРАТИВНЫХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

267835

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
ПРОФЕССОРА, ДОКТОРА ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК
И. И. АГРОСКИНА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА · 1944 · ЛЕНИНГРАД

ОТ АВТОРОВ

Настоящий учебник составлен научными работниками кафедры гидравлики Московского гидромелиоративного института имени В. Р. Вильямса под руководством проф. И. И. Агроскина.

Основными членами авторского коллектива выполнена следующая работа:

1. **И. И. Агроскин**, профессор, доктор технических наук—§§ 8—11, 13—17, 35—38, 57—65, 69—70, 82—93, 103—138, 204—209, а также общая редакция всего курса.

2. **Г. Т. Дмитриев**, доцент—§§ 1—7, 12, 18—20, 94—102, 191—203, 210—211.

3. **А. И. Иванов**, доцент, кандидат технических наук — §§ 21— 34, 39—56, 66, 71—81.

4. **Ф. И. Пикалов**, профессор, доктор технических наук—§§ 67, 139—180, 212—214.

Кроме того кандидатом технических наук А. Шагиновым написаны §§ 68, 181—190.

Авторы считают своим приятным долгом выразить признательность доценту И. М. Лифшицу, принявшему на себя труд по выверке рукописи, формул и чертежей, и аспиранту М. В. Пановой, принимавшей участие в оформлении рукописи к печати.

ОТ РЕДАКТОРА

Приступая к составлению настоящего курса, авторы прежде всего должны были остановиться на определенной трактовке гидравлики как научной дисциплины.

Этот, казалось бы, ясный вопрос требовал, однако, своего разрешения ввиду отсутствия строго установленной классификации дисциплин, занимающихся изучением законов механики жидких тел.

Исторически накопление знаний о законах покоя и движения жидких тел шло по двум путям.

Один путь разрабатывался инженерами, стремившимися дать для практического использования решения возникавших технических вопросов главным образом путем экспериментальных исследований тех или иных явлений. Так было положено начало гидравлике.

Второй путь разрабатывался математиками методами математического анализа непрерывной деформации сплошной жидкой среды. Этот путь—классическая гидродинамика—в силу ряда исходных ограничений и условностей, естественно, не мог дать ответа на ряд прикладных вопросов, возникающих в инженерном деле.

Вполне понятно, что наука о закономерностях, свойственных жидкостям, может плодотворно развиваться только на основе тесной взаимосвязи обоих упомянутых направлений.

С этой точки зрения само существование терминологии „классическая гидродинамика“ и „гидравлика“, противопоставляющей метод абстрактного математического анализа методу физико-экспериментальному, не может быть оправдано на современном этапе.

Авторы полагают, что в высшей технической школе должен изучаться единый курс механики жидкого тела (гидромеханика), построенный на синтезе достижений теоретического анализа и экспериментальных исследований.

Оставляя за настоящим курсом, предназначенным для гидротехнических и гидромелиоративных специальностей, название „Гидравлика“, авторы трактуют его как курс механики жидкости применительно главным образом к запросам гидротехнической практики.

Изложение курса построено в основном дедуктивно. Законы тех или иных гидравлических явлений рассматриваются, как правило, в обобщенном виде, а отдельные частные случаи приводятся как следствия обобщенных закономерностей.

При этом ознакомление с индуктивным процессом исторического развития отдельных вопросов достигается краткими историческими справками.

Москва, 1944 г.
Гидромелиоративный институт.

ВВЕДЕНИЕ

История искусства использования воды так же стара, как и сама история человечества. Доисторические руины свидетельствуют о том, что сооружения по использованию воды строились за тысячелетия до нашей эры. Долины Тигра и Евфрата в древности были покрыты сетью искусственных ирригационных сооружений. Наравanский канал, питавшийся водами Тигра, был длиной свыше четырехсот миль и имел размеры, достаточные для пропуска судов того времени.

В некоторых из водохранилищ Индии глубина воды доходила до 50 футов, а площадь водного зеркала — до нескольких квадратных миль.

В Риме и Афинах до сих пор еще действуют водопроводы, построенные около двух тысяч лет назад. Из дошедшего до нас сочинения римского Curator Aquarum[1] Фронтиниуса[2] видно, что римляне обладали некоторыми знаниями из области расчета движения воды по сооружениям.

Первым научным трудом о законах равновесия жидкости считают трактат Архимеда (250 лет до нашей эры) «О плавающих телах»[3], в котором дана столь совершенная теория плавания тел, что современная наука почти ничего не сумела добавить к ней.

После этого вплоть до работы другого гения Леонардо да Винчи (1452—1519) «О движении и измерении воды» не появилось ни одного сочинения в области теории равновесия и движения жидкости. Однако это сочинение было опубликовано лишь спустя 307 лет после смерти Леонардо да Винчи. Поэтому первым опубликованным сочинением из этой области считают работу голландского ученого Симона Стевина «Начала гидростатики», изданную в 1585 г. После этого идут уже работы великого Галилея (1564—1642) с его учениками (Кастелли и Торричелли) и Исаака Ньютона (1642—1726), работы Гюйгенса, Паскаля, Гульельмини (1655—1710,) профессора университетов в Болонье и Падуе Полени (1718), Вариньона (1725) и, наконец, работы Даниила Бернулли (1725—1733) и Эйлера (1768—1771) в Российской академии наук, которые позволяют уже рассматривать вопросы изучения законов равновесия и движения жидкостей и погруженных в них тел как отдельную дисциплину.

В период 1764—1771 гг. работами туринского профессора Микелотти и главным образом парижского аббата Боссю было положено начало экспериментальному изучению упомянутых вопросов, развитому затем трудами Шези (1775), Вентури (1790), Бидона (1823—1824), Беланже (1828), Вейсбаха (1842—1843), Дюпюи (1848), Дарси и Базена (1858—1897) и др.

Так была создана та основа, на которой трудами последующих ученых и исследователей (которые будут указаны по мере изложения курса) развивается современное представление о равновесии и движении жидкостей и находящихся в них тел в связи с действующими силами.

Прежде чем перейти к изложению современного состояния знаний об упомянутых вопросах, являющихся предметом гидравлики, необходимо остановиться на основных представлениях и свойствах жидкостей.

§ 1. Основные свойства жидкости. Молекулярно-кинетические свойства газообразного и жидкого состояния вещества

При газообразном состоянии молекулы движутся почти по прямолинейным путям; силы сцепления проявляются в самой незначительной степени.

В баллоне с разреженным газом молекулы при достаточном разрежении могут двигаться от одной стенки до другой без всякого столкновения друг с другом. Ударяясь же о стенки баллона, молекулы будут производить эффект давления. При увеличении плотности газа в баллоне движение молекул уже не может происходить без взаимного столкновения молекул, однако в динамическом отношении это столкновение ничего нового не внесет, так как при взаимном абсолютно упругом ударе частиц произойдет только обмен скоростями и частицы будут продолжать свой путь, так же вызывая эффект давления при встрече с ограничивающей стенкой.

[1] Куратор акварум — по-современному заведующий водопроводом.

[2] Sextus Iulius Frontinius, „De Aquis Urbis Romae". Фронтиниус родился в 35 г. нашей эры. Был трижды консулом, потом проконсулом, в 97 г. получил важный пост римского Curator Aquarum.

[3] Первый перевод этого трактата был сделан в 969 г. на арабский язык; второй — в 1269 г. на латинский. Русский перевод (с латинского издания 1565 г.) дан в книге «Начала гидростатики», ГТТИ, 1932 г. (перевод Долгова).

Как известно из молекулярной физики, средняя квадратичная скорость движения молекул близка к скорости звука и потому всякое повышение давления в жидкости или в газе распространяется с звуковой скоростью.

Представим себе теперь, что температура газа (а следовательно, и скорость молекул) уменьшается. Благодаря уменьшению скорости начинают сказываться силы сцепления, и в случае перехода газообразного состояния в жидкое ими уже пренебрегать ни в коем случае нельзя. Однако нужно иметь в виду, что эти силы очень быстро убывают с увеличением расстояния. Известно, что силы взаимодействия между молекулами обратно пропорциональны примерно пятой степени расстояния между ними, а для таких правильно построенных молекул, как молекулы гелия и других элементов нулевой группы периодической системы Менделеева, обратно пропорциональны даже двенадцатой степени расстояния.

Расстояние, при котором можно считать это взаимодействие незаметным, называется радиусом «сферы действия сил сцепления». Очевидно, что молекулы, находящиеся внутри сферы, описанной из какой-либо точки радиусом, равным радиусу «сферы действия», не будут оказывать какого-либо воздействия на эту точку, так как если некоторые из них оказывают на эту точку притягивающее действие, то найдутся другие, оказывающие прямопротивоположное действие. Следовательно, частичка внутри жидкости будет вести себя так же, как и частичка газа, и, как и в газах, движение молекул также приведет к давлению на стенки.

Таким образом жидкое состояние с точки зрения молекулярно-кинетической теории будет отличаться от газообразного наличием свободной поверхности, в каждой точке которой от сферы действия остается лишь нижняя половина, притягивающая частицы внутрь жидкости.

Если учесть все сказанное выше, мы должны иметь единую формулу давления p как в жидком состоянии, так и в газообразном.

Как известно, эта формула была дана Ван-дер-Ваальсом в 1899 г. и применяется под названием «уравнения состояния реальных газов»:

$$\left(p+\frac{a}{w^2}\right)(w-b)=RT,$$

где a — постоянное для данного газа число, характеризующее притяжение частиц;

w — объем данного газа;

b — учетверенный объем самих молекул;

R — газовая константа;

T — абсолютная температура.

Для воды уравнение Ван-дер-Ваальса имеет вид

$$p=\frac{1}{w-0{,}001457}\cdot\frac{273+T}{273}-\frac{0{,}01149}{w^2}.$$

§ 2. Вязкость жидкостей. Молекулярная теория вязкости

Вязкость жидкости является одним из наиболее замечательных ее свойств. Термин «вязкость» как синоним внутреннего трения жидкости был введен В. Томсоном (W. Thomson) в 1865 г. Чтобы ясно было, каким образом могут проявляться силы вязкости внутри жидкости, обратимся опять к кинетической теории газов.

Вкратце объяснение механизма вязкости по этой теории сводится к следующему. Молекулы текущей жидкости движутся с некоторой средней скоростью, но скорость некоторых молекул или групп молекул может временно иметь составляющие в направлении, перпендикулярном к направлению среднего движения. Если такая группа молекул попадает из слоя, в котором она двигалась, в соседний слой, движущийся с меньшей средней скоростью, то она будет стремиться увеличить скорость движущихся в этом слое молекул и, наоборот, попадая в слой, движущийся с большей средней скоростью, замедлять движение в слое. Таким образом возникают касательные к движущимся слоям напряжения, которые и характеризуют вязкость жидкости. Из кинетической теории газов известна следующая формула вязкости [1]

$$\mu=\frac{1}{3}\rho u l,$$

где μ — коэфициент вязкости;

ρ — плотность газа;

u — средняя скорость движения молекулы;

l — длина свободного пробега молекул.

Эту фомулу можно представить и в другом виде:

$$\mu=\frac{1}{\pi d^2}\,\frac{mu}{3\sqrt{2}},$$

где d — диаметр молекулы, а m — ее масса.

Отсюда вытекает следующий закон Максвелла:

внутреннее трение газа не зависит от его плотности и давления.

Этот закон, казавшийся на первых порах парадоксальным, был тем не менее блестяще подтвержден опытами О. Э. Майера и самого Максвелла. Коэфициент вязкости μ оказался действительно не зависящим в очень широких пределах от давления.

[1] При более точном расчете по Больцману $\mu=0{,}3503\,\rho u l$.

Так как, с другой стороны, абсолютная температура T пропорциональна квадрату средней квадратичной скорости молекул u, то мы приходим к другому важному заключению:

> *коэфициент вязкости газа пропорционален корню квадратному из абсолютной температуры.*

Теория трения Ньютона. Ньютон первый формулировал гипотезу о величине силы, преодолевающей вязкостное сопротивление:

«Сопротивление, возникающее вследствие недостатка скольжения между частицами жидкости, при прочих равных условиях пропорционально скорости, с которой частицы отклоняются одна от другой».

На основании этой гипотезы Ньютон выдвигает следующий постулат:

«Если твердый, бесконечно длинный цилиндр вращается около оси с постоянной угловой скоростью в бесконечно жидкой среде и если последняя приобретает вращательное движение исключительно за счет импульса, сообщаемого цилиндром, то я утверждаю, что периоды вращения частиц жидкостей пропорциональны их расстояниям от оси цилиндра».

В основном это утверждение сводится к следующему: если два соприкасающихся слоя жидкости движутся с постоянными скоростями u_1 и u_2, то поскольку скорость в жидкости изменяется непрерывно, то сила τ, необходимая для поддержания постоянной разности скоростей и приходящаяся на каждую единицу площади соприкосновения слоев, выразится в виде

$$\tau = \mu \frac{du}{dn}.$$

Здесь $\frac{du}{dn}$ — градиент скорости или, иначе говоря, интенсивность изменения скорости в направлении, нормальном к движущимся слоям жидкости; μ, как установлено опытом, константа, характерная для каждой данной жидкости, уменьшающаяся при обычном давлении с повышением температуры и для всех однородных жидкостей не зависящая от градиента скорости.

Величина μ называется коэфициентом внутреннего трения или коэфициентом вязкости и имеет размерность в системе CGS

$$[\mu] = [ML^{-1}T^{-1}].$$

Коэфициент внутреннего трения обычно выражается в абсолютных единицах, причем единицей для μ в системе CGS является одна дина на 1 $см^2$ при градиенте скорости, равном единице. Такая единица называется **пуазом** в честь Пуазейля (Poiseuille), который первым произвел количественные исследования этого коэфициента.

Из соображений размерностей легко найти соотношение между применяющейся часто на практике технической единицей вязкости и пуазом:

$$98{,}1\ (дин \cdot сек/см^2) = 1\ кг \cdot сек/м^2.$$

Замечательным свойством жидкости, которое легко объясняется на основании кинетической теории вязкости, является уменьшение ее вязкости с увеличением температуры.

В общем виде формула для коэфициента вязкости имеет такой вид:

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + at + bt^2},$$

где μ_0 — коэфициент вязкости при 0°С; a и b — константы, различные для различных жидкостей.

Для воды Бриллуэн (Brillouin), пользуясь экспериментальными данными Пуазейля, дал следующую формулу для μ в системе CGS:

$$\mu = \frac{0{,}01779\rho}{1 + 0{,}0336793t + 0{,}0002209936t^2},$$

где ρ — плотность воды.

Деля коэфициент вязкости μ на плотность жидкости ρ, получаем величину $\nu = \frac{\mu}{\rho}$, имеющую размерность

$$[\nu] = \frac{[ML^{-1}T^{-1}]}{[ML^{-3}]} = [L^2T^{-1}].$$

Так как в размерность величины ν не входит масса, то эту величину называют кинематическим коэфициентом вязкости.

В табл. 1 приведены численные значения кинематического коэфициента вязкости для воды при различной температуре.

Таблица 1

Значения кинематического коэфициента вязкости воды

$t°$	ν $см^2/сек$	$t°$	ν $см^2/сек$	$t°$	ν $см^2/сек$
0	0,0178	12	0,0124	30	0,0081
5	0,0152	15	0,0114	40	0,0066
10	0,0131	20	0,0101	50	0,0055

Не останавливаясь на других теориях вязкости, продолжим рассмотрение свойств жидкости.

§ 3. Сжимаемость жидкостей и газов

В отношении сжимаемости агрегатные состояния вещества резко различаются между собой количественно: газы сжимаются легко, и необходимое для их сжатия давление определяется законом Бойля-Мариотта; жидкости же трудно сжимаемы, и чтобы заметно уменьшить объем жидкости, необходимо подвергать ее весьма сильному давлению.

Причина этого в чрезвычайно сильном притяжении между молекулами жидкости, по сравнению с которым внешние силы, сжимающие жидкость, большей частью оказываются незначительными.

Сжимаемость жидкости характеризуется так называемым коэфициентом сжимаемости жидкости

$$\beta_w = -\frac{1}{W}\frac{dW}{dp}.$$

Знак минус указывает на то, что объем жидкости W уменьшается при повышении давления p и наоборот.

Величина ε, обратная коэфициенту сжимаемости, называется модулем сжимаемости. Для воды при давлениях до 500 *am* и обыкновенной температуре (от 0 до 20°C) можно по Amagat и Quincke принять $\varepsilon = 20\,000$ *кг/см²*.

§ 4. Молекулярное давление

Молекулы, находящиеся у поверхности жидкости, притягиваясь нижележащими, производят на всю остальную жидкость так называемое молекулярное давление и всякая жидкость всегда находится под давлением сил своего собственного поверхностного слоя. Вычислить величину молекулярного давления можно на основании уравнения Ван-дер-Ваальса, где величина $\frac{a}{W^2}$ и представляет собой добавочное давление, вызванное взаимным притяжением молекул.

Приведем для примера значения величины $\frac{a}{W^2}$ для некоторых жидкостей:

Эфир	1 400 *am*
Этиловый спирт	2 400 »
Вода	11 000 »

Эти числа показывают, насколько велико молекулярное давление в жидкостях. Отсюда ясно также, почему жидкости трудно сжимаются: жидкости всегда находятся уже под очень сильным давлением, и поэтому, если мы желаем заметно уменьшить их объем, мы должны прилагать к ним давления порядка приведенных величин $\frac{a}{W^2}$.

§ 5. Поверхностное натяжение

Взаимное притяжение молекул вызывает не только давление поверхностного слоя на остальную жидкость, но и силы поверхностного натяжения, стремящиеся уменьшить поверхность жидкости.

В случае криволинейных свободных поверхностей жидкости (например, капли, пузырьки газа) сила поверхностного натяжения сказывается в дополнительном положительном или отрицательном давлении на поверхность жидкости, выражаемом при шаровой поверхности формулой

$$p = \frac{2\sigma}{r} = \frac{4\sigma}{d} \text{ дин/см}^2,$$

где p — дополнительное давление, вызываемое поверхностным натяжением криволинейной поверхности;
σ — величина поверхностного натяжения, выражаемая в динах на 1 *см* длины по линии раздела одной части поверхностного слоя от другой (для воды при 18°C значение $\sigma = 73{,}0$ *дин/см*);
r — радиус шара (капля, пузырек газа).

Мы видим, что чем меньше радиус капли или пузырька воздуха, тем больше добавочное давление. Благодаря этому свойству очень мелкие пузырьки воздуха могут разрушительно действовать на стенки потока, насыщенного такими пузырьками.

Действием тех же сил поверхностного натяжения объясняется также образование выпуклых и вогнутых менисков.

Благодаря наличию этих менисков образуется так называемое капиллярное поднятие (положительное или отрицательное). Высота этого поднятия равна

$$h = \frac{p}{\gamma} = \frac{4\sigma}{\gamma d},$$

где d — диаметр капиллярной трубки в *мм*;
$\gamma = \rho g$ — объемный вес жидкости (вес единицы объема).

Для воды при температуре 20°C последняя формула принимает вид

$$h = \frac{29{,}8}{d} [\text{мм}].$$

§ 6. Дополнительные сведения о свойствах воды

Температурное расширение. Коэфициенты температурного расширения $\beta_t = \frac{1}{W_0}\frac{dW}{dt}$ для воды по Амага при различных температурах и давлениях приведены в табл. 2.

Таблица 2

Коэфициенты β_t температурного расширения воды

Давление в *am*	Температуры				
	0 — 10°	10 — 20°	40 — 50°	60 — 70°	90 — 100°
1	$14 \cdot 10^{-6}$	$150 \cdot 10^{-6}$	$422 \cdot 10^{-6}$	$556 \cdot 10^{-6}$	$719 \cdot 10^{-6}$
100	43	165	422	548	704
200	72	183	426	539	—
500	149	236	429	523	661
900	229	289	437	514	621

Как видим, коэфициент $\left|\beta_t\right|_{0^\circ}^{50^\circ}$ для воды увеличивается с увеличением давления. Для большинства жидкостей, наоборот, коэфициент β_t с увеличением давления уменьшается.

Плотность. Изменение плотности воды при атмосферном давлении в зависимости от температуры приведено в табл. 3

Таблица 3

Плотность воды при атмосферном давлении

t	Плотность	t	Плотность	t	Плотность	t	Плотность
0°	0,999874	20°	0,988235	50°	0,99813	80°	0,97191
4°	1,00000	30°	0,995674	60°	0,98331	90°	0,96550
10°	0,999731	40°	0,99230	70°	0,97780	99°	0,95934
						100°	0,95863

Температура наибольшей плотности воды понижается с увеличением давления. При нормальном атмосферном давлении температура наибольшей плотности $t=4°$C; при $p=41,6$ *ат* $t=3,3°$C; при $p=99,3$ *ат* $t=2°$C; при $p=144,3$ *ат* $t=0,6°$C.

Особые свойства воды. Кроме описанных свойств вода обладает еще особыми свойствами, называемыми «аномалиями воды», которые в основном заключаются в следующем:

1) в интервале температур от 0 до $+4°$C объем воды не увеличивается, а уменьшается с увеличением температуры и максимальная плотность воды достигается при $+4°$C;

2) вода при замерзании расширяется и делается легче, а не сжимается, как другие тела;

3) температура замерзания воды с увеличением давления понижается, а не повышается (при давлениях до 2 000 *ат*);

4) удельная теплоемкость воды чрезвычайно велика по сравнению с другими телами и имеет минимум при 30°C;

5) необычайно высокая теплота плавления (скрытая теплота плавления) с повышением давления убывает, а не возрастает, как можно было бы ожидать;

6) аномальная дисперсия в области электрических (высокая диэлектрическая постоянная) и тепловых лучей.

Перечисленные „аномалии" воды свидетельствуют о том, что вода не такое простое соединение, как мы привыкли думать. Даже „химически чистая" вода не является простым соединением H_2O. С точки зрения современной молекулярной физики эту „химически чистую" воду нужно представлять себе скорее как агрегат различного рода полимеризированных молекул типа $2H_2O$, $3H_2O$ и т. д.

Еще более сложным агрегатом представляется вода в природной обстановке в условиях искусственных сооружений, устраиваемых для утилизации воды.

В этих условиях вода как „растворитель" не может итти в сравнение ни с каким другим веществом.

Вследствие высокой диэлектрической постоянной воды электрическая диссоциация растворяемых в ней веществ значительнее, чем во всяком другом растворителе.

Вода как раствор сама по себе может агрессивно действовать на металл и бетон гидросооружений, приводя их к разрушению. Причиной последнего служит прежде всего действие так называемой агрессивной углекислоты, содержащейся в воде. Явление разъедания металлов и бетона под действием воды известно под названием коррозии.

Присутствие в воде растворенных газов может сказываться и в чисто механическом воздействии. Так, например, образование в воде пузырьков воздуха и паров воды ведет, в силу громадного молекулярного давления на их поверхность, к тому, что эти пузырьки режут подобно алмазу части сооружений. Явление образования внутри воды пузырьков воздуха и паров известно в гидротехнике под названием „кавитации", борьба с которой является одной из существенных технических задач.

Наконец, присутствие в воде растворенных солей и взвешенных частиц приводит к нежелательным явлениям инкрустации стенок, отложению осадков или, наоборот, к истиранию стенок.

Ряд дисциплин, как, например, гидрология, гидрогеология, гидрохимия и гидробиохимия занимается изучением этих свойств воды.

§ 7. Предмет гидравлики

Само название „гидравлика" произошло от соединения двух греческих слов: ὕδωρ (хюдор — вода) и αυλός (аулос — труба, желоб) и означало в начале учение о водоводах. В современном же смысле гидравлика есть

> *наука о законах равновесия и движения жидкости, разрабатывающая на основе современных знаний способы практического приложения этих законов.*

К своему современному состоянию как научной дисциплины гидравлика пришла постепенно. Созданная на основе громадного опытного материала трудами ученых и инженеров она прежде всего ставила своей задачей и целью дать ответ для какого-либо конкретного вопроса практики, требующего немедленного решения. По мере увеличения числа решаемых задач гидравлика постепенно теряла связь с общими теоретическими дисциплинами, все более и более приобретала прикладной характер. Широкое использование опытных данных повело за собой введение большого числа коэфициентов, с помощью которых корректировались теоретические решения отдельных задач, что послужило для некоторых авторов поводом назвать гидравлику «наукой о коэфициентах».

С другой стороны, формировалась чисто теоретическая дисциплина — классическая гидродинамика, созданная трудами математиков и физиков — Эйлера, Лагранжа, Гельмгольца, Кельвина, Лемба, Релея и др., положивших в основу представление о так называемой „идеальной жидкости“, т. е. жидкости невязкой, лишенной трения.

К концу XIX века и в начале XX века возникло стремление соединить оба направления в изучении движения жидкости: чисто практическое и чисто теоретическое.

В этом направлении достигнуты значительные успехи, позволяющие рассматривать современный курс гидравлики на рациональных основах сочетания результатов как чисто теоретического, так и прикладного изучения законов равновесия и движения жидкости.

Гидравлика, изучая механику жидкостей, учитывает основные для рассматриваемого случая их свойства, отвлекаясь, однако, от отдельных перечисленных выше особенностей.

В последующем изложении курса, употребляя слово „жидкость“, мы будем иметь в виду лишь капельно-жидкие тела. Получаемые выводы поэтому не могут быть распространяемы безоговорочно на газы, если плотность газа в пределах рассматриваемого явления не остается постоянной.

Наконец укажем, что как в теоретической механике вводится понятие абсолютно твердого тела, так и в гидромеханике для стройности и облегчения теоретического анализа вводится понятие „идеальная жидкость“.

Под идеальной жидкостью подразумевается такая абстрактная жидкость, которая характерна: а) абсолютной несжимаемостью, б) абсолютным несопротивлением разрыву; в) абсолютной подвижностью или, иначе говоря, полным отсутствием вязкости.

Из изложенного ясно, что все выводы и положения, которые будут установлены для идеальной жидкости, могут применяться для расчетов в конкретных условиях реальной жидкости только при условии дополнительного учета в этих выводах специфики реальной жидкости.

ГЛАВА I

ГИДРОСТАТИКА

Гидростатика рассматривается в настоящее время как отдел гидромеханики, посвященный изучению теории равновесия жидкостей. Вся эта теория совершенно строго и логично строится методами математического анализа.

Установление этой стройной и строго логической теории как части единой дисциплины механики жидкостей совершалось постепенно в течение многих веков. Начало гидростатики как науки, так же как и гидравлики, следует искать в отдаленном прошлом. Первую и совершенно ясную формулировку одного из основных законов гидростатики, с которого в сущности и начинается история развития последней как науки, мы находим у Архимеда. Дальнейшее ее развитие связано с именами Леонардо да Винчи, Стевина, Галилея и Паскаля. К концу XVI века трудами этих ученых и были созданы основы теории равновесия жидкостей, на основании которых знаменитый Леонард Эйлер (1707—1783) мог уже дать в XVIII веке стройную математическую теорию гидростатики.

§ 8. Гидростатическое давление и его свойства

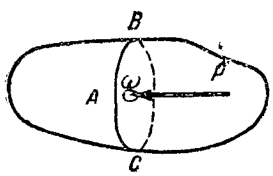
Рассмотрим какое-либо жидкое тело, находящееся в равновесии (фиг. 1). Разрежем его мысленно плоскостью BAC на две произвольные части и одну из частей, скажем правую, отбросим. Отброшенная часть жидкости оказывала какое-то воздействие на остальную часть и потому для сохранения равновесия левой части необходимо в плоскости разреза приложить силы, заменяющие по величине и направлению воздействие отброшенной части.

Пусть из упомянутых сил на площадку ω, включающую в себя произвольную точку m, приходится сила P, которая в среднем на единицу площади оказывает напряжение $\frac{P}{\omega}$.

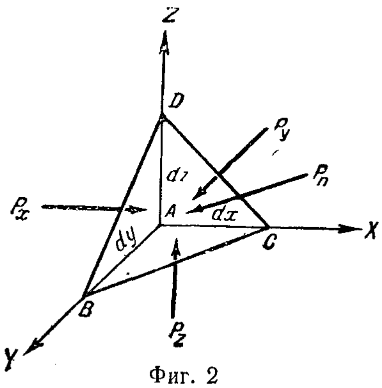
Если площадку ω уменьшать вокруг точки m, то одновременно с приближением ω к нулю среднее напряжение $\frac{P}{\omega}$ стремится к некоторому пределу, характеризующему собой гидростатическое напряжение p в данной точке:

$$p=\lim_{\omega\to 0}\left(\frac{P}{\omega}\right). \qquad (1)$$

Каково же направление гидростатического напряжения? Если сила будет направлена строго по внутренней нормали к площадке, то она вызовет лишь силы сжатия и последние ввиду несжимаемости жидкости равновесия не нарушат.



Фиг. 1



Фиг. 2

Всякое иное направление силы P можно свести к двум составляющим силам — одной, направленной по внутренней нормали, и другой касательной, а последняя ввиду несопротивляемости жидкости сдвигу нарушит обусловленное равновесие.

Точно так же нарушит равновесие и направление силы P по внешней нормали, как вызывающее разрыв жидкости.

Отсюда приходим к выводу, что

> *гидростатическое напряжение направлено только по внутренней нормали к площадке действия и потому называется гидростатическим давлением.*

Через точку m фиг. 1 можно, конечно, провести любое число площадок ω, меняя угол их наклона. Убедимся, что величина гидростатического давления p в данной точке не меняется (не зависит) от направления.

Проведем в массе жидкости (фиг. 2) через произвольную точку A прямоугольные оси координат, на которых отложим бесконечно малые отрезки dx, dy, dz. Соединив концы отрезков, рассмотрим выделенный бесконечно малый тетраэдр жидкости.

Отбросим мысленно всю окружающую тетраэдр массу жидкости, а для сохранения прежнего равновесия приложим к каждой грани соответствующие силы P_x, P_y, P_z, P_n, где P_n — сила давления на наклонную грань DBC.

Тетраэдр под воздействием упомянутых сил будет находиться в прежнем состоянии относительного покоя, и потому сумма проекций на оси координат всех действующих сил должна быть равна нулю.

Кроме давления на грани тетраэдра со стороны окружающей его жидкости имеются еще налицо и объемные силы (в частности вес самого тетраэдра жидкости), но проекциями этих сил можно пренебречь, так как ввиду бесконечно малого объема тетраэдра они будут выражены бесконечно малыми величинами выше первого порядка.

Тогда можем написать уравнения равновесия:

$$P_x - P_n \cos(\widehat{nx}) = 0 \text{ или } P_x = P_n \cos(\widehat{nx}).$$

$$P_y - P_n \cos(\widehat{ny}) = 0 \quad » \quad P_y = P_n \cos(\widehat{ny}).$$

$$P_z - P_n \cos(\widehat{nz}) = 0 \quad » \quad P_z = P_n \cos(\widehat{nz}).$$

Разделив почленно первое уравнение на ω_x — величину площади грани ADB, получим

$$\frac{P_x}{\omega_x} = \frac{P_n \cos(\widehat{nx})}{\omega_x} = \frac{P_n}{\dfrac{\omega_x}{\cos(\widehat{nx})}}.$$

По чертежу нетрудно убедиться, что ω_x является проекцией ω_n — площади грани DBC и, следовательно,

$$\omega_x = \omega_n \cos(\widehat{nx}).$$

Тогда уравнение перепишется в виде

$$\frac{P_x}{\omega_x} = \frac{P_n}{\omega_n}$$

или переходя к пределам $p_x = p_n$.

Аналогично другие два уравнения равновесия дадут соответственно

$$p_y = p_n \text{ и } p_z = p_n$$

и потому можно записать

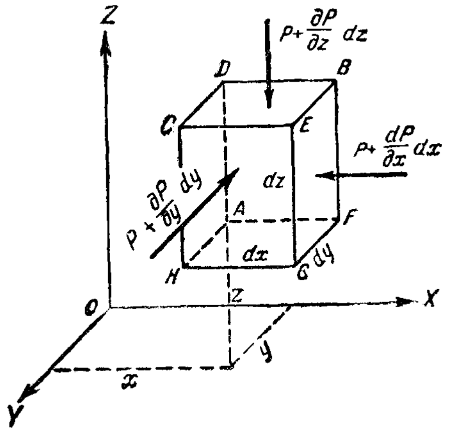
$$p_x = p_y = p_z = p_n, \qquad (2)$$

т. е. гидростатическое давление, рассматриваемое в точке A, в различных направлениях одинаково и, следовательно, не зависит от направления, в котором оно рассматривается.

§ 9. Общие уравнения гидростатики

Для определения величины гидростатического давления в той или иной конкретной точке покоящейся жидкости, а также для установления распределения гидростатического давления рассмотрим общий случай равновесия жидкого тела, находящегося под воздействием некоторой системы сил.

Выделим в жидкости, находящейся в равновесии, элементарный параллелепипед у точки A (фиг. 3) со сторонами dx, dy, dz.



Фиг. 3

Рассматриваемый параллелепипед находится в равновесии под воздействием: а) поверхностных сил давления окружающей жидкости, направленных по внутренним нормалям к граням параллелепипеда, и б) объемных сил, действующих на каждую единицу массы жидкости (силы земного притяжения, центробежные силы, силы инерции и т. п.).

Пусть p — гидростатическое давление в точке A. Пренебрегая бесконечно малыми высшего порядка, будем считать среднее гидростатическое напряжение на гранях параллелепипеда, проходящих через точку A, также равным p.

Тогда учитывая непрерывность изменения напряжения в жидкой среде, среднее гидростатическое напряжение на других гранях параллелепипеда будет:

Для грани $EBFG$ $\quad p + \dfrac{\partial p}{\partial x}\, dx.$

» » $CHGE$ $\quad p + \dfrac{\partial p}{\partial y}\, dy.$

» » $DBEC$ $\quad p + \dfrac{\partial p}{\partial z}\, dz.$

Равнодействующую объемных сил, действующих на единицу массы жидкости, обозначим F, а проекции ее на оси координат — соответственно F_x, F_y, F_z и на любое направление — F_n.

Тогда условие равновесия выделенного параллелепипеда, как равенство нулю суммы проекций всех сил на избранное направление, можно записать, например, для оси OX в виде

$$p\,dydz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\, dx\right) dydz + F_x \rho\, dxdydz = 0$$

или

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\rho F_x,$$

где $\rho=\frac{\gamma}{g}$.

Здесь масса единицы объема жидкости (плотность) обозначена ρ;

γ — вес единицы объема жидкости;

g — ускорение силы тяжести.

Вообще, очевидно, для любого избранного направления будем иметь

$$\frac{\partial p}{\partial n}=\rho F_n.$$

Система уравнений

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial x}&=\rho F_x,\\ \frac{\partial p}{\partial y}&=\rho F_y,\\ \frac{\partial p}{\partial z}&=\rho F_z\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

представляет собой общие условия равновесия жидкости, данные Эйлером.

Умножая уравнения Эйлера (3) соответственно на dx, dy, dz и складывая их, получим

$$\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz=\rho(F_xdx+F_ydy+F_zdz)$$

или, замечая, что левая часть последнего уравнения представляет собой полный диференциал давления,

$$dp=\rho(F_xdx+F_ydy+F_zdz).\qquad(4)$$

Уравнение (4) может иметь смысл только при условии, что и правая часть его также представляет собой полный диференциал некоторой функции $U(x, y, z)$ (назовем ее силовой функцией), для которой

$$F_x=+\frac{\partial U}{\partial x};\ F_y=+\frac{\partial U}{\partial y};\ F_z=+\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Иначе говоря, если жидкость находится в покое, то система действующих на нее сил имеет потенциал.

Как видно из (4), для определения давления в той или иной точке покоящейся жидкости необходимо установить проекции на оси координат объемных сил, приходящихся на единицу массы (ускорений), и проинтегрировать полученное диференциальное уравнение.

§ 10. Применение общих уравнений гидростатики

Рассмотрим применение общего уравнения (4) в некоторых частных случаях.

1. Жидкость находится только под воздействием сил земного притяжения

В данном случае из объемных сил налицо только сила тяжести.

Поэтому имеем

$$F_x=0,\ F_y=0,\ F_z=g$$

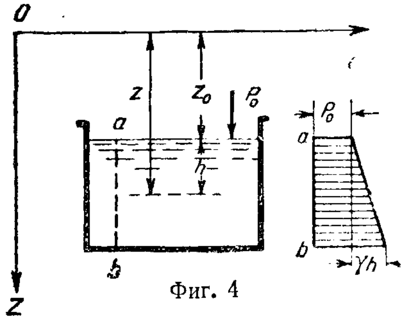
и общее уравнение (4) примет частный вид

$$dp=\rho g dz=\gamma dz,\qquad(5)$$

откуда

$$p=\gamma z+C.$$

Обозначим давление на свободной поверхности жидкости p_0, а ординаты этой поверхности z_0.



Фиг. 4

Тогда, освобождаясь от постоянной интегрирования, запишем

$$p-p_0=\gamma(z-z_0),$$

откуда давление в точке покоящейся жидкости

$$p=p_0+\gamma h,\qquad(6)$$

где $h=z-z_0$ (как это видно по фиг. 4) представляет собой глубину погружения рассматриваемой точки жидкости.

Полное гидростатическое давление в данной точке жидкости складывается из внешнего давления на поверхности p_0 и собственно гидростатического давления γh, являющегося функцией только глубины погружения h и объемного веса жидкости.

Из уравнения (6) видно также, что всякое изменение давления на поверхности жидкости p_0, входящего в уравнение слагаемым, полностью передается в общий итог давления при любом значении γ и h.

В этом заключается известный закон Паскаля—

> *внешнее давление, оказываемое на поверхность жидкости, передается без изменения всем частицам этой жидкости.*

В гидротехнической практике в большинстве случаев внешним давлением является давление атмосферы p_a, которое действует не только на свободную поверхность жидкости, но и со всех сторон и этим уравновешивается.

Поэтому при расчетах будет интересовать, главным образом, гидростатическое давление за вычетом атмосферного, называемое манометрическим или „избыточным“ давлением, как представляющее избыток полного давления над атмосферным:

$$p = \gamma\, h. \tag{6'}$$

В дальнейшем изложении сохраним обозначение p за манометрическим давлением, а при необходимости оперировать с полным давлением будем записывать — $p_{полн}$.

Уравнения (6) и (6′) могут быть весьма наглядно изображены графически.

На фиг. 4 показан в виде эпюры закон нарастания давления для любой вертикальной линии ab, проведенной от свободной поверхности до дна сосуда.

Поверхности в жидкости, все точки которых находятся под одинаковым давлением, называют поверхностями уровня или поверхностями равного давления.

Уравнением поверхности равного давления будет, очевидно,

$$dp = 0. \tag{7}$$

В рассматриваемом случае тяжелой покоящейся жидкости уравнение поверхности уровня будет согласно (5) и (7)

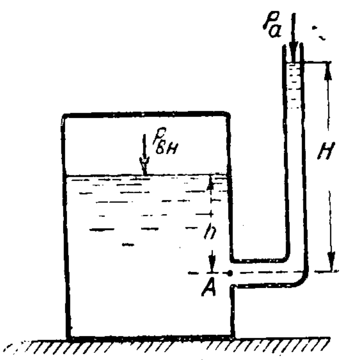
$$dp = \gamma\, dz = 0$$

или

$$z = \mathrm{const}$$

и, следовательно, поверхности уровня, а в том числе и свободная поверхность — горизонтальные плоскости.

Задача 1. В замкнутом сосуде с водой (фиг. 5) давление на свободной поверхности равно 1,25 *кг/см²*. На какую высоту H поднимается вода в открытой трубке, сообщающейся с сосудом на глубине $h = 3$ *м* под свободной поверхностью.



Фиг. 5

Давление водяного столба H вместе с давлением атмосферы в открытой трубке уравновешивает давление в точке A с внутренней стороны сосуда.

Тогда имеем

$$p_a + \gamma H = p_0 + \gamma h,$$

откуда

$$H = \frac{(p_0 - p_a) + \gamma h}{\gamma} = 550\ см = 5{,}5\ м.$$

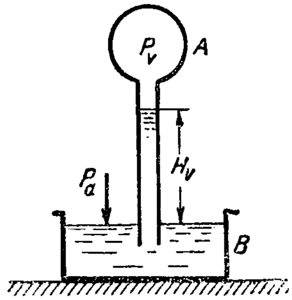
Легко видеть, что высота подъема жидкости в открытой трубке показывает „избыточное“ давление в точке включения трубки и последняя может служить для характеристики (измерения) давления.

Упомянутого типа открытая трубка носит название *пьезометра*, а высота подъема жидкости в ней H — пьезометрическая высота, связанная с манометрическим давлением уравнением

$$H = \frac{p}{\gamma}.$$

Если полное давление меньше атмосферного, то избыточное давление получится отрицательным и налицо тогда так называемый в а к у у м, для измерения которого пользуются вакуумметрами.

Задача 2. В сосуде A (фиг. 6) часть воздуха выкачана и давление в нем $p_v = 0{,}6$ *ат*. Сосуд A соединен трубкой с водой сосуда B, находящейся под давлением атмосферы. Определить показание вакуумметра H_v.



Фиг. 6

Имеем

$$p_v + \gamma H_v = p_a$$

или

$$H_v = \frac{p_a - p_v}{\gamma} = \frac{1 - 0{,}6}{0{,}001} = 400\ см = 4\ м.$$

Вакуумметр, как видим, показывает недостаток давления до атмосферного, тогда как пьезометр показывает избыток давления сверх атмосферного.

2. Жидкость в открытом сверху сосуде вращается равномерно с угловой скоростью ω

Когда движение установится, жидкость будет вращаться вместе с сосудом и будет относительно последнего находиться в покое.

Из объемных сил на каждую единицу массы жидкости в данном случае будут действовать: сила земного притяжения и силы инерции, вызванные вращательным движением.

Применительно к фиг. 7 имеем

$$F_x = F_r = \omega^2 r;\ F_y = 0 \text{ и } F_z = g,$$

$$dp = \rho(F_x dx + F_y dy + F_z dz) = \rho(\omega^2 r dr + g dz)$$

или после интеграции

$$p = \frac{\gamma\omega^2}{2g} r^2 + \gamma z + C.$$

Установив начало координат по оси вращения на свободной поверхности, где $p = p_0$; $r = 0$ и $z = 0$, получим уравнение

$$p = p_0 + \frac{\gamma\omega^2}{2g} r^2 + \gamma z, \tag{8}$$

справедливое для любых точек рассматриваемой жидкости.

Общую форму поверхностей равного давления, а следовательно, и форму свободной поверхности установим, применив условие (7).

В данном случае имеем

$$dp = \rho(\omega^2 r dr + g dz) = 0,$$

откуда

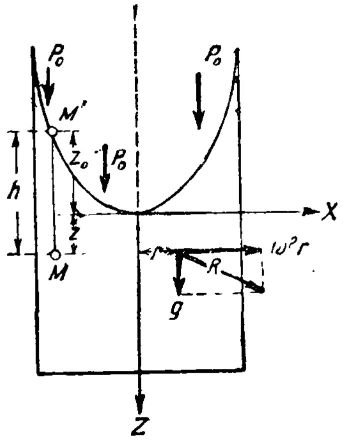
$$-z = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + C$$

и, следовательно, поверхности уровня в жидкости во вращающемся сосуде представляют собой параболоиды вращения.

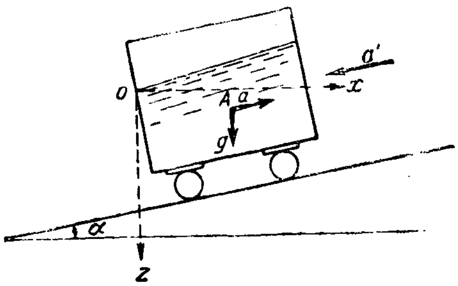
Меридиональное сечение параболоида на свободной поверхности будет парабола с уравнением

$$-z_0=\frac{\omega^2}{2g}r^2, \qquad (9)$$

где z_0 — превышение точек свободной поверхности над избранной осью координат.



Фиг. 7



Фиг. 8

С учетом (9) уравнению (8) можно придать вид

$$p=p_0+\gamma(z-z_0)=p_0+\gamma h,$$

где h — глубина погружения рассматриваемой точки под уровень свободной поверхности.

Как видим, давление в жидкости во вращающемся сосуде распределяется в полном соответствии с законом гидростатики.

3. Жидкость находится в сосуде, движущемся с ускорением a' по наклонной плоскости

Элементарная частица жидкости в некоторой точке A (фиг. 8) находится под действием силы тяжести и силы инерции переносного движения.

Применительно к системе координат, показанной на фиг. 8, имеем

$$F_x=a\cos\alpha;\ F_y=0;\ F_z=g-a\sin\alpha$$

и, следовательно,

$$dp=\rho[a\cos\alpha dx+(g-a\sin\alpha)dz],$$

откуда

$$p=\rho[a\cos\alpha\cdot x+(g-a\sin\alpha)z]+C.$$

При начале координат на свободной поверхности в точке O $(x=z=0)$ имеем $C=p_0$ и потому

$$p=p_0+\rho[a\cos\alpha\cdot x+(g-a\sin\alpha)z].$$

Свободная поверхность будет характеризоваться уравнением $dp=0$ или

$$a\cos\alpha dx+(g-a\sin\alpha)dz=0,$$

откуда

$$-z=\frac{a\cos\alpha}{g-a\sin\alpha}\,x.$$

Следовательно, свободная поверхность жидкости представляет собой плоскость, наклоненную к горизонту под некоторым углом β, определяемым формулой

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{a\cos\alpha}{g-a\sin\alpha}.$$

Рассмотренные частные случаи показывают, что общие условия равновесия жидкости, данные Эйлером, позволяют с исчерпывающей полнотой выяснить как величину давления, так и его распределение в изучаемой жидкости.

§ 11. Давление жидкости на горизонтальную плоскость

Все точки горизонтальной плоскости испытывают одинаковое давление со стороны жидкости, находящейся в покое, ввиду равной глубины их погружения.

Следовательно, сила давления на всю горизонтальную плоскость (скажем дно) равна произведению площади ω на гидростатическое давление в любой из точек плоскости:

$$P_{полн}=p_{полн}\omega=(p_0+\gamma h)\,\omega. \qquad (10)$$

Для манометрической силы давления уравнение примет вид

$$P=\gamma h\omega, \qquad (11)$$

что соответствует весу столба жидкости с основанием ω при высоте его h до свободной поверхности.

Задача 3. Определить полную и манометрическую силу давления на дно бака площадью $\omega=3$ *м*² при налитом слое воды $h=2$ *м*.

На свободную поверхность жидкости оказывает давление окружающая атмосфера, причем ее давление на единицу площади, как известно, равносильно давлению столба ртути высотой в 760 *мм* или давлению столба воды высотой 10,33 *м* (уд. вес ртути равен 13,6).

В инженерных расчетах давление атмосферы приравнивается давлению столба воды высотой ровно в 10 *м*, которое служит одной из условных единиц измерения давления и именуется технической атмосферой.

Это давление, выраженное в мерах веса на единицу площади, равносильно давлению одного килограмма на квадратный сантиметр площади (1 *кг/см*²) или десяти тонн на квадратный метр площади (10 *т/м*²).

Вычисление давления ведется обычно или в *кг/см*² или *т/м*².

Для этого в первом случае при пользовании уравнением (10) будем считать γ весом 1 $см^3$ жидкости, выраженным в *кг*, и в этом случае h брать в *см*, а во втором γ — вес в *т* 1 $м^3$ жидкости и h в *м*.

Согласно сделанным замечаниям вычисляем силу полного давления на дно бака по (10)

$$P_{полн} = (p_0 + \gamma h)\omega = (1\,кг/см^2 + 0{,}001\,кг/см^3 \cdot 200\,см)\,30\,000\,см^2 = 36\,000\,кг = 36\,т$$

или

$$P_{полн} = (10\,т/м^2 + 1\,т/м^3 \cdot 2\,м)\,3\,м^2 = 36\,т.$$

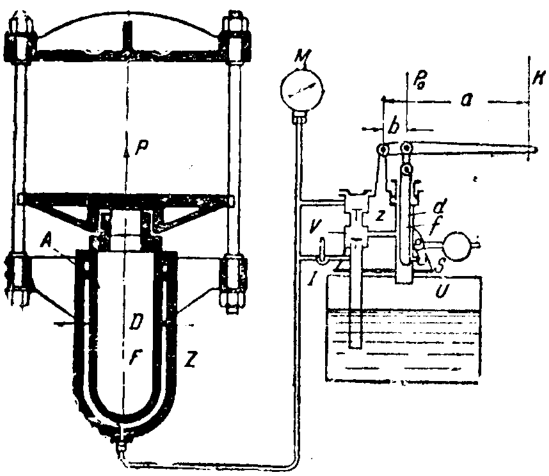
Очевидно, что вошедшее в вычисление внешнее давление атмосферы давит на дно и с внешней стороны и должно быть поэтому исключено и тогда останется лишь давление воды на дно, т. е. „избыточное" давление, которое можем непосредственно вычислить по (11)

$$P = \gamma h \omega = 1\,т/м^3 \cdot 2\,м \cdot 3\,м^2 = 6\,т.$$

§ 12. Простые гидравлические машины

Гидравлический пресс. Схематически пресс представлен на фиг. 9 и состоит из насоса и цилиндра с поршнем. Пространство между поршнем и цилиндром сообщается с насосом при помощи трубки.

Если обозначить P — груз, лежащий на платформе, соединенной с поршнем, D — диаметр



Фиг. 9

поршня в цилиндре, S — его площадь, P_0 — сила давления на поршень насоса, а d и s — диаметр и площадь этого поршня, то

$$P = pS = p\frac{\pi D^2}{4},$$

$$P_0 = ps = p\frac{\pi d^2}{4},$$

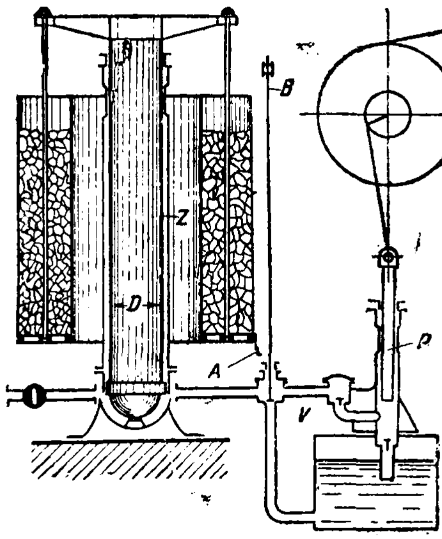
откуда

$$\frac{P}{P_0} = \frac{S}{s} = \left(\frac{D}{d}\right)^2. \tag{12}$$

Величина отношения площади поршня пресса к площади поршня насоса называется передаточным числом. При $d = 2$ *см* и $D = 20$ *см*, например, это число будет равно 100. Для ручного насоса

$$P_0 = K\frac{a}{b},$$

где K — сила, приложенная к рычагу насоса, a и b — плечи рычага. Учитывая трение в так



Фиг. 10

называемых „манжетах", плотно прилегающих к поршням пресса и насоса и устраняющих утечку жидкости через зазоры между поршнями и цилиндрами, в формулу (12) вводят так называемый к. п. д. η, в результате чего расчетная формула примет вид

$$P = \eta\frac{Ka}{b}\left(\frac{D}{d}\right)^2, \tag{13}$$

где η обычно принимают равным 0,85.

Задача 4. Определить величину сжимающего усилия P, производимого одним рабочим у гидравлического пресса, если большое плечо a рычага имеет длину 1 *м*, а малое $b = 0{,}1$ *м*, диаметр поршня пресса $D = 250$ *мм*, диаметр же поршня насоса $d = 25$ *мм*, усилие одного рабочего $K = 20$ *кг*; к. п. д. $\eta = 0{,}85$.

Согласно формуле (13) находим

$$P = 0{,}85\,\frac{20 \cdot 1}{0{,}1}\left(\frac{250}{25}\right)^2 = 17\,000\,кг = 17\,т.$$

Следовательно, сжимающее усилие возросло в 850 раз по сравнению с усилием, приложенным к концу рычага.

Гидравлический аккумулятор. Схематически аккумулятор (фиг. 10) представляет собой цилиндр Z, внутри которого помещается поршень диаметром D, соединенный с рамой, нагруженной каким-либо грузом. При помощи насоса P нагнетают в цилиндр воду до тех пор, пока он не заполнится весь. Накопленную энергию потом расходуют в часы особо напряженной работы какой-либо гидравлической машины, хотя бы того же гидравлического пресса, судоподъемника, гидравлического лифта и т. п.

Объем воды W, которую насос должен накачать в цилиндр, чтобы поднять поршень на высоту H, очевидно, равен

$$W = \frac{\pi D^2}{4} H.$$

Обозначая через G вес поршня с грузом, найдем, что давление на поршне аккумулятора должно равняться

$$p=\frac{4G}{\pi D^2},$$

а тогда работа, которую нужно произвести при наполнении аккумулятора, будет равняться

$$L=GH=p\frac{\pi D^2}{4}H=pW.$$

В действительности эта работа будет равна

$$L=\frac{pW}{\eta},$$

где η — к. п. д. системы (насос и сам аккумулятор).

Задача 5. Гидравлический кран, работающий под давлением $p=3$ *ат*, должен поднять груз в 3 *т* на высоту 6 *м*. Найти объем цилиндра акуммулятора, при помощи которого приводится в действие гидравлический кран, и подсчитать работу насоса при зарядке аккумулятора.

Коэфициент полезного действия крана $\eta_к=0{,}70$, аккумулятора $\eta_a=0{,}80$ и насоса $\eta_н=0{,}90$.

Объем аккумулятора W_a найдем из равенства работ аккумулятора и крана:

$$\frac{pW_a}{\eta_a}=\frac{3\,000\cdot 6}{\eta_к},$$

Откуда

$$W_a=\frac{3\,000\cdot 6\eta_a}{\eta_к\cdot p}=\frac{3\,000\cdot 6\cdot 0{,}8}{0{,}7\cdot 3\cdot 10\,000}=0{,}685\ м^3.$$

Работа насоса будет равна

$$L=\frac{pW_a}{\eta_н}=\frac{3\cdot 10\,000\cdot 0{,}685}{0{,}9}=22{,}8\ тм.$$

§ 13. Расчет силы давления на плоские поверхности, произвольно ориентированные

При расчете давления на горизонтальную площадку ω достаточно было установить гидростатическое давление p в любой точке площади и распространить это давление на всю площадь

$$P=p\omega=\gamma h\omega.$$

Конечно, иное положение будет при расчете давления на площадку не горизонтальную, а составляющую с горизонтом некоторый угол α, например, при расчете давления на контур ω, на боковой стенке сосуда (фиг. 11).

Различные точки такой площади, находясь на разных глубинах, испытывают различное давление и потому распространять давление любой точки на всю площадь невозможно.

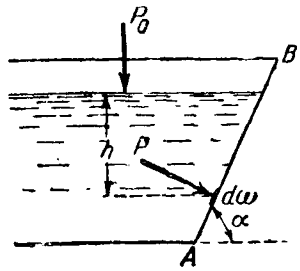
Рассмотрим бесконечно малый элемент площади, расположенный на глубине h под свободной поверхностью жидкости. Среднее давление в точках площадки $d\omega$ согласно (6)

$$p=p_0+\gamma h$$

и сила давления на бесконечно малую площадку $d\omega$ будет равна

$$dP=pd\omega=(p_0+\gamma h)d\omega. \qquad (14)$$

Всю площадь стенки можно рассматривать состоящей сплошь из элементарных площадок $d\omega$, на каждую из которых передается со стороны жидкости давление вида (14), непрерывно изменяющееся по мере изменения глубины h, но всегда направленное перпендикулярно к плоскости стенки.



Фиг. 11

Суммарное давление на всю боковую стенку, очевидно, сведется к сумме параллельных непрерывно изменяющихся сил, что дает право прибегнуть к определению силы давления на стенку как интеграла уравнения (14), в пределах всей смоченной площади.

Имеем

$$P=\int dP=\int p_0 d\omega+\int\gamma h d\omega=p_0\int d\omega+\gamma\int h d\omega,$$

$$P=p_0\omega+\gamma\int h d\omega. \qquad (15)$$

Интеграл в правой части уравнения (15) представляет сумму произведений бесконечно малых площадок $d\omega$ на их расстояния h от уровня свободной поверхности жидкости. Как известно из теоретической механики, такая сумма произведений дает статический момент площади, равный произведению всей площади ω на расстояние $h_{цт}$ от уровня жидкости до центра тяжести площади.

Тогда

$$\gamma\int h d\omega=\gamma h_{цт}\omega$$

и уравнение (15) перепишется в виде

$$P=p_0\omega+\gamma h_{цт}\omega=(p_0+\gamma h_{цт})\omega,$$

а для манометрического

$$P=\gamma h_{цт}\omega. \qquad (16)$$

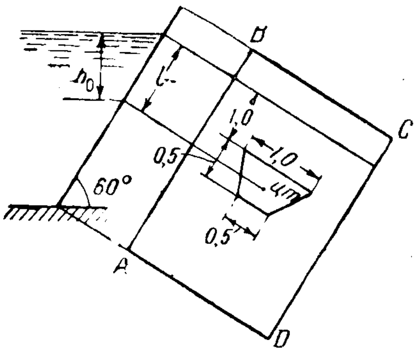
Из сравнения (11) и (16) заключаем, что структура обоих уравнений совершенно одинакова с той лишь разницей, что в (11) для горизонтальной площади входит h — глубина погружения любой точки стенки, а в (16) для наклонной стенки входит $h_{цт}$ — глубина погружения центра тяжести смоченной площади стенки.

Следовательно,

сила давления на плоскую стенку равна произведению смоченной площади стенки на давление, испытываемое ее центром тяжести.

Расчет силы давления на боковую стенку, как видно из изложенного, потребует в каждом частном случае предварительного определения места нахождения (глубины погружения) центра тяжести смоченной площади стенки методами, рассматриваемыми в курсе теоретической механики.

Задача 6. Боковая стенка $ABCD$ резервуара наклонена к горизонту под углом $\alpha = 60°$. Определить силу давления воды на трапецоидальную площадку, выделенную на боковой стенке. Размеры по фиг. 12.



Фиг. 12

Определим глубину погружения центра тяжести интересующей нас площадки.

Центр тяжести трапеции находится от большего основания ее на расстоянии

$$\frac{B+2b}{B+b}\cdot\frac{L}{3},$$

где B — большее основание трапеции; b — меньшее и L— высота трапеции.

Верхнее основание трапеции в данном случае находится на расстоянии e от уреза воды и потому положение центра тяжести, считая по наклону стенки, будет

$$l = e + \frac{B+2b}{B+b}\cdot\frac{L}{3} = 1 + \frac{1+2\cdot 0{,}5}{1+0{,}5}\cdot\frac{0{,}5}{3} = 1{,}22 \text{ м}.$$

Глубина погружения центра тяжести от уровня воды

$$h_0 = l\sin\alpha = 1{,}22\sin 60 = 1{,}22\cdot 0{,}866 = 1{,}06 \text{ м}.$$

Определяя теперь площадь изучаемой трапеции

$$\omega = \frac{B+b}{2}L = \frac{1+0{,}5}{2}\,0{,}5 = 0{,}375 \text{ м}^2,$$

найдем искомое давление на выделенную трапецоидальную площадку

$$P = \gamma\omega h_{цт} = 1\,000\text{ кг/м}^3\cdot 0{,}375\text{ м}^2\cdot 1{,}06\text{ м} = 397{,}5 \text{ кг}.$$

§ 14. Сила давления на криволинейные поверхности

Для плоской стенки давление жидкости сложилось из давлений на элементарные площадки.

При этом элементарные давления представляли силы, разные по величине, но направленные параллельно, и поэтому их можно было свести к одной равнодействующей.

Если же рассматривать не плоскую, а криволинейную поверхность, то элементарные силы давления жидкости, оставаясь каждая перпендикулярной к соответствующему элементу площади, уже не будут параллельны между собой и в общем случае могут не пересекаться в одной точке, а поэтому будут приводиться к одной силе и к одной паре сил.

В отдельных частных случаях силы давления на криволинейные поверхности могут сводиться и к одной равнодействующей силе.

Так, например, для произвольной части шаровой поверхности элементарные давления, будучи направлены по радиусам, пересекутся в центре сферы и дадут, следовательно, одну равнодействующую силу.

Точно так же к одной силе сведется давление на цилиндрические поверхности с горизонтальной или вертикальной осью.

Вопрос о давлении на криволинейные поверхности имеет большое практическое значение, причем в подавляющем большинстве в гидротехнической практике из криволинейных поверхностей встречаются поверхности цилиндрические (секторные затворы, водопроводные баки, вальцовые затворы и т. д.).

Поэтому остановимся на аналитическом выражении давления на криволинейную поверхность в общем виде и более детально разберем частные случаи давления на криволинейные поверхности, а именно давления на цилиндрические поверхности.

Возьмем любую криволинейную поверхность $ACB = S$, показанную схематически на фиг. 13. Для суждения о давлении жидкости на нее определим отдельно составляющие этого давления по трем взаимно перпендикулярным осям, в общем виде произвольно ориентированным.

Обозначим составляющие (п екции) давления по оси OA через P'_a, по оси ON — P'_n и по оси OM — P'_m, а соответствующие реакции со стороны стенки R'_a, R'_n и R'_m.

Для определения составляющей давления по оси OA спроектируем криволинейную поверхность на плоскость, перпендикулярную к оси OA (например, на плоскость OMN), и рассмотрим условия равновесия отсека жидкости $OACBK$.

Рассматриваемый отсек находится под воздействием следующих сил:

1. Собственного веса отсека G с проекцией $G\cos\varphi_a$ по оси OA.

2. Силы давления жидкости P на плоскость проекций, т. е. на проекцию S_a криволинейной поверхности S. На ось OA сила проектируется полностью.

3. Силы давления на боковую поверхность отсека с проекциями на ось OA, равными нулю.

4. Реакции R со стороны криволинейной поверхности, проекцию которой по оси OA обозначим R'_a.

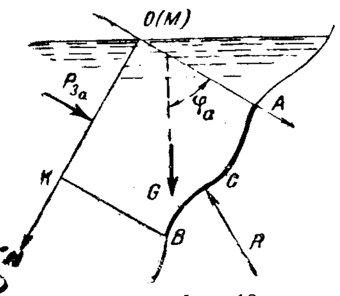
Составим условия равновесия в виде равенства нулю суммы проекций всех сил:

$$P_{S_a} + G\cos\varphi_a + R'_a = 0.$$

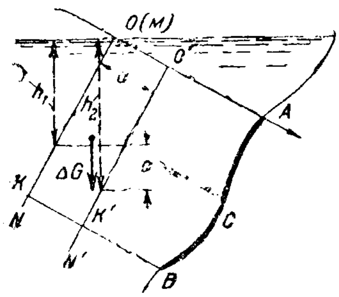
Отсюда, учитывая, что сила давления жидкости на рассматриваемую поверхность $P = -R$, а ее составляющая $P'_a = -R'_a$, запишем

$$P'_a = P_{S_a} + G\cos\varphi_a. \qquad (17)$$

Составляющая давления на криволинейную поверхность по OA таким образом равна сумме: а) давления на проекцию S в плоскости $\perp$ к OA и б) проекции веса отсека по направлению OA.



Фиг. 13



Фиг. 14

Абсолютный вес отсека G в уравнении (17) зависит от расположения плоскости проекций, но легко убедиться, что другой член того же уравнения P_{S_a} с изменением G изменяется соответственно в обратную сторону и в итоге составляющая давления P'_a остается не зависимой от расположения проектирующей плоскости, а зависит лишь от формы и расположения поверхности S.

В самом деле перенесем ось ON в параллельное положение $O'N'$ на расстояние a от прежнего (фиг. 14).

Обозначим площадь поперечного сечения отсека по линии ON на единицу ширины ($\perp$ чертежу) через ω_1. Тогда вес отсека уменьшится на величину $\Delta G = \gamma\omega_1 a$, а проекция веса на $\gamma\omega_1 a\cos\varphi_a$.

Давление же жидкости на проекцию S (тоже на единицу ширины) в положении ON равнялось $P = \gamma\omega_1 h_1$, а в положении $O'N'$ это давление составит $P_2 = \gamma\omega_1 h_2$. Изменение давления произошло на

$$\gamma\omega_1 h_2 - \gamma\omega_1 h_1 = \gamma\omega_1 (h_2 - h_1) = \gamma\omega_1\, a\cos\varphi_a,$$

что как раз компенсирует изменение веса отсека жидкости.

Аналогично выводу, сделанному нами для установления слагающей давления по оси OA, можно вывести и выражение составляющих по другим осям OM и ON в виде

$$P'_m = P_{Sm} + G\cos\varphi_m \text{ для оси } OM;$$

$$P'_n = P_{Sn} + G_n\cos\varphi_n \text{ для оси } ON.$$

Для общего вида криволинейной поверхности ограничимся лишь сделанным уже определением величины отдельных составляющих и перейдем к рассмотрению наиболее часто встречающихся в гидротехнической практике частных случаев криволинейных стенок, а именно поверхностей цилиндрических.

§ 15. Расчет силы давления на цилиндрические поверхности

Рассматривая давление на криволинейную цилиндрическую поверхность, будем искать составляющие горизонтальную и вертикальную. Для этого оси OA дадим направление OX, а ON направим по OZ. Тогда угол φ в предыдущих уравнениях примет следующие частные значения:

$$\varphi_a = \varphi_x = 90°;\ \varphi_n = \varphi_z = 0°;\ \varphi_m = \varphi_y = 90°.$$

Установленные выше уравнения примут вид:

$$P'_a = P'_x = P_{Sx} + G\cos 90° = P_{Sx},$$

$$P'_n = P'_z = P_{Sz} + G\cos 0° = P_{S_z} + G_z,$$

$$P'_m = P'_y = P_{S_y} + G\cos 90° = 0 \text{ (так как } P_{Sy} = 0).$$

Давление свелось лишь к двум составляющим и общая их равнодействующая будет

$$P = \sqrt{(P'_x)^2 + (P'_z)^2}.$$

Так как цилиндрические поверхности имеют большое практическое применение, рассмотрим непосредственно определение давления на такие поверхности.

Рассмотрим некоторую часть цилиндрической поверхности ($ABDC$), принимающую на себя давление жидкости (фиг. 15). При этом учитывать будем лишь манометрическое давление.

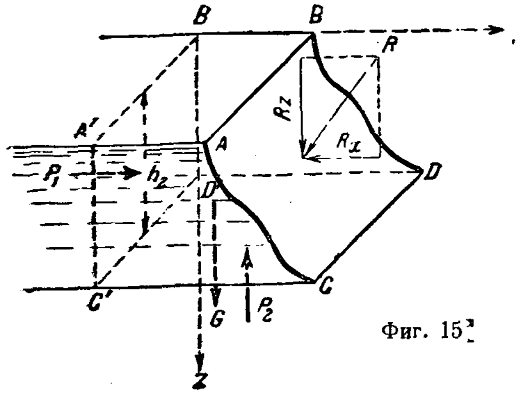
Проведем вертикальную плоскость параллельно AB и выделим отсек жидкости, ограниченный цилиндрической поверхностью, горизонтальными плоскостями сверху и снизу и вертикальными плоскостями с остальных сторон.

Отбросив мысленно окружающую выделенный отсек жидкость и заменив давление ее соответствующими силами для сохранения прежнего относительного покоя, рассмотрим условия равновесия системы.

Обл. библиотека
Основной фонд

На выделенный отсек действуют следующие силы:

1. Давление на боковую плоскость $A'B'D'C'$... $P_1 = \gamma h'_{цт}\omega_1$, где ω_1 — площадь боковой грани, а $h'_{цт}$—глубина погружения ее центра тяжести.



Фиг. 15

2. Давление на нижнюю плоскость $CC'D'D$... $P_2 = \gamma h_2 \omega_2$.

3. Вес выделенного отсека жидкости (с объемом W) $G = \gamma W$.

4. Реакция со стороны цилиндрической поверхности... R_1, равная и прямопротивоположная искомой силе давления P.

Напишем условия равновесия системы упомянутых сил, проектируя их на оси OZ и OX:

$$P_1 + R_x = 0$$

и

$$G - P_2 + R_z = 0,$$

где R_x —проекция реакции R на направление OX;

R_z— проекция R на направление OZ.

Искомая сила давления P на цилиндрическую поверхность направлена под некоторым углом к осям. Силу P можем разложить на две составляющих—горизонтальную P_x и вертикальную P_z, которые должны быть равны и прямопротивоположны соответствующим составляющим реакции R, т. е.

$$P_x = -R_x \text{ и } P_z = -R_z.$$

Имеем

$$P_1 = -R_x$$

и, следовательно,

$$P_1 = P_x, \qquad (18)$$

$$G - P_2 = -R_z = P_z$$

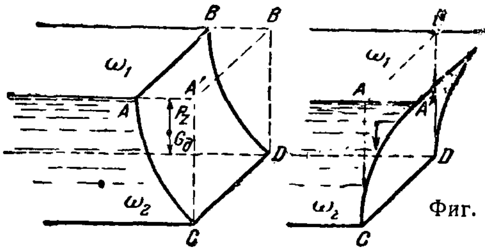
и, следовательно, учитывая, что $P_2 = \gamma h_2 \omega_2$, имеем

$$P_z = G - \gamma h_2 \omega_2.$$

В последнем уравнении член $\gamma h_2 \omega_2$ представляет собой вес параллелепипеда жидкости с основанием ω_2, а вся правая часть уравнения представляет вес жидкого тела с поперечным сечением ACA' (фиг. 16) и длиной по образующей цилиндра AB. Следуя проф. Павловскому, назовем такой объем жидкости „телом давления" и обозначим его в отличие от веса фактического отсека жидкости через $G_д = \gamma h_2 \omega_2 - G$, тогда

$$P_z = -G_д. \qquad (19)$$

Заметим, что величина $G_д$ сама может быть отрицательной, если $\omega_{нижн} < \omega_{верх}$ (фиг. 16).



Фиг. 16

Уравнения (18) и (19) позволяют вычислять отдельно горизонтальную и вертикальную составляющие силы давления на криволинейную поверхность.

Горизонтальная составляющая давления жидкости на цилиндрическую поверхность равна давлению на вертикальную проекцию цилиндрической поверхности:

$$P_x = P_1.$$

Вертикальная составляющая того же давления равна по величине весу „тела давления":

$$P_z = \pm G_д.$$

В большинстве случаев гидротехнической практики при расчетах достаточно знать отдельно каждую составляющую, но вместе с тем отметим, что вычисление всего давления на цилиндрическую поверхность не вызывает затруднений и определяется как всякая равнодействующая двух взаимно перпендикулярных составляющих по формуле

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2}.$$

Направление же силы P определяется формулами

$$\cos(P, x) = \frac{P_x}{P} \text{ и } \cos(P, z) = \frac{P_z}{P}.$$

Задача 7. Отверстие водосбросного шлюза шириной $b = 5$ *м* закрывается сегментным щитом с радиусом $r = 6$ *м*. Ось вращения затвора находится на высоте 1 *м* над уровнем воды. Глубина воды перед щитом $H = 4$ *м*; за щитом воды нет. Определить давление на затвор (фиг. 17).

Найдем отдельно составляющие давления на затвор. Горизонтальная составляющая давления будет

$$P_x = \gamma h_{цт} \cdot \omega = 1 т/м^3 \cdot \frac{4}{2} м \; (4 \cdot 5) \; м^2 = 40 \; т.$$

Для определения вертикальной составляющей найдем равнозначащий ей вес „тела давления" с поперечным сечением, заштрихованным на (фиг. 17)

$$G_{\partial}=\gamma\cdot(\text{площ. } AA''CD)\cdot b.$$

Площадь $AA''CD=\triangle AA''C+$ площ. сегмента $ACD=$

$$=\frac{AA''\cdot A''C}{2}+\frac{1}{2}r^2\left(\frac{\pi\varphi^\circ}{180^\circ}-\sin\varphi\right),$$

$$AA''=KO-CM=\sqrt{AO^2-AK^2}-\sqrt{CO^2-OM^2}=$$

$$=\sqrt{6^2-1^2}-\sqrt{6^2-5^2}=5{,}92-3{,}32=2{,}6\ м,$$

$$\sin\alpha=\frac{CM}{CO}=\frac{3{,}32}{6}=0{,}553,\ \text{что дает угол}\ \alpha=33^\circ 36',$$

$$\sin\beta=\frac{AK}{AO}=\frac{1}{6}=0{,}1667,\ \text{что дает угол}\ \beta=9^\circ 36',$$

$$\alpha+\beta=43^\circ 12'=43{,}2^\circ,$$

$$\varphi=90^\circ-(\alpha+\beta)=90^\circ-43{,}2^\circ=46{,}8^\circ,$$

$$\sin\varphi=0{,}729.$$

Подставляя найденные значения, имеем

$$\text{площ. } AA''CD=\frac{2{,}60\cdot 4}{2}+\frac{1}{2}6^2\left(\frac{3{,}14\cdot 46{,}8}{180}-0{,}729\right)=$$

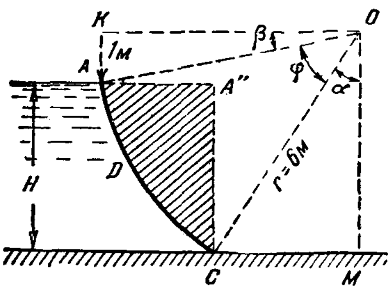
$$=5{,}20+1{,}57=6{,}77\ м^2,$$

$$G_{\partial}=1 т/м^3\cdot 6{,}77 м^2\cdot 5\ м=33{,}85 т=P_z.$$

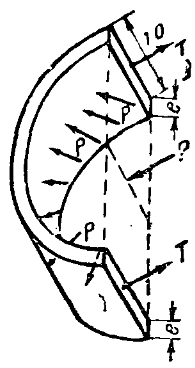
Суммарное давление, как равнодействующая обеих составляющих, равно

$$P=\sqrt{P_x^2+P_z^2}=\sqrt{40^2+33{,}85^2}=52{,}4\ т.$$

Итак, на весь затвор передается давление в 52,4 *т*. Направление силы давления составляет с осью X угол, характеризуемый величиной косинуса, равной $\frac{P_x}{P}=\frac{40}{52{,}4}=0{,}7633$, т. е. угол в $40^\circ 15'$.



Фиг. 17



Фиг. 18

Задача 8. Из стали с допускаемым напряжением $\sigma=1\,500$ *кг/см²* предполагают сделать трубу диаметром $D=1$ *м*, в которой давление может достигать до 500 *м* вод. ст. Рассчитать толщину стенок трубы.

Предположим, что ось трубы направлена вертикально так, что гидростатическое давление p постоянно во всех точках поперечного сечения трубы, и рассмотрим вырезанную из трубы полукруглую полосу шириной 1 *м* (фиг. 18).

Давление на поверхность рассматриваемой полукруглой полосы будет, как уже известно, равно давлению на проекцию этой полосы, т. е. равно давлению на площадь диаметрального сечения:

$$P=p\cdot D\cdot 1.$$

Это давление должно уравновешиваться силой сопротивления стенок трубы рассматриваемой полосы.

Если обозначим сопротивление стенок трубы на метровом отрезке через T, то можно записать

$$T=\frac{pD}{2}.$$

Это соотношение позволяет подсчитать толщину e тонкостенных труб, работающих под гидростатическим давлением p.

В самом деле, полагая силу T равномерно распределенной по толщине e и обозначая через σ допускаемое напряжение в материале стенок, найдем так называемую формулу Мариотта:

$$e=\frac{T}{\sigma}=\frac{pD}{2\sigma}. \tag{20}$$

В условиях данного примера имеем $p=50\ кг/см^2$ и получим

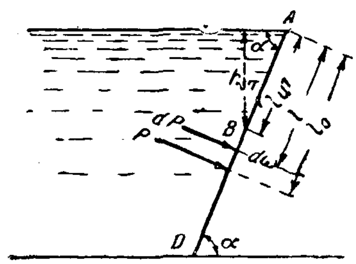
$$e=\frac{50\cdot 1}{2\cdot 1\,500}=0{,}0166\ м=16{,}6\ мм.$$

§ 16. Определение точки приложения равнодействующей сил давления на стенки (центр давления)

В предыдущих параграфах рассмотрены расчеты величины и направления силы давления жидкости на ограничивающие ее стенки. Однако для полного представления о воздействии силы давления на части гидротехнических сооружений недостаточно знать только величину и направление сил, но необходимо еще знать и точку приложения равнодействующей всех элементарных сил давления.

Определим, на каком расстоянии от поверхности жидкости находится точка приложения равнодействующей, которую (точку) будем в дальнейшем называть **ц е н т р о м д а в л е н и я**.

Пусть $A-D$ представляет след смоченной части стенки ω, перпендикулярной к плоскости



Фиг. 19

чертежа (фиг. 19) и воспринимающей давление жидкости, равнодействующая которого P проходит через искомый центр давления.

Обозначим:

dP — элементарная сила давления жидкости на бесконечно малую площадку $d\omega$ при точке B;

$l_{цт}$ — расстояние от уровня жидкости до центра тяжести смоченной площади стенки, считая по наклону стенки;

l_0 — то же до центра давления, где приложена равнодействующая P всех элементарных сил dP;

l — переменная величина расстояния до отдельных элементарных сил dP

и будем исходить из следующего положения теоретической механики: момент равнодействующей силы относительно любой оси равен сумме моментов сил составляющих относительно той же оси.

Ось моментов возьмем перпендикулярной к чертежу в точке A.

Имеем

$$Pl_0 = \int l dP.$$

Учитывая, что $P = \gamma h_{цт}\omega$, а $dP = \gamma h d\omega$, перепишем уравнение моментов в виде

$$\gamma h_{цт}\omega l_0 = \gamma \int h l d\omega.$$

Заменим в этом уравнении переменную величину l через $l_{цт}+\lambda$, где λ определяет расстояние бесконечно малой площадки $d\omega$ от линии центра тяжести, причем λ является величиной переменной, положительной для площадок $d\omega$ ниже линии центра тяжести и отрицательной для вышележащих.

Тогда

$$\gamma h_{цт}\omega l_0 = \gamma \int h\,(l_{цт}+\lambda)\,d\omega.$$

Так как $h = l\sin\alpha = (l_{цт}+\lambda)\sin\alpha$, а $h_{цт} = l_{цт}\sin\alpha$, то, подставляя их значения и сокращая на γ и $\sin\alpha$, получим

$$l_{цт}\omega l_0 = \int(l_{цт}+\lambda)^2 d\omega = l_{цт}^2\int_\omega d\omega + 2l_{цт}\int_\omega \lambda d\omega + \int_\omega \lambda^2 d\omega;$$

$\int_\omega \lambda d\omega$ равен нулю как сумма моментов всех элементов площади относительно оси, проходящей через центр тяжести, и потому

$$l_{цт}\omega l_0 = l_{цт}^2\omega + 0 + \int_\omega \lambda^2 d\omega$$

или

$$l_{цт}\omega l_0 = l_{цт}^2\omega + I_0,$$

где $I_0 = \int_\omega \lambda^2 d\omega$ обозначает момент инерции площади относительно центральной оси, проходящей через центр тяжести смоченной фигуры.

Из последнего выражения находим уравнение

$$l_0 = l_{цт} + \frac{I_0}{\omega l_{цт}}, \tag{21}$$

позволяющее определять местоположение центра давления. Уравнение (21) показывает, что точка приложения равнодействующей сил давления жидкости — центр давления — всегда расположена ниже центра тяжести на величину (считая по наклону стенки) отношения момента инерции I_0 площади относительно нейтральной оси к статическому моменту $\omega l_{цт}$ той же площади относительно линии пересечения свободной поверхности с плоскостью стенки.

Момент инерции I_x относительно произвольной оси, параллельной нейтральной, как известно, выражается: $I_x = I_0 + \omega l_{цт}^2$, и поэтому уравнение (21) может применяться и в виде

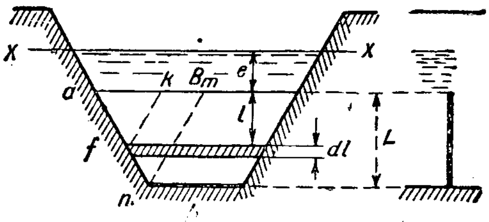
$$l_0 = \frac{I_x}{\omega l_{цт}}, \tag{22}$$

где согласно принятым ранее обозначениям I_x — момент инерции смоченной площади относительно линии пересечения плоскости стенки со свободной поверхностью жидкости.

§ 17. Типичные случаи давления

Остановимся на практическом приложении уравнений (21) и (22) для стенок, наиболее часто встречающихся в гидротехнике.

Рассмотрим трапецоидальную стенку с верхним основанием B, нижним b и высотой L, погру-



Фиг. 20

женную под уровень жидкости (находящейся в относительном покое) на глубину e (фиг. 20). Определим I_x — момент инерции площади трапеции относительно оси XX, лежащей на свободной поверхности жидкости, как интеграл моментов инерции отдельных элементарных площадок шириной x и бесконечно малой высотой dl на расстоянии l от верхнего основания:

$$I_x = \int (x dl)(l+e)^2. \tag{23}$$

Для выполнения интегрирования нужно выразить x функцией от l, что можно сделать из соотношения элементов треугольников amn и akf.

Имеем:

$$am = B - b;\ ak = B - x,$$

откуда

$$\frac{B-b}{B-x} = \frac{L}{l}$$

и

$$x = B - (B-b)\frac{l}{L}.$$

Подставляя найденное значение x в уравнение момента инерции (23), получим

$$I_x = \int\left[B - (B-b)\frac{l}{L}\right](l+e)^2 dl$$

с переменной величиной l, изменяющейся в данном случае от $l=0$ до $l=L$. Интегрируя в упомянутых пределах, найдем

$$I_x = B\int_0^L (l+e)^2 dl - \frac{B-b}{L}\int_0^L l(l+e)^2 dl$$

или окончательно

$$I_x = \frac{BL}{3}(3e^2+3eL+L^2) - \frac{L(B-b)}{12}(6e^2+ +8eL+3L^2).$$

Так как момент инерции вычислен нами относительно оси вне центра тяжести, то следует пользоваться для нахождения l_0 уравнением (22), в знаменатель которого входят значения ω — площадь фигуры и $l_{цт}$ — расстояние от уровня жидкости до центра тяжести.

Для трапеции

$$\omega = \frac{B+b}{2} L$$

расстояние до центра тяжести, считая от большого основания,

$$l'_{цт} = \frac{B+2b}{B+b} \cdot \frac{L}{3},$$

а так как большое основание отстоит в данном случае от уровня жидкости на величину e и, следовательно, $l_{цт} = l'_{цт} + e$, то уравнение (22) напишется так:

$$l_0 = \frac{I_x}{\omega l_{цт}} = \frac{\frac{BL}{3}(3e^2+3eL+L^2) - \frac{L(B-b)}{12}(6e^2+8eL+3L^2)}{(B+b)\frac{L}{2}\left(\frac{B+2b}{B+b}\cdot\frac{L}{3}+e\right)}. \quad (24)$$

Рассмотренный нами случай трапецоидальной стенки, погруженной под уровень, практически не интересен и уравнение это выведено нами лишь потому, что от него удобно (без специальных вычислений) перейти на ряд практически часто применяемых стенок.

Из таких частных случаев, обобщаемых уравнением (24), рассмотрим:

1. Трапецоидальную стенку с большим основанием в уровень со свободной поверхностью. Принимая в уравнении (24) $e=0$, получим расчетное уравнение для центра давления

$$l_0 = \frac{L}{2} \cdot \frac{B+3b}{B+2b}.$$

2. Прямоугольную стенку в уровень со свободной поверхностью. Рассматриваем прямоугольник как трапецию с равными основаниями и поэтому, полагая в уравнении (24) $B=b$ и $e=0$, найдем для рассматриваемого случая

$$l_0 = \frac{2}{3} L.$$

Центр давления может быть определен и из эпюры давления.

Так как центр давления есть точка приложения равнодействующей параллельных элементарных сил давлений, то ясно, что эта равнодействующая должна проходить через центр тяжести эпюры давления.

В рассматриваемом случае эпюра представлена прямоугольным треугольником, и следовательно, центр давления (центр тяжести эпюры) расположен на расстоянии $\frac{2}{3}L$ от вершины треугольника.

3. Прямоугольную стенку с верхним основанием на глубине e. Согласно предыдущему, подставляя в (24) значения $B=b$, имеем

$$l_0 = e + \frac{L}{3} \cdot \frac{3e+2L}{2e+L}.$$

4. Треугольную стенку (вершиной вниз) в уровень со свободной поверхностью. Рассматриваем треугольник как трапецию с меньшим основанием, равным нулю. Тогда, полагая $b=0$ и $e=0$, находим по (24)

$$l_0 = \frac{L}{2}.$$

5. Треугольную стенку (вершиной вниз) с верхним основанием на глубине e. Полагая $b=0$, находим

$$l_0 = e + \frac{L}{2} \cdot \frac{L+2e}{L+3e}.$$

Напомним, что во всех формулах типа (24) значение L измеряется по смоченной стенке.

Кроме рассмотренных частных случаев уравнения (24) выведем расчетные уравнения для определения центра давления при стенках: а) круглой, погруженной в жидкость на глубину e над верхним краем и б) полукруглой с диаметром на уровне жидкости.

а) Стенка круглая, столб жидкости над верхним краем—e (фиг. 21). Для любого бесконечно малого элемента площади круга $d\omega$

имеем выражение момента инерции относительно оси XX

$$I_{0(x)}=d\omega x^2,$$

тоже относительно оси YY

$$I_{0(y)}=d\omega y^2.$$

Легко заметить, что полярный момент инерции I_p по отношению к полюсу 0, равный

$$I_p=d\omega\rho^2,$$

может быть выражен при замене ρ^2 его значением (x^2+y^2) в виде

$$I_p=I_x+I_y.$$

При расчете моментов инерции для всего круга, очевидно, что $I_x=I_y$, и тогда $I_p=2I_x$ или

$$I_x=\frac{1}{2}I_p. \qquad (25)$$

Найдем I_p— полярный момент площади круга.

Обозначим:

$OA=\rho$, бесконечно малый отрезок $AB=d\rho$; бесконечно малая дуга $AA'=\rho d\varphi$ и площадь бесконечно малого элемента $ABB'A'=\rho d\rho d\varphi$.

Полярный момент инерции для этого бесконечно малого элемента площади выразится как произведение этой площади на квадрат ее расстояния ρ от полюса в виде $\rho^3 d\rho d\varphi$.

По найденному моменту инерции для оси, проходящей через центр тяжести круга, рассчитаем положение центра давления, пользуясь уравнением (21).

Имеем для рассматриваемого круга

$$l_0=r+e+\frac{\pi r^4}{4\pi r^2(r+e)}=e+r+\frac{r^2}{4(r+e)}. \qquad (26)$$

б) Стенка полукруглая с диаметром на уровне жидкости (фиг. 22). Центр тяжести полукруга, как известно, находится на среднем радиусе на расстоянии $l_{цт}=\frac{4r}{3\pi}$ от центра.

Момент инерции площади полукруга относительно диаметра должен составить половину экваториального момента I_0 всего круга, т. е. для полукруга

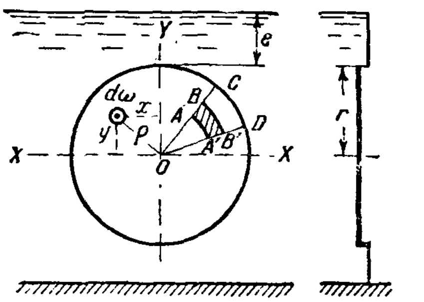
$$I_x=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi r^4}{4}\right).$$

Момент инерции полукруга обозначен I_x, а не I_0, так как для полукруга ось OO не проходит через центр тяжести; по этой же причине для нахождения l_0 воспользуемся уравнением (22), а не (21).

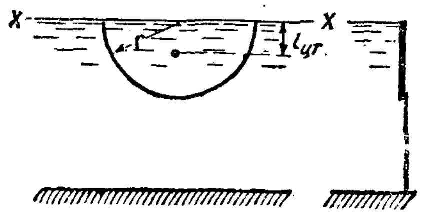
Найдем

$$l_0=\frac{I_x}{\omega l_{цт}}=\frac{\pi r^4\cdot 2\cdot 3\pi}{8\cdot\pi r^2 4r}=\frac{3}{16}\pi r.$$

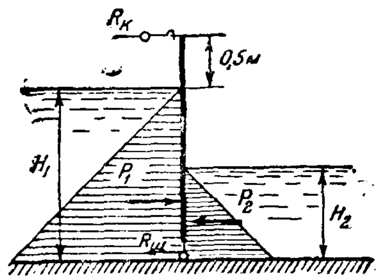
В табл. 4 на стр. 23 и 24 приведены формулы для вычисления манометрического давления и координат центра давления для различных плоских фигур.



Фиг. 21



Фиг. 22



Фиг. 23

Интегрируя записанное выражение элементарного момента инерции в пределах всей площади круга (т. е. при непрерывном изменении ρ от $\rho=0$ до $\rho=r$, а φ от $\varphi=0$ до $\varphi=2\pi$), получим полярный момент инерции круга

$$I_p=\int\limits_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\int\limits_{\rho=0}^{\rho=r}\rho^3 d\rho d\varphi=\frac{\pi r^4}{2}$$

или на основании (25)

$$I_x=\frac{1}{2}I_p=\frac{\pi r^4}{4}.$$

Задача 9. Прямоугольный щит шириной $b=2$ *м* имеет горизонтальную ось у дна сооружения, а вверху поддерживается крюками. Перед щитом глубина воды $H_1=4$ *м* и за щитом $H_2=2$ *м*. Определить реакцию шарнира $R_ш$ и реакции крюков $R_к$ (фиг. 23).

Шарнир и крюки воспринимают на себя давление жидкости на щит слева P_1 и справа P_2.

Определяем величину сил давления и точки их приложения с каждой стороны щита:

$$P_1=\gamma h'_{цт}\omega_1=1\ т/м^3\ \frac{H_1}{2}\ м(H_1 b)\ м^2=1\cdot 2\cdot 8=16\ т.$$

$$l'_0=\frac{2}{3}L_1=\frac{2}{3}H_1=\frac{2}{3}\cdot 4=2{,}67\ м,$$

считая от уровня жидкости или $4-2{,}67=1{,}33$ *м* от дна.

Таблица 4

ФОРМУЛЫ
для вычисления манометрического давления и координат центра давления для различных плоских фигур

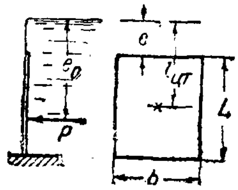
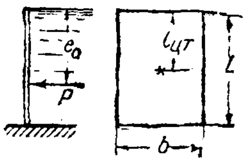
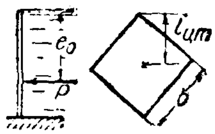
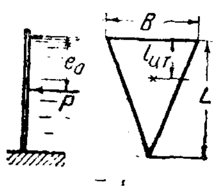
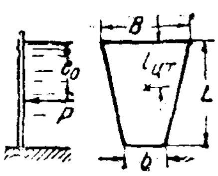
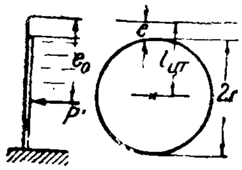
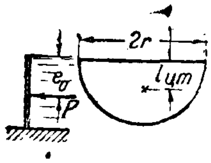
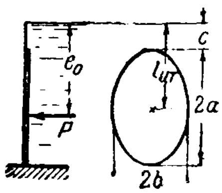
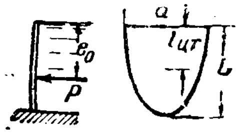
№ по пор.	Наименование фигуры	Схема	Площадь фигуры	Глубина погружения центра тяжести	Сила давления жидкости на фигуру	Глубина погружения центра давления
1	Прямоугольник		bL	$e+\frac{L}{2}$	$\gamma bL\left(e+\frac{L}{2}\right)$	$e+\frac{L}{3}\cdot\frac{2L+3e}{L+2e}$
2	Прямоугольник		bL	$\frac{L}{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\gamma bL^2$	$\frac{2}{3}\cdot L$
3	Квадрат		b^2	$\frac{1}{2}b\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\gamma b^3$	$\frac{7\sqrt{2}}{12}\cdot b$
4	Равнобедренный треугольник		$\frac{1}{2}BL$	$\frac{L}{3}$	$\frac{1}{6}\cdot\gamma BL^2$	$\frac{1}{2}L$
5	Трапеция		$\frac{1}{2}L(B+b)$	$\frac{L}{3}\,\frac{2b+B}{b+B}$	$\frac{1}{6}\gamma L^2(2b+B)$	$\frac{L}{2}\,\frac{3b+B}{2b+B}$

Таблица 4 (продолжение)

№ по пор.	Наименование фигуры	Схема	Площадь фигуры	Глубина погружения центра тяжести	Сила давления жидкости на фигуру	Глубина погружения центра давления
6	Круг		πr^2	$e+r$	$\gamma\pi r^2(r+e)$	$e+r+\dfrac{r^2}{4(r+e)}$
7	Полукруг		$\dfrac{1}{2}\pi r^2$	$\dfrac{4}{3}\dfrac{r}{\pi}$	$\dfrac{2}{3}\gamma r^3$	$\dfrac{3}{16}\pi r$
8	Эллипс		πab	$a+c$	$\gamma\pi ab(a+c)$	$a+c+\dfrac{a^2}{4(a+c)}$
9	Парабола		$\dfrac{2}{3}aL$	$\dfrac{2}{5}L$	$\dfrac{4}{15}\gamma aL^2$	$\dfrac{4}{7}L$

Соответственно имеем

$$P_2 = \gamma h''_{цт}\omega_2 = 1\ т/м^3\ \frac{H_2}{2}\ м(H_2 b)\ м^2 = 4\ т,$$

$l''_0 = \frac{2}{3} H_2 = \frac{2}{3} 2 = 1{,}33$ м от уровня воды справа или 0,67 м от дна.

Давления на щит P_1 и P_2 направлены перпендикулярно плоскости щита в противоположные стороны и щит находится под действием их равнодействующей $P = P_1 - P_2 = 16\ т - 4\ т = 12\ т$, которую и должны принять на себя шарнир и крюки:

$$R_ш + R_к = 12\ т.$$

Для расчета отдельно каждой реакции составим уравнение моментов сил.

Из уравнения моментов относительно шарнира

$$P_1 \frac{H_1}{3} - R_к(H_1 + 0{,}5) - P_2 \frac{H_2}{3} = 0$$

определим $R_к = 4{,}14\ т$.

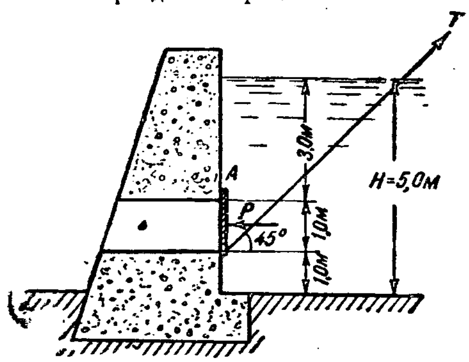
Из уравнения моментов относительно крюка

$$P_1\left(H_1 + 0{,}5 - \frac{H_1}{3}\right) - P_2\left(H_1 + 0{,}5 - \frac{H_2}{3}\right) - R_ш(H_1 + 0{,}5) = 0$$

определим $R_ш = 7{,}86\ т$.

Проверяя, получаем: $R_к + R_ш = 4{,}14 + 7{,}86 = 12\ т$.

Задача 10. Определить, с какой силой T необходимо тянуть трос, прикрепленный к нижней кромке прямоугольного затвора размерами $2 \times 1\ м^2$, закрывающего отверстие в плотине при данных фиг. 24.



Фиг. 24

Определим давление P на затвор и точку его приложения:

1) $P = \gamma\omega h_{цт} = 1\ т/м^3 \cdot 2\ м^2 \cdot 3{,}5\ м = 7\ т,$

2) $l_0 = e + \frac{L}{3} \cdot \frac{3e + 2L}{2e + L} = 3 + \frac{1}{3} \cdot \frac{9 + 2}{6 + 1} = 3{,}524$ м

от уровня воды или 0,524 м от шарнира A.

Составим уравнение моментов сил относительно оси A:

$$P(l_0 - 3) = T \cos 45° h_2,$$

$$7 \cdot 0{,}524 = T \cdot 0{,}7071 \cdot 1,$$

откуда $T = 5{,}19\ т$.

§ 18. Закон Архимеда. Плавание тел

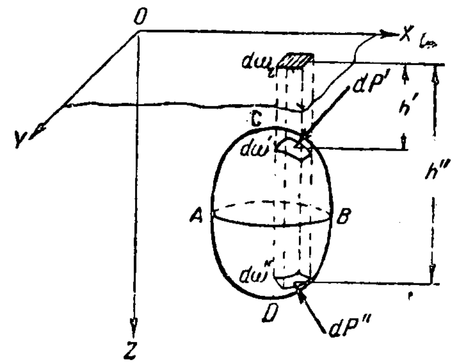
Задача о плавании тел, находящихся в равновесии в покоящейся жидкости, сводится к определению:

1) пловучести тела, погруженного в жидкость;

2) остойчивости, т. е. способности плавающего тела восстанавливать после крена свое нормальное положение в жидкости.

Подсчитаем величину давления жидкости на поверхность погруженного в нее тела.

Предположим для простоты, что поверхность тела пересекается с любой прямой только в двух точках, т. е. не имеет вогнутости (фиг. 25). Разобьем поверхность тела на элементарные площадки путем сечения вертикальными плоскостями, параллельными координатным плоскостям.



Фиг. 25

Тогда проекции на вертикальную ось элементарных давлений, действующих на две площадки $d\omega'$ и $d\omega''$, вырезаемые на поверхности тела какой-либо из полученных призм, будут равны

$$(dP')_z = p' d\omega' \cos(dP', z) = p' d\omega'_z,$$

$$(dP'')_z = -p'' d\omega'' \cos(dP'', z) = -p'' d\omega''_z,$$

где p' и p'' — давления в центрах тяжести площадок $d\omega'$ и $d\omega''$.

Так как

$$p' = \gamma h' \text{ и } p'' = \gamma h'',$$

имеем

$$(dP')_z = \gamma h' d\omega'_z; \qquad (dP'')_z = -\gamma h'' d\omega''_z.$$

Отсюда проекция на ось z результирующего давления на поверхность тела будет

$$P_z = \gamma \int_{\omega'_z} h' d\omega'_z - \gamma \int_{\omega''_z} h'' d\omega''_z = -\gamma\ (W' - W'') = \gamma W,$$

где W — объем тела, W' и W'' — объемы призм, имеющих в качестве нижних оснований верхнюю и нижнюю поверхности тела ACB и ADB, а в качестве верхнего — проекцию поверхности тела на плоскость XOY.

Что касается проекций на остальные две оси, то, разбив поверхность тела на элементарные площадки при помощи горизонтальных призм, найдем

$$P_x = \gamma \int_{\omega'_x} h' d\omega_x - \gamma \int_{\omega''_x} h'' d\omega''_x = 0,$$

$$P_y = \gamma \int_{\omega'_y} h' d\omega'_y - \gamma \int_{\omega''_y} h'' d\omega''_y = 0.$$

Отсюда приходим к выводу, что результирующая давления жидкости на погруженное внутри нее тело равна по величине весу жидкости в объеме погруженного тела и направлена по вертикали снизу вверх и как следствие получаем известный з а к о н А р х и м е д а.

Точку приложения сил давления жидкости по аналогии с ранее приведенным наименованием можно назвать ц е н т р о м д а в л е н и я погруженного в жидкость тела.

Пловучесть тел. Если вес погруженного в жидкость тела G менее давления $P=\gamma W$, испытываемого им со стороны жидкости $G<P$, то тело всплывает, если $G>P$, тело тонет, если $G=P$, тело плавает.

В этих случаях центр давления обычно называют ц е н т р о м в о д о и з м е щ е н и я, а вес жидкости в погруженном объеме тела — в о д о и з м е щ е н и е м.

Для равновесия плавающего тела необходимо, чтобы сила его тяжести и сила давления на него жидкости были направлены по одной прямой линии, т. е. чтобы центр тяжести плавающего тела находился на одной отвесной линии с центром водоизмещения. Это положение вытекает из общих условий равновесия.

Зная водоизмещение плавающего тела или судна, можно вычислить так называемую о с а д к у данного судна, т. е. величину погружения наинизшей точки поверхности судна, а также определить его подъемную силу (нагрузку).

Плоскость сечения судна свободной поверхностью называется п л о с к о с т ь ю п л а в а н и я, а линия сечения — в а т е р л и н и е й. Вертикальная ось, нормальная к плоскости плавания и проходящая через центр тяжести тела, называется о с ь ю п л а в а н и я ($O-O$ на фиг. 26).

Точка пересечения оси плавания с направлением равнодействующей сил давления жидкости на плавающее тело при крене называется м е т а ц е н т р о м.

Таким образом можно отметить три характерных точки (фиг. 26), расположенных на оси плавания:

1) центр тяжести C;
2) центр водоизмещения D;
3) метацентр M.

Первый из этих центров при крене и качке судна не меняет своего положения по отношению к телу судна, второй — центр водоизмещения, т. е. центр тяжести объема подводной части судна в зависимости от крена меняет свое положение, так как при крене часть объема тела обсыхает, часть погружается на большую сравнительно с прежней глубину и очертание объема вытесняемой жидкости меняется.

Положение метацентра можно считать не зависящим от крена при небольших (не$>15°$) углах крена.

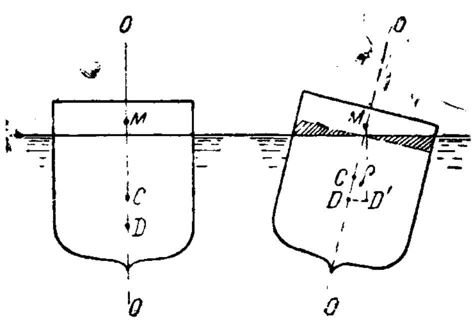
При небольших кренах центр водоизмещения D перемещается по дуге круга, описанной из метацентра радиусом ρ (фиг. 26), называемым м е т а ц е н т р и ч е с к и м р а д и у с о м. При бо́льших чем $15°$ углах крена центр давления перемещается по кривой, отличной от дуги круга, и метацентр поэтому не остается в одной точке, а перемещается по некоторой другой кривой в противоположную сторону. Как известно из диференциальной геометрии, первая кривая называется о б е р т к о й к р и в о й, вторая и н в о л ь в е н т о й.

§ 19. Величина метацентрического радиуса

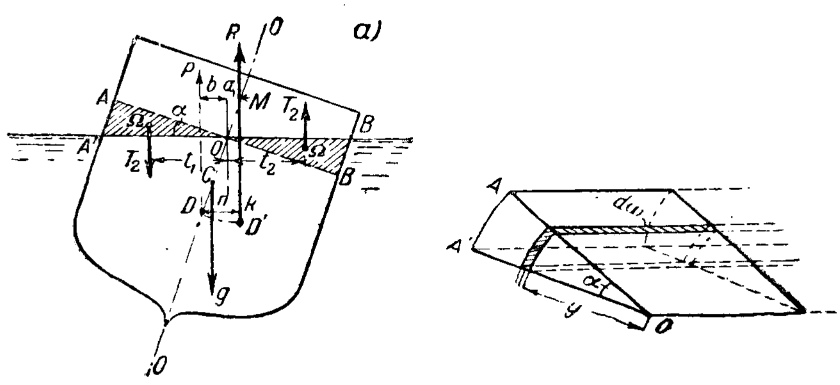
Чтобы определить величину метацентрического радиуса ρ, воспользуемся теоремой моментов. Для этого рассмотрим прежде всего силы, действующие на плавающее судно при крене (фиг. 27). Последний происходит при наличии трех сил:

1) силы давления жидкости на судно $P=\gamma W=G$, приложенной к центру водоизмещения D и направленной вертикально вверх;

2) веса жидкости в объеме обсохшей части судна AOA'; этот вес T_1, очевидно, равен γW_1, где W_1 — объем обсохшей части судна; сила T_1 приложена в центре тяжести этого объема и направлена вертикально вниз;



Фиг. 26



Фиг. 27

3) веса жидкости в объеме погружающейся при крене части судна BOB'; величина этого веса T_2 равна γW_2, где W_2 — объем части BOB', приложена в центре тяжести погружающегося объема и направлена вертикально вверх.

В результате действия этих сил центр давления D переместится из точки D в точку D', через которую и пройдет равнодействующая R, равная ввиду параллельности этих сил их алгебраической сумме

$$R=P-T_1+T_2=P,$$

так как легко видеть, что сила T_1 равна силе T_2.

Составим теперь уравнение моментов относительно точки O, через которую проходит продольная ось плоскости плавания

$$-Ra=Pb-t_1T_1-t_2T_2,$$

где a, b, t_1 и t_2 — плечи, показанные на фиг. 27.

Подставляя вместо $R=P, T_1$ и T_2 их значения, найдем

$$-\gamma Wa=\gamma Wb-\gamma W_1t_1-\gamma W_2t_2,$$

и так как

$$W_1=W_2;\ t_1=t_2,$$

то имеем после сокращения на γ

$$W(a+b)=2W_1t_1.$$

Обозначая $a+b=n$, где $n=\rho\sin\alpha$, как это видно из треугольника MDK, получим

$$W\rho\sin\alpha=2W_1t_1.$$

Но величина W_1t_1 есть не что иное, как статический момент объема W_1 относительно оси, проходящей через точку O. Этот момент равен (фиг. 27 b)

$$W_1t_1=\int\limits_{W_1}ydW_1=\frac{1}{2}\int\limits_{\omega}y^2\alpha d\omega=\frac{I_0}{2}\alpha,$$

где $I_0=\int\limits_{\omega}y^2d\omega$ — момент инерции плоскости плавания относительно продольной (серединной) оси, проходящей через точку O, α — угол крена.

Подставляя найденное выражение для статического момента в полученное уравнение, находим

$$W\rho\sin\alpha=I_0\alpha,$$

откуда

$$\rho=\frac{\alpha I_0}{\sin\alpha\, W}.$$

При малых углах крена $\frac{\alpha}{\sin\alpha}\approx 1$ и мы окончательно имеем

$$\rho=\frac{I_0}{W}$$

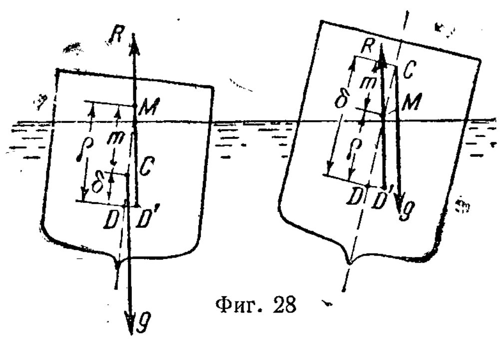
— *величина метацентрического радиуса ρ равна моменту инерции плоскости плавания I_0 относительно продольной оси плавания, деленному на водоизмещение судна.*

§ 20. Условия остойчивости плавающего тела

Если пара сил: вес судна G и результирующая R сил, действующих со стороны воды, во время крена стремится уничтожить крен, то положение судна называется остойчивым и, наоборот, если эта пара сил стремится увеличить крен, то судно неостойчиво. На фиг. 28 изображен как тот, так и другой случай. Из этих чертежей видно, что для обеспечения остойчивости плавающего тела необходимо, чтобы расстояние δ между центром тяжести и центром водоизмещения было менее длины метацентрического радиуса ρ или

$$\delta<\frac{I_0}{W}. \tag{27}$$

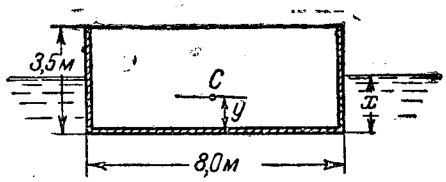
Далее очевидно, что чем выше расположен метацентр M над центром тяжести C, т. е. чем больше величина расстояния m (фиг. 28), которая называется **метацентрической высотой**, тем более обеспечена остойчивость.



Фиг. 28

Большая метацентрическая высота делает, однако, судно валким, неудобным для перевозки пассажиров. Обычно величина m берется в пределах 0,3 — 1,2 *м*.

Задача 11. Определить остойчивость железной баржи в порожнем и груженом состоянии. После загрузки — возвышение ее борта над водой 0,5 *м*. Поперечные размеры баржи указаны на фиг. 29, ее длина 60 *м*, толщина стенок — 0,01 *м*, груз — мокрый песок (уд. вес 2), уд. вес железа 7,8. Вода пресная.



Фиг. 29

Для упрощения расчета положим, что: 1) баржа имеет прямоугольное очертание; 2) вес переборок и других конструктивных частей баржи условно отнесен к весу ее стенок.

Прежде всего подсчитаем вес баржи:

Объем днища	$8\cdot60\cdot0{,}01=4{,}8$	*м*³
„ бортов	$2\cdot3{,}49\cdot60\cdot0{,}01=4{,}188$	*м*³
„ передней и задней стенок	$2\cdot8\cdot3{,}49\cdot0{,}01=0{,}558$	*м*³
Общий объем	9,546	*м*³

Вес баржи $G=9{,}546\cdot7{,}8=74{,}46$ *т*.

В таком случае осадка x баржи может быть найдена из равенства

$$G = \gamma W_1, \text{ где } \gamma = 1, \ W = 8 \cdot 60 \cdot x = 480\ x,$$

откуда

$$x = \frac{74{,}46}{480} = 0{,}155 \text{ м}.$$

Для определения расстояния δ между центрами тяжести и давления надо найти возвышение этих центров над нижней поверхностью днища баржи.

Для нахождения высоты расположения центра тяжести баржи воспользуемся уравнением статических моментов. Статический момент всего объема тела относительно некоторой оси равен сумме статических моментов частичных объемов, образующих данное тело относительно той же оси.

Статический момент всей баржи 9,546 y, где y—возвышение центра тяжести баржи над нижней поверхностью ее днища (фиг. 29).

Статический момент днища . . . . $= 4{,}80 \cdot 0{,}005 = 0{,}024$ $м^3$

Статический момент бортов . . . . $= 4{,}188\left(\frac{3{,}49}{2} + 0{,}01\right) = 7{,}35$ $м^3$

Статический момент передней и задней стенок . . . . $= 0{,}558\left(\frac{3{,}49}{2} + 0{,}01\right) = 0{,}979$ $м^3$

Сумма статических моментов $= 8{,}353$

Следовательно, $9{,}546 \cdot y = 8{,}353$, откуда $y = \frac{8{,}353}{9{,}546} = 0{,}875$ м.

Возвышение центра давления над той же поверхностью составляет в данном случае половину величины осадки, т. е.

$$\frac{x}{2} = \frac{0{,}155}{2} = 0{,}078 \text{ м}.$$

Расстояние между центром тяжести и центром давления

$$\delta = y - \frac{x}{2} = 0{,}875 - 0{,}078 = 0{,}797 \text{ м}.$$

Момент инерции плоскости плавания баржи относительно продольной ее оси составляет

$$I_0 = \frac{bh^3}{12} = \frac{60 \cdot 8^3}{12} = 2\,560 \text{ м}^4.$$

Так как водоизмещение баржи $W = G = 74{,}46$ $м^3$, то

$$\rho = \frac{I_0}{W} = \frac{2\,560}{74{,}46} = 34{,}4 \text{ м}.$$

Имеем $\delta < \frac{I_0}{W}$, т. е. $0{,}797 < 34{,}4$; следовательно, условие (27) остойчивости баржи в порожнем ее состоянии обеспечено. Метацентрическая высота $m = \rho - \delta = 34{,}4 - 0{,}797 = 33{,}603$ м, что обеспечивает большую остойчивость баржи. Обусловлено это, с одной стороны, большим моментом инерции, а с другой стороны — малым водоизмещением.

Проверим теперь остойчивость баржи в груженом состоянии.

Прежде всего определим количество песка, которое можно погрузить в данную баржу при условии, чтобы ее борта возвышались на полметра над водой, т. е. чтобы осадка равнялась 3 м.

Если обозначить вес песка через G_1, то $\gamma W = G + G_1$, где G — вес баржи. Следовательно, $1 \cdot 8 \cdot 60 \cdot 3 = 74{,}46 + G_1$, откуда

$$G_1 = 1\,440 - 74{,}46 = 1\,365{,}54 \text{ т}.$$

Считая вес 1 $м^3$ мокрого песка равным двум тоннам, получим объем песка в барже

$$\frac{1\,365{,}54}{2} = 682{,}77 \text{ м}^3.$$

Высота слоя песка в барже

$$\frac{682{,}77}{7{,}98 \cdot 59{,}98} = 1{,}43 \text{ м}.$$

Возвышение z центра тяжести баржи, груженной песком, над нижней поверхностью ее днища определится из уравнения статических моментов, а именно:

$$1\,440\,z = 74{,}46 \cdot 0{,}872 + 1\,365{,}54\left(\frac{1{,}43}{2} + 0{,}01\right),$$

откуда

$$z = \frac{1\,054{,}84}{1\,440} = 0{,}732 \text{ м}.$$

Возвышение центра давления над той же поверхностью равно в данном случае половине величины осадки, т. е. 1,5 м.

Так как центр тяжести лежит ниже центра давления ($0{,}732 < 1{,}5$), то остойчивость обеспечена.

ГЛАВА II
КИНЕМАТИКА ЖИДКОСТИ

§ 21. Понятие о движении жидкости как непрерывной деформации сплошной материальной среды

Движение жидкости будем рассматривать как движение совокупности материальных частиц, из которых она состоит.

Теоретическая гидромеханика исходит из предположения, что тот или иной изучаемый объем жидкости при своем движении остается состоящим из одних и тех же материальных частиц. Иначе говоря, теоретическая гидромеханика рассматривает движение жидкости как непрерывную и последовательную деформацию сплошной материальной среды и потому математически выражает все характеристики движения (кинематические и динамические) как непрерывные функции координат и времени.

Обозначим для какой-либо точки рассматриваемого объема жидкости компоненты скорости на оси координат соответственно

$$u_x,\ u_y,\ u_z$$

и плотность жидкости в той же точке через ρ.

Тогда согласно изложенному можно записать:

$$\left.\begin{aligned} u_x &= f_1(x, y, z, t), \\ u_y &= f_2(x, y, z, t), \\ u_z &= f_3(x, y, z, t) \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

и

$$\rho = f_4(x, y, z, t).$$

В данном курсе мы ограничиваемся изучением движения лишь несжимаемой жидкости[1]. Поэтому плотность жидкости во всех точках пространства будет приниматься постоянной ($\rho=\mathrm{const}$) и основной задачей явится установление вида функций, представленных уравнениями (28).

Общий случай движения жидкости, когда кинематические характеристики являются функциями не только координат, но и времени, называют н е у с т а н о в и в ш и м с я движением.

Уравнения (28) характеризуют именно такое движение.

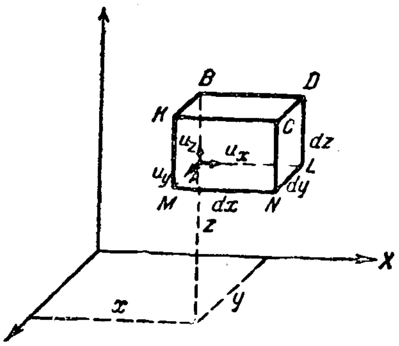
Движение жидкости, при котором кинематические характеристики приобретают устойчивые во времени значения и являются функциями только координат пространства, называют у с т а н о в и в ш и м с я движением.

Уравнения установившегося движения легко получить из (28), сделав их не зависимыми от времени, а именно:

$$\left.\begin{aligned} u_x&=\varphi_1(x, y, z),\\ u_y&=\varphi_2(x, y, z),\\ u_z&=\varphi_3(x, y, z). \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

§ 22. Деформация элементарного параллелепипеда движущейся жидкости. Теорема Коши-Гельмгольца

Пусть жидкость, находящаяся в движении, отнесена к системе прямоугольных координат. В некоторый момент времени выделим из массы жидкости элементарный параллелепипед (фиг. 30) с ребрами dx, dy, dz, параллельными осям координат. Обозначим, как и ранее, компоненты скорости движения жидкости по осям координат в угловой точке параллелепипеда $A\,(x, y, z)$ соответственно через u_x, u_y, u_z. Вследствие непрерывности функции скоростей компоненты скорости в точке C, имеющей координаты $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, будут равны



Фиг. 30

$$\left.\begin{aligned} u_{x(c)}&=u_x+\frac{\partial u_x}{\partial x}dx+\frac{\partial u_x}{\partial y}dy+\frac{\partial u_x}{\partial z}dz,\\ u_{y(c)}&=u_y+\frac{\partial u_y}{\partial x}dx+\frac{\partial u_y}{\partial y}dy+\frac{\partial u_y}{\partial z}dz,\\ u_{z(c)}&=u_z+\frac{\partial u_z}{\partial x}dx+\frac{\partial u_z}{\partial y}dy+\frac{\partial u_z}{\partial z}dz. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Таким образом в общем случае различные точки параллелепипеда будут характеризоваться и различными скоростями. Следовательно, параллелепипед д о л ж е н в процессе движения испытывать деформацию.

Для более ясного представления о характере деформации преобразуем уравнения (30). Прибавим и вычтем в каждом из этих уравнений в порядке их последовательности следующие величины:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u_z}{\partial x}dz+\frac{1}{2}\frac{\partial u_y}{\partial x}dy,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u_z}{\partial y}dz+\frac{1}{2}\frac{\partial u_x}{\partial y}dx,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u_y}{\partial z}dy+\frac{1}{2}\frac{\partial u_x}{\partial z}dx.$$

После простых алгебраических преобразований получим:

$$\left.\begin{aligned} u_{x(c)}&=u_x+\frac{\partial u_x}{\partial x}dx+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)dz+\\ &+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)dy+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)dz-\\ &-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)dy,\\ u_{y(c)}&=u_y+\frac{\partial u_y}{\partial y}dy+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)dx+\\ &+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)dz+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)dx-\\ &-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)dz,\\ u_{z(c)}&=u_z+\frac{\partial u_z}{\partial z}dz+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)dy+\\ &+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)dx+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)dy-\\ &-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)dx. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Выясним физический смысл отдельных слагаемых полученных уравнений.

Члены $\quad \dfrac{\partial u_x}{\partial x}dx,\ \dfrac{\partial u_y}{\partial y}dy$ и $\dfrac{\partial u_z}{\partial z}dz$

представляют собой проекцию скорости деформации удлинения или сжатия вдоль осей координат.

---

[1] За исключением раздела, в котором рассматривается явление так называемого удара жидкости в трубах.

Рассмотрим теперь члены в виде полусумм частных производных. Покажем, что эти полусуммы представляют собой компоненты скоростей угловых деформаций двугранных углов параллелепипеда относительно его ребер.

В самом деле благодаря разности скоростей угловых точек произойдет перемещение грани AB прямоугольника $ABCD$ (фиг. 31) внутрь фигуры в положение AB', а грани AD того же прямоугольника в положение AD'.

Благодаря этому произойдет чисто угловая деформация первоначального прямоугольного четырехугольника $ABCD$ в параллелограм $AB'C'D'$.

При этом относительное вращение граней AB и DC произойдет по часовой стрелке с угловой скоростью $\frac{\partial u_x}{\partial z}$ и граней BC и AD — против часовой стрелки с угловой скоростью $\frac{\partial u_z}{\partial x}$.

Такое вращение приведет к относительному перемещению грани BC относительно AD, характеризуемому полной деформацией ранее прямого угла, равной результирующей угловой скорости

$$\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}.$$

Обозначим в дальнейшем

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)&=\Theta_x,\\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)&=\Theta_y,\\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)&=\Theta_z.\end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

От величины этих компонентов будет зависеть скорость относительного сдвига каждой пары параллельных граней параллелепипеда.

Наконец, рассмотрим смысл членов уравнений (31), представленных полуразностями частных производных.

Для этого представим себе, что у точки O (фиг. 32) жидкость вращается вокруг оси Y с угловой скоростью ω_y. Для какой-либо точки A с координатами δx и δz составляющие относительных скоростей (по сравнению с O) соответственно будут

$$\delta u_x=+\omega_y\delta z,$$
$$\delta u_z=-\omega_y\delta x.$$

Отсюда имеем $\frac{1}{2}\left(\frac{\delta u_x}{\delta z}-\frac{\delta u_z}{\delta x}\right)=\omega_y$ или, уменьшая δx и δz и переходя к пределу,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)=\omega_y.$$

Следовательно, полуразности частных производных в уравнениях (31) представляют собой компоненты угловой скорости вращения параллелепипеда относительно мгновенных осей вращения, параллельных осям координат и проходящих через точку A.

Обозначим эти компоненты угловой скорости по осям так:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)&=\omega_x,\\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)&=\omega_y,\\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)&=\omega_z\end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

и будем их в дальнейшем называть компонентами вихря скорости или просто „компонентами вихря".

Пользуясь обозначениями (32) и (33), приведем уравнения (31) к такому виду:

$$\left.\begin{aligned}u_{x(c)}&=u_x+\left[\frac{\partial u_x}{\partial x}dx+(\Theta_y dz+\Theta_z dy)\right]+(\omega_y dz-\omega_z dy),\\ u_{y(c)}&=u_y+\left[\frac{\partial u_y}{\partial y}dy+(\Theta_z dx+\Theta_x dz)\right]+(\omega_z dx-\omega_x dz),\\ u_{z(c)}&=u_z+\left[\frac{\partial u_z}{\partial z}dz+(\Theta_x dy+\Theta_y dx)\right]+(\omega_x dy-\omega_y dx).\end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

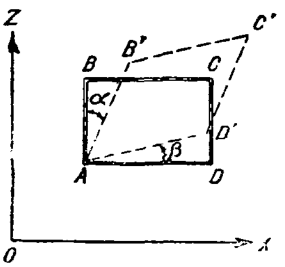
Эти уравнения выражают важную для понимания внутреннего механизма движения жидкости теорему Коши-Гельмгольца:

скорость перемещения любой точки жидкой частицы в общем виде слагается из трех скоростей—поступательной, деформационной и вращательной.

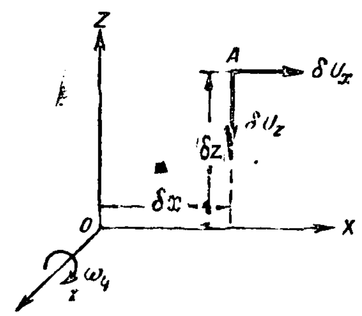
Такой общий случай движения жидкости называется „вихревым", а вектор угловой скорости в данной точке в гидродинамике именуется „вихрем". Полная угловая скорость вращения выразится через свои компоненты (33) в виде

$$\omega=\sqrt{\omega_x^2+\omega_y^2+\omega_z^2}. \qquad (35)$$

Частный же случай движения жидкости, при котором частицы ее не испытывают вращений вокруг мгновенных осей, называется безвихревым или потенциальным (смысл последнего названия будет разъяснен ниже).



Фиг. 31



Фиг. 32

§ 23. Методы Лагранжа и Эйлера при изучении движения жидкости

Выше была дана общая характеристика движения жидкости как непрерывной деформации сплошной материальной среды.

Изучение движения жидкости можно проводить двумя различными по методу приемами.

Во-первых, можно в некотором начальном положении мысленно отметить в жидкости определенные частицы и далее следить во времени за движением каждой отмеченной частицы и ее кинематическими характеристиками.

Такой метод исследования, сводящийся по существу к изучению траектории движения частиц жидкости, был введен в гидрокинематику Лагранжем.

Во-вторых, можно в пространстве, занятом движущейся жидкостью, выделить некоторую область наблюдения, отнести эту область к неподвижной системе координат и следить за кинематическими характеристиками различных частиц жидкости, непрерывно следующих одна за другой через зафиксированные точки выделенной области наблюдения.

Этот метод исследования был развит Эйлером и представляет большой интерес по практическим приложениям.

По методу Эйлера в некоторый вполне определенный момент времени фиксируются для всех точек изучаемой области скорости движения частиц жидкости. Картина движения жидкости в избранный момент времени вполне обрисуется совокупностью векторов скоростей, отложенных по величине и направлению при соответствующих точках области наблюдения. Такая совокупность векторов, характеризующая движение жидкости в данный момент времени, называется „полем скоростей".

В общем случае движения поле скоростей в следующий момент времени будет уже иным. Сопоставляя второе поле скоростей с первым, можно получить „поле ускорений" по геометрическим приращениям соответствующих векторов скоростей, отнесенным к единице времени.

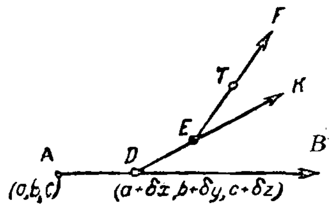
Очевидно, что для неустановившегося движения жидкости можно говорить о поле скоростей только для каждого отдельного момента времени, тогда как при установившемся движении жидкости поле скорсстей является постоянным для избранной области наблюдения.

§ 24. Траектории частиц и линии токов жидкости

Траекторией частицы жидкости называется путь одной и той же частицы, прослеженный во времени. Изучение траекторий частиц движущейся жидкости, как было уже упомянуто выше, лежит в основе метода Лагранжа.

В общем случае движения жидкости не только траектории частиц, различно расположенных в пространстве, будут, вообще говоря, различными, но и траектории, описываемые частицами, проходящими через одну и ту же точку пространства, будут также меняться во времени.

Возьмем в пространстве, занятом движущейся жидкостью, точку A с координатами a, b, c и в этой точке отложим по величине и направлению вектор скорости AB частицы жидкости, проходящей через избранную точку в некоторый определенный момент времени (фиг. 33).



Фиг. 33

Отметим на направлении вектора $\overline{AB}$ некоторую точку D с координатами $a+\delta x$, $b+\delta y$, $c+\delta z$. Так как поле векторов непрерывно, то D будет являться точкой приложения другого вектора $\overline{DK}$, вообще говоря, отличного от первого по величине и направлению. На направлении второго вектора возьмем следующую точку E, достаточно близко расположенную от его начала. В ней будет приложен третий вектор $\overline{EF}$, на направлении которого возьмем третью точку T и т. д.

Выбранные таким образом векторы отметят точками своих приложений некоторую ломаную линию $ADET$, расположенную в пространстве, занятом движущейся жидкостью. Стороны этой ломаной линии, построенной для одного момента времени, будут совпадать с направлениями соответствующих векторов скоростей. Уменьшая все более и более длины отрезков δx, δy, δz, можно получить в пределе некоторую пространственную кривую, обладающую тем свойством, что

> *касательная к этой линии в каждой ее точке будет совпадать с направлением вектора скорости движущейся жидкости в этой точке.*

Такая линия называется **линией тока**.

Зависимость между компонентами скоростей и длинами отрезков δx, δy, δz, описанных выше, для любой точки пространства может быть определена так:

$$\frac{\delta x}{\delta t}=u_x; \quad \frac{\delta y}{\delta t}=u_y; \quad \frac{\delta z}{\delta t}=u_z,$$

где δt — время, потребное для пробега соответствующей частицы жидкости вдоль отрезка. Исключая из этих уравнений элемент времени δt и записывая их в диференциальной форме, найдем диференциальное уравнение линии тока:

$$\frac{dx}{u_x}=\frac{dy}{u_y}=\frac{dz}{u_z}. \tag{36}$$

Следует подчеркнуть разницу между траекторией частицы и линией тока. Траектория движения частицы относится лишь к одной определенной частице, изучаемой в течение конечного отрезка времени. Линия тока связывает между собой определенную совокупность различных частиц, центры тяжести которых совпадают с векториальной линией в бесконечно малый отрезок времени (в одно мгновение).

Из сказанного ясно, что только

при установившемся движении линии тока совпадают с траекториями.

В общем же случае неустановившегося движения такое совпадение не имеет места.

§ 25. Функция тока

Уравнению (36) можно придать и такой вид:

$$\left.\begin{aligned} u_x dy - u_y dx &= 0, \\ u_y dz - u_z dy &= 0, \\ u_z dx - u_x dz &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (37)$$

Если движение жидкости происходит так, что линия тока хотя и меняет свое направление, но остается всегда расположенной в одной плоскости, то уравнение линии тока будет вполне определяться только одним из уравнений (37). Так, например, линия тока, располагающаяся только в плоскости XOY, определится уравнением

$$u_x dy - u_y dx = 0.$$

Если подобрать такую функцию пространства $\Psi(x, y)$, для которой

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -u_y \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = u_x, \qquad (38)$$

то уравнение линии тока, располагающейся в одной плоскости, может быть записано так:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy = 0, \text{ или } d\Psi = 0, \text{ или } \Psi = \text{const},$$

так как левая часть уравнения есть полный диференциал Ψ. Рассматриваемый частный случай движения для краткости будем в дальнейшем называть плоским движением.

Функция $\Psi(x, y)$, характеризующая линию тока при плоском движении, была впервые введена английским ученым Стоксом и называется функцией Стокса или чаще **функцией тока**.

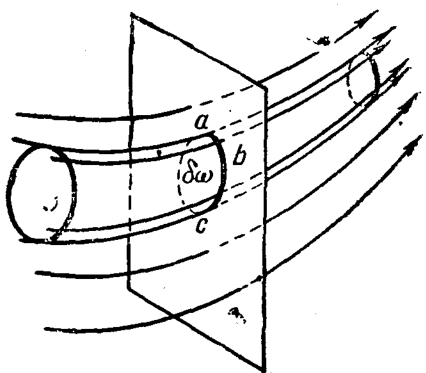
Следовательно, каждая линия тока, располагающаяся в одной плоскости, может быть охарактеризована определенным и постоянным по всей ее длине значением функции тока $\Psi = \Psi_i$.

При переходе к другой линии тока в этой же плоскости будем иметь уже другое, но опять-таки постоянное для всей линии тока значение Ψ_n.

§ 26. Понятие о струйчатой модели движения жидкости. Классификация установившегося движения

Понятие о линиях тока является исходным для представления о „струйчатой модели движения жидкости", положенной в основу гидравлики с самого начала ее возникновения и не утратившей своего значения и по сие время.

Пусть на фиг. 34 изображена система линий токов для некоторого потока жидкости. Будем для общности полагать движение неустановившимся. Тогда изображенная картина линий токов



Фиг. 34

может соответствовать лишь некоторому мгновенному состоянию потока. Выделим мысленно внутри потока некоторый достаточно малый замкнутый контур abc.

Совокупность линий тока, охваченных контуром abc, выделит в пространстве так называемую „элементарную струйку".

Элементарно малая площадка $\delta\omega$, представляющая собой поперечное сечение струйки в плоскости, нормальной к линиям тока, называется „живым сечением". Очевидно, в общем случае размеры живых сечений струйки жидкости будут различны по длине струйки.

Произведение площади живого сечения струйки на скорость движения жидкости называют „расходом элементарной струйки".

Расход элементарной струйки $\delta q = u\delta\omega$ представляет собой объем жидкости, проходящей через сечение струйки в единицу времени, и имеет размерность $[L^3T^{-1}]$.

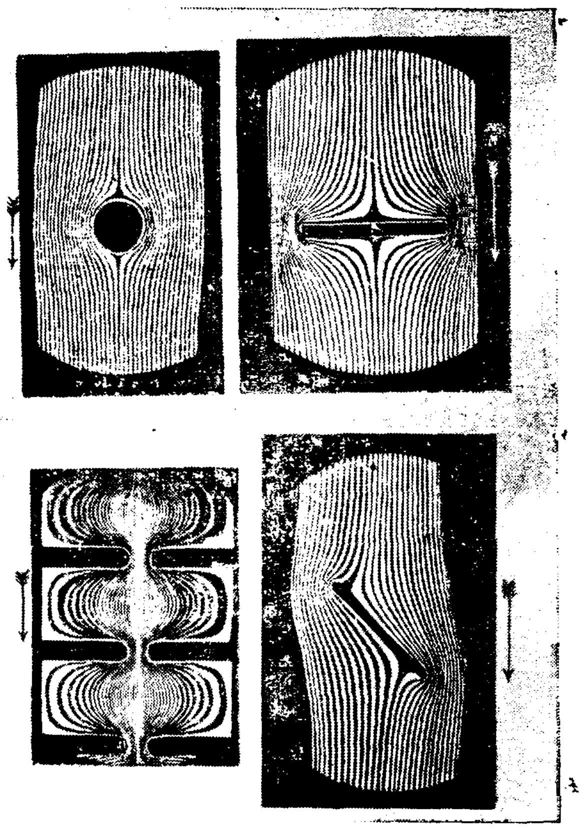
Обратим внимание на разницу в положении „элементарных струек" жидкости в установившемся и неустановившемся потоке. На основании сказанного в предыдущем параграфе следует, что:

в установившемся потоке жидкости струйки будут всегда занимать устой-

чивое во времени положение в пространстве.

Наоборот, при неустановившемся движении струйки будут непрерывно менять свое положение.

Следовательно, при неустановившемся движении нельзя зафиксировать положение струйки, например, подкрашиванием жидкости в какой-нибудь определенной точке. Наоборот, в установившемся потоке такая фиксация положения струек вполне возможна и широко используется при разного рода экспериментальных исследованиях. На фиг. 35 показано положение струек (линий токов) при обтекании тел потенциальным установившимся потоком.

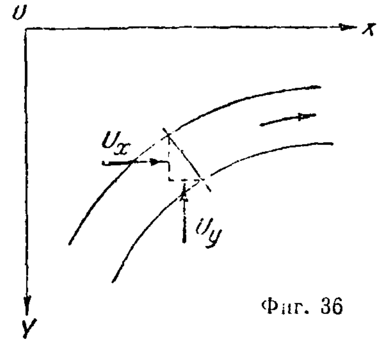


Фиг. 35

Рассмотрим расход жидкости, протекающей между двумя бесконечно близкими линиями тока в плоском потоке на единице ширины его (фиг. 36).

Из самого определения линии тока следует, что поступление жидкости через боковую поверхность струйки невозможно. Очевидно, что расход в любом сечении струйки будет поступать только через торцовые сечения.

Поэтому, обозначая элементарный расход, протекающий на единице ширины потока между



Фиг. 36

двумя бесконечно близкими линиями тока, через dq, будем иметь

$$dq = u_x dy - u_y dx = \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx = d\Psi,$$

откуда получим, что расход, протекающий между двумя произвольными линиями тока, характеризующимися значениями функции тока Ψ_1 и Ψ_2, будет равен

$$q = \int_{\Psi_1}^{\Psi_2} d\Psi = \Psi_2 - \Psi_1.$$

Последнее выражение полезно иметь в виду для лучшего понимания физического смысла функции Стокса.

Значительная часть реальных потоков жидкости может быть рассматриваема в условиях установившегося движения. Этим обстоятельством и объясняется то, что в основу построения гидравлики была положена „струйчатая модель движения жидкости".

Согласно этой модели поток жидкости мыслится состоящим из ряда отдельных „струй".

Проведем мысленно поверхность, обладающую тем свойством, что нормали к этой поверхности во всех ее точках совпадают с касательными к линиям токов потока жидкости, пересекающим эту поверхность в тех же точках. Тогда площадь поверхности будет равна сумме площадей живых сечений элементарных струек, ее пронизывающих: $\omega = \Sigma\delta\omega = \int d\omega$.

Площадь эта, заключенная между граничными контурами потока, называется „площадью живого сечения потока" или просто „живым сечением потока".

Объем жидкости, проходящий в единицу времени через „живое сечение потока", будет равен сумме расходов элементарных струек, пересекающих эту площадь:

$$Q = \Sigma\delta q = \int u \, d\omega.$$

Эта величина называется расходом потока в данном сечении. Разделив расход на площадь живого сечения, получим

$$\frac{\int u d\omega}{\int d\omega} = \frac{Q}{\omega} = v.$$

Полученная величина имеет размерность скорости $[LT^{-1}]$ и именуется „средней скоростью потока“ в данном сечении.

Из уравнений (28) нам известно, что вообще скорости движения жидкости в различных точках сечения будут различными и потому среднюю скорость для всего сечения нужно понимать как некоторое абстрактное представление.

Средняя скорость в сечении представляет собой такую воображаемую одинаковой для всех точек сечения скорость, при которой проходил бы тот же расход, какой фактически имеет место при действительных скоростях, различных для разных точек сечения.

Все многообразие возможных случаев установившегося движения с точки зрения кинематики можно подразделить на два таких класса:

1. Равномерное движение, при котором система линий токов выражается семейством взаимнопараллельных и равнонаправленных прямых. Площади живых сечений в любом месте струйки жидкости будут при этом одинаковы. Постоянной, следовательно, будет и скорость в пределах струйки. Постоянство же площадей и скорости в пределах отдельных струек приводят к такому же постоянству живых сечений и средних скоростей для всего потока.

Поэтому понятие о равномерном движении связывается с постоянством формы и площади живых сечений ω, а также средних скоростей v по длине прямолинейного потока жидкости.

2. Неравномерное движение, при котором линии токов имеют уже произвольное взаиморасположение, а площади живых сечений и скорости меняются по длине потока.

Из класса неравномерных движений жидкости следует особо отметить движение с некоторыми кинематическими особенностями, позволяющими назвать такое движение плавно изменяющимся.

Эти кинематические особенности следующие:

а) Линии токов представлены почти прямыми: кривизна их весьма мала.

б) Угол расхождения между отдельными линиями токов весьма мал, благодаря чему можно полагать, что живые сечения потока являются плоскостями, нормальными к линиям токов, а площадь живых сечений изменяется вдоль потока весьма плавно.

Прототипом медленно изменяющегося движения является равномерное. Поэтому свойства этих двух видов потоков будут одинаковы в пределах одного живого сечения.

§ 27. Уравнение неразрывности жидкости

Движение жидкости может осуществляться различно, или так, что пространство, в котором происходит движение жидкости, оказывается сплошь занятым этой жидкостью, или так, что часть пространства оказывается попеременно то занятым данной жидкостью, то свободным от нее. В первом случае движение называется „сплошным“ или „непрерывным“, а во втором — „прерывистым“.

Составим уравнение, именуемое „уравнением неразрывности жидкости“ и определяющее собой условие сплошности течений. В несжимаемой жидкости около точки A с координатами x, y, z рассмотрим элементарный параллелепипед с размерами ребер dx, dy, dz (фиг. 30). Вследствие малости размеров параллелепипеда можно полагать, что средние скорости по граням его, образующим трехгранный угол в точке A, характеризуются компонентами скорости u_x, u_y, u_z в этой точке.

Средние скорости по граням параллелепипеда, образующим противоположный трехгранный угол в точке C, могут быть выражены так:

$$u_x+\frac{\partial u_x}{\partial x}dx;\quad u_y+\frac{\partial u_y}{\partial y}dy;\quad u_z+\frac{\partial u_z}{\partial z}dz.$$

Масса жидкости, поступающая внутрь параллелепипеда через грань $MABK$, нормальную оси OX, в течение промежутка времени δt равна

$$\rho u_x dydz\delta t.$$

Масса жидкости, выходящая за тот же промежуток δt через грань параллелепипеда $CDLN$, также нормальную оси OX, равна

$$\rho\left(u_x+\frac{\partial u_x}{\partial x}dx\right)dydz\delta t.$$

Избыток расхода масс над приходом их в параллелепипед в направлении оси OX равен разности этих величин, т. е. равен

$$\rho\frac{\partial u_x}{\partial x}dxdydz\delta t.$$

Выражения для избытка расхода над приходом в направлении других осей координат запишем аналогично в виде

$$\rho\frac{\partial u_y}{\partial y}dxdydz\delta t,$$

$$\rho\frac{\partial u_z}{\partial z}dxdydz\delta t.$$

Суммарный избыток расхода масс жидкости над приходом для параллелепипеда в целом будет равен сумме написанных выражений, а именно

$$\rho\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)dxdydz\delta t.$$

Но так как в условиях сплошности течения внутри параллелепипеда никаких пустот образоваться не может, а жидкость несжимаема ($\rho=$ $=\text{const}$), то последнее выражение должно быть равно нулю. Сказанное приводит к такому весьма важному соотношению между компонентами скоростей

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0, \qquad (39)$$

называемому диференциальным уравнением «неразрывности», или «сплошности», движения жидкости.

Посмотрим, каким образом можно интерпретировать этот принцип сплошности движения применительно к струйке жидкости.

Выделим из струйки двумя бесконечно близкими сечениями ω_A и ω_B, находящимися на расстоянии ds друг от друга, отрезок объемом ωds, где ω — средняя между ω_A и ω_B площадь поперечного сечения струйки. Масса жидкости, вошедшая в рассматриваемый объем через сечение ω_A, в течение некоторого элементарного промежутка времени dt, при расходе в струйке q, будет равна $\rho q dt$, масса же, вышедшая через противоположное сечение ω_B, будет равна $\left(\rho q+\frac{\partial(\rho q)}{\partial s}ds\right)dt$. Разность между поступившей и вышедшей массой должна, очевидно, равняться изменению за тот же промежуток времени массы $\rho\omega ds$, первоначально заключавшейся в выделенном объеме, т. е. должна равняться $\frac{\partial(\rho\omega)}{\partial t}dsdt$. Мы имеем, следовательно, равенство

$$-\frac{\partial(\rho q)}{\partial s}dsdt=\frac{\partial(\rho\omega)}{\partial t}dsdt,$$

откуда

$$\frac{\partial(\rho q)}{\partial s}+\frac{\partial(\rho\omega)}{\partial t}=0$$

или

$$q\frac{\partial\rho}{\partial s}+\rho\frac{\partial q}{\partial s}+\frac{\partial(\rho\omega)}{\partial t}=0.$$

В случае малосжимаемой жидкости изменением плотности ρ вдоль пути ds можно пренебречь и придать уравнению непрерывности более простое выражение

$$\rho\frac{\partial q}{\partial s}+\frac{\partial(\rho\omega)}{\partial t}=0.$$

Для несжимаемой жидкости $\rho=\text{const}$ и мы получаем дальнейшее упрощение

$$\frac{\partial q}{\partial s}+\frac{\partial\omega}{\partial t}=0.$$

В случае установившегося движения полученное уравнение обращается в следующее: $\frac{\partial q}{\partial s}=0$, откуда $q=\text{const}$, или так как $q=v\omega$,

$$v\omega=\text{const}.$$

Исключительно важное значение для практики имеет принцип неразрывности потока жидкости конечных размеров, находящегося в установившемся движении.

Возьмем участок в установившемся потоке, ограниченный двумя живыми сечениями. Расход через эти сечения должен быть равен сумме расходов элементарных струек, проходящих в этих сечениях.

Число струек, проходящих в первом сечении, должно быть равно числу струек, проходящих во втором сечении, ибо струйки могут либо проходить через граничные сечения, либо замыкаться кольцом внутри пространства, ограниченного живыми сечениями и боковой поверхностью потока. Кольцевые струйки (если они и есть) не будут участвовать ни в притоке, ни в расходе масс жидкости из отсека. Поэтому расход жидкости через первое сечение должен быть равен расходу жидкости через второе сечение, т. е.

$$Q=v_1\omega_1=v_2\omega_2=\text{const},$$

где Q — расход жидкости через живое сечение потока;

v_1 и v_2 — средние скорости в живых сечениях потока;

ω_1 и ω_2 — площади живых сечений потока.

Уравнение постоянства расхода может быть переписано еще так:

$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{\omega_2}{\omega_1},$$

т. е. *в установившемся потоке жидкости средние скорости по сечениям обратно пропорциональны площадям этих сечений.*

§ 28. Особенности безвихревого (потенциального) движения

Чтобы движение жидкости было безвихревым, очевидно, необходимо, чтобы компоненты вихря ω_x, ω_y, ω_z были равны нулю.

Из уравнения (33) видно, что компоненты вихря будут равны нулю, если для всех точек пространства, занятого жидкостью, будут удовлетворены такие соотношения:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u_z}{\partial y}&=\frac{\partial u_y}{\partial z},\\ \frac{\partial u_x}{\partial z}&=\frac{\partial u_z}{\partial x},\\ \frac{\partial u_y}{\partial x}&=\frac{\partial u_x}{\partial y},\end{aligned}\right\} \qquad (40)$$

Из условий (40) следует, что компоненты скорости u_x, u_y, u_z в любой точке пространства, занятого безвихревым потоком, могут быть представлены как частные производные с обратным знаком по соответствующим осям координат, от некоторой функции пространства $\Phi(x, y, z)$, т. е.

$$u_x = -\frac{\partial\Phi(x, y, z)}{\partial x},$$
$$u_y = -\frac{\partial\Phi(x, y, z)}{\partial y}, \qquad (41)$$
$$u_z = -\frac{\partial\Phi(x, y, z)}{\partial z}.$$

В самом деле из (41) следует:

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x \partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial x},$$
$$\frac{\partial u_y}{\partial x} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial y},$$
$$\frac{\partial u_z}{\partial y} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial z \partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial z},$$

ибо значение второй производной от непрерывной функции не зависит от порядка диференцирования.

Следовательно, при наличии условий (41) обязательно выполняются и условия (40).

Функция пространства $\Phi(x, y, z)$, удовлетворяющая условиям (41), называется **потенциалом скоростей**[1]. О скоростях безвихревого потока говорят, что они имеют потенциал, а безвихревой поток поэтому называют потенциальным потоком.

Для анализа потенциального (безвихревого) потока придадим уравнениям (41) другой вид. Умножим эти уравнения соответственно на dx, dy, dz и сложим полученные результаты:

$$u_x dx + u_y dy + u_z dz = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial\Phi}{\partial z} dz\right) = -d\Phi. \qquad (42)$$

Правая часть полученного уравнения представляет собой полный диференциал или полное приращение функции потенциала скоростей с обратным знаком при переходе из одной точки пространства в другую.

Поверхности, выделенные в потоке жидкости так, что все их точки имеют одинаковое значение функции потенциала скоростей, называются поверхностями равного потенциала.

Особенностью таких поверхностей, следовательно, является соотношение

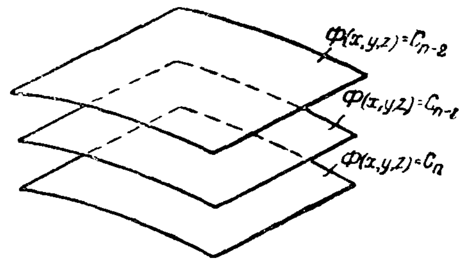
$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial\Phi}{\partial z} dz = d\Phi = 0, \qquad (43)$$

интегрируя которое, получим уравнение поверхностей равного потенциала

$$\Phi(x, y, z) = C_n = \text{const}.$$

[1] По аналогии с потенциалом в теории притяжения, электростатике и других областях физики.

Задавая различные значения постоянной интегрирования C_n, C_{n+1}, C_{n+2} и т. д., можно получить целое семейство поверхностей равного потенциала (фиг. 37), которое разделит все пространство, занятое потенциальным потоком, на ряд зон, расположенных между соответствующими поверхностями равного потенциала.



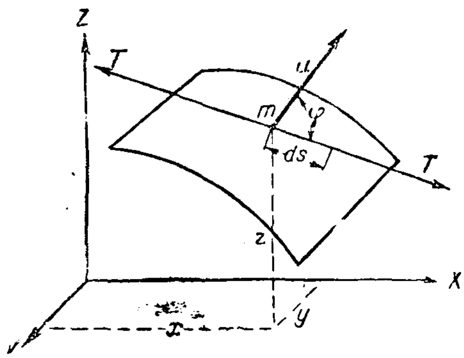
Фиг. 37

Выясним, в каком взаимном расположении будут находиться линии токов потенциального течения жидкости, по отношению к поверхностям равных потенциалов.

Проведем через точку $m(x, y, z)$ пространства некоторую поверхность равного потенциала (фиг. 38). Пусть положительное направление касательной $T - T$ к этой поверхности составляет с осями координат углы α_1, β_1, γ_1, косинусы которых равны

$$\cos\alpha_1 = \frac{dx}{ds}; \quad \cos\beta_1 = \frac{dy}{ds}; \quad \cos\gamma_1 = \frac{dz}{ds},$$

где ds — отрезок касательной, а dx, dy, dz — его проекции на оси координат.



Фиг. 38

Допустим далее, что полная скорость движения жидкости u в точке m имеет компоненты u_x, u_y, u_z, так что

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}.$$

Вектор скорости будет составлять с осями координат углы, удовлетворяющие соотношениям,

$$\cos\alpha_2 = \frac{u_x}{u}; \quad \cos\beta_2 = \frac{u_y}{u}; \quad \cos\gamma_2 = \frac{u_z}{u}.$$

Определим угол φ, образуемый между вектором скорости $\vec{u}$ в точке m и касательной $T-T$ к поверхности равного потенциала.

По правилам аналитической геометрии имеем

$$\cos\varphi=\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2=$$
$$=\frac{u_x}{u}\frac{dx}{ds}+\frac{u_y}{u}\frac{dy}{ds}+\frac{u_z}{u}\frac{dz}{ds}=\frac{u_xdx+u_ydy+u_zdz}{uds}$$

Но так как отрезок ds расположен на поверхности равного потенциала, то в соответствии с (42) и (43)

$$u_xdx+u_ydy+u_zdz=0,$$

откуда всегда

$$\cos\varphi=0 \text{ и } \varphi=\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, векторы скоростей потенциального потока всегда нормальны к поверхностям равного потенциала. А так как векторы скоростей касательны к линиям токов, то:

в безвихревом потоке жидкости линии токов нормальны к поверхностям равного потенциала скоростей.

Таким образом в потенциальном или безвихревом потоке жидкости общая картина движения чрезвычайно стройна. Все частицы жидкости движутся по линиям токов, нормальным к поверхностям равного потенциала скоростей, не испытывая никаких вращений вокруг мгновенных осей.

Всю картину движения потенциального (безвихревого) потока легко представить, если известен вид функции потенциала скоростей $\Phi(x, y, z)$.

Для плоского потенциального потока картина движения может быть графически показана в виде ортогональной сетки, образованной двумя семействами кривых: линиями равного потенциала скоростей и линиями тока.

Такая сетка называется гидродинамической сеткой. Сопоставляя уравнения (38) и (41), замечаем, что между функцией потенциала скоростей и функцией тока существует прямая связь, а именно

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x}=\frac{\partial\Phi}{\partial y} \quad\text{и}\quad \frac{\partial\Psi}{\partial y}=-\frac{\partial\Phi}{\partial x}.$$

Иными словами, вся кинематика потенциального потока (скорости, линии тока, поверхности равного потенциала и т. п.) может быть выявлена из $\Phi(x, y, z)$ путем соответствующих математических операций.

§ 29. Уравнение Лапласа. Общая постановка вопроса об его интегрировании. Понятие о пограничных условиях

Компоненты скоростей потенциального потока должны не только удовлетворять условиям (41)

$$u_x=-\frac{\partial\Phi}{\partial x};\quad u_y=-\frac{\partial\Phi}{\partial y};\quad u_z=-\frac{\partial\Phi}{\partial z},$$

но и уравнению неразрывности (39)

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0.$$

Подставляя (41) в (39), найдем

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0, \tag{44}$$

т. е. известное в математике уравнение Лапласа.

Таким образом функция потенциала скоростей должна удовлетворять уравнению Лапласа, и, следовательно, является гармонической функцией.

В математической физике доказывается, что для всякой трехмерной области, заданной какими-либо границами, существует одна и только одна функция пространства, удовлетворяющая уравнению Лапласа во всех точках этой области.

Следовательно, во всякой заданной какими-нибудь геометрическими границами трехмерной области может быть только одна форма потенциального движения жидкости.

Эта форма потенциального движения жидкости зависит от так называемых пограничных условий.

Для плоского потока на основе установленной выше связи между $\Phi(x, y)$ и $\Psi(x, y)$ легко установить, что если выполняется условие (44), то должно иметь место и

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}=0. \tag{45}$$

Следовательно, функция тока также является гармонической функцией.

Тогда можно отметить, что если задана некоторая гидродинамическая сетка, то, вообще говоря, одно из двух семейств линий, изображенных на сетке, может быть принято за линии потенциала скоростей $\Phi(x, y)$, а второе семейство линий — соответственно за линии тока и наоборот.

Иначе говоря, каждая гидродинамическая сетка отображает два варианта потенциальных потоков. Какой из двух вариантов имеется при данной конкретной обстановке, можно установить при учете пограничных условий.

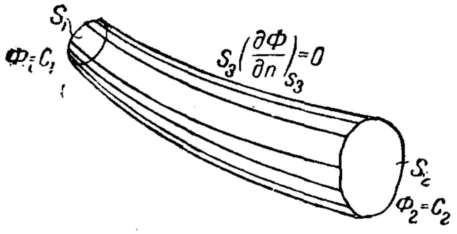
Уточним понятие о пограничных условиях.

Пусть, например, требуется найти функцию потенциала скоростей для случая движения жидкости в направлении от поверхности S_2 к поверхности S_1 в пространстве, ограниченном трубообразной поверхностью S_3, произвольного вида (фиг. 39).

Для определенности решения задачи должны быть заданы частные значения функции потенциала на поверхностях S_1 и S_2:

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1(x, y, z)=C_1,\\ \Phi_2(x, y, z)=C_2,\end{aligned}\right\} \tag{46}$$

причем $C_2>C_1$.



Фиг. 39

Кроме того векторы скоростей для всех точек поверхности S_3 должны быть касательны к этой поверхности, а компоненты скоростей движения жидкости в направлении нормали NN к любой точке этой поверхности должны быть равны нулю. Согласно (41) компоненты скорости по некоторому направлению в любой точке потенциального потока равны частным производным с обратным знаком от функции потенциала скоростей по соответствующим направлениям.

Следовательно, во всех точках поверхности S_3 должно удовлетворяться условие

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_{S_3}=0. \tag{47}$$

Условия (46) и (47) определяют движение жидкости на границах изучаемого потока и потому могут быть названы пограничными условиями.

При этом, конечно, в любой точке потока должно удовлетворяться общее условие (44).

Если для заданных граничных условий найти функцию потенциала скоростей Φ (x, y, z), то можно решить все вопросы, относящиеся к потенциальному движению жидкости внутри области, определенной заданными граничными условиями.

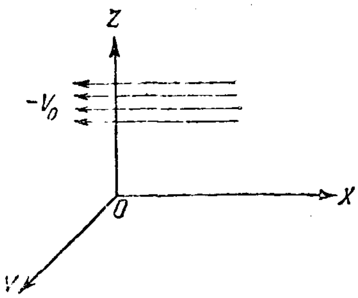
Однако интегрирование уравнения Лапласа с учетом пограничных условий в общем представляет труднейшую задачу математической физики, решенную еще пока для небольшого числа простых случаев.

Поэтому в прикладной гидравлике поступают следующим образом. Зная функцию потенциала скоростей для некоторых простейших случаев движения жидкости или для их комбинаций, определяют граничные условия, удовлетворяющие полученным типам движения. Затем устанавливается, в каких случаях полученная картина движения может быть реализована для целей практики.

§ 30. Простейшие случаи потенциального движения жидкости

Разберем некоторые простейшие случаи потенциального движения.

а) **Плоскопараллельный поток.** Под таким названием будем мыслить поток жидкости с постоянной скоростью v_0, направленной параллельно какой-нибудь прямой линии (фиг. 40).



Фиг. 40

Расположим оси координат $OXYZ$ так, что ось OX будет параллельна и противоположна направлению движения.

Компоненты скорости потока по осям координат будут

$$u_x=-v_0=\text{const};\quad u_y=0;\ u_z=0.$$

Рассматриваемый поток потенциален, так как нетрудно видеть, что в этом случае компоненты вихря (33) равны нулю.

На основании (41) имеем

$$v_0=\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\text{const};\quad \frac{\partial\Phi}{\partial y}=0;\quad \frac{\partial\Phi}{\partial z}=0.$$

Отсюда диференциальное уравнение поверхности равного потенциала скоростей будет

$$d\Phi=v_0\,dx=0,$$

а уравнение поверхности равного потенциала

$$\Phi\ (x,\ y,\ z)=v_0\,x=\text{const}=C_n. \tag{48}$$

Поверхности равного потенциала, как это видно из уравнения, являются плоскостями, нормальными оси OX; постоянные C_n убывают в направлении движения.

Легко убедиться, что линии тока будут прямыми, параллельными оси OX.

Этот тип движения может, например, соответствовать таким пограничным условиям:

1. Значение функции потенциала скоростей на плоской поверхности S_1 нормальной оси OX,

$$\Phi\ (x,\ y,\ z)_{S_1}=v_0\,x_1.$$

2. Значение функции потенциала скоростей на поверхности S_2, нормальной оси OX,

$$\Phi\ (x,\ y,\ z)_{S_2}=v_0\,x_2,$$

причем

$$x_2>x_1.$$

3. Так как векторы скорости касательны к цилиндрической поверхности S_3, то компоненты скоростей движения жидкости, а следовательно, и частные производные функции потенциала по направлению нормали к боковой поверхности должны быть равны нулю.

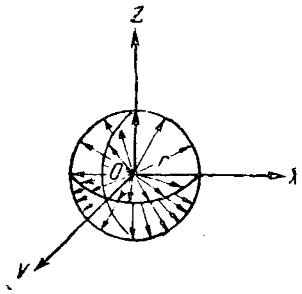
Следовательно, в данном случае функция потенциала скоростей для всех точек цилиндрической поверхности S_3 обладает свойством неизменности по нормали:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_{S_3}=0.$$

Теоретически условия движения потока не изменились бы, если бы воображаемая поверхность S_3 была заменена твердой стенкой такого же сечения.

Тогда функция (48) могла бы представлять собой потенциальный поток в некоторой цилиндрической трубе произвольного сечения с осью, параллельной оси координат.

б) **Источник и сток.** Под этим названием подразумевается воображаемая особая точка пространства (фиг. 41), расположенная изолированно в жидкости и либо всасывающая (сток), либо выбрасывающая (источник) в окружающую среду некоторый секундный расход жидкости Q.



Фиг. 41

Движение, возбуждаемое источником или стоком, симметрично относительно точки его расположения.

Поэтому, если вообразить в пространстве некоторую сферу радиуса r с центром, расположенным в источнике или стоке, то, принимая направление скорости за положительное, если движение происходит от центра, найдем

$$v=\pm\frac{Q}{4\pi r^2}.$$

Здесь знак плюс соответствует источнику, а знак минус соответствует стоку.

Так как с другой стороны должно быть

$$v=-\frac{d\Phi}{dr}=\pm\frac{Q}{4\pi r^2},$$

то функция потенциала скоростей может быть получена так:

$$\Phi\ (x,\ y,\ z)=\mp\int_0^r\frac{Q}{4\pi r^2}dr=\pm\frac{Q}{4\pi r}. \qquad (49)$$

Знак плюс соответствует источнику, а знак минус стоку. Отношение

$$\frac{Q}{4\pi}=q=\text{const}$$

в выражении (49) представляет собой расход жидкости, проходящей через сферу единичного радиуса и отнесенный к единице площади. Эта величина называется „напряжением" или эффективностью источника (стока). Взамен (49) можно написать

$$\Phi\ (x,\ y,\ z)=\pm\frac{q}{r},$$

откуда видно, что поверхности равного потенциала скоростей будут концентрическими сферами, описанными из источника, а линии токов будут направлены по радиусам.

Если вообразить, что в источнике или стоке расположено начало декартовой системы координат, то компоненты полной скорости на оси координат, имея в виду, что $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, могут быть записаны так:

$$u_x=-\frac{\partial\Phi}{\partial x}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\pm\frac{q}{r}\right)=\pm\frac{q}{r^3}x,$$

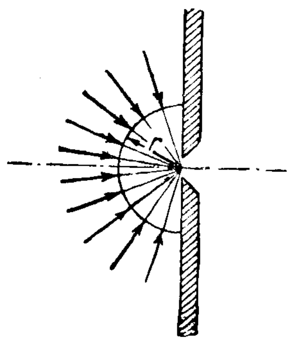
$$u_y=-\frac{\partial\Phi}{\partial y}=-\frac{\partial}{\partial y}\left(\pm\frac{q}{r}\right)=\pm\frac{q}{r^3}y,$$

$$u_z=-\frac{\partial\Phi}{\partial z}=-\frac{\partial}{\partial z}\left(\pm\frac{q}{r}\right)=\pm\frac{q}{r^3}z.$$

Нетрудно убедиться, что для всех точек пространства движение будет безвихревым и удовлетворять уравнению Лапласа.

В реальных условиях можно получить картину течения, близкую к возбуждаемой стоком.

Вообразим, что в стенке очень большого резервуара (фиг. 42), наполненного жидкостью, проделано отверстие достаточно малых размеров;



Фиг. 42

тогда на некотором расстоянии от отверстия линии токов будут направлены по радиусам сфер, описанных из центра отверстия.

Если в пространстве будет иметь место группа источников или стоков, расположенных в точках m_1, $m_2, \ldots$ m_n, то значение функции потенциала скоростей, возбуждаемого этой системой источников или стоков, будет равно алгебраической сумме потенциалов от каждого источника в отдельности:

$$\Phi=\pm\frac{q_1}{r_1}\pm\frac{q_2}{r_2}\pm\ldots\pm\frac{q_n}{r_n},$$

где q_1, $q_2, \ldots$ q_n эффективность источников или стоков, а r_1, $r_2, \ldots$ r_n — длины радиусов векторов, проведенных к ним из точки N, для которой определяется значение потенциала скоростей.

Интерпретируя понятие источника или стока как плоское течение, будем их рассматривать как особые точки, выбрасывающие или всасывающие некоторый расход симметрично в пределах некоторой плоскости.

Если вообразить в пространстве некоторый круг радиуса r с центром в источнике или стоке, то

$$v=\pm\frac{Q}{2\pi r}=\pm\frac{\frac{Q}{2\pi}}{r}=\pm\frac{q}{r},$$

где $q = \frac{Q}{2\pi}$ — эффективность источника или стока.

Так как v должно равняться $-\frac{d\Phi}{dr}$, то значение потенциала скоростей для плоского источника — точки найдем, интегрируя выражение

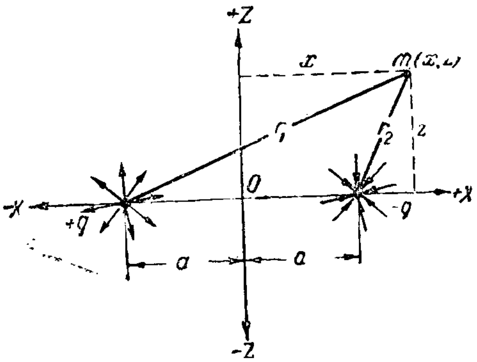
$$-\frac{d\Phi}{dr} = \pm \frac{q}{r},$$

а именно

$$\Phi\ (x,\ y) = \mp q \ln r. \qquad (50)$$

В пространстве такой источник соответствует линейному источнику бесконечной длины с постоянным напряжением и круговыми цилиндрическими поверхностями равного потенциала.

в) Пара источник — сток. Рассмотрим течение, возбуждаемое парой, состоящей из источника и стока одинакового напряжения, расположенных на взаимном расстоянии $2a$ (фиг. 43).



Фиг. 43

Если систему координат расположим так, что ось OX будет проходить через источник и сток, а начало координат разместится посредине отрезка $2a$, то течение будет симметричным относительно оси OX. Поэтому достаточно рассмотреть его в одной из плоскостей, проходящих через ось OX, например, в плоскости XOZ.

Длины радиусов векторов, проведенных из точки $m\ (x,\ z)$ по направлению к источнику и стоку, будут

$$r_1 = \sqrt{(x+a)^2 + z^2},$$

$$r_2 = \sqrt{(x-a)^2 + z^2},$$

в соответствии с чем функция потенциала скоростей представится формулой

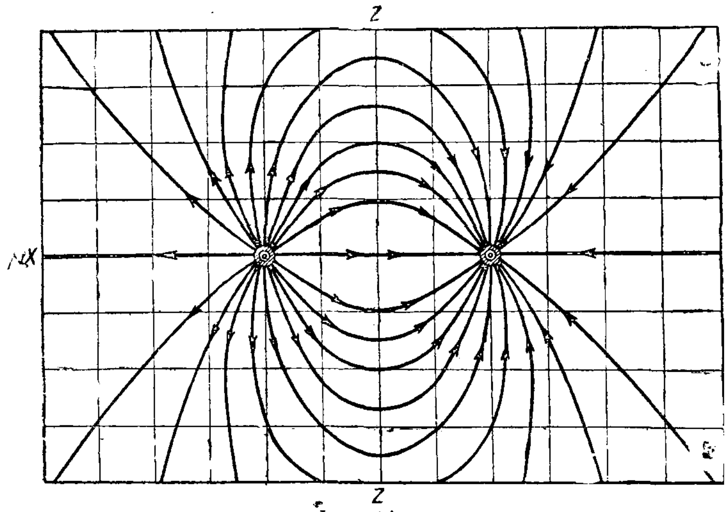
$$\Phi\ (x,\ z) = \frac{q}{\sqrt{(x+a)^2 + z^2}} - \frac{q}{\sqrt{(x-a)^2 + z^2}}. \qquad (51)$$

Компоненты скоростей будут

$$u_x = \frac{q\,(x+a)}{[\sqrt{(x+a)^2 + z^2}]^3} - \frac{q\,(x-a)}{[\sqrt{(x-a)^2 + z^2}]^3},$$

$$u_z = \frac{qz}{[\sqrt{(x+a)^2 + z^2}]^3} - \frac{qz}{[\sqrt{(x-a)^2 + z^2}]^3}.$$

Наглядная картина течения показана на фиг. 44. Из фигуры видно, что все линии токов, выбрасываемые источником, сходятся в стоке. Поэтому весь расход, выбрасываемый источником, поглощается стоком, и при наличии такой пары источник — сток никакого дополнительного расхода окружающей жидкой среде не отдается.



Фиг. 44

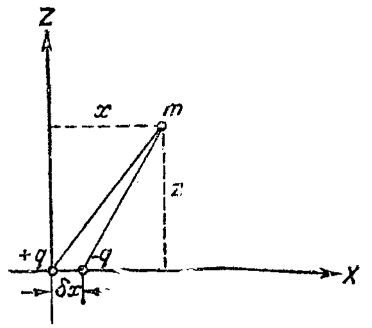
Если же напряжения источника и стока будут различны, то окружающее пространство получит, или должно будет отдать расход $\pm 4\pi\,(q_1 - q)$ в зависимости от того, будет ли эффективность источника меньше или больше, чем стока. Картина течения, конечно, изменится по сравнению с фиг. 44.

Функцию потенциала скоростей для пары источник—сток в плоскости получим на основе (50) в виде

$$\Phi\ (x,y) = q \ln r_1 - q \ln r_2.$$

г) Диполь или дублет. Диполем или дублетом называется сосредоточение в одной точке пространства источника и стока одновременно. Предположим, что начало координат расположено в этой точке (фиг. 45). Но для вывода допустим, что в начале координат расположен источник, а сток находится на очень малом расстоянии от него δx на положительном направлении оси OX. Предположим, что эффективность как источника, так и стока равна q.

Тогда согласно (51) потенциал скоростей в



Фиг. 45

некоторой точке пространства $m(x, z)$ будет равен

$$\Phi(x, z) = \frac{q}{\sqrt{x^2+z^2}} - \frac{q}{\sqrt{(x-\delta x)^2+z^2}},$$

откуда после преобразований, пренебрегая малыми высшего порядка, найдем

$$\Phi(x, z) = \frac{-2xq\delta x}{\sqrt{(x^2+z^2)[x^2-2x\delta x+z^2]}\,\left(\sqrt{x^2+z^2}+\sqrt{x^2-2xx+z^2}\right)}.$$

Будем теперь уменьшать расстояние δx до нуля, одновременно увеличивая напряжение q так, чтобы произведение $q\delta x$ оставалось все время постоянным и равным

$$q\delta x = C = \mathrm{const}.$$

Тогда в пределе получим выражение для потенциала скоростей диполя

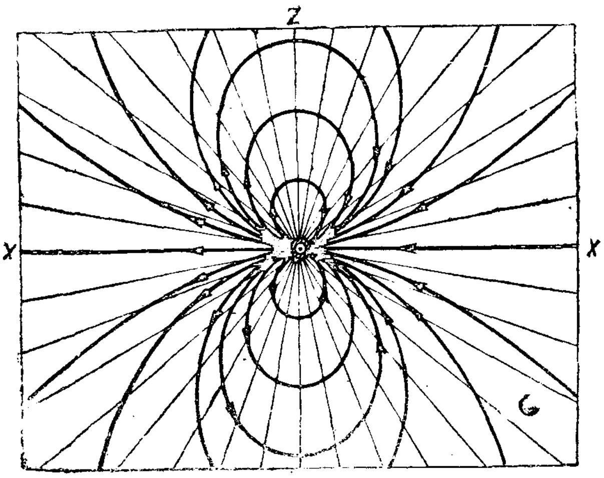
$$\Phi(x, z) = \frac{-Cx}{\sqrt{(x^2+z^2)^3}}. \qquad (52)$$

При этом компоненты скоростей в точке будут равны

$$u_x = C\frac{z^2-2x^2}{\sqrt{(x^2+z^2)^5}},$$

$$u_z = -C\frac{3xz}{(x^2+z^2)^5}.$$

Картина течения, возбуждаемого диполем, изображена на фиг. 46.



Фиг. 46

§ 31. Метод наложения простейших потенциальных течений. Обтекание тел симметричной формы

Вообразим, что в безграничном плоско-параллельном потоке расположена неподвижная система источников и стоков с напряжениями

$$q_1\ q_2, \ldots, q_n.$$

Эта группа источников и стоков будет в общем случае выбрасывать в пространство или всасывать из него некоторый суммарный расход жидкости

$$\Sigma Q = Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n = 4\pi(q_1 + q_2 + \ldots + q_n).$$

Вследствие этого результирующее течение не будет плоско-параллельным, оно изменится в той или иной степени, в зависимости от числа, напряжения и взаимного расположения источников и стоков.

Допустим, что течение, возбуждаемое источниками и стоками, осуществлено в действительности путем тех или иных приспособлений, всасывающих или выбрасывающих жидкость, что принципиально всегда возможно. Пусть на такое течение набегает плоско-параллельный поток.

В соответствии с основной предпосылкой механики жидкости, трактующей движение последней как непрерывную деформацию материальной среды, массы жидкости, всасываемые или выбрасываемые источниками или стоками, должны быть отделены от основного потока жидкости некоторыми раздельными поверхностями. Эти раздельные поверхности могут быть как замкнутыми сами на себя, так и простирающимися в бесконечность. Но так или иначе они должны отделять массы жидкости, всасываемые или выбрасываемые источниками, от масс основного потока, ибо частицы потенциального потока мыслятся движущимися без взаимного перемешивания.

Но если раздельные поверхности существуют и если они занимают неизменное положение в пространстве, ибо рассматривается только установившееся движение, то без какого бы то ни было влияния на результативный поток они могут быть заменены твердыми поверхностями, отделяющими массы жидкости, находящиеся в сфере влияния источников и стоков, от остальных масс жидкости.

Если после этого допустим, что внутренность пространства, выделенного раздельными поверхностями, будет заполнена каким-либо твердым веществом, то в потоке, находящемся вне раздельных поверхностей, ничего не должно измениться. В результате мы получим картину обтекания тела или группы тел плоско-параллельным потоком идеальной жидкости.

Разберем этот весьма важный вопрос на следующих примерах.

а) Сложение плоско-параллельного потока с течением, возбуждаемым одним источником. Пусть источник эффективностью q расположен в начале координат $OXYZ$ и пусть плоско-параллельный поток набегает на источник, двигаясь параллельно оси OX в отрицательном направлении и имея на достаточно удаленном от начала координат расстоянии постоянное значение скорости — v_0.

Вследствие симметрии обоих течений относительно оси OX результативное течение будет также симметрично относительно этой оси. Поэтому можно ограничиться рассмотрением явления в плоскости XOZ.

Потенциал скоростей результирующего течения равен сумме потенциалов плоско-параллельного потока и источника. Складывая (48) с (49), имеем

$$\Phi(x, z) = v_0 x + \frac{q}{\sqrt{x^2+z^2}}.$$

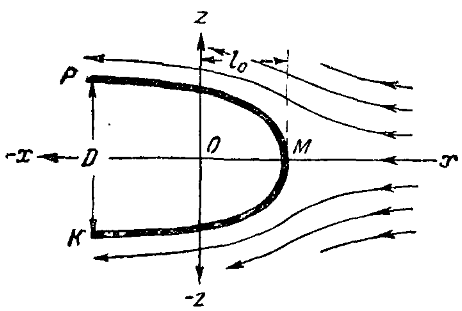
Компоненты скорости по осям OX и OZ будут, следовательно,

$$\left.\begin{aligned} u_x &= -\frac{\partial\Phi}{\partial x} = -v_0 + \frac{qx}{\sqrt{(x^2+z^2)^3}}, \\ u_z &= -\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{qz}{\sqrt{(x^2+z^2)^3}}. \end{aligned}\right\} \qquad (53)$$

Отсюда дифференциальные уравнения линий токов (36) напишутся так:

$$\frac{dx}{-v_0 + \dfrac{qx}{(x^2+z^2)^{3/2}}} = \frac{dz}{\dfrac{qz}{(x^2+z^2)^{3/2}}}.$$

Интегрирование этих дифференциальных уравнений, которое здесь не приводится, и исследование полученных уравнений линий токов приводят к картине течения, показанной на фиг. 47.



Фиг. 47

Из рассмотрения этой фигуры видно, что сложение источника с плоско-параллельным потоком дает в итоге случай обтекания бесконечно длинного тела, так называемого „полутела“ симметричной относительно оси OX формы. Сечение полутела любой плоскостью нормальной оси OX будет круглым сечением некоторого диаметра D. Сечение тела плоскостью ZOX изображено на фиг. 47 линией KMP.

Из рассмотрения первого из уравнений (53) следует, что абсолютная величина компонента скорости u_x равна скорости v_0 набегания плоско-параллельного потока только на бесконечно большом расстоянии от начала координат; при конечных и положительных значениях x абсолютная величина u_x всегда меньше скорости v_0. При отрицательных x, наоборот, она всегда больше v_0.

Для частиц набегающего потока, двигающихся по оси OX, т. е. при $z=0$, компоненты скорости

$$(u_x)_{z=0} = -v_0 + \frac{qx}{(x^2)^{\frac{3}{2}}} = -v_0 + \frac{q}{x^2}, \qquad (54)$$

$$(u_z)_{z=0} = 0.$$

Исследование первого из этих уравнений показывает, что разобранные выше соотношения между компонентом скорости u_x и скоростью v_0 плоскопараллельного потока наблюдаются в общем и по оси OX.

Но на некотором отрезке этой оси OM, отложенном в положительную сторону, имеем

$$\left|\frac{qx}{(x^2)^{3/2}}\right| > v_0.$$

Поэтому на отрезке OM компонент полной скорости будет направлен против набегающего потока. Влияние источника здесь больше влияния плоско-параллельного потока.

Значение компонента скорости u_x на участке OM в направлении положительных X будет убывать от ∞ до нуля. Нулевое значение скорости будет достигнуто в точке M, так называемой „мертвой точке“.

Расстояние точки M от источника нетрудно получить по (54), полагая в нем $(u_x)_{z=0}=0$:

$$l_0 = OM = \sqrt{\frac{q}{v_0}}. \qquad (55)$$

Легко понять, что отрезок OM будет определять собой положение передней „носовой“ точки обтекаемого тела относительно источника.

Соотношение между q и v_0 и поперечными размерами полутела найдется из условия, что расход, выбрасываемый источником, $Q = 4\pi q$, должен быть равен произведению из площади живого сечения полутела на среднюю скорость по этому сечению.

Так как на достаточном отдалении от начала координат полная скорость в пределах полутела может быть принята равной v_0, т. е. скорости набегающего потока, то

$$4\pi q = \frac{\pi D^2}{4} v_0$$

или

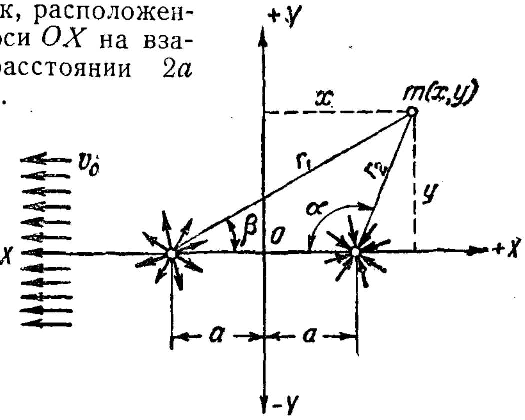
$$q = \frac{D^2}{16} v_0. \tag{56}$$

Подставляя (56) в (55), найдем, что

$$l_0 = + \frac{D}{4}. \tag{57}$$

Формула (56) может быть использована для назначения напряжения источника при заданных D и v_0, а формула (57) для установления места расположения источника по отношению к „носу" полутела.

б) Сложение плоско-параллельного потока с течением, возбуждаемым парой источник—сток в плоскости. Пусть плоско-параллельный поток со скоростью v_0 набегает на течение, возбуждаемое парой источник—сток, расположенных на оси OX на взаимном расстоянии $2a$ (фиг. 48).



Фиг. 48

Функция потенциала скоростей результирующего течения будет равна сумме отдельных потенциалов его составляющих, а именно

$$\Phi(x, y) = -q \ln r_1 + q \ln r_2 \mp v_0 x.$$

В этом уравнении знак минус при $v_0 x$ будет при набегании потока со стороны источника, а знак плюс — при набегании со стороны стока.

Компоненты скорости по осям координат найдем, имея в виду, что $r_1 = \sqrt{y^2 + (x+a)^2}$ и $r_2 = \sqrt{y^2 + (x-a)^2}$,

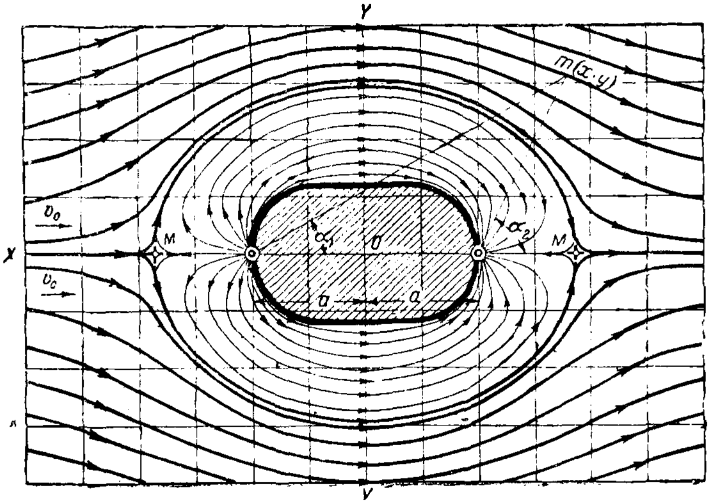
$$\left.\begin{aligned} u_x &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = q\left(\frac{x+a}{r_1^2} - \frac{x-a}{r_2^2}\right) \pm v_0, \\ u_y &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} = q\left(\frac{y}{r_1^2} - \frac{y}{r_2^2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

Интегрирование диференциальных уравнений линий токов приводит к зависимости[1]

$$y = \mp \frac{q}{v_0}(\alpha_1 - \alpha_2) + C,$$

где C — постоянная, различная для различных линий токов, α_1 и α_2 — углы, образованные с осью OX радиусами-векторами, опущенными из рассматриваемой точки в источник и сток (фиг. 49).

Картина такого течения для случая, когда плоско-параллельный поток первым встречает источник, показана на фиг. 49, построенной для $a = 0{,}08\ м$ и $\frac{q}{v_0} = 0{,}1\ м$.



Фиг. 49

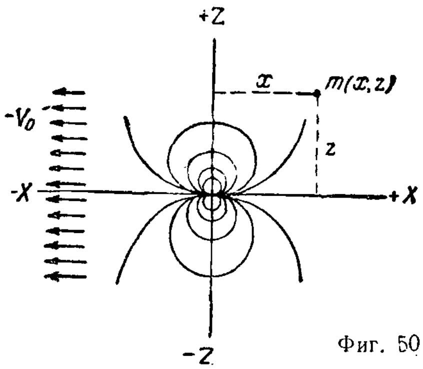
Из рассмотренной фигуры видно, что в результате сложения течений получена картина обтекания потоком тела с цилиндрической боковой поверхностью (на фиг. 49 показано обтекание мостового быка).

Положение мертвых точек M на оси OX определим из (58), приняв $u_x = 0$, в виде

$$x = \sqrt{a^2 + 2a\frac{q}{v_0}}$$

где a — расстояние источника от начала координат, а $\frac{q}{v_0}$ — ширина тела, заштрихованная на фигуре.

в) Сложение плоско-параллельного потока с диполем. Рассмотрим этот важный для практических целей случай (фиг. 50), полагая, что диполь расположен в начале координат.



Фиг. 50

[1] Подробности см. А. Милович, Основы динамики жидкости. Энергоиздат, М., 1933, стр. 32—34.

Учитывая (48) и (52), потенциал скорости суммарного течения найдем равным

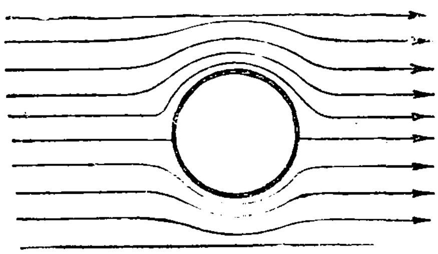
$$\Phi(x,z)=v_0x-\frac{Cx}{(x^2+z^2)^{3/2}},$$

а компоненты скорости по осям координат

$$u_x=-\frac{\partial\Phi}{\partial x}=-v_0+C\,\frac{z^2-2x^2}{(x^2+z^2)^{5/2}}, \qquad (59)$$

$$u_z=-\frac{\partial\Phi}{\partial z}=-C\,\frac{3xz}{(x^2+z^2)^{5/2}}.$$

Результирующее течение дает картину обтекания потенциальным потоком шара или сферы диаметром D (фиг. 51).



Фиг. 51

Значение постоянной диполя C, входящей в эти уравнения, может быть получено, учитывая, что для мертвой точки должны быть соблюдены следующие условия:

$$x=\frac{D}{2};\; z=0;\; u_x=0.$$

Подставляя эти значения в (59), получим

$$0=-v_0-C\,\frac{\frac{D^2}{2}}{\left(\frac{D^2}{4}\right)^{5/2}}=-v_0-\frac{16C}{D^3},$$

откуда постоянная диполя

$$C=-\frac{v_0D^3}{16}.$$

Подставляя значение C в (59), найдем выражения компонентов скоростей в таком виде:

$$\left.\begin{aligned} u_x&=-v_0-\frac{v_0D^3}{16}\cdot\frac{z^2-2x^2}{(x^2+z^2)^{5/2}},\\ u_z&=-\frac{v_0D^3}{16}\cdot\frac{3xz}{(x^2+z^2)^{5/2}}.\end{aligned}\right\} \qquad (60)$$

Последние зависимости могут быть использованы для конкретных расчетов. Из них можно получить выражения для скоростей в непосредственной близости к поверхности шара. В этом случае $x^2+z^2=\frac{D^2}{4}$ и (60) должны быть переписаны так:

$$\left.\begin{aligned} (u_x)_0&=-v_0-\frac{2v_0}{D^2}(z^2-2x^2),\\ (u_z)_0&=-\frac{6v_0}{D^2}zx.\end{aligned}\right\} \qquad (61)$$

С помощью уравнений (61) легко убедиться опять, что скорости $(u_x)_0$, $(u_z)_0$ в точках с координатами $x=\pm\frac{D}{2}$; $z=0$, т. е. непосредственно перед и за сферой, равны нулю.

Наоборот, в точках с координатами $x=0$, $z=\pm\frac{D}{2}$, т. е. в наивысшей и наинизшей точках сферы

$$(u_x)_0=-v-0{,}5v_0=-1{,}5v_0; \qquad (u_z)=0,$$

т. е. полная скорость обтекания в полтора раза превышает скорость плоско-параллельного потока.

Из приведенных примеров видно, что изучение различных видов простых потенциальных движений и выяснение картины более сложных получаемых в результате наложения уже известных потенциальных течений заключают в себе весьма плодотворный метод с большими перспективами.

ГЛАВА III

ДИНАМИКА ИДЕАЛЬНОЙ (НЕВЯЗКОЙ) ЖИДКОСТИ

Характер движения идеальной жидкости с чисто кинематической стороны, как было показано, определяется в основном начальными и пограничными условиями. Однако одна кинематическая характеристика потока недостаточна для целей практики; необходимо знать, какие силы действуют внутри жидкости и в каком соотношении находятся они к кинематическим характеристикам потока; необходимо знать, с какой силой действует поток на обтекаемые им тела и обратно, какова реакция последних на набегающий поток и т. д.

Методы разрешения всего этого многообразия вопросов даются в настоящей главе, рассматривающей основы динамики идеальной (невязкой) жидкости.

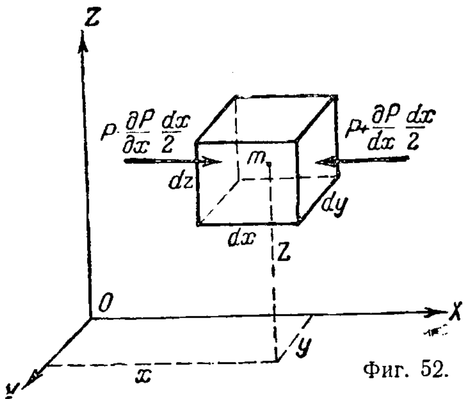
§ 32. Диференциальные уравнения движения идеальной (невязкой) жидкости. Уравнения Леонарда Эйлера

Возьмем элементарный параллелепипед в массе движущейся жидкости (фиг. 52).

Этот параллелепипед находится под действием следующей системы сил:

а) объемных сил, т. е. сил, пропорциональных массе параллелепипеда;

б) поверхностных — давлений окружающей жидкости, действующих по граням параллелепипеда, пропорциональных их площади.



Фиг. 52.

Если плотность жидкости в точке m равна ρ, то масса параллелепипеда будет $\rho dxdydz$.

Установим соотношение между силами, действующими на параллелепипед в направлении, например, оси OX.

Пусть объемная, сила отнесенная к единице массы, равна F с компонентами F_x, F_y, F_z на направления осей координат.

Тогда компонент суммарной объемной силы, действующей на параллелепипед, будет в направлении оси OX равен

$$F_x\rho dxdydz.$$

Пусть давление в точке $m(x, y, z)$ жидкости, которое в случае движения жидкости называют гидродинамическим, будет

$$d\varphi=(x, y, z).$$

Очевидно, среднее гидродинамическое давление по левой грани параллелепипеда будет равно

$$p-\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{dx}{2},$$

а по правой грани

$$p+\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{dx}{2}.$$

Учитывая направление этих давлений, получим суммарную поверхностную силу, действующую на параллелепипед в направлении OX:

$$\left(p-\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{dx}{2}\right)dydz-\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dydz=$$
$$=-\frac{\partial p}{\partial x}dxdydz.$$

Сила инерции, действующая в направлении оси OX, будет равна

$$\rho dxdydz\frac{du_x}{dt}.$$

По принципу Даламбера имеем

$$\rho dxdydzF_x-\frac{\partial p}{\partial x}dxdydz-\rho dxdydz\frac{du_x}{dt}=0$$

или после простых преобразований

$$F_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{du_x}{\partial p}.$$

Аналогичным образом могут быть получены зависимости между силами и ускорениями в направлении осей OY и OZ.

Тогда диференциальные уравнения движения идеальной жидкости выразятся такой системой:

$$\left.\begin{aligned}F_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}&=\frac{du_x}{dt},\\F_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}&=\frac{du_y}{dt},\\F_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}&=\frac{du_z}{dt}.\end{aligned}\right\}\qquad(62)$$

Эти диференциальные уравнения называются уравнениями Эйлера, предложившего их в 1775 г.

Если жидкость находится в покое, то правые части уравнения (62) равны нулю и сами уравнения примут вид (3), установленный в гидростатике, как диференциальные уравнения покоя жидкости.

Принимая во внимание, что компоненты скоростей являются функциями координат пространства и времени, можно уравнения Эйлера представить в развернутой форме:

$$\left.\begin{aligned}F_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}&=\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z},\\F_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}&=\frac{\partial u_y}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_y}{\partial z},\\F_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}&=\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_z}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_z}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}.\end{aligned}\right\}\quad(63)$$

Обратим внимание на число неизвестных, фигурирующих в уравнениях Эйлера.

Объемные силы обычно считаются заданными, плотность ρ для несжимаемой жидкости (а в данном случае рассматривается только таковая) считается постоянной и известной.

Таким образом в системе записанных трех уравнений имеются четыре неизвестных величины

$$p,\ u_x,\ u_y,\ u_z.$$

Следовательно, для решения задачи о движении идеальной жидкости недостает еще одного уравнения, нехватает еще одного условия. Таковым условием можно взять уравнение неразрывности (39)

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0.$$

Уравнение Эйлера в совокупности с уравнением неразрывности представляет собой систему четырех диференциальных уравнений с четырьмя неизвестными. Следовательно, совместным интегрированием этой системы задача о движении жидкости может быть, вообще говоря, разрешена.

§ 33. Уравнения Эйлера в функции компонентов вихря для объемных сил, имеющих потенциал

Из кинематики известно, что все движения идеальной жидкости могут быть подразделены на:

а) безвихревые движения или движения с потенциалом скоростей и

б) вихревые движения.

Уравнения Эйлера (62) или (63) действительны для обоих видов движения. Однако применение их к каждому из них в отдельности позволяет установить различие между поведением жидкости в безвихревом и вихревом движениях не только с точки зрения кинематической, но и с точки зрения энергетической.

Поэтому целесообразно преобразовать уравнения Эйлера так, чтобы форма их явно отражала наличие вихревого или безвихревого движения.

Возьмем первое из уравнений (63)

$$F_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z},$$

прибавим и вычтем в правой его части сумму двух таких членов:

$$u_y\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial x}.$$

Тогда правая часть уравнения может быть приведена к виду:

$$\frac{\partial u_x}{\partial t}+\left[\left(u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\right]+u_z\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)-$$

$$-u_y\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right). \tag{64}$$

Нетрудно убедиться, что часть этого выражения, заключенная в квадратные скобки, представляет не что иное, как частную производную по x от половины квадрата полной скорости жидкости в рассматриваемой точке. В самом деле, если полную скорость жидкости в точке с координатами x, y, z обозначить через u, то по правилам кинематики

$$\frac{u^2}{2}=\frac{u_x^2+u_y^2+u_z^2}{2}$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right)=u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial x}.$$

Что касается двучленов, стоящих в круглых скобках в выражениях (64), то они представляют собой согласно (33) удвоенные величины соответствующих компонентов вихря скорости жидкости в рассматриваемой точке.

Учитывая это, выражение (64) можно переписать так:

$$\frac{\partial u_x}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right)+2\left(u_z\omega-u_y\omega_z\right)$$

и, следовательно, первое из уравнений Эйлера примет вид:

$$F_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial u_x}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right)+2\left(u_z\omega_y-u_y\omega_z\right).$$

Произведя аналогичные операции над другими уравнениями системы (63) или пользуясь правилом цикличных перестановок, уравнения Эйлера можно написать так:

$$\left.\begin{aligned}F_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}&=\frac{\partial u_x}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right)+2\left(u_z\omega_y-u_y\omega_z\right),\\ F_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}&=\frac{\partial u_y}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u^2}{2}\right)+2\left(u_x\omega_z-u_z\omega_x\right),\\ F_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}&=\frac{\partial u_z}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u^2}{2}\right)+2\left(u_y\omega_x-u_x\omega_y\right).\end{aligned}\right\} \tag{65}$$

Уравнения Эйлера в такой форме впервые были даны русским профессором И. С. Громеко в 1881 г.[1].

В этой форме уже очень легко сделать различие между вихревым и безвихревым движением жидкости. В последнем случае компоненты вихря следует приравнять нулю и система уравнений (65) значительно упростится.

Но прежде чем приступить к такому анализу, обратим внимание на объемные силы, которые фигурируют в уравнениях в виде своих компонентов F_x, F_y, F_z.

Большинство массовых сил природы имеет потенциал. Это значит, что существует некоторая силовая функция координат пространства

$$-U=f(x, y, z),$$

обладающая тем свойством, что компоненты объемных сил являются частными производными этой функции по соответствующим координатам, т. е.

$$\left.\begin{aligned}F_x&=-\frac{\partial U}{\partial x},\\ F_y&=-\frac{\partial U}{\partial y},\\ F_z&=-\frac{\partial U}{\partial z}.\end{aligned}\right\} \tag{66}$$

Подставляя эти значения компонентов объемных сил в систему уравнений (65), перепишем ее так:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(-U-\frac{p}{\rho}-\frac{u^2}{2}\right)&=\frac{\partial u_x}{\partial t}+2\left(u_z\omega_y-u_y\omega_z\right),\\ \frac{\partial}{\partial y}\left(-U-\frac{p}{\rho}-\frac{u^2}{2}\right)&=\frac{\partial u_y}{\partial t}+2\left(u_x\omega_z-u_z\omega_x\right),\\ \frac{\partial}{\partial z}\left(-U-\frac{p}{\rho}-\frac{u^2}{2}\right)&=\frac{\partial u_z}{\partial t}+2\left(u_y\omega_x-u_x\omega_y\right).\end{aligned}\right\} \tag{67}$$

---

[1] И. С. Громеко. Некоторые случаи движения несжимаемой жидкости, Казань, 1881.

Таковы будут диференциальные уравнения Эйлера в функции компонентов вихря при условии действия на жидкость объемных сил, имеющих потенциал.

§ 34. Общий интеграл уравнений Эйлера для неустановившегося безвихревого движения. Уравнение Лагранжа-Коши

Система уравнений (67) в общем виде не может быть проинтегрирована. Необходимы те или иные упрощающие предположения. В частности, для неустановившегося движения общий интеграл системы уравнений (67) может быть получен только для безвихревого движения.

В последнем случае компоненты вихря будут

$$\omega_x=0; \quad \omega_y=0; \quad \omega_z=0$$

и компоненты скорости согласно (41)

$$u_x=-\frac{\partial\Phi}{\partial x}; \quad u_y=-\frac{\partial\Phi}{\partial y}; \quad u_z=-\frac{\partial\Phi}{\partial z},$$

где $\Phi(x, y, z, t)$—функция потенциала скоростей.

Следовательно, для безвихревого неустановившегося движения систему уравнений (67) можно переписать так:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-U-\frac{p}{\rho}-\frac{u^2}{2}\right)=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial t\,\partial x},$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-U-\frac{p}{\rho}-\frac{u^2}{2}\right)=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial t\,\partial y},$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\left(-U-\frac{p}{\rho}-\frac{u^2}{2}\right)=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial t\,\partial z},$$

или

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(U+\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}-\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)=0,\\ \frac{\partial}{\partial y}\left(U+\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}-\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)=0,\\ \frac{\partial}{\partial z}\left(U+\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}-\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)=0.\end{aligned}\right\} \tag{68}$$

Из выражений (68) следует, что сумма в скобках, фигурирующая в каждом из уравнений, не зависит от координат x, y, z, а является функцией только времени. Если обозначить эту функцию через $F(t)$, то общий интеграл уравнений (68) представится в виде

$$U+\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}-\frac{\partial\Phi}{\partial t}=F(t).$$

Полученный интеграл называется интегралом Лагранжа-Коши. Функция $F(t)$ есть некоторая произвольная функция времени, имеющая в каждый момент времени вполне определенную величину, одинаковую для всех точек движущейся жидкости.

§ 35. Общий интеграл уравнений Эйлера для установившегося движения. Уравнение Д. Бернулли

В случае установившегося движения, для которого

$$\frac{\partial u_x}{\partial t}=0, \quad \frac{\partial u_y}{\partial t}=0, \quad \frac{\partial u_z}{\partial t}=0,$$

уравнения Эйлера (67) могут быть переписаны так:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-U-\frac{p}{\rho}-\frac{u^2}{2}\right)=2(u_z\omega_y-u_y\omega_z),$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-U-\frac{p}{\rho}-\frac{u^2}{2}\right)=2(u_x\omega_z-u_z\omega_x),$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\left(-U-\frac{p}{\rho}-\frac{u^2}{2}\right)=2(u_y\omega_x-u_x\omega_y).$$

Умножим каждое из этих уравнений в порядке последовательности на dx, dy, dz и просуммируем полученные произведения. В результате получим такое выражение:

$$d\left(-U-\frac{p}{\rho}-\frac{u^2}{2}\right)=2\left[(u_z\omega_y-u_y\omega_z)\,dx+(u_x\omega_z-u_z\omega_x)\,dy+(u_y\omega_x-u_x\omega_y)\,dz\right] \tag{69}$$

или, переписывая его правую часть в виде детерминанта,

$$d\left(-U-\frac{p}{\rho}-\frac{u^2}{2}\right)=2\begin{vmatrix}dx & dy & dz\\ \omega_x & \omega_y & \omega_z\\ u_x & u_y & u_z\end{vmatrix}. \tag{69'}$$

Общий интеграл уравнения (69) получается весьма просто для тех случаев течений идеальной жидкости, для которых правая часть уравнения (69) обращается в нуль.

Для таких случаев, т. е. когда детерминант

$$\begin{vmatrix}dx & dy & dz\\ \omega_x & \omega_y & \omega_z\\ u_x & u_y & u_z\end{vmatrix}=0, \tag{70}$$

имеем

$$d\left(U+\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}\right)=0$$

или

$$U+\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}=\text{const}. \tag{71}$$

Этот весьма важный интеграл называется уравнением Даниила Бернулли. Как будет показано ниже в § 38, сумма членов в уравнении Бернулли (71) представляет собой запас энергии, приходящейся на единицу массы движущейся жидкости.

§ 36. Области действительности (применимости) уравнения Д. Бернулли в установившемся потоке идеальной несжимаемой жидкости

Для выяснения областей применимости уравнения Д. Бернулли установим, при каких условиях правая часть уравнения (69), представленная в виде детерминанта (70), обращается в нуль.

Из теории детерминантов известно, что детерминант обращается в нуль, если какая-нибудь из его строчек или столбцов полностью представлена нулями и, во-вторых, если какие-либо две строчки пропорциональны друг другу.

Значит уравнение Д. Бернулли (71) действительно лишь при наличии одного из следующих условий:

а) $\omega_x=0;\quad \omega_y=0;\quad \omega_z=0;$

б) $\frac{dx}{u_x}=\frac{dy}{u_y}=\frac{dz}{u_z};$

в) $\frac{dx}{\omega_x}=\frac{dy}{\omega_y}=\frac{dz}{\omega_z};$

г) $\frac{\omega_x}{u_x}=\frac{\omega_y}{u_y}=\frac{\omega_z}{u_z}.$

Рассмотрим каждое из этих условий в отдельности:

а) $\omega_x=0;\quad \omega_y=0;\quad \omega_z=0.$

Это — условие безвихревого, потенциального движения жидкости, следовательно, уравнение Д. Бернулли

$$U+\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}=\text{const}$$

применимо ко всему потенциальному потоку в целом.

Постоянная в этом уравнении сохраняет свое значение для всех точек пространства, занятого движущейся жидкостью. Таким образом суммарный запас энергии, приходящейся на единицу массы движущейся жидкости, одинаков по всему потоку.

б) $\frac{dx}{u_x}=\frac{dy}{u_y}=\frac{dz}{u_z}.$

Из кинематики известно, что это условие представляет собой уравнение линии тока (36).

Таким образом уравнение Д. Бернулли действительно и при вихревом движении, но только для каждой отдельной линии тока.

При этом постоянная в уравнении

$$U+\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}=\text{const}$$

будет постоянной уже только для каждой линии тока в отдельности, но для различных линий токов будет, вообще говоря, различной.

в) К аналогичным выводам, но только применительно к вихревой линии можно притти, рассматривая третье условие

$$\frac{dx}{\omega_x}=\frac{dy}{\omega_y}=\frac{dz}{\omega_z}.$$

Значит, в вихревом потоке постоянная уравнения Д. Бернулли будет сохранять свое значение для каждой вихревой линии в отдельности, но, вообще говоря, будет различной для различных вихревых линий.

г) Но есть, оказывается, один единственный вид вихревого движения, когда уравнение Д. Бернулли

$$U+\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}=\text{const}$$

сохраняет свою постоянную для всех точек пространства, занятых потоком.

Такой поток характеризуется четвертым условием

$$\frac{\omega_x}{u_x}=\frac{\omega_y}{u_y}=\frac{\omega_z}{u_z},$$

т. е. случаем, когда в каждой точке пространства направление вихря совпадает с направлением скорости или вихревые линии совпадают с линиями тока. Такой поток называется винтовым. В таком потоке линии токов и вихревые линии представляют собой семейства совпадающих винтовых линий.[1]

Установив области применения уравнения (71) Бернулли, отметим, что в каждом отдельном случае прежде всего нужно расшифровать потенциал объемных сил, обозначенный в уравнении символом U.

Конкретизируем это для наиболее частого случая, когда из объемных сил на жидкость действуют только силы тяжести.

Так как сила тяжести дает единственное ускорение g, направленное вертикально вниз, то компоненты объемных сил, действующих на единицу массы жидкости, будут

$$F_x=0,\quad F_y=0 \text{ и } F_z=-g.$$

Учитывая (66), имеем

$$dU=gdz,$$

откуда функция потенциала объемных сил (силовая функция)

$$U=gz+\text{const}.$$

Уравнение Бернулли в этом случае вместо (71) запишем в виде

$$gz+\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}=\text{const}$$

или, обозначая вес единицы объема жидкости $\gamma=\rho g$, получаем

$$z+\frac{p}{\gamma}+\frac{u^2}{2g}=\text{const}. \qquad (72)$$

---

[1] Более подробно см. А. Я. Милович, основы динамики жидкости, М., 1933, § 14—18.

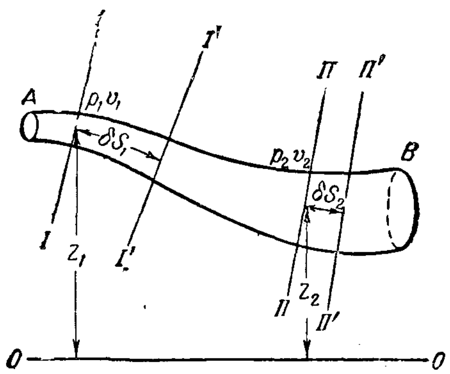
Таково будет уравнение Бернулли для несжимаемой идеальной жидкости, находящейся под воздействием только силы тяжести.

§ 37. Вывод уравнения Д. Бернулли из закона живых сил

Выше был дан вывод уравнения Д. Бернулли, исходя из уравнений Эйлера.

В частном случае применительно к отдельной струйке идеальной жидкости уравнение Д. Бернулли (72) можно получить, исходя из закона живых сил.

Выделим двумя сечениями *I-I* и *II-II* отсек некоторой струйки жидкости *AB* (фиг. 53).



Фиг. 53

Пусть положение центров тяжести сечений отсека ω_1 и ω_2 относительно произвольной горизонтальной плоскости сравнения *0-0* определяется в некоторый момент времени ординатами z_1 и z_2.

Пусть давления в центре тяжести сечений *I-I* и *II-II* будут p_1 и p_2, а скорости—v_1 и v_2 соответственно.

Спустя промежуток времени Δt, частицы жидкости, находившиеся в сечении *I-I*, переместятся в положение *I'-I'*, на расстояние $\delta s_1 = v_1 \Delta t$ от первоначального положения, а частицы, находившиеся в сечении *II-II*, переместятся в положение *II'-II'*, на расстояние $\delta s_2 = v_2 \Delta t$.

Силы, действующие на отсек, произведут при этом некоторую работу. На основании закона живых сил эта работа должна быть равна приращению живой силы отсека.

Ограничим рассмотрение вопроса случаем, когда кроме сил давления по граничным поверхностям струйки единственными объемными силами, действующими на выделенный отсек идеальной жидкости, являются силы тяжести.

Так как давления окружающей массы жидкости направлены по нормалям к пограничным поверхностям струйки, то силы давления, действующие по боковым поверхностям, ограничивающим струйку, никакой работы при перемещении не произведут. Следовательно, работа сил давления проявится лишь в крайних сечениях струйки.

Она будет равна:

$$p_1 \omega_1 \delta s_1 - p_2 \omega_2 \delta s_2 = p_1 \omega_1 v_1 \Delta t - p_2 \omega_2 v_2 \Delta t = q \cdot \Delta t (p_1 - p_2),$$

где $q = v_1 \omega_1 = v_2 \omega_2$ — расход через сечения струйки.

Работа сил тяжести эквивалентна работе, совершаемой лишь массой отсека *I-I'*, переместившейся на разность высот $z_1 - z_2$, и, следовательно, здесь равна

$$\gamma \omega_1 \delta s_1 (z_1 - z_2) = \gamma q (z_1 - z_2) \Delta t.$$

Нетрудно также убедиться, что суммарное приращение живой силы отсека струйки за время Δt равно разности живых сил элементов *II-II'* и *I-I'*, ибо в пределах средней (*I'-II*) части живая сила движущихся масс жидкости остается неизменной. Итак, приращение живых сил равно

$$\frac{\gamma}{g} \delta s_2 \omega_2 \frac{v_2^2}{2} - \frac{\gamma}{g} \delta s_1 \omega_1 \frac{v_1^2}{2} = \frac{\gamma}{g} q \Delta t \left(\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} \right).$$

В результате можем записать:

$$\frac{\gamma}{g} q \Delta t \left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} \right) = q \Delta t \left(p_1 - p_2 \right) + \gamma q \Delta t \left(z_1 - z_2 \right)$$

и после простых преобразований получить уравнение Бернулли

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} = \text{const}. \qquad (73)$$

§ 38. Интерпретация уравнения Д. Бернулли

Рассмотрим уравнение Д. Бернулли, выведенное для идеальной несжимаемой жидкости, находящейся под воздействием только силы тяжести

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} = \text{const},$$

и обратим внимание на размерность его членов.

Рассмотрим каждый из членов в отдельности применительно к некоторой линии тока или вихревой линии движущейся жидкости.

Первый член уравнения z имеет явно выраженную линейную размерность и определяет высоту положения различных точек линии тока (вихревой линии) над плоскостью сравнения. Этот член называется высотой положения.

Второй член $\frac{p}{\gamma}$, как это видно из уравнения (6') гидростатики, также имеет размерность высоты. Член $\frac{p}{\gamma}$ называется пьезометрической высотой (высота давления).

Третий член уравнения Д. Бернулли $\frac{u^2}{2g}$ имеет размерность

$$\left[\frac{L^2}{T^2}\,\frac{T^2}{L}\right]=\left[\,L\,\right],$$

т. е. также длины. Он представляет собой, как известно из физики, некоторую высоту, падая с которой, при отсутствии каких-либо сопротивлений, жидкость приобретает как раз скорость u. Этот член называется скоростным напором.

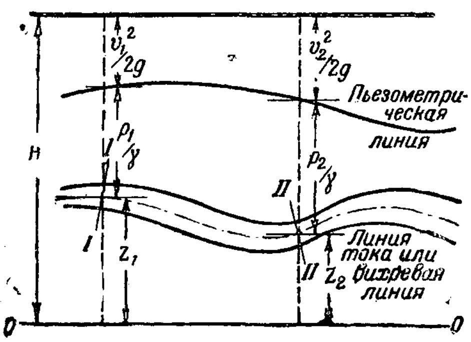
Итак, уравнение Д. Бернулли может быть формулировано так:

для всех точек линии тока (струйки) или вихревой линии (струйки) сумма трех высот — положения, давления и скоростного напора — есть величина постоянная.

Обозначим эту постоянную через H и перепишем уравнение (72) так:

$$z+\frac{p}{\gamma}+\frac{u^2}{2g}=H.$$

Если условиться откладывать над каждой точкой линии тока пьезометрическую высоту и затем высоту скоростного напора (фиг. 54), то геометрическое место концов сумм этих отрез-



Фиг. 54

ков расположится на определенной (для каждой данной линии тока или вихря) горизонтальной плоскости, находящейся над плоскостью сравнения на высоте H. Эта плоскость называется „напорной плоскостью", а высота H ее расположения над плоскостью сравнения — „напором"

Если ограничиться отложением лишь пьезометрических напоров, то геометрическое место верхних концов таких отрезков представится, вообще говоря, некоторой пространственной, так называемой „пьезометрической линией".

Изменение пьезометрического напора, отнесенное к единице длины, называется пьезометрическим уклоном.

Рассмотренную геометрическую интерпретацию интересно приложить для наглядного отражения различия между вихревым и потенциальным потоком.

Потенциальный поток (и поток винтового движения) должен иметь одну и только одну напорную плоскость.

Наоборот, вихревой (но не винтовой поток) будет характеризоваться различными расположениями напорных плоскостей для различных совокупностей линий токов и вихревых линий.

Весьма важно отметить, что высота H изображает геометрически запас энергии (относительно избранной плоскости сравнения), приходящийся на единицу веса жидкости, движущейся вдоль линии тока.

В этом легко убедиться, переписав уравнение (73) в таком виде:

$$z_1(\gamma q\Delta t)+\frac{p_1}{\gamma}(\gamma q\Delta t)+\frac{v_1^2}{2g}(\gamma q\Delta t)=z_2(\gamma q\Delta t)+$$
$$+\frac{p_2}{\gamma}(\gamma q\Delta t)+\frac{v_2^2}{2g}(\gamma q\Delta t), \qquad (74)$$

где введенный общий множитель $\gamma q\Delta t$ представляет собой вес жидкости, прошедший через сечение струйки за время Δt.

Очевидно, что каждый член уравнения (74) имеет размерность работы, размерность энергии.

Относя уравнение (74) к единице веса жидкости, мы вправе утверждать, что в уравнении Бернулли (73) все члены выражают собой энергию, несомую каждой единицей веса жидкости, проходящей через сечения рассматриваемой струйки.

А сумма всех членов будет выражать суммарную, потенциальную и кинетическую энергию, отнесенную к единице веса протекающей жидкости.

Энергия, отнесенная к единице веса жидкости, исчисленная относительно произвольно выбранной горизонтальной плоскости, называется „удельной энергией".

Так, например, члены $\frac{v_1^2}{2g}$ и $\frac{v_2^2}{2g}$ в уравнении (73) выражают собой „кинетическую удельную энергию", присущую каждой единице веса жидкости в соответствующих сечениях.

Члены $\frac{p_1}{\gamma}$ и $\frac{p_2}{\gamma}$ в том же уравнении представляют собой „удельную энергию давления", приходящуюся на каждую единицу веса жидкости в рассматриваемых сечениях.

Наконец, члены z_1 и z_2 представляют собой „удельную энергию положения" единицы веса жидкости, проходящей через сечения.

Энергии положения и давления в сумме составляют „удельную потенциальную энергию", приходящуюся на каждую единицу веса жидкости.

Таким образом энергетический смысл уравнения Д. Бернулли заключается в том, что „суммарная удельная энергия", т. е. энергия, присущая каждой единице веса движущейся идеальной жидкости и состоящая из кинетической и потенциальной, остается неизменной.

Остается теперь опять подчеркнуть различие между потенциальным и вихревым потоком уже с точки зрения энергетической.

В потоке идеальной жидкости потенциальном и винтовом удельная суммарная энергия распределена равномерно по всему потоку. В потоке же непотенциальном — вихревом (за исключением винтового) удельная энергия распределена по потоку неравномерно и сохраняет постоянное значение лишь по поверхностям соответственных линий токов и вихревых линий.

ГЛАВА IV

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ РЕАЛЬНОЙ (ВЯЗКОЙ) ЖИДКОСТИ

§ 39. Специфика реальной жидкости. Компоненты сил вязкости в функции поверхностных напряжений

В предыдущих главах мы оперировали с понятием „идеальная“ жидкость. Эта условная научная абстракция позволила, исходя из предположения полного отсутствия какого бы то ни было сцепления между частицами жидкости, установить уравнение движения жидкости с гидродинамическими напряжениями, только нормальными к поверхностям раздела.

Между тем любая реально существующая в природе жидкость в той или иной степени обладает внутренним сцеплением и способна оказывать то или иное сопротивление растягивающим и касательным усилиям.

Опыт показывает, что эти сопротивления в движущейся жидкости могут стать значительными, возрастая с ростом скорости относительного движения.

Свойство реальных жидкостей оказывать сопротивление растягивающим и касательным усилиям, именуемое вязкостью, существенно отличает их от рассмотренной выше абстрактной „идеальной“ жидкости, а количественное проявление этого свойства (вязкости) отличает между собой различные реальные жидкости или даже одну и ту же жидкость, но при различной, например, температуре.

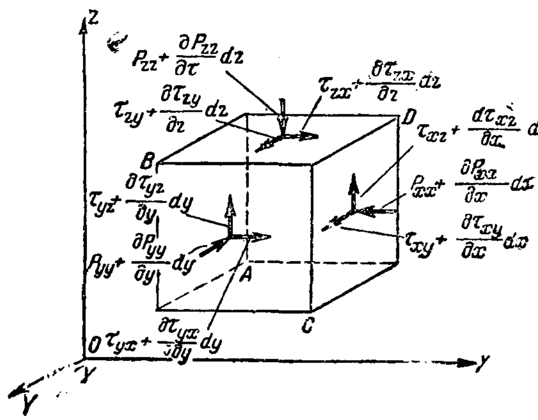
Физические явления, связанные с проявлением сил вязкости, весьма сложны по своему существу. Однако для предстоящего теоретического анализа нам нет пока необходимости вскрывать внутренний механизм возникновения сил сопротивления движению жидкости вследствие ее вязкости.

Ограничиваясь выявлением суммарного эффекта сил вязкости, необходимо для учета всех сил, влияющих на формирование движения вязкой жидкости, вводить в рассмотрение некоторую добавочную силу на поверхностях раздела помимо тех сил, которые уже нами были учтены для идеальной жидкости.

Эту добавочную силу на любой поверхности раздела будем рассматривать в виде ее нормальной и касательной составляющих.

Если к уравнениям Леонарда Эйлера (62), выведенным для идеальной жидкости, добавить компоненты сил вязкости, то, очевидно, будут получены уравнения движения реальной жидкости.

Рассмотрим элементарный параллелепипед, выделенный в массе вязкой жидкости (фиг. 55).



Фиг. 55

Компоненты дополнительных напряжений от действия сил вязкости будем обозначать, как это показано в табл. 5, где нормальные компоненты обозначены символами p, касательные — τ. Первый индекс при этих символах указывает площадку, к которой приложено то или иное напряжение, через направление нормали к ней, второй — направление действия напряжения.

Общие выражения для компонентов сил вязкости, действующих на параллелепипед, будут равны сумме проекций поверхностных сил на оси координат.

Так, проекция сил вязкости на ось OX будет

$$X_в = -p_{xx}dydz + (p_{xx} + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x}dx)dydz -$$

$$-\tau_{yx}dxdz + (\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}dy)dxdz -$$

$$-\tau_{zx}dxdy + (\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}dz)dxdy$$

или, после простых преобразований,

$$X_в = \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)dxdydz. \qquad (75)$$

Таблица 5

Грань	Обозначение дополнительных напряжений от сил вязкости	
	нормальных	касательных
AB	p_{xx}	τ_{xy}, τ_{xz}
CD	$p_{xx}+\dfrac{\partial p_{xx}}{\partial x}dx$	$\begin{cases}\tau_{xy}+\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}dx\\ \tau_{xz}+\dfrac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}dx\end{cases}$
AD	p_{yy}	τ_{yx}, τ_{yz}
BC	$p_{yy}+\dfrac{\partial p_{yy}}{\partial y}dy$	$\begin{cases}\tau_{yx}+\dfrac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy\\ \tau_{yz}+\dfrac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}dy\end{cases}$
AC	p_{zz}	τ_{zx}, τ_{zy}
BD	$p_{zz}+\dfrac{\partial p_{zz}}{\partial z}dz$	$\begin{cases}\tau_{zx}+\dfrac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}dz\\ \tau_{zy}+\dfrac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}dz\end{cases}$

Аналогично могут быть найдены выражения для вязкостного компонента и в направлении других осей.

Уравнение (75) записано пока символически через частные производные нормальных и касательных вязкостных напряжений. Поэтому перейдем к установлению величин этих напряжений.

§ 40. Касательные напряжения от действия *сил вязкости*

В § 2 было приведено положение Ньютона

$$\tau=\pm\mu\frac{du}{dn}\,(кг/м^2 \text{ или } дин/см^2).$$

Здесь τ — касательное напряжение сил трения (вязкости);

$\frac{du}{dn}$ — градиент скорости по нормали к перемещающимся слоям;

μ — коэфициент пропорциональности, так называемый коэфициент вязкости.

В § 22 было показано, что относительный сдвиг каждой пары параллельных граней параллелепипеда определяется скоростью деформации прямого угла.

Следовательно, относительный сдвиг, например, грани BD по сравнению с гранью AC будет определяться величиной $\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)$.

Тогда для касательного напряжения на грани AC можно записать

$$\tau_{zx}=\mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial z}\right).$$

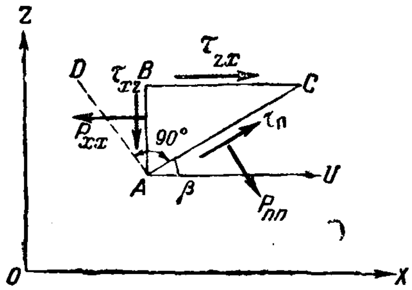
Составляя аналогичные выражения и для других граней, убеждаемся, что перестановка индексов при τ не изменяет результата.

Следовательно, приходим к выводу, что касательные напряжения по двум взаимно перпендикулярным плоскостям в любой точке пространства равны друг другу и определяются уравнениями:

$$\left.\begin{aligned}\tau_{xy}&=\tau_{yx}=\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right),\\ \tau_{xz}&=\tau_{zx}=\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}\right),\\ \tau_{yz}&=\tau_{zy}=\mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial y}\right).\end{aligned}\right\}\qquad(76)$$

§ 41. Нормальные напряжения от действия сил вязкости

Выделим около точки A призму ABC с гранью AC, наклоненной под углом β к оси OX, и другими гранями AB и BC, параллельными осям координат OZ и OX (фиг. 56).



Фиг. 56

Оси координат выберем так, что ось абсцисс будет параллельна полной скорости u в точке A жидкости ($u_x=u$ и $u_z=0$). Тогда по грани призмы BC будет действовать только касательное вязкостное напряжение τ_{zx}, равное в силу (76) в этом частном случае

$$\tau_{zx}=\mu\frac{\partial u_x}{\partial z}.$$

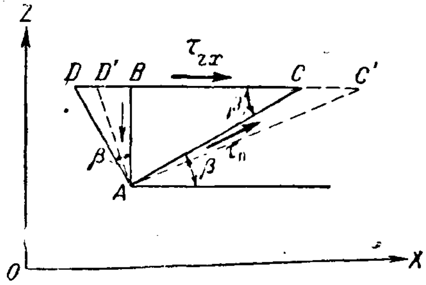
Однако по другим граням призмы должны действовать как касательные, так и нормальные напряжения.

Пусть они равны соответственно τ_{xz} и p_{xx} по грани AB и τ_n и p_{nn} по грани AC.

Как было отмечено выше, касательные напряжения для любых взаимно перпендикулярных плоскостей могут быть определены через скорость деформации прямого угла между этими плоскостями.

Поэтому для определения τ_n необходимо установить скорость деформации прямого угла DAC в точке A (фиг. 57).

Найдем скорость этой деформации как разницу углов CAC' и DAD', образуемых конечными положениями граней AC' и AD' призмы по сравнению с начальными AC и AD по истечении промежутка времени, равного единице.



Фиг. 57

Учитывая, что скорость u является функцией двух координат x и z и что помимо углового смещения линия BC должна претерпеть и удлинение, найдем (в виду малости угла)

$$\angle CAC' = \frac{\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} AB + \frac{\partial u_x}{\partial x} BC\right)\sin\beta}{AC} = \frac{\partial u_x}{\partial z}\sin^2\beta + \frac{\partial u_x}{\partial x}\sin\beta\cos\beta.$$

Равным образом

$$\angle DAD' = \frac{\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} AB - \frac{\partial u_x}{\partial x} BD\right)\cos\beta}{AD} = \frac{\partial u_x}{\partial z}\cos^2\beta - \frac{\partial u_x}{\partial x}\sin\beta\cos\beta.$$

Отсюда искомое изменение угла DAC равно

$$\angle CAC' - \angle DAD' = \frac{\partial u_x}{\partial z}(\sin^2\beta - \cos^2\beta) + 2\frac{\partial u_x}{\partial x}\sin\beta\cos\beta.$$

Следовательно, касательное напряжение τ_n будет

$$\tau_n = \mu\left[\frac{\partial u_x}{\partial z}(\sin^2\beta - \cos^2\beta) + 2\frac{\partial u_x}{\partial x}\sin\beta\cos\beta\right].$$

Теперь спроектируем все силы, действующие на призму ABC, на направление AC, и приравняем сумму проекций нулю:

$$-p_{xx}AB\cos\beta + \tau_{zx}BC\cos\beta - \tau_{xz}AB\sin\beta + \tau_n AC = 0.$$

Подставляя сюда выражения для $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ и τ_n, уравнение это можно переписать так:

$$-p_{xx}AB\cos\beta + \mu\frac{\partial u_x}{\partial z}BC\cos\beta - \mu\frac{\partial u_x}{\partial z}AB\sin\beta + \mu\left[\frac{\partial u_x}{\partial z}(\sin^2\beta - \cos^2\beta) + 2\frac{\partial u_x}{\partial x}\sin\beta\cos\beta\right]AC = 0;$$

заменяя $AB = AC\sin\beta$ и $BC = AC\cos\beta$, имеем

$$-p_{xx}\sin\beta\cos\beta + \mu\frac{\partial u_x}{\partial z}\cos^2\beta - \mu\frac{\partial u_x}{\partial z}\sin^2\beta + \mu\frac{\partial u_x}{\partial z}(\sin^2\beta - \cos^2\beta) + 2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x}\sin\beta\cos\beta = 0.$$

Отсюда находим искомое добавочное нормальное напряжение от сил вязкости

$$p_{xx} = 2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x}.$$

Аналогично могут быть записаны вязкостные нормальные напряжения, действующие в направлении других осей:

$$p_{yy} = 2\mu\frac{\partial u_y}{\partial y} \text{ и } p_{zz} = 2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

Полученные добавочные нормальные напряжения от действия сил вязкости будут растягивающими.

Если для идеальной жидкости гидродинамическое напряжение обозначим p, то с учетом вязкости будем иметь

$$p_x = p - 2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x};\ p_y = p - 2\mu\frac{\partial u_y}{\partial y};\ p_z = p - 2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

Как видим, в общем случае величина гидродинамического давления в **вязкой** жидкости зависит от направления этого давления.

В механике вязкой жидкости за гидродинамическое давление в точке принимают среднее арифметическое гидродинамических давлений по трем взаимно перпендикулярным направлениям

$$p_{вяз} = \frac{p_x + p_y + p_z}{3},$$

которое уже не зависит от направления.

§ 42. Выражение компонентов сил вязкости в функции компонентов скорости

Подставляя выражения для p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} и (76) в уравнение (75), получим

$$X_в = \left[2\mu\frac{\partial^2 u_x}{dx^2} + \mu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) + \mu\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\right]dxdydz$$

или после простых преобразований

$$X_в = \mu\left[\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\right]dxdydz.$$

Учитывая, условие неразрывности (39) для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0$$

и поступая аналогично для компонентов $Y_в$ и $Z_в$, получим окончательно

$$\left.\begin{aligned}X_в&=\mu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right)dxdydz,\\ Y_в&=\mu\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\right)dxdydz,\\ Z_в&=\mu\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right)dxdydz.\end{aligned}\right\} \qquad (77)$$

Таковы значения компонентов вязкостных сил, действующих на элементарный параллелепипед, выраженные в функциях компонентов скоростей движения жидкости.

Отметим, что кинематический смысл сумм трех членов, стоящих в скобках в уравнениях (77), связан с понятием о вихре, разобранном в кинематике.

Согласно (33) компоненты вихря по осям координат в функции компонентов скоростей выражаются так:

$$\omega_x=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial z}\right),$$

$$\omega_y=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial x}\right),$$

$$\omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right).$$

Найдем компоненты так называемых „вторых вихрей“ или „вихрей от вихрей“, строя их из компонентов вихрей по тому же правилу, которым сами вихри связаны с компонентами скоростей. Так, например, компонент ξ второго вихря в направлении оси OX будет равен

$$\xi_x=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\omega_z}{\partial y}-\frac{\partial\omega_y}{\partial z}\right).$$

Подставляя в это выражение значения ω_z и ω_y из (33), получим после простых преобразований

$$\xi_x=\frac{1}{4}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right)\right].$$

Прибавляя и вычитая к сумме, стоящей в квадратных скобках, величину $\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}$ и учитывая уравнение неразрывности (39), найдем

$$\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right)=-4\xi_x.$$

Заменяя в уравнениях (77) трехчлены в круглых скобках их выражениями через соответствующие компоненты вторых вихрей, можно компоненты вязкостных сил записать и в таком виде:

$$\left.\begin{aligned}X_в&=-4\mu\xi_x dxdydz,\\ Y_в&=-4\mu\xi_y dxdydz,\\ Z_в&=-4\mu\xi_z dxdydz,\end{aligned}\right\} \qquad (77')$$

где ξ с соответствующим индексом — компоненты „вторых вихрей“ по осям координат.

§ 43. Общее уравнение Навье-Стокса

При выводе уравнений Эйлера для идеальной жидкости (§ 31) были учтены все силы кроме сил вязкости. Поэтому диференциальные уравнения движения реальной жидкости могут быть получены из уравнений (62), если к правым частям последних прибавить компоненты сил вязкости согласно (77). Выполняя это и сокращая обе части на $\rho dx\,dy\,dz$, получим

$$\left.\begin{aligned}\frac{du_x}{dt}&=F_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right)\\ \frac{du_y}{dt}&=F_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\right),\\ \frac{du_z}{dt}&=F_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right).\end{aligned}\right\} \qquad (78)$$

Написанные диференциальные уравнения движения вязкой жидкости были получены в 1826 г. Навье и в 1847 г. Стоксом[1] и известны под названием уравнений Навье-Стокса.

Уравнения Навье-Стокса (78), пользуясь обозначением (77'), могут быть записаны и в такой форме:

$$\left.\begin{aligned}\frac{du_x}{dt}&=F_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}-4\nu\xi_x,\\ \frac{du_y}{dt}&=F_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}-4\nu\xi_y,\\ \frac{du_z}{dt}&=F_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-4\nu\xi_z,\end{aligned}\right\} \qquad (79)$$

где $\nu=\frac{\mu}{\rho}$ —кинематический коэфициент вязкости жидкости.

Уравнения Навье-Стокса совместно с уравнением неразрывности (39) дают систему совокупных диференциальных уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости.

Так как число неизвестных u_x, u_y, u_z, p равно числу уравнений, причем все силы, действующие на жидкость, учтены, то уравнения Навье-Стокса в форме (78) или (79) принципиально дают возможность совершенно строгого решения вопроса о движении вязкой несжимаемой жидкости.

---

[1] Кроме того эти уравнения были исследованы в 1831 г. Пуассоном и в 1843 г. Баррэ де Сен-Венаном.

Однако при современном состоянии математического анализа решения уравнений Навье-Стокса найдены лишь для весьма ограниченного числа частных случаев. Одно из таких решений и рассмотрим.

§ 44. Уравнение Д. Бернулли для струйки реальной жидкости

В качестве весьма важного приложения уравнений Навье-Стокса рассмотрим движение струйки реальной жидкости.

Пусть уравнение оси такой струйки известно, а также известны значения компонентов ξ (вторых вихрей) для всех точек оси струйки.

Напишем уравнения (79) Навье-Стокса в развернутом виде, ограничиваясь рассмотрением только установившегося движения:

$$\left.\begin{aligned} u_x \frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y \frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z \frac{\partial u_x}{\partial z}&=F_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}-4\nu\xi_x,\\ u_x \frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y \frac{\partial u_y}{\partial y}+u_z \frac{\partial u_y}{\partial z}&=F_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}-4\nu\xi_y,\\ u_x \frac{\partial u_z}{\partial x}+u_y \frac{\partial u_z}{\partial y}+u_z \frac{\partial u_z}{\partial z}&=F_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-4\nu\xi_z. \end{aligned}\right\} \quad (79')$$

Пусть объемные силы, действующие на жидкость, имеют потенциал, так что

$$F_x=-\frac{\partial U}{\partial x};\ F_y=-\frac{\partial U}{\partial y};\ F_z=-\frac{\partial U}{\partial z},$$

где $U=F(x, y, z)$ — потенциал объемных сил. В таком случае уравнение (79′) перепишется так:

$$\left.\begin{aligned} 4\nu\xi_x&=-\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}-\left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y \frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z \frac{\partial u_x}{\partial z}\right),\\ 4\nu\xi_y&=-\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}-\left(u_x \frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y \frac{\partial u_y}{\partial y}+u_z \frac{\partial u_y}{\partial z}\right),\\ 4\nu\xi_z&=-\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-\left(u_x \frac{\partial u_z}{\partial x}+u_y \frac{\partial u_z}{\partial y}+u_z \frac{\partial u_z}{\partial z}\right). \end{aligned}\right\} \quad (80)$$

Для всех точек оси струйки должно удовлетворяться уравнение линии тока (36):

$$\frac{dx}{u_x}=\frac{dy}{u_y}=\frac{dz}{u_z}.$$

Поэтому в уравнениях (80) можно взамен u_y и u_z подставить величины:

$$u_y=u_x\frac{dy}{dx};\ u_z=u_x\frac{dz}{dx}.$$

После этого взамен суммы трех членов, стоящих в скобках в правой части первого из уравнений (80), можно написать

$$\left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y \frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z \frac{\partial u_x}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_x^2}{2}\right).$$

Аналогичные преобразования могут быть проделаны в отношении подобных сумм в каждом из уравнений (80). После чего получим:

$$\left.\begin{aligned} \left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y \frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z \frac{\partial u_x}{\partial z}\right)&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_x^2}{2}\right),\\ \left(u_x \frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y \frac{\partial u_y}{\partial y}+u_z \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u_y^2}{2}\right),\\ \left(u_x \frac{\partial u_z}{\partial x}+u_y \frac{\partial u_z}{\partial y}+u_z \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)&=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u_z^2}{2}\right). \end{aligned}\right\} \quad (81)$$

Умножим первое из уравнений (80) на dx, второе на dy, третье на dz и сложим результаты. Тогда, учитывая (81), получим:

$$\begin{aligned} 4\nu(\xi_x dx+\xi_y dy+\xi_z dz) &= -\\ -\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\frac{\partial U}{\partial z}dz\right)&-\\ -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz\right)&-d\frac{(u_x^2+u_y^2+u_z^2)}{2}. \end{aligned} \quad (82)$$

В левой части уравнения (82) стоит величина, равная (как то следует из предыдущего) работе сил вязкости, затраченной при перемещении единицы массы жидкости на расстояние $ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$.

Обозначим эту работу так:

$$4\nu(\xi_x dx+\xi_y dy+\xi_z dz)=dR_в.$$

Первый и второй члены правой части (82) представляют собой полные диференциалы потенциала объемных сил и давления:

$$\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\frac{\partial U}{\partial z}dz=dU,$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz=dp.$$

Учитывая три последних выражения, перепишем (82) так:

$$dR_в=-dU-\frac{1}{\rho}dp-d\left(\frac{u^2}{2}\right), \quad (83)$$

где через u обозначена полная скорость частицы жидкости

$$u=\sqrt{u_x^2+u_y^2+u_z^2}.$$

Интегрируя уравнение (83) по длине s от некоторой начальной точки в направлении движения жидкости по оси струйки, найдем

$$\int_0^s dR_в=-\left(U+\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}\right)+C. \quad (84)$$

Постоянная интегрирования C может быть найдена из следующих соображений.

Пусть некоторой начальной точке, т. е. при $s=0$, соответствуют значения

$$U=U_1;\ p=p_1;\ u=u_1.$$

Тогда уравнение (84) перепишется так:

$$0=-U_1-\frac{p_1}{\rho}-\frac{u_1^2}{2}+C,$$

откуда

$$C=U_1+\frac{p_1}{\rho}+\frac{u_1^2}{2}.$$

Поэтому взамен (84) можно написать

$$\int_0^s dR_в=\left(U_1+\frac{p_1}{\rho}+\frac{u_1^2}{2}\right)-\left(U+\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}\right).$$

Это и есть уравнение Д. Бернулли для струйки реальной жидкости.

Как и следовало ожидать, в струйке реальной жидкости запас удельной энергии в двух различных ее сечениях неодинаков, как то имеет место в идеальной струйке, а разнится на работу сил вязкости

$$R_в=4\nu\int_0^s(\xi_x\,dx+\xi_y dy+\xi_z dz).$$

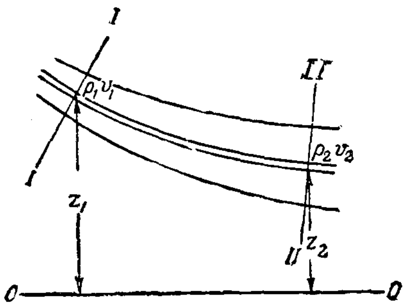
Обозначив работу сил вязкости, потерянную единицей веса жидкости, находящейся только под воздействием сил тяжести, при перемещении ее из сечения *I-I* струйки в сечение *II-II*, равную $\frac{R_в}{g}$, через $h_в$, получим уравнение Бернулли в таком виде:

$$\frac{p_1}{\gamma}+z_1+\frac{u_1^2}{2g}=\frac{p_2}{\gamma}+z_2+\frac{u_2^2}{2g}+h_в.$$

В общем виде уравнение Бернулли для реальной жидкости с учетом всех сил сопротивления, возникающих при движении жидкости, напишется так:

$$\frac{p_1}{\gamma}+z_1+\frac{u_1^2}{2g}=\frac{p_2}{\gamma}+z_2+\frac{u_2^2}{2g}+h_{mp},$$

где h_{mp} — работа всех сил сопротивления, потерянная единицей веса жидкости при перемещении ее из сечения *I-I* в сечение *II-II* (фиг. 58).



Фиг. 58.

§ 45. Уравнение Д. Бернулли для потока реальной жидкости

Пусть поток жидкости находится в условиях плавной изменяемости.

Само определение плавно изменяющегося движения (§ 26) позволяет характеризовать поле скоростей системой уравнений:

$$u_x=f(x,y,z),$$
$$u_y=0,$$
$$u_z=0,$$

где $f(x, y, z)$ — любая, вообще говоря, функция координат пространства.

Напишем уравнения Навье-Стокса (79), учитывая, что поле скоростей определяется одним уравнением $u_x=f(x, y, z)$,

$$u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}=F_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right),$$

$$0=F_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},$$

$$0=F_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

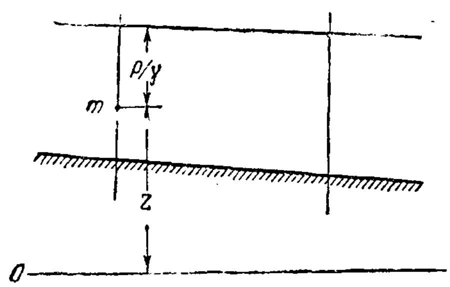
Последние два уравнения представляют собой не что иное, как основные уравнения гидростатики Эйлера. Следовательно, в плоскостях, параллельных плоскости YOZ, давления распределяются по гидростатическому закону.

А так как эти плоскости совпадают с плоскостями живых сечений рассматриваемого потока, то получаем весьма важный вывод:

гидродинамические давления в живых сечениях плавно изменяющегося потока распределяются по законам гидростатики.

Это обстоятельство дает возможность применить уравнение Д. Бернулли не только для отдельной струйки, но и для всего плавно изменяющегося потока жидкости в целом.

Выделим какой-нибудь участок потока жидкости, расположенный между двумя сечениями, движение в которых удовлетворяет условиям плавной изменяемости. Пусть на фиг. 59 изображен продольный профиль потока, отнесенный к плоскости сравнения *0-0*.



Фиг. 59.

Выделим некоторую точку m в пределах одного из сечений. Запас потенциальной энергии $\left(z+\frac{p}{\gamma}\right)$ в этой точке, выражаемый суммой высоты положения z и высоты давления $\frac{p}{\gamma}$, будет величиной постоянной и не зависящей от положения точки m.

Однако запас кинетической энергии $\frac{u^2}{2g}$ будет различным для разных положений точки.

Нетрудно вычислить среднее значение этого запаса энергии по сечению. В самом деле, пусть площадь сечения равна ω, расход через сечение Q, так что средняя скорость

$$v=\frac{Q}{\omega}.$$

Местные скорости u будут отличаться от средней на величину $\pm\Delta u$, так что

$$u=v\pm\Delta u,$$

где Δu с одинаковой вероятностью может быть величиной положительной и отрицательной.

Поэтому сумма произведений дополнительного члена Δu на соответствующую элементарную площадку $\Delta\omega$, распространенная по всему сечению ω, должна быть равна нулю:

$$\sum_{\omega}\Delta u\Delta\omega=0. \tag{85}$$

Теперь найдем живую силу массы жидкости, проходящей в единицу времени через сечение ω. Она будет равна

$$\Sigma\frac{mu^2}{2}=\frac{\gamma}{g}\,\Sigma\frac{u^3\Delta\omega}{2}=\frac{\gamma}{g}\,\Sigma\left(\frac{v^3+3v\Delta u^2\pm3v^2\Delta u\pm\Delta u^3}{2}\right)\Delta\omega.$$

Последним членом в скобках можно пренебречь вследствие его относительной малости и потому, что он войдет в общую сумму с разными знаками.

Тогда, учитывая (85), получим

$$\Sigma\frac{mu^2}{2}=\frac{\gamma}{g}\,\frac{v^3\omega}{2}\left(1+3\,\frac{\Sigma\Delta u^2\Delta\omega}{v^2\omega}\right).$$

Отсюда удельная кинетическая энергия по сечению будет

$$\frac{\Sigma\frac{mu^2}{2}}{\gamma Q}=\frac{\Sigma\frac{mu^2}{2}}{\gamma v\omega}=\left(1+3\,\frac{\Sigma\Delta u^2\Delta\omega}{v^2\omega}\right)\frac{v^2}{2g}. \tag{86}$$

Обозначим множитель, стоящий в скобках в последнем выражении, символом α, т. е.

$$\alpha=\left(1+3\,\frac{\Sigma\Delta u^2\Delta\omega}{v^2\omega}\right). \tag{87}$$

Выражение (87), представляющее собой *отношение живой силы потока к живой силе, вычисленной в предположении, что скорости во всех точках живого сечения равны средней скорости,* называется коэфициентом Кориолиса. Этот коэфициент всегда больше единицы. Обычно он равен 1,05 — 1,1, но может достигать и больших значений в зависимости от распределения скоростей по сечению. Коэфициент Кориолиса, следовательно, учитывает влияние неравномерности распределения скоростей по живому сечению потока.

Учитывая (87), напишем взамен (86)

$$\frac{\Sigma\frac{mu^2}{2}}{\gamma Q}=\alpha\,\frac{v^2}{2g}.$$

Таким образом уравнение Д. Бернулли для участка потока реальной жидкости, расположенного между двумя его сечениями *I-I* и *II-II*, в которых движение подчиняется условиям плавной изменяемости, примет форму

$$z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha_1v_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{\alpha_2v_2^2}{2g}+h_{mp}, \tag{88}$$

где z_1 и z_2 — высоты расположения произвольно избранных точек в сечениях *I* и *II* над плоскостью сравнения:

$\frac{p_1}{\gamma}$ и $\frac{p_2}{\gamma}$ — высоты давления в этих же точках;

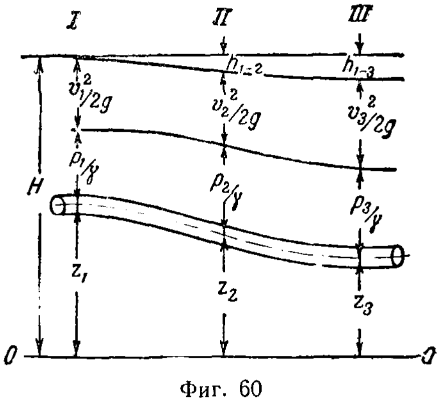
v_1 и v_2 — средние скорости по сечениям *I* и *II*;

α_1 и α_2 — соответствующие значения коэфициентов Кориолиса;

h_{mp} — суммарное значение потерь энергии на участке между сечениями *I* и *II*, отнесенное к единице веса жидкости, проходящей через сечения в единицу времени.

Для идеальной жидкости мы установили ранее, что запас энергии, приходящейся на каждую единицу веса перемещаемой жидкости, есть величина постоянная. Уравнение (88) показывает, что в реальной жидкости на преодоление сопротивлений сил вязкости должна быть затрачена определенная работа сил вязкостных сопротивлений, определенная энергия.

Если в некотором сечении *I-I* (фиг. 60) за-



Фиг. 60

пас удельной энергии равен величине

$$H=\frac{p_1}{\gamma}+z_1+\frac{\alpha_1 v_1}{2g},$$

определяемой над некоторой плоскостью сравнения *0-0*, то в других сечениях потока, расположенных ниже по течению (например, *II-II*, *III-III*), запас энергии не может уже быть равным H. Он должен неизбежно быть меньше этой величины, на некоторые высоты h_{1-2}, h_{1-3}, выражающие потерянную часть энергии жидкости, приходящуюся на единицу веса жидкости, проносимой вдоль потока. Эта энергия расходуется на преодоление сил сопротивления (трения) на пути от сечения *I-I* до рассматриваемого сечения *II-II* (или соответственно *III-III*), обращаясь в другие виды энергии (тепловую).

ГЛАВА V

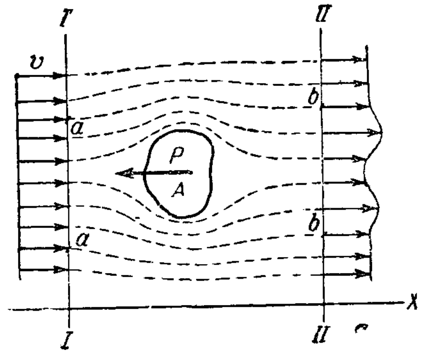
УЧЕТ ПОТЕРЬ ЭНЕРГИИ (НАПОРА) В ПОТОКЕ

Изложенное в предыдущей главе показывает, что для применения уравнения Бернулли в прикладных расчетах движения потоков реальной (вязкой) жидкости необходимо владеть методами количественного учета потерь энергии (напора), которые пока мы обозначали лишь символически членом h_{mp} в уравнении (88).

Предметом настоящей главы и является установление общих методов учета потерь напора в потоке реальной жидкости.

§ 46. Воздействие равномерного потока вязкой жидкости на обтекаемое тело любой формы

Допустим, что безграничная масса вязкой жидкости набегает с равномерной скоростью v на неподвижное тело A произвольной формы (фиг. 61).



Фиг. 61

В достаточном удалении от тела линии тока жидкости представляют собой семейство параллельных прямых. В непосредственной близости от тела они должны претерпеть отклонение от прямолинейной формы. Пусть плоскости *I-I* и *II-II*, нормальные потоку, ограничивают зону, в пределах которой токи жидкости являются криволинейными.

В плоскости *II-II* выделим некоторый замкнутый контур площадью ω_2, делящий плоскость *II-II* на две зоны:

а) внутреннюю, в пределах которой эпюра скоростей получает искажение вследствие обтекания жидкостью тела A;

б) внешнюю, в пределах которой искажение практически не будет заметно и эпюра скоростей будет равномерной, так же как в сечении *I-I*.

Пусть предельные линии тока $ab-ab$, проведенные через этот контур, выделят в сечении *I-I* площадь ω_1, ограниченную, так же как и ω_2, замкнутым контуром и меньшую по величине, чем последняя.

Вследствие влияния сил вязкости тело будет оказывать известное сопротивление этому движению потока, в виде некоторой силы P, которую надо будет приложить к телу, чтобы удержать его в неподвижном состоянии относительно жидкости.

Для установления взаимосвязи между силой P и скоростью потока воспользуемся теоремой о приращении количества движения.

Вследствие того что за пределами выделенного отсека жидкости давление в безграничной массе жидкости постоянно и силы трения по граничным поверхностям токов $ab-ab$ пренебрежимо малы, единственной силой, действующей на отсек, является сила сопротивления P, направленная против движения.

Отсюда на основании упомянутой теоремы напишем

$$Mv_1-P-Mv_2=0, \tag{89}$$

где Mv_1 и Mv_2 — количество движения в сечении *I-I* и *II-II*.

Количество движения в сечении *I-I* будет

$$Mv_1=\rho\omega_1 v_1^2\,. \tag{90}$$

Количество движения во втором сечении ввиду неравномерной эпюры скоростей в этом сечении должно быть выражено в виде суммы количества движения по отдельным элементам этого сечения. Выражая же количество движения через среднюю скорость в этом сечении, мы должны ввести некоторый поправочный коэфициент α', отражающий отношение между действительным количеством движения и количеством движения, условно вычисленным для этого сечения по средней его скорости.

На основе сказанного обозначим

$$Mv_2 = \alpha' \rho \omega_2 v_2^2. \tag{91}$$

Действительное количество движения в сечении потока будет, учитывая, что $u = v \pm \Delta u$,

$$Mv = \sum_\omega mu = \frac{\gamma}{g} \sum u^2 \delta\omega = \frac{\gamma}{g} \sum_\omega (v \pm \Delta u)^2 \delta\omega =$$

$$= \frac{\gamma}{g} \sum_\omega (v^2 \pm 2v\Delta u + \Delta u^2)\delta\omega,$$

что, принимая во внимание (85), дает

$$Mv = \sum_\omega mu = \frac{\gamma}{g} v^2 \omega \left[1 + \frac{\sum \Delta u^2 \delta\omega}{v^2 \omega}\right]. \tag{92}$$

Величину в квадратных скобках в уравнении (92) называют коэфициентом Буссинеска и обозначают

$$\alpha' = 1 + \frac{\sum \Delta u^2 \delta\omega}{v^2 \omega}. \tag{93}$$

Сравнивая (93) с (87), замечаем, что коэфициент Буссинеска всегда меньше коэфициента Кориолиса и близок к единице.

В силу неразрывности движения жидкости

$$v_1 \omega_1 = v_2 \omega_2$$

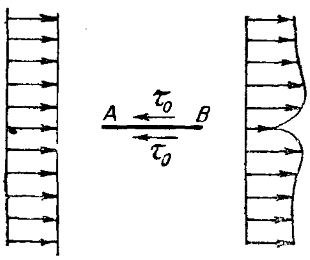
и поэтому

$$Mv_2 = \alpha' \rho \frac{\omega_1^2}{\omega} v_1^2. \tag{94}$$

Подставляя (90) и (94) в (89), найдем

$$P = Mv_1 - Mv_2 = \left(1 - \alpha' \frac{\omega_1}{\omega_2}\right) \omega_1 \rho v_1^2. \tag{95}$$

Теперь допустим, что обтекаемое тело является плоской пластинкой AB, показанной на фиг. 62. И пусть плоскость пластинки совпадает с направлением движения потока.



Фиг. 62

Очевидно, что и в этом случае сопротивление, оказываемое пластинкой набегающему на нее потоку, будет определяться выражением вида (95).

Если площадь пластинки равна F, то касательное напряжение τ_0, возникающее между потоком и пластинкой по обеим сторонам последней, будет равно

$$\tau_0 = \frac{P}{2F} = \left[\left(1 - \alpha' \frac{\omega_1}{\omega_2}\right) \frac{\omega_1}{F}\right] \rho \frac{v^2}{2}$$

или, обозначая безразмерный множитель, заключенный в квадратные скобки и зависящий от кинематики потока, через

$$f = \left[\left(1 - \alpha' \frac{\omega_1}{\omega_2}\right) \frac{\omega_1}{F}\right],$$

найдем

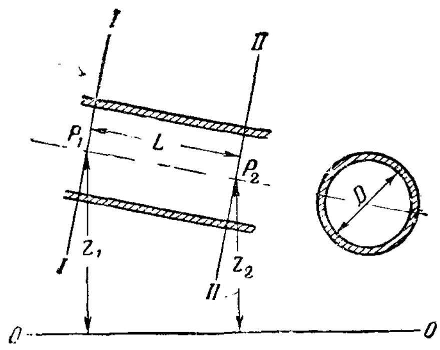
$$\tau_0 = f \frac{\rho v^2}{2}. \tag{96}$$

Это уравнение дает общее выражение для силы трения, возникающей на единице поверхности соприкосновения потока с ограничивающими его стенками.

§ 47. Потери энергии при равномерном движении жидкости. Путевые потери напора

При равномерном движении жидкости ($v = \text{const}$) среднее значение τ_0 является постоянной величиной, и потому, если обозначить через χ периметр касания потока с ложем русла (смоченный периметр) и через L — длину изучаемого участка потока (фиг. 63), то суммарная сила сопротивления будет

$$P_{mp} = \tau_0 \chi L.$$



Фиг. 63

Эта сила сопротивления направлена против движения и в единицу времени производит работу $P_{mp} \cdot v$.

Работа сил сопротивления приводит к разнице в запасе энергии в начальном и конечном сечениях рассматриваемого участка потока. Разница в запасе энергии потока в начальном и конечном сечениях, отнесенная к единице веса протекающей жидкости, и была обозначена в уравнении Бернулли символом h_{mp}.

При весе протекающей в единицу времени жидкости, равном $\gamma\omega v$, потерянная энергия потока составит $h_{mp} \gamma\omega v$.

Приравнивая потерянную энергию потока работе сил сопротивления, получаем

$$P_{mp} \cdot v = \gamma\omega v h_{mp} = \tau_0 \chi L v,$$

откуда

$$h_{nym} = \frac{\tau_0}{\gamma} \frac{\chi}{\omega} L. \tag{97}$$

Здесь вместо общего символа h_{mp} мы применили равнозначный ему частный h_{nym}, оттеняющий, что речь идет о систематических потерях напора на преодоление трений по пути потока, или, короче, о путевых потерях напора.

Назовем отношение площади живого сечения ω к смоченному периметру χ **гидравлическим радиусом** и обозначим его

$$R=\frac{\omega}{\chi}. \tag{98}$$

Понятие «гидравлический радиус» весьма важно для дальнейшего. Гидравлический радиус зависит от формы живого сечения и имеет размерность длины.

В частности для труб круглого сечения с диаметром d, работающих полным сечением,

$$R=\frac{\omega}{\chi}=\frac{\pi d^2}{4\pi d}=\frac{d}{4},$$

для труб квадратного сечения со стороною квадрата a

$$R=\frac{\omega}{\chi}=\frac{a^2}{4a}=\frac{a}{4}.$$

Возвращаясь к уравнению (97), заменяя в нем τ_0 по (96) и обозначая $4f=\lambda$, получим с учетом обозначения (98) в общем случае

$$h_{пут}=\lambda\frac{L}{4R}\frac{v^2}{2g}, \tag{99}$$

а, в частности, для круглых труб

$$h_{пут}=\lambda\frac{L}{d}\frac{v^2}{2g}. \tag{100}$$

Последняя формула известна как формула Дарси (Darcy), предложенная им в 1856 г. на основании своих опытов с чугунными водопроводными трубами.

Безразмерный коэфициент λ называют коэфициентом Дарси.

По внешнему виду формулы (100) не следует делать вывода о том, что потери напора всегда пропорциональны квадрату скорости, если не будет доказано, что коэфициент $\lambda=4f$ сам не зависит в какой-то степени от скорости.

Теоретический анализ вопроса о величине λ приводится в последующих главах. Здесь же для предоставления возможности проводить практические расчеты при изучении курса пока ограничимся приведением данных, полученных Дарси в результате его тщательных опытов с чугунными водопроводными трубами.

Дарси на основе этих опытов предложил определять величину λ для чистых чугунных водопроводных труб с диаметром d (в метрах) по следующей эмпирической формуле:

$$\lambda=0{,}02\left(1+\frac{1}{40d}\right). \tag{101}$$

Из этой формулы видно, что λ по Дарси с точностью до второго десятичного знака равно 0,02 и потому можно пользоваться этим округленным значением $\lambda=0{,}02$ при предварительных расчетах движения жидкости в чугунных трубах[1].

Возвращаясь к формуле (99), назовем, следуя Вейсбаху, безразмерную величину $\lambda\frac{L}{4R}$, или для круглых труб $\lambda\frac{L}{d}$ — «коэфициентом путевых потерь» и обозначим

$$\lambda\frac{L}{4k}=\frac{\lambda L}{d}=\zeta_{пут}.$$

Тогда уравнению (99) можно придать такой вид:

$$h_{пут}=\zeta_{пут}\frac{v^2}{2g}. \tag{102}$$

Как будет показано ниже, по формулам вида (102) рассчитываются не только путевые потери напора, систематически проявляющиеся на всем пути движения потока, но и другие, так называемые местные потери напора, возникающие в том или ином месте потока в связи с нарушением условий плавной изменяемости. Сохраняя свой вид, формула (102) в этих случаях будет отличаться лишь численным значением коэфициента потерь ζ.

Подчеркивая еще раз, что более подробное изучение факторов, определяющих значение λ, будет проведено в последующих главах, придадим уравнению (99) другой вид.

Обозначим отношение потерь напора к длине рассматриваемого участка потока

$$\lambda\frac{L}{4R}=\frac{h_{тр}}{L}=I \tag{103}$$

и будем называть это соотношение **гидравлическим уклоном**, который в данном случае совпадает с пьезометрическим уклоном.

С учетом (103) уравнение (99) может быть записано в такой форме:

$$v=\sqrt{\frac{8g}{\lambda}}\cdot\sqrt{RI}, \tag{104}$$

откуда, обозначая

$$\sqrt{\frac{8g}{\lambda}}=C, \tag{105}$$

получим для скорости равномерного движения жидкости выражение

$$v=C\sqrt{RI}, \tag{106}$$

называемое формулой Шези по имени французского гидравлика, предложившего ее в 1775 г. Формула Шези является одним из основных уравнений равномерного движения жидкости.

Следует обратить внимание на то, что C в формуле (105) является размерной величиной $[C]=[g^{0,5}]=L^{0,5}T^{-1}$.

---

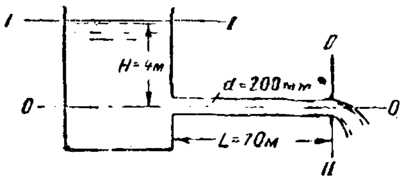
[1] Значение λ по Дарси справедливо при так называемом турбулентном режиме движения жидкости, сущность которого рассматривается ниже.

Определение величины C при пользовании формулой Шези (106) приобретает такое же существенное значение, как и определение величины λ при пользовании формулой Дарси (103), и будет рассмотрено в последующих главах курса.

Задача 12. Из бака с постоянным напором H по новому чугунному трубопроводу постоянного диаметра d вода выливается в атмосферу. Определить расход и скорость истечения, пренебрегая местными потерями. Размеры по фиг. 64.

Напишем уравнение Бернулли для реальной жидкости, рассматривая сечения (I-I) и (II-II) и принимая 0-0 за ось сравнения:

$H+\frac{p_a}{\gamma}+\frac{v_1^2}{2g}=0+\frac{p_a}{\gamma}+\frac{v_2^2}{2g}+h_{пут}$ (p_a — атмосферное давление).



Фиг. 64

Скорость на поверхности сосуда при достаточных его размерах по сравнению с выходным отверстием можно считать близкой к нулю и в расчет не принимать. Тогда:

$$H=\frac{v_2^2}{2g}+h_{пут}=\frac{v_2^2}{2g}+\lambda\frac{L}{d}\cdot\frac{v_2^2}{2g}=(1+\zeta)\frac{v_2^2}{2g}$$

и

$$v_2=\sqrt{\frac{2gH}{1+\zeta}}=\sqrt{\frac{1}{1+\zeta}}\sqrt{2gH}.$$

Определим для данного случая численное значение коэфициента сопротивления путевых потерь $\zeta_{пут}$. Принимая по Дарси при данном размере труб $\lambda=0{,}0224$, имеем

$$\zeta_{пут}=\lambda\frac{L}{d}=\frac{0{,}0224\cdot 70}{0{,}20}=7{,}84.$$

Подставим численные данные и получим среднюю скорость истечения

$$v=\sqrt{\frac{1}{1+7{,}84}}\cdot\sqrt{19{,}62\cdot 4}=2{,}98\ м/сек.$$

Площадь выходного отверстия $\omega=\pi r^2=3{,}14\cdot 0{,}10^2=0{,}0314\ м^2$.

Тогда найдем расход по формуле

$$Q=\omega v=0{,}0314\cdot 2{,}98=0{,}0936\ м^3/сек=93{,}6\ л/сек.$$

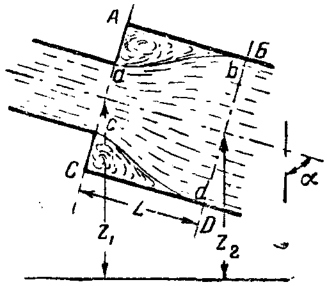
Напомним, что местные потери при решении задачи не учитывались, что, конечно, внесло неточность в решение.

§ 48. Местные потери напора. Теорема Борда

Кроме потерь энергии на преодоление сопротивлений от систематически возникающих сил трения по пути движения потока могут иметь место потери напора локального характера, вызываемые воздействием на поток той или иной местной причины (колено, кран, сетка, клапан, сужение или расширение русла и т. п.). Такие потери в отличие от систематических путевых потерь называются местными потерями напора.

Рассмотрим местную потерю напора, вызываемую внезапным расширением русла.

Пусть поток жидкости движется в трубе, сечение которой внезапно расширяется от площади ω до площади Ω (фиг. 65). Как показывает



Фиг. 65

опыт, жидкость не следует по контуру внезапного расширения трубы, а образует более плавные линии токов, как это показано на фиг. 65.

Вследствие этого между стенками расширенной части трубы и поверхностями токов $ab-cd$ создается область, заполненная вихревыми кольцами (мертвая зона). Эта зона распространяется на некоторую длину L, в пределах которой движение жидкости не может быть отнесено к плавно изменяющемуся.

Рассмотрим силы, действующие на отсек потока $ABDC$. По сечению AC действует в направлении потока сила давления $P_1=p_1\Omega$ (здесь полагаем, что давление в сечении AC распределено по гидростатическому закону).

По сечению BD действует сила, направленная против движения,

$$P_2=p_2\Omega,$$

где p_2 — давление в центре тяжести сечения BD.

Из других сил, действующих на отсек, имеем слагающую силы его веса, равную проекции веса отсека на направление движения:

$$G\cos\alpha=\gamma\Omega L\cos\alpha=\gamma\Omega(z_1-z_2).$$

Силами трения по стенкам можно пренебречь по малости участка.

Применяя теорему о приращении количества движения, имеем

$$\frac{\alpha'\gamma Q}{g}(v_2-v_1)=(p_1-p_2)\Omega+\gamma\Omega(z_1-z_2)$$

или, так как $\Omega=\frac{Q}{v_2}$, получаем

$$\frac{\alpha' v_2(v_2-v_1)}{g}=\frac{p_1}{\gamma}-\frac{p_2}{\gamma}+z_1-z_2. \qquad (107)$$

Заменим $v_2(v_2-v_1)$ равным ему выражением $\frac{v_2^2-v_1^2}{2}+\frac{(v_1-v_2)^2}{2}$ и перепишем (107) в таком виде:

$$z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha' v_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{\alpha' v_2^2}{2g}+\frac{\alpha'(v_1-v_2)^2}{2g}.$$

Но это уравнение представляет собой по существу уравнение Д. Бернулли для рассматриваемого случая движения потока, с той лишь разницей, что взамен коэфициентов Кориолиса фигурируют коэфициенты Буссинеска.

Поэтому потеря энергии на внезапное расширение жидкости может быть принята равной

$$h_{в.\ р}=\frac{\alpha'(v_1-v_2)^2}{2g};$$

полагая здесь $\alpha'=1$, получим известную в гидравлике теорему Борда:

потеря энергии жидкости при внезапном расширении равна скоростному напору от потерянной скорости.

Потеря на внезапное расширение может быть выражена как через скоростной напор до расширения, так и через скоростной напор после расширения, а, именно

$$h_{в.\ р}=\alpha'\left(1-\frac{v_2}{v_1}\right)^2\frac{v_1^2}{2g}$$

или

$$h_{в.\ р}=\alpha'\left(\frac{v_1}{v_2}-1\right)^2\frac{v_2^2}{2g}.$$

Учитывая уравнение неразрывности, взамен последних выражений можно написать

$$h_{в.\ р}=\alpha'\left(1-\frac{\omega}{\Omega}\right)^2\frac{v_1^2}{2g},$$

$$h_{в.\ р}=\alpha'\left(\frac{\Omega}{\omega}-1\right)^2\frac{v_2^2}{2g}.$$

Если обозначить множители при скоростных напорах, зависящие, очевидно, только от соотношения площадей, символами

$$\left.\begin{aligned}\zeta'_{в.\ р}&=\alpha'\left(1-\frac{\omega}{\Omega}\right)^2,\\ \zeta''_{в.\ р}&=\alpha'\left(\frac{\Omega}{\omega}-1\right)^2,\end{aligned}\right\}\qquad(108)$$

то потери при внезапном расширении потока можно записать в одной из таких символических форм:

$$\left.\begin{aligned}h_{в.\ р}&=\zeta'_{в.\ р}\frac{v_1^2}{2g},\\ h_{в.\ р}&=\zeta''_{в.\ р}\frac{v_2^2}{2g}.\end{aligned}\right\}\qquad(109)$$

Как видим, формулы (109), определяющие местную потерю напора от внезапного расширения русла, отличаются от формулы путевых потерь (102) только значением коэфициента сопротивления ζ.

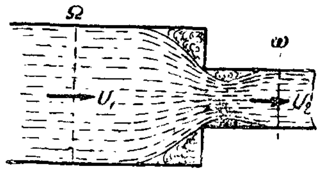
Как и потери на внезапное расширение, всякая местная потеря напора пропорциональна скоростному напору и в общем виде может быть выражена так:

$$h_{мест}=\zeta'_{мест}\frac{v_1^2}{2g}=\zeta''_{мест}\frac{v_2^2}{2g}.$$

В этом выражении $\zeta'_{мест}$ и $\zeta''_{мест}$ — так называемые коэфициенты местных потерь или коэфициенты Вейсбаха, *устанавливаемые опытным путем.*

Ниже приводим значения коэфициентов Вейсбаха для наиболее типичных встречающихся в практике случаев.

1. Внезапное сужение струи. При внезапном сужении трубы с сечения площадью Ω до сечения ω (фиг. 66) коэфициент $\zeta_{суж}$ по Вейсбаху



Фиг. 66

получает в зависимости от соотношения площадей сечений следующие значения[1]:

$\frac{\omega}{\Omega}$	0,01	0,10	0,20	0,40	0,60	0,80
$\zeta_{суж}$	0,50	0,50	0,42	0,33	0,25	0,15

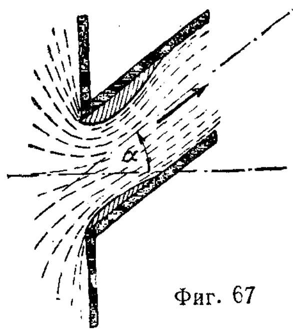
2. Вход в трубу и выход из нее. а) Цилиндрическая труба отходит под углом α (фиг. 67). По Вейсбаху

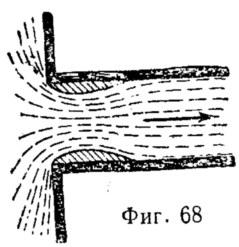
$$\zeta_{входа}=0{,}505+0{,}303\sin\alpha+0{,}226\sin^2\alpha.$$

б) Труба отходит перпендикулярно; ребра входа острые (фиг. 68)

$$\zeta_{входа}=0{,}50.$$

Закругление острых ребер при входе значительно понижает коэфициент сопротивления ζ и


Фиг. 67


Фиг. 68

[1] Здесь и ниже в справочных материалах даются значения коэфициентов сопротивлений применительно к скоростному напору за сопротивлением.

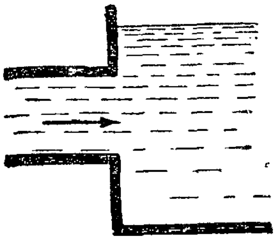
в зависимости от плавности входа $\zeta_{входа}$ = от 0,1 и до 0,04 при особо тщательном и плавном закруглении.

в) Выход из трубы в спокойную массу (фиг. 69). Коэфициент сопротивления в этом случае можно получить, рассматривая явление как внезапное расширение струи. Тогда по Борда имеем

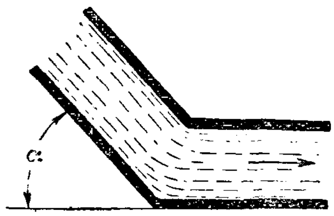
$$\zeta'_{вых} = \left(1 - \frac{\omega}{\Omega}\right)^2,$$

и так как в данном случае Ω — весьма велика по сравнению с ω, принимаем $\frac{\omega}{\Omega} = 0$ и $\zeta_{вых} = 1{,}0$.

3. Колена и закругления в трубах. а) Колено без закругления (фиг. 70)



Фиг. 69



Фиг. 70

По Вейсбаху

$$\zeta_{кол} = 0{,}946 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 2{,}047 \sin^4 \frac{\alpha}{2},$$

что дает для разных углов:

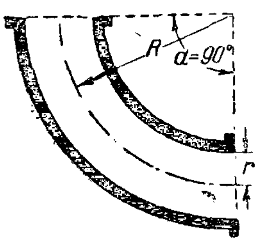
$\alpha°$	20	40	60	80	90	100	120	140
$\zeta_{кол}$	0,046	0,139	0,364	0,740	0,985	1,260	1,861	2,431

Приведенные данные для ζ получены Вейсбахом в результате опытов над трубами $d = 30$ *мм*. С увеличением диаметра значение ζ значительно уменьшается.

Поэтому Фляман предлагает при больших трубах принимать коэфициент сопротивления (на колене с $\alpha = 90°$)

$$\zeta_{кол} = 0{,}25.$$

б) Колено с закруглением (фиг. 71). На основании опытов Дюбуа и своих Вейсбах определяет для закругления с центральным углом $\alpha = 90°$:



Фиг. 71

$$\zeta_{зак} = 0{,}131 + 1{,}847 \left(\frac{r}{R}\right)^{3,5},$$

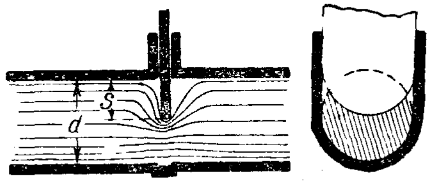
что дает для разных соотношений $\frac{r}{R}$:

$\frac{r}{R}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\zeta_{зак}$	0,131	0,138	0,158	0,206	0,294	0,440	0,661	0,977	1,408	1,978

Данными этой таблички можно пользоваться и для других углов закругления $\alpha \neq 90°$, умножая значение ζ в этих случаях на отношение $\frac{\alpha°}{90°}$.

4. Задвижки, краны, клапаны, сетки. Вейсбах дает на основании опытных данных следующие значения коэфициента ζ в виде таблиц.

а) Задвижка (фиг. 72).

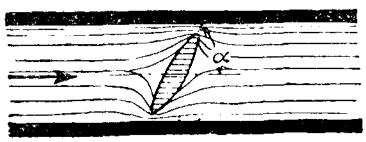


Фиг. 72

$\frac{s}{d}$	Полное открытие	1/8	1/4	3/8	1/2	5/8	3/4	7/8
$\zeta_{задв}$	0,00	0,07	0,26	0,81	2,06	5,52	17,0	97,8

Отметим, насколько резко возрастает величина коэфициента сопротивления ζ по мере закрытия задвижки.

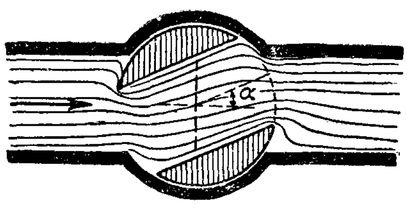
б) Поворотный (горловой) клапан (фиг. 73).



Фиг. 73

$\alpha°$	5	10	20	30	40	50	60	70	80
$\zeta_{г. кл}$	0,24	0,52	1,54	3,91	10,8	32,6	118	751	∞

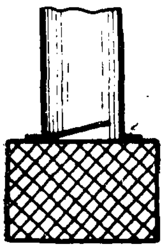
в) Кран (фиг. 74).



Фиг. 74

$\alpha°$	5	10	20	30	40	50	60	65	83
$\zeta_{кр}$	0,05	0,29	1,56	5,47	17,3	52,6	206	486	∞

Примечание. При расчетах обычно принимают в среднем $\zeta_{кр}=7\div10$.



Фиг. 75

г) Обратный клапан с сеткой (фиг. 75). Применяется на всасывающих трубах различных насосов. Коэфициент сопротивления принимают в среднем

$$\zeta_{сетк}=10.$$

При сетке без обратного клапана $\zeta_{сетк}=5\div6$.

При пользовании справочными данными необходимо помнить, что коэфициенты даны в них применительно к определенному скоростному напору.

Поэтому, если коэфициент дан, скажем, для одного скоростного напора, а местную потерю напора желательно выразить через другой скоростной напор, то нужно делать пересчет табличного коэфициента, исходя согласно уравнению неразрывности из соотношения

$$\frac{\zeta'}{\zeta''}=\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2.$$

§ 49. Сложение потерь напора

В уравнении Бернулли

$$z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha v_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{\alpha v_2^2}{2g}+h_{тр}.$$

Последний член $h_{тр}$, как это следует из изложенного выше, отражает суммарную потерю напора, затрачиваемую при движении жидкости на преодоление как путевых, так и местных сопротивлений.

Так как в практических условиях местные сопротивления возникают более или менее отдаленно друг от друга, то принято считать, что каждое местное сопротивление проявляется полностью и независимо от воздействия соседних.

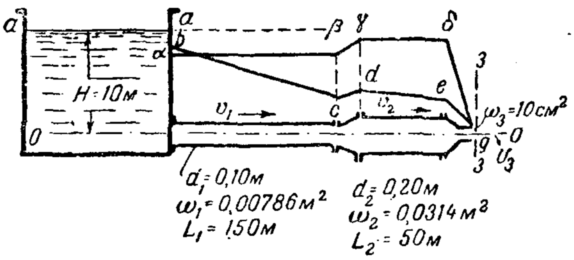
В последнем и заключается так называемый принцип наложения потерь, согласно которому общий эффект потерь напора рассматривают как простую сумму потерь напора, вызываемых каждым сопротивлением в отдельности.

Согласно принципу наложения потерь принимаем

$$h_{тр}=\Sigma h_{пут}+\Sigma h_{мест},$$

где $\Sigma h_{пут}$ представляет сумму всех путевых потерь напора по отдельным последовательным участкам русла, выделяемым по признаку однородности, а $\Sigma h_{мест}$ — сумму всех местных потерь напора, возникающих на тех же участках русла.

Задача 13 [1]. На фиг. 76 изображена система. Определить скорость истечения, расход и картину распределения давлений в двух случаях.



Фиг. 76

а) Пренебрегая сопротивлениями (идеальная жидкость).

б) Учитывая сопротивления (реальная жидкость).

1-й случай. Уравнение Д. Бернулли для сечения *а-а* и *3-3* относительно плоскости сравнения *0-0* после сокращения будет иметь вид:

$$H=\frac{v_3^2}{2g}.$$

Отсюда скорость истечения идеальной жидкости

$$v_3=\sqrt{2gH}=\sqrt{2\cdot9{,}81\cdot10}=14 \ м/сек$$

и ее расход

$$Q=v_3\omega_3=14\cdot0,001=0{,}014 \ м^3/сек=14 \ л/сек.$$

Скоростные напоры определятся:

$$\frac{v_1^2}{2g}=\frac{v_3^2}{2g}\left(\frac{\omega_3}{\omega_1}\right)^2=10\left(\frac{0{,}001}{0{,}00786}\right)^2=0{,}162 \ м,$$

$$\frac{v_2^2}{2g}=\frac{v_3^2}{2g}\left(\frac{\omega_3}{\omega_2}\right)^2=10\left(\frac{0{,}001}{0{,}0314}\right)^2=0{,}01 \ м.$$

Пьезометрическая линия будет ломаная $\alpha\beta\gamma\delta g$.

2-й случай. В этом случае уравнение Д. Бернулли пополнится членом, учитывающим сопротивления

$$H=\frac{v_3^2}{2g}+\Sigma h_{тр}.$$

Рассмотрим потери:

1. Потери на трение по длине в узкой части трубы:

[1] См. Горчин и Чертоусов. Гидравлика в задачах.

$$h_{пут1} = \lambda_1 \frac{L_1}{d_1} \frac{v_1^2}{2g} = 0{,}025 \frac{150}{0{,}10} \frac{v_1^2}{2g} = 37{,}5 \frac{v_1^2}{2g} =$$

$$= 37{,}5 \left(\frac{0{,}001}{0{,}00786} \right)^2 \frac{v_3^2}{2g}.$$

2. Потери на трение по длине в широкой части трубы:

$$h_{пут2} = 0{,}022 \frac{50}{0{,}20} \frac{v_2^2}{2g} = 5{,}5 \frac{v_2^2}{2g} = 5{,}5 \left(\frac{0{,}001}{0{,}0314} \right)^2 \frac{v_3^2}{2g}.$$

Всего в рассматриваемой системе путевые потери напора будут

$$\Sigma h_{пут} = \left[37{,}5 \left(\frac{0{,}001}{0{,}00786} \right)^2 + 5{,}5 \left(\frac{0{,}001}{0{,}0314} \right)^2 \right] \frac{v_3^2}{2g}.$$

Из местных же потерь имеем:

3. Потери на вход в трубу:

$$h_{вх} = \zeta_{вх} \frac{v_1^2}{2g} = 0{,}50 \frac{v_1^2}{2g} = 0{,}5 \left(\frac{0{,}001}{0{,}00786} \right)^2 \frac{v_3^2}{2g}.$$

4. Потери на расширение струи (по Борда):

$$h_{в.р} = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1 \right)^2 \frac{v_2^2}{2g} = \left(\frac{0{,}0314}{0{,}00786} - 1 \right)^2 \frac{v_2^2}{2g} =$$

$$= 9 \frac{v_2^2}{2g} = 9 \left(\frac{0{,}001}{0{,}0314} \right)^2 \frac{v_3^2}{2g}.$$

5. Потери на сужение (считая его внезапным):

$$h_{суж} = 0{,}50 \frac{v_3^2}{2g}.$$

Суммируя все местные потери, получим

$$\Sigma h_{мест} = \left[0{,}5 \left(\frac{0{,}001}{0{,}00786} \right)^2 + 9 \left(\frac{0{,}001}{0{,}0314} \right)^2 + 0{,}50 \right] \frac{v_2^2}{2g}.$$

Складывая как путевые, так и местные потери, будем иметь

$$h_{тр} = \Sigma h_{пут} + \Sigma h_{мест} = 1{,}12 \frac{v_3^2}{2g}.$$

Подставляя результат в уравнение Бернулли, получим

$$H = \frac{v_3^2}{2g}(1 + 1{,}12) = 2{,}12 \frac{v_3^2}{2g},$$

откуда действительная скорость истечения будет

$$v_3 = \sqrt{\frac{2gH}{2{,}12}} = 9{,}62 \text{ м/сек}$$

и расход

$Q = \omega_3 v_3 = 0{,}001 \cdot 9{,}62 = 0{,}00962$ м³/сек $= 9{,}62$ л/сек.

Для построения пьезометрической линии вычислим скоростные напоры и потери в отдельных элементах системы.

Имеем:

$$\frac{v_3^2}{2g} = \frac{H}{2{,}12} = \frac{10{,}0}{2{,}12} = 4{,}72 \text{ м},$$

$$\frac{v_1^2}{2g} = 0{,}0162 \frac{v_3^2}{2g} = 0{,}0162 \cdot 4{,}72 = 0{,}078 \text{ м},$$

$$\frac{v_2^2}{2g} = 0{,}001 \frac{v_3^2}{2g} = 0{,}001 \cdot 4{,}72 = 0{,}0047 \text{ м}.$$

По полученным значениям скоростных напоров вычисляем потери напора:

1) потери на вход:

$$h_{вх} = 0{,}5 \cdot 0{,}078 = 0{,}039 \text{ м};$$

2) потери в узкой части трубы:

$$h_{пут1} = 37{,}5 \cdot 0{,}078 = 2{,}832 \text{ м};$$

3) потери на расширение струи:

$$h_{в.р} = 9 \cdot 0{,}047 = 0{,}042 \text{ м};$$

4) потери в широкой части трубы:

$$h_{пут2} = 5{,}5 \cdot 0{,}0047 = 0{,}026 \text{ м};$$

5) потери на сужение:

$$h_{суж} = 0{,}5 \cdot 4{,}72 = 2{,}36 \text{ м}.$$

Пьезометрическая линия будет ломаная *abcdeg*.

ГЛАВА VI

ДВА РЕЖИМА ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

§ 50. Проверка зависимости путевых потерь в трубе от скорости

Уравнения (99) или (100) по внешнему виду позволяют сделать вывод о том, что потери напора пропорциональны квадрату средней скорости движения жидкости.

Однако такой вывод был бы правильным лишь при условии, что коэфициент λ сам не является некоторой функцией скорости.

Уже издавна гидравлики подметили, что закон квадратичной зависимости потерь напора от скорости подтверждается далеко не во всех случаях.

Поэтому важно проследить, к чему приводит опытная проверка зависимости (99) или, что одно и то же, уравнения (104).

При обработке опытных данных можно принимать зависимость (104) в общем виде, а именно

$$I = \frac{h_{тр}}{L} = k v^m, \tag{110}$$

где k и m некоторые величины, учитывающие: первая — влияние размеров трубы и свойств её стенок, а вторая — влияние скорости движения жидкости.

Логарифмируя зависимость (110), получим

$$\lg I = \lg k + m \lg v. \tag{111}$$

Следовательно, если откладывать опытные значения пьезометрических уклонов I как функцию скоростей v на логарифмической клетчатке, то зависимость I от v должна представиться прямой AK или рядом прямых, например, AK, KB (фиг. 77).

Тангенсы углов наклона опытных прямых к оси абсцисс

$$\operatorname{tg}\Theta_1 = m_1,$$

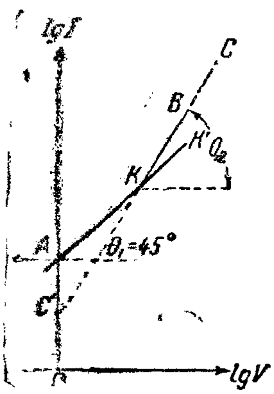
$$\operatorname{tg}\Theta_2 = m_2$$

определят собой значения показателей степеней m при скорости в формуле (110), а длины отрезков OC' и OA, отсекаемых продолжением опытных прямых на оси ординат, значения $\lg k$.

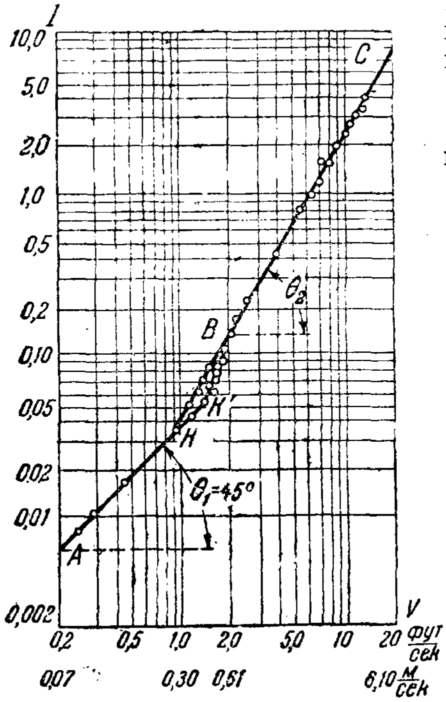
Подобных опытов было проведено весьма большое количество и каждый раз картина зависимости (111) получалась довольно однотипной. На фиг. 78 приведен график для одного из опытов, произведенных английским физиком Осборном Рейнольдсом.

Опыт проводился в свинцовой трубке диаметром около 6 *мм*.

Из фиг. 78 видно, что в интервале изменения скоростей от 0,07 до 0,30 *м/сек* наклон прямой AK характеризуется $\operatorname{tg}\Theta_1 = 1$.



Фиг. 77



Фиг. 78

Следовательно, в этом интервале скоростей потери пропорциональны первой степени скорости.

В интервале изменения скоростей от 0,61 до 6,1 *м/сек*

$$\operatorname{tg}\Theta_2 \approx 1{,}79.$$

Следовательно, в первом интервале скоростей потери были пропорциональны первой степени, а во втором интервале потери были пропорциональны $v^{1,79}$, а не v^2, как следовало бы формально в соответствии с выводами предыдущей главы.

В промежуточном интервале изменения скоростей от 0,30 до 0,61 *м/сек* опытные данные (на фиг. 78 они показаны кружочками) частично лежат на прямой BC, частично на прямой AK и частично на переходной кривой $K'B$. Иначе говоря, в этом интервале изменения скоростей зависимость I от v неустойчива.

Сравнение результатов большого числа подобных опытов, произведенных с трубами различных диаметров и из различных материалов, позволяет обнаружить наряду с некоторыми расхождениями ряд следующих общих свойств.

а) В известном интервале изменения скоростей, различном для различных труб и жидкостей, зависимость потерь от скорости определяется формулой типа

$$I = k_1 v^{1,0}. \tag{112}$$

б) Существует другой интервал изменения скоростей, также различный для различных труб и жидкостей, в пределах которого зависимость потерь от скорости может быть выражена формулой типа

$$I = k_2 v^m, \tag{113}$$

где показатель степени m изменяется

$$\text{от } m = 1{,}75 \text{ до } m = 2$$

в зависимости от ряда обстоятельств.

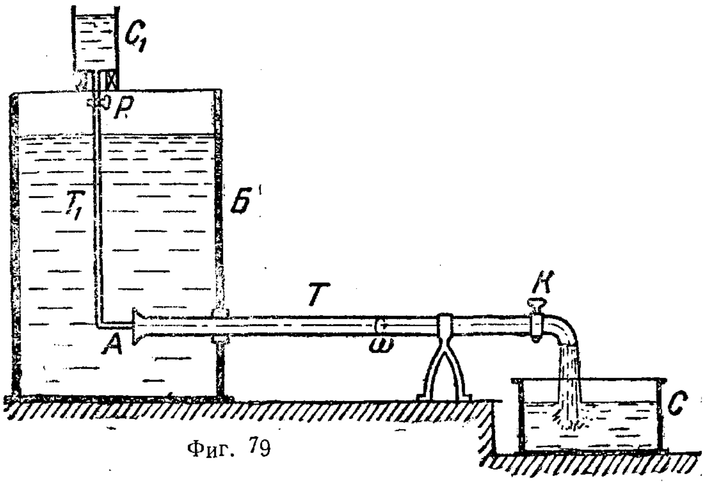
в) Во всех случаях имеет место переходная зона в некотором интервале скоростей, хотя иногда и очень узком, в пределах которой взаимосвязь потерь и скоростей не является устойчивой и может в зависимости от обстоятельств следовать либо формуле (112), либо (113). Классические опыты Осборна Рейнольдса, опубликованные в 1883 г., обнаружили, что изменение закона сопротивления происходит в связи с изменением всего механизма движения жидкости.

§ 51. Опыты Осборна Рейнольдса. Два различных режима движения жидкости

Схема опытного прибора Рейнольдса показана на фиг. 79. К баку *Б* достаточно больших размеров, наполненному исследуемой жидкостью, присоединена стеклянная труба *Т* с площадью сечения ω, снабженная на конце краном *К* для регулирования расхода через трубу. Величина расхода определяется с помощью мерного бака *С*.

Вход из бака в трубу весьма плавный.

Над большим баком расположен маленький бачок C_1, наполненный раствором какой-нибудь краски. От бачка C_1 отходит тоненькая трубочка T_1, изогнутая внизу так, что заостренный выходной конец ее несколько вдвинут во входной участок большой стеклянной трубы. Расход краски через тоненькую трубку регулируется краном P.

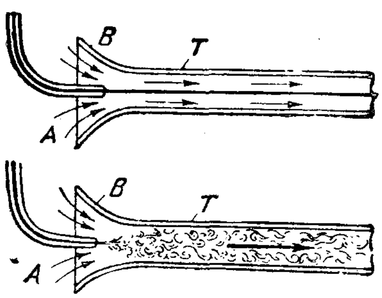


Фиг. 79

Перед началом опыта вода в баке должна быть выдержана в покое в течение нескольких часов, чтобы устранить все начальные возмущения. Только при этих условиях могут быть получены хорошие результаты. Температура воды в баке должна быть тщательно замерена.

Опишем явления, которые наблюдал Рейнольдс в процессе экспериментов. Если слегка приоткрыть кран K большой стеклянной трубы, жидкость начинает медленно вытекать из бака $Б$. В трубе T устанавливается некоторая средняя скорость, соответственно расходу и живому сечению трубы. Если теперь несколько приоткрыть кран P тонкой трубки, то из последней в трубу T начнет поступать краска в виде тонкой прямолинейной и резко выделяющейся струйки.

Замечательно, что краска при этом движется в трубе T, не смешиваясь с остальной жидкостью. Создается на первый взгляд впечатление, что окрашенная струйка как бы застыла внутри трубы в виде какого-то постороннего стержня (фиг. 80). Обмена частиц между струйкой краски и окружающей ее массой жидкости не происходит. Если изменить положение конца трубочки A, выпускающей краску, изменится положение окрашенной струйки по отношению к стенкам стеклянной трубы T, но краска опять будет двигаться отдельной струйкой, не смешиваясь с остальной массой жидкости. Таким образом в стеклянной трубе T жидкость движется отдельными струйками, не смешивающимися между собой.



Фиг. 80

Если далее еще несколько приоткрыть кран K стеклянной трубы, то расход воды через трубу, а соответственно и скорость несколько увеличатся. Но качественно картина явления нисколько не изменится. Попрежнему окрашенная струйка будет двигаться изолированно от остальной массы жидкости в трубе. Так будет продолжаться довольно долго, если открытие крана увеличивать понемногу и плавно.

Но вдруг при некотором большем открытии крана струйка начнет принимать волнообразное очертание. Струйка кажется дрожащей, колеблющейся. Ее путь становится извилистым и неправильным. Тем не менее струйка продолжает оставаться заметной в массе жидкости, но при дальнейшем медленном открытии крана появляются разрывы на отдельных участках струйки. Струйка теряет свою отчетливую форму (фиг. 80, внизу).

При последующем открытии крана наступает момент, когда струйка разрушается. Краска, выпускаемая из тонкой трубочки, полностью смешивается с жидкостью, двигающейся по трубе T. Из крана K вытекает равномерно окрашенная жидкость.

При дальнейшем открытии крана степень „беспорядочности“ внутреннего механизма потока увеличивается. Слово „беспорядочность“ надо понимать в условном смысле, отражающем первое зрительное впечатление. На самом деле, как будет показано в дальнейшем, и в этом режиме, казалось бы безнадежно запутанном, имеют место свои особые и вполне определенные закономерности.

При обратном проведении опыта, т. е. при постепенном закрывании крана после полного его открытия, явление повторяется в обратном порядке, хотя переход от „беспорядочного“ движения к „струйчатому“ — упорядоченному происходит при более низких значениях скоростей.

Описанный выше струйчатый характер (режим) движения, а также и само движение называют в этом случае „ламинарными“ (от латинского слова lamina — слой). „Беспорядочный“ же режим и движение жидкости при этом режиме принято называть „турбулентным“.

Режим потока в переходной зоне от ламинарного к турбулентному и обратно — неустойчив.

При этом важно то обстоятельство, что изменения в общем режиме движения жидкости непосредственно связаны с законом сопротивления, с зависимостью путевых потерь $h_{пут}$ в трубе от скорости. Иначе говоря, кинематика движения непосредственно связана с динамикой его.

Все опыты над движением в трубах, проведенные различными экспериментаторами, притом с самыми разнообразными жидкостями, позволяют утверждать, что:

а) ламинарному режиму движения жидкости соответствует участок AK (фиг. 77) зависимости потерь от скорости; иначе говоря, при ламинарном режиме путевые потери в трубе пропорциональны первой степени скорости, что и отражено формулой (112) предыдущего параграфа;

б) турбулентному режиму движения жидкости соответствует зависимость потерь от скорости, выраженная формулой (113). При турбулентном режиме потери пропорциональны скорости в степени m, изменяющейся от 1,75 до 2,0 (см. участок BC на фиг. 77).

§ 52. Критическое число Рейнольдса

Рейнольдс установил, что значение скорости, соответствующей переходу от ламинарного режима к турбулентному, не является постоянным, а меняется в зависимости от рода жидкости (вернее от ее плотности и вязкости) и от диаметра трубы.

Рейнольдс, однако, показал, что независимо от диаметра труб и рода жидкости переход от ламинарного режима к турбулентному происходит при некотором постоянном значении параметра

$$\frac{\rho v d}{\mu} = \frac{v d}{\nu}, \qquad (114)$$

где ρ — плотность жидкости;
μ — коэфициент ее вязкости;
v — средняя скорость движения жидкости;
d — диаметр трубы;
ν — кинематический коэфициент вязкости.

Обратим внимание на то, что параметр (114) является безразмерной величиной

$$\left[\frac{vd}{\nu}\right] = \frac{L^1T^{-1}\,L^1}{L^2T^{-1}} = L^0T^0.$$

Параметр (114) называется „числом Рейнольдса" и обозначается символом

$$Re = \frac{vd}{\nu}. \qquad (114)$$

Ряд опытов с движением жидкости в трубах показал, что при значении числа Рейнольдса меньшем 2000 движение жидкости устойчиво характеризуется ламинарным режимом, независимо от рода и размера труб и рода движущейся жидкости.

Значение числа Рейнольдса, соответствующее устойчивому переходу от турбулентного режима к ламинарному, называют критическим числом Рейнольдса и обозначают его

$$Re_{(кр)} = \frac{v_{кр}d}{\nu}. \qquad (115)$$

Легко убедиться, что при обычно употребляемых в практике трубах даже очень малых диаметров ламинарное движение (или $Re < 2\,000$) могло бы иметь место лишь при весьма малых скоростях течения.

Так, например, при движении воды с $t = 10°C$ ($\nu = 0{,}0131$ *см²/сек*) в трубе с $d = 5$ *см* ламинарный режим мог бы иметь место при скорости течения согласно (115) не более

$$v_{кр} = \frac{2\,000\,\nu}{d} = 5{,}2 \text{ см/сек}.$$

В гидротехнической практике условия движения жидкости обычно таковы, что число Рейнольдса больше 2000, т. е. $Re > Re_{(кр)}$ и потому налицо обычно турбулентный режим.

Движение жидкости при числе Рейнольдса, меньшем чем критическое число Рейнольдса (для труб $Re_{кр} = 2\,000$), будет устойчиво ламинарным. Однако это положение не следует понимать так, что ламинарный режим не может сохраниться при бо́льших значениях числа Рейнольдса.

Опыты Рейнольдса, Барнеса, Кокера и Экмана[1] показывают, что при соблюдении особых предосторожностей для тщательного успокоения потока в резервуаре и недопущении каких-либо возмущений (например, неплавный вход в трубу, чересчур интенсивный пуск краски, сотрясения и т. п.), ламинарный режим может быть сохранен и при значениях $Re > 2\,000$.

Так, например, Рейнольдсу удавалось сохранить ламинарный режим и при $Re = 6\,920$.

Кокер, Барнес и Экман, увеличивая меры предосторожности, имели ламинарный режим при числах Рейнольдса до 25 000 и даже до 40 000.

Однако достаточно малейшего возмущения, чтобы режим движения в этих случаях перешел в турбулентный.

Рассмотренные выше опыты позволяют с несомненностью различать два режима движения жидкости: ламинарный и турбулентный, с различной степенью зависимости путевых потерь напора от скорости движения жидкости.

Несмотря на это, уравнение (99), внешне отражающее квадратичный закон сопротивления, может быть оставлено в силе. Очевидно, при этом вся специфика, свойственная разным режимам движения жидкости, должна быть отражена величиной λ, которую поэтому придется рассмотреть отдельно для ламинарного и турбулентного режима.

---

[1] См., например, Шиллер, „Движение жидкости в трубках", ОНТИ, 1936.

Прежде чем перейти к рассмотрению этого важнейшего вопроса, выясним, почему критерий Рейнольдса позволяет в такой определенной форме устанавливать наличие того или иного режима движения жидкости.

Для этого необходимо (как и для ряда других важных приложений) ознакомиться с так называемой „теорией подобия“.

§ 53. Понятие о подобных потоках. Критерии подобия

Пусть мы имеем два потока жидкости A_1 и A_2. В общем случае можно полагать эти жидкости различными по своим свойствам, например, воздух и вода.

При геометрическом подобии потоков A_1 и A_2 все соответственные линейные размеры их будут отличаться друг от друга лишь постоянным множителем, т. е.

$$l_1 = \alpha_l l_2,$$

где l_1 — некоторый линейный размер потока A_1; l_2 — соответственный линейный размер потока A_2; α_l — множитель, выражающий пропорциональность между линейными размерами обоих потоков.

Допустим, что рассматриваемые потоки подобны друг другу не только геометрически, но и к и н е м а т и ч е с к и. Это значит, что траектории, описываемые двумя сходственными частицами обоих потоков, будут геометрически подобны. Геометрически подобны будут и линии токов, проходящие через сходственные точки пространства обоих потоков.

Сформулируем условия кинематического подобия более конкретно.

Пусть некоторая частица в потоке A_1 за отрезок времени T_1 проходит участок траектории L_1, ориентированный определенным образом в пространстве.

Для подобия необходимо, чтобы соответственная частица потока A_2 проходила за некоторое другое время T_2 отрезок траектории L_2, геометрически подобный и подобно ориентированный отрезку L_1. При этом соотношение между отрезками времени должно быть

$$T_1 = \alpha_t T_2,$$

где α_t — постоянный множитель, одинаковый для любой пары сходственных точек обоих потоков.

Скорости сходственных точек двух кинематически подобных потоков должны быть связаны друг с другом следующим соотношением:

$$v_1 = \alpha_v v_2,$$

а ускорения

$$j_1 = \alpha_j j_2,$$

где α_v и α_j — множители, постоянные для любой пары сходственных точек. Само собой разумеется, что скорости и ускорения должны быть представлены одинаково ориентированными в пространстве векторами.

Перейдем к динамическому подобию, общие условия для которого были установлены еще Ньютоном в 1686 г.

Динамическое подобие потоков жидкости предполагает уже наличие как геометрического, так и кинематического подобия.

Кроме того необходимо, чтобы все силы одинаковой природы, действующие на любую пару сходственных частиц в подобных потоках отличались друг от друга лишь постоянным множителем.

Так, например, если на некоторую частицу потока A_1 действует сила P_1, то

$$P_1 = \alpha_p P_2,$$

где α_p — постоянный множитель, относящийся к силе P_2, одинаковой с силой P_1 природы и действующей на сходственную частицу в потоке A_2.

Условимся называть потоки жидкости, удовлетворяющие условиям геометрического, кинематического и динамического подобия, просто п о д о б н ы м и п о т о к а м и.

Перейдем теперь к установлению критериев динамического подобия потоков.

Пусть имеется два геометрически подобных пространства, заполненных движущимися жидкостями. Природа этих жидкостей может быть в общем случае различной.

Что касается природы объемных сил, действующих на жидкости, то допустим, что она одинакова и что единственными объемными силами, действующими на жидкости, являются силы тяжести. Это условие наблюдается почти во всех случаях практики.

Для каждой из жидкостей должны быть действительны уравнения Навье-Стокса (71).

Напишем первое из этих уравнений и допустим, что оно относится ко второму из подобных потоков:

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = -g_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right). \tag{116}$$

Так как первый из потоков динамически подобен второму, то все элементы, фигурирующие в первом потоке, будут отличаться от таковых второго лишь переходными множителями α с соответствующим индексом.

Если теперь взамен соответствующих элементов второго потока, фигурирующих в (116), подставить произведения их на соответственные переходные множители, то получим диференциальное уравнение движения первого потока:

$$\alpha_u u_x \frac{\partial(\alpha_u u_x)}{\partial(\alpha_l x)} + \alpha_u u_y \frac{\partial(\alpha_u u_x)}{\partial(\alpha_l y)} + \alpha_u u_z \frac{\partial(\alpha_u u_x)}{\partial(\alpha_l z)} =$$

$$= -\alpha_g g_x - \frac{1}{\alpha_\rho \rho} \cdot \frac{\alpha_p \partial p}{\partial(\alpha_l x)} + \alpha_\nu \nu \left(\frac{\partial^2(\alpha_u u_x)}{\partial(\alpha_l x)^2} + \ldots \right).$$

Или вынося постоянные множители за знаки диференциалов

$$\frac{\alpha_u^2}{\alpha_l} \left[u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right] =$$

$$= -\alpha_g g_x - \frac{\alpha_p}{\alpha_\rho \alpha_l \rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\alpha_\nu \alpha_u}{\alpha_l^2} \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \ldots \right).$$

Разделив каждую часть этого уравнения на $\frac{\alpha_u^2}{\alpha_l}$, будем иметь

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = - \frac{\alpha_g \alpha_l}{\alpha_u^2} g_x -$$

$$- \frac{\alpha_p}{\alpha_\rho \alpha_u^2} \cdot \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\alpha_\nu}{\alpha_l \alpha_u} \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \ldots \right). \qquad (117)$$

Такую форму получит первое из диференциальных уравнений Навье-Стокса для первого потока.

Можно было бы написать и два других уравнения Навье-Стокса для обоих потоков, но легко понять, что вид их будет аналогичен написанному (117).

Так как рассматриваемые потоки жидкости подобны друг другу, то они должны выражаться тождественными диференциальными уравнениями. Сравнивая (116) и (117), нетрудно видеть, что для их тождественности необходимо, чтобы произведения постоянных множителей перед каждым из членов в правой части (117) были по отдельности равны единице, т. е. необходимо, чтобы

$$\frac{\alpha_g \alpha_l}{\alpha_u^2} = 1, \qquad (118)$$

$$\frac{\alpha_p}{\alpha_\rho \alpha_u^2} = 1, \qquad (119)$$

$$\frac{\alpha_\nu}{\alpha_l \alpha_u} = 1. \qquad (120)$$

Разберем каждое из этих уравнений в отдельности. Условие (118) может быть записано так:

$$\frac{g_1 l_1 u_2^2}{g_2 l_2 u_1^2} = 1,$$

или

$$\frac{u_1^2}{g_1 l_1} = \frac{u_2^2}{g_2 l_2}. \qquad (121)$$

Следовательно, отношения квадрата скорости к произведению из ускорения силы тяжести на какой-нибудь характерный размер потока, должны быть для подобных потоков постоянными.

Рассмотрим размерность выражения (121)

$$\left[\frac{u^2}{gl}\right] = \frac{L^2 T^{-2}}{(LT^{-2})L} = L^0 T^0.$$

Как видим, оно не имеет размерности. Это безразмерное число (121) называется в гидравлике числом Фруда и обозначается

$$\mathrm{Fr} = \frac{u^2}{gl}. \qquad (122)$$

Значит для того, чтобы потоки были динамически подобны, необходимо, чтобы числа Фруда для сходственных точек обоих потоков были равны.

Условие (120) после его расшифровки дает

$$\frac{l_1 u_1}{\nu_1} = \frac{l_2 u_2}{\nu_2}. \qquad (123)$$

Сравнением с (114) легко убедиться, что условие (123) равносильно условию постоянства чисел Рейнольдса.

Разница между (114) и (123) заключается лишь в том, что взамен диаметра d, фигурирующего в (114), в (123) стоит любой линейный размер l, характерный для сравниваемых потоков.

Нетрудно понять, что от выбора этого характерного линейного размера зависит, конечно, величина числа Рейнольдса, но сущность основного вывода, сводящегося к тому, что для подобных потоков числа Рейнольдса, составленные из сходственных и характерных размеров и скоростей, должны быть тождественны, остается неизменной.

Условие (119) можно представить в таком виде:

$$\frac{\delta p_1}{\rho_1 u_1^2} = \frac{\delta p_2}{\rho_2 u_2^2}.$$

Последняя величина, также безразмерная, получила название числа Эйлера и обозначается

$$\varepsilon_u = \frac{\delta p}{\rho u^2}.$$

Динамически подобные потоки, следовательно, должны характеризоваться и постоянством чисел Эйлера для сходственных своих точек.

Число Эйлера представляет собой отношение между перепадом давления и кинетической энергией в точке потока и является неизбежным следствием динамического подобия.

Поэтому число Эйлера не является таким самостоятельным критерием подобия, как числа Фруда и Рейнольдса[1].

Таким образом для того, чтобы два установившиеся потока жидкости были динамически подобны, нужно, чтобы числа Фруда и Рейнольдса, составленные из сходственных для этих потоков величин, были одинаковы.

В дополнение к этим условиям, как это уже было подчеркнуто, необходимо геометрическое подобие и подобие пограничных условий.

Так, например, заранее можно утверждать, что потоки, из которых один имеет трапецоидальное сечение, а другой круглое, не будут подобны.

При соблюдении же указанных условий независимо от того, каковы будут абсолютные размеры потоков, и независимо от рода жидкостей, можно утверждать, что потоки будут динамически подобны.

В тех случаях, когда силы тяжести не участвуют явно в формировании потока (например, при движении жидкости под напором в трубах), в уравнении Навье-Стокса могут быть исключены члены, учитывающие влияние сил тяжести. Для условий подобия это равносильно исключению числа Фруда. Иначе говоря, при рассмотрении движения жидкости в трубах под напором и во всех других случаях, где влияние сил тяжести пренебрежимо мало по сравнению с силами вязкости, решающим критерием является число Рейнольдса, чем вполне и объясняется четкая функциональная связь с числом Рейнольдса результатов опытов, относящихся к изучению движения жидкости в трубах.

Наоборот, в тех случаях, когда движение в основном складывается под воздействием силы тяжести, а влияние сил вязкости оказывается незначительным, характер движения будет вполне определяться числом Фруда. Такие условия примерно имеются в открытых, „безнапорных" потоках.

Установленные положения о подобии потоков играют исключительное значение в научном анализе и особенно в постановке экспериментального изучения тех или иных гидравлических явлений.

Теория подобия позволяет понять, почему число Рейнольдса легло в основу как изучения режимов движения жидкости, так и определения величины λ, что будет рассмотрено ниже.

Возьмем две трубы с диаметрами d_1 и d_2. Пусть внутренние поверхности этих труб геометрически подобны, не только по общей форме, но и в деталях, т. е. все неровности внутренней поверхности в одной трубе геометрически подобны неровностям в другой трубе как по форме, так и по расположению. Допустим для простоты, что оси труб горизонтальны.

Выделим в первой трубе участок длиной l_1. Потери энергии на этом участке будут равны

$$\frac{(p_{\mathrm{I}}-p_{\mathrm{II}})_1}{\gamma_1} = \left(\frac{\lambda_1}{d_1}\frac{v_1^2}{2g}\,l_1\right);$$

где $\frac{p_{\mathrm{I}}}{\gamma_1}$ и $\frac{p_{\mathrm{II}}}{\gamma_1}$ — пьезометрические высоты в крайних сечениях участка; v_1 — средняя скорость; λ_1 — коэфициент Дарси.

Тогда можно записать

$$\frac{\frac{(p_{\mathrm{I}}-p_{\mathrm{II}})_1}{\gamma_1}}{\frac{v_1^2}{2g}} = 2\frac{\delta p_1}{\rho_1 v_1^2} = \lambda_1\frac{l_1}{d_1} \qquad (124)$$

Соответственно для потока во второй трубе потеря энергии будет

$$\frac{(p_{\mathrm{I}}-p_{\mathrm{II}})_2}{\gamma_2} = l_2\frac{\lambda_2}{d_2}\frac{v_2^2}{2g}.$$

Отсюда также имеем

$$2\frac{\delta p_2}{\rho_2 v_2^2} = \lambda_2\frac{l_2}{d_2}. \qquad (125)$$

Заменяя элементы второго потока произведениями соответствующих элементов первого потока на переходные множители α, перепишем (125) в таком виде

$$\frac{\alpha_p}{\alpha_\rho\alpha_v^2}\cdot\frac{2\delta p_1}{\rho_1 v_1^2} = \lambda_2\frac{l_2}{d_2}$$

или с учетом (124)

$$\frac{\alpha_p}{\alpha_\rho\alpha_v^2}\lambda_1\frac{l_1}{d_1} = \lambda_2\frac{l_2}{d_2}.$$

Если потоки жидкости в обеих трубах динамически подобны, то согласно (119)

$$\frac{\alpha_p}{\alpha_\rho\alpha_v^2} = 1.$$

Тогда, учитывая геометрическое подобие, приходим к чрезвычайно важному выводу, что

[1] Более подробное доказательство этих положений см., например, А. П. Зегжда, Теория подобия и методика расчета гидротехнических моделей.

в трубах, при динамически подобных потоках жидкости, коэфициенты путевых потерь λ равны.

Следовательно, если, скажем, определен коэфициент λ для какого-либо потока в какой-нибудь трубе, то он будет таким же для всех диаметров и всех жидкостей при условии соблюдения динамического подобия или, иначе говоря, при условии постоянства числа Рейнольдса.

Выяснив таким образом основные положения подобия потоков, перейдем к установлению величины λ отдельно для условий ламинарного и турбулентного режимов.

ГЛАВА VII

ЛАМИНАРНЫЙ РЕЖИМ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ТРУБАХ

§ 54. Общие характеристики ламинарного движения жидкости в трубах

Как уже было установлено выше, ламинарное движение жидкости имеет место при сравнительно малых значениях числа Рейнольдса. В гидротехнической практике такие случаи встречаются редко (за исключением грунтовых потоков).

Поэтому в настоящей главе мы ограничиваемся лишь основными данными по ламинарному движению жидкости в трубах, позволяющими оттенить особенности турбулентного режима.

Уравнения ламинарного движения в трубах могут быть получены строго из уравнений Навье-Стокса. Однако в данном случае для простоты установим их, исходя из закона Ньютона о вязкостном трении, приведенного выше в форме уравнения (64) и который применительно к круглой трубе запишем в виде

$$\tau = -\mu \frac{du}{dr},$$

где τ — касательное напряжение между двумя слоями жидкости, r—расстояние от оси трубы, а $\frac{du}{dr}$ — градиент скорости между этими слоями.

Согласно уравнениям (97) и (98), справедливым для любого режима движения жидкости, имеем в общем виде для круглой трубы

$$\tau = \gamma IR = \gamma I \frac{r}{2} \tag{126}$$

и в частности для касательного напряжения на стенке трубы с радиусом r_0

$$\tau_0 = \gamma I \frac{r_0}{2}. \tag{127}$$

Выражая касательные напряжения τ на любом расстоянии r от оси трубы через касательное напряжение τ_0 на стенке, имеем

$$\tau = \tau_0 \frac{r}{r_0} \text{ или } \tau = \tau_0 \left(1 - \frac{y}{r_0}\right),$$

где $y = r_0 - r$ указывает расстояние от стенки трубы.

Тогда, учитывая закон Ньютона, получаем

$$\tau_0 \frac{r}{r_0} = -\mu \frac{du}{dr},$$

откуда

$$du = -\frac{\tau_0}{\mu r_0} r dr;$$

или, с учетом (127),

$$du = -\frac{\gamma I}{2\mu} r dr. \tag{128}$$

Интегрируя (128), находим

$$u = C - \frac{\gamma I}{4\mu} r^2. \tag{129}$$

При $r = r_0$, т. е. у стенки, скорость u равна нулю. Поэтому постоянная C в уравнении (129) должна быть равна

$$C = \frac{\gamma I}{4\mu} r_0^2$$

и общее выражение для скорости в любой точке живого сечения примет вид

$$u = \frac{\gamma I}{4\mu} r_0^2 - \frac{\gamma I}{4\mu} r^2 = \frac{\gamma I}{4\mu} (r_0^2 - r^2). \tag{130}$$

Из уравнения (130) видно, что кривая распределения скоростей — парабола.

Максимальная скорость u_m будет на оси трубы при $r = 0$ и определится выражением

$$u_m = \frac{\gamma I}{4\mu} r_0^2. \tag{131}$$

С учетом (131) вместо (130) можно написать

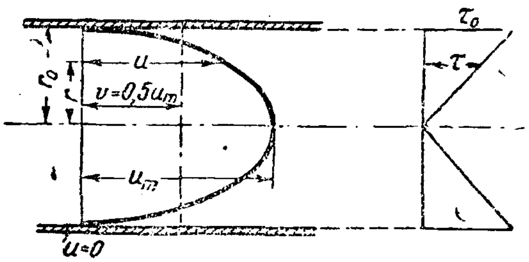
$$u = u_m \left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right] \tag{132}$$

или

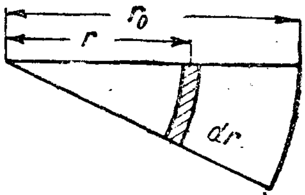
$$\frac{u}{u_m} = 1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2. \tag{133}$$

Следовательно, отношение местной скорости в какой-либо точке живого сечения трубы к максимальной скорости в центре сечения зависит только от относительного положения точки в сечении трубы $\frac{r}{r_0}$ и совершенно не зависит ни от абсолютных размеров трубы, ни от характера жидкости.

Иначе говоря, эпюры относительных скоростей во всех ламинарных потоках в круглых трубах обнаруживают полное подобие и могут быть представлены одной параболой, построенной по уравнению (133) на фиг. 81.



Фиг. 81



Фиг. 82

Установив таким образом выражения для местных скоростей в точках живого сечения, вычислим значение средней скорости по сечению трубы в целом.

Для этого определим расход Q через трубу, равный, очевидно, сумме элементарных расходов через кольца радиусом r и шириной dr (фиг. 82).

Имеем

$$Q=\int_0^{r_0} 2\pi r u dr$$

или, подставляя значение u по (132),

$$Q=\frac{2\pi u_m}{r_0^2}\int_0^{r_0}(r_0^2-r^2)r\,dr=\frac{\pi r_0^2}{2}u_m.$$

Отсюда делением расхода на площадь живого сечения $\omega=\pi r_0^2$ получим

$$v=\frac{Q}{\omega}=0{,}5u_m, \tag{134}$$

т. е. средняя скорость по сечению в ламинарном потоке в круглой трубе равна половине максимальной скорости.

Подставляя в (134) значение максимальной скорости по (131), получим такое выражение для средней скорости при ламинарном режиме:

$$v=\frac{\gamma d^2}{32\mu}I.$$

Из последнего выражения следует так называемая формула Пуазейля-Гагена

$$\left.\begin{aligned} I&=32\,\frac{\mu v}{\gamma d^2} \\ \text{и}\quad & \\ I&=128\,\frac{\mu Q}{\gamma\pi d^4}. \end{aligned}\right\} \tag{135}$$

Из уравнений (135) видно, что потери напора на единицу длины при ламинарном режиме пропорциональны первой степени средней скорости движения жидкости, что вполне совпадает с опытными данными, рассмотренными в § 50—51.

§ 55. Линии вихрей и линии токов в ламинарном движении

Ламинарное движение является в полном смысле слова установившимся движением. Линии токов в нем совпадают с траекториями частиц, как это наглядно видно из опытов Рейнольдса с окрашиванием струй.

Но не нужно думать, как это может на первый взгляд показаться, что ламинарное движение является безвихревым.

Согласно (130) поле скоростей ламинарного потока относительно системы координат с осью OX, совпадающей с осью трубы, напишется так: $u_y=0$; $u_z=0$, а

$$u_x=\frac{\gamma I}{4\mu}\,[r_0^2-(y^2+z^2)],$$

т. е. поле скоростей характеризуется единственным компонентом по оси OX, не зависящим совершенно от координаты x.

Тогда по формулам (33) можно установить наличие компонентов вихря, которые будут равны:

$$\begin{aligned} \omega_x&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)=0, \\ \omega_y&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)=-\frac{\gamma I}{4\mu}z=-az, \\ \omega_z&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)=\frac{\gamma I}{4\mu}y=ay. \end{aligned} \tag{136}$$

Диференциальное уравнение „вихревой линии“

$$\frac{dy}{\omega_y}=\frac{dz}{\omega_z}$$

примет согласно (136) следующий вид:

$$ydy+zdz=0$$

или после интегрирования

$$y^2+z^2=C=r^2=\text{const}.$$

Следовательно, „вихревые линии“ будут окружностями концентрическими относительно оси трубы, а вихревые поверхности — цилиндрическими поверхностями.

Полная угловая скорость вращения частицы согласно (35) будет

$$\omega=\sqrt{\omega_z^2+\omega_y^2}=a\sqrt{z^2+y^2}=\frac{\gamma I}{4\mu}r$$

или

$$\omega=\frac{2vr}{r_0^2}, \tag{137}$$

так как согласно (131) и (134)

$$\frac{\gamma I r}{4\mu}=\frac{2vr}{r_0^2}.$$

Следовательно, угловая скорость вращения частиц при ламинарном движении прямо пропорциональна средней скорости потока и расстоянию соответствующей точки от оси трубы.

В центре сечения угловая скорость вращения равна нулю, а у стенок, наоборот, она достигает своего максимального значения

$$\omega_m = \frac{2v}{r_0}. \tag{138}$$

Уравнение (137) может быть переписано так:

$$\omega = \omega m \frac{r}{r_0}, \tag{139}$$

т. е. эпюра угловых скоростей частиц такова же, как и эпюра касательных напряжений, показанная на фиг. 81. Угловые скорости пропорциональны касательным напряжениям.

Теперь рассмотрим энергетически баланс в ламинарном потоке.

Для каждой вихревой линии может быть написано уравнение Бернулли

$$\frac{p}{\gamma} + z + \frac{u^2}{2g} = H,$$

где постоянная H будет различна для различных вихревых линий.

Так как давление в сечениях потока следует закону гидростатики, то, полагая плоскость сравнения проходящей через ось трубы и давление в центре сечения равным p_0, можно написать

$$\frac{p_0}{\gamma} = \frac{p}{\gamma} + z,$$

определяя $\frac{u^2}{2g}$ по (130), получим

$$\frac{u^2}{2g} = \left(\frac{\gamma I}{4\mu}\right)^2 r_0^4 \left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]^2 \frac{1}{2g}$$

или, учитывая (132),

$$\frac{u^2}{2g} = \frac{u_m^2}{2g}\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)^2.$$

Следовательно, полный запас энергии для различных вихревых линий будет

$$H = \frac{p_0}{\gamma} + \frac{u_m^2}{2g}\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)^2.$$

Эту формулу можно на основании (139) переписать так:

$$H = \frac{p_0}{\gamma} + \frac{u_m^2}{2g} - \frac{u_m^2}{2g}\left(2\frac{\omega^2}{\omega_m^2} - \frac{\omega^4}{\omega_m^4}\right). \tag{140}$$

В этом уравнении величина

$$\frac{p_0}{\gamma} + \frac{u_m^2}{2g}$$

представляет собой удельную энергию центральной струйки ($\omega = 0$).

Величина $\left(2\frac{\omega^2}{\omega_m^2} - \frac{\omega^4}{\omega_m^4}\right)$ всегда положительна и может изменяться от нуля до единицы.

Отсюда видно, что энергия отдельной струйки меньше энергии центральной струйки на величину вихревой энергии.

§ 56. Коэфициент λ при ламинарном движении жидкости

В § 47 на основании закона количества движения (теоремы Эйлера), действительного для всех случаев движения жидкости, было установлено уравнение (100), которое может быть записано так:

$$\frac{h_{пут}}{L} = I = \frac{\lambda}{d}\frac{v^2}{2g}. \tag{141}$$

Это уравнение, как уже подчеркивалось и выше, не должно рассматриваться как утверждение пропорциональности потери напора квадрату скорости, если предварительно не доказано, что λ не зависит от скорости.

Поэтому никакого противоречия между уравнениями (135) и (141) не имеется, а как раз совместное их рассмотрение и позволит выяснить значение λ.

Приравняв правые части уравнений (135) и (141) и учитывая, что

$$\gamma = \rho g, \text{ а } \frac{\mu}{\rho} = \nu,$$

имеем

$$\lambda = \frac{64\nu}{vd}.$$

Обращаясь к выражению (114) для числа Рейнольдса, получим для коэфициента λ при ламинарном движении жидкости в трубах формулу

$$\lambda = \frac{64}{Re}. \tag{142}$$

Логарифмируя уравнение (142)

$$\lg\lambda = \lg 64 - \lg Re,$$

приходим к выводу, что зависимость λ от Re для ламинарного движения будет изображаться на логарифмической сетке прямой, наклонной к оси абсцисс под углом 135°.

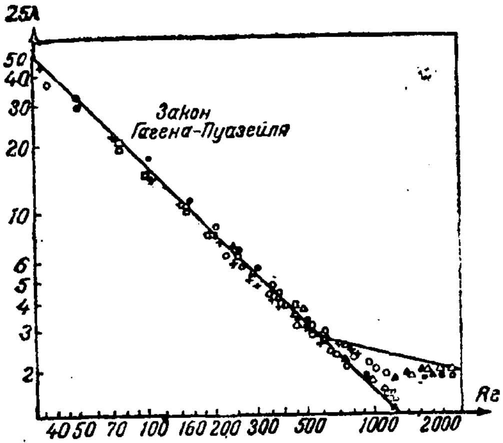
Многочисленные эксперименты полностью подтверждают правильность полученных теоретических выводов, а тем самим и правильность закона Ньютона для вязкостного трения, положенного в основу этих выводов.

Для иллюстрации на фиг. 83 представлены результаты опытов Кноделя над движением воздуха в трубах. Опытные точки тесно ложатся около теоретической прямой.

Задача 14. Определить необходимый напор для подачи воды со скоростью 12 *см/сек* через трубку диаметром $d = 20$ *мм*, длиной $L = 20$ *м* при температуре воды $t = 10°$ C.

Для установления режима потока определяем по (114) число Рейнольдса

$$Re = \frac{vd}{\nu}.$$



Фиг. 83

Согласно табл. 1 (§ 2) имеем для $t=10^\circ$ значение $\nu=0{,}0131$ *см²/сек* и следовательно,

$$Re=\frac{12\cdot 2}{0{,}0131}=1\,831.$$

Так как число Рейнольдса получилось меньше 2 000, то режим движения будет ламинарным. Тогда коэфициент λ должен определяться по (142)

$$\lambda=\frac{64}{Re}=\frac{64}{1\,831}=0{,}035$$

и необходимый напор, согласно (141), будет

$$h_{пут}=\frac{\lambda}{d}\,L\,\frac{v^2}{2g}=\frac{0{,}035}{2}\cdot\frac{2000}{2}\cdot\frac{12^2}{981}=2{,}57\ см.$$

ГЛАВА VIII

ТУРБУЛЕНТНЫЙ РЕЖИМ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

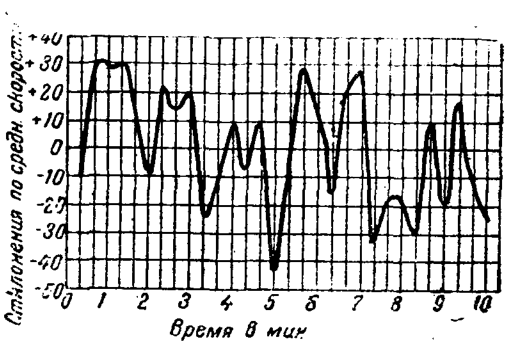
§ 57. Осредненная скорость и скорость пульсации

При изучении кинематики потока основным элементом является поле скоростей. Рассмотренные выше опыты Рейнольдса подсказывают необходимость обращать особое внимание при изучении турбулентного потока как на характер изменения поля скоростей в целом, так и на вариации скорости в отдельных точках в течение времени.

Такое изучение обнаруживает замечательную особенность турбулентного потока, резко отличную от ламинарного.

Тогда как для ламинарного потока характерно постоянство скорости в рассматриваемой точке потока, турбулентный поток отличается быстрыми изменениями местной скорости в ту или иную сторону от некоторого ее осредненного значения.

На фиг. 84 показана типичная изменчивость скорости во времени для одной и той же точки турбулентного потока. Эта кривая была получена в результате измерения скорости в реке, с помощью чувствительной вертушки, позволяющей быстро регистрировать изменение скорости[1].

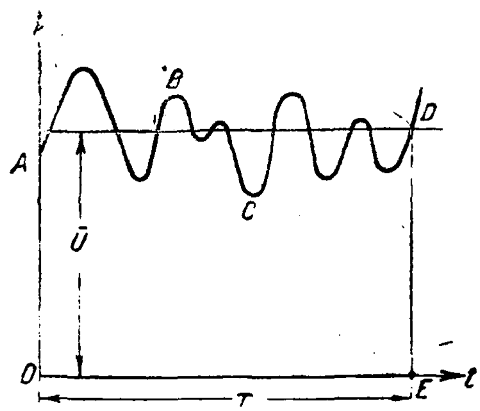


Фиг. 84.

Как видим, скорость в турбулентном потоке в отличие от ламинарного подвержена знакопеременным изменениям во времени или, иначе говоря, отличается **п у л ь с а ц и е й**.

При этом очень важно, что, несмотря на кажущуюся беспорядочность изменений скорости, осредненное значение ее за достаточно длительный промежуток времени остается все же постоянным и не зависит от времени.

Пусть кривая *ABCD* (фиг. 85) отражает изменения скорости во времени для некоторой



Фиг. 85

[1] Ф и д м а н и Ш а ф а л о в и ч. Описание гидрометрических работ на рр. Зее, Туре и Тоболе, Материалы по описанию русских рек, вып. 34. 1912.

точки в турбулентном потоке и выражается уравнением

$$u=f(t).$$

Возьмем достаточно длинный интервал времени T и найдем значение интеграла

$$\int_0^T u dt=\int_0^T f(t) dt. \qquad (143)$$

Интеграл этот будет, очевидно, равен по величине площади фигуры $OABCDE$, заключенной между кривой $ABCD$, осью абсцисс OE и ординатами OA и DE, соответствующими начальному и конечному моментам выбранного интервала времени.

Разделив выражение (143) на время T, получим среднее по времени значение скорости в рассматриваемой точке потока.

$$\tilde{u}=\frac{1}{T}\int_0^T f(t) dt=\frac{1}{T}\int_0^T u dt.$$

Эта величина называется осредненной скоростью турбулентного потока в данной точке.

Термин „осредненная“ скорость следует отличать от понятия „средняя“ скорость по сечению потока:

$$v=\frac{Q}{\omega},$$

где Q — расход жидкости через некоторое сечение потока, а ω — площадь этого сечения.

Обработка большого числа экспериментальных кривых пульсации дает право утверждать о независимости значения осредненной скорости от интервала осреднения T, если только этот интервал взят не меньше некоторого определенного предела.

Следовательно, в турбулентном движении взамен поля мгновенных скоростей можно рассматривать поле осредненных скоростей.

Поэтому и к турбулентным потокам может быть применено то подразделение на „установившиеся“ и „неустановившиеся“, которое было рассмотрено в кинематике.

§ 58. Процесс перемешивания и его роль в турбулентном потоке

Под действием пульсации скоростей в турбулентном потоке должен происходить непрерывный обмен частиц между соседними слоями, приводящий к перемешиванию жидкости, которое так четко обнаруживается в опытах Рейнольдса.

В связи с этим нужно, конечно, ожидать, что при турбулентном режиме движение жидкости будет происходить с большей затратой энергии, чем при ламинарном. Такой вывод неизбежен, так как при турбулентном режиме кроме энергии, затрачиваемой на чисто вязкостные сопротивления, определенная часть энергии будет израсходована на процесс перемешивания.

Для иллюстрации высказанного положения рассмотрим такой числовой пример. Пусть в трубе диаметром $d=1$ *м* движется вода при $t=20°$ со скоростью $v=1$ *м/сек*. Определим потери напора на участке $L=1\,000$ *м* при ламинарном и турбулентном режимах.

Число Рейнольдса для рассматриваемого потока будет

$$Re=\frac{vd}{\nu}=\frac{1\cdot 1\cdot 10^6}{1{,}007},$$

где кинематический коэфициент вязкости для воды при 20°C

$$\nu=1{,}007\cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{сек}.$$

Потери напора независимо от режима движения жидкости могут быть определены по (100)

$$h_{пут}=\lambda\frac{L}{d}\frac{v^2}{2g}$$

при соответствующем выборе значения λ.

Допустим, что, несмотря на большое число Рейнольдса, удалось каким-либо образом сохранить в трубе ламинарный режим. Тогда коэфициент λ определится по (142)

$$\lambda=\frac{64}{Re}=\frac{64\cdot 1{,}007}{10^6}$$

и потери напора, вызванные работой сил вязкости, будут

$$h_{пут}=\lambda\frac{L}{d}\frac{v^2}{2g}=\frac{64\cdot 1{,}007\cdot 1\,000\cdot 1^2}{10^6\cdot 1\cdot 19{,}62}=0{,}0032 \text{ м}.$$

Для случая же турбулентного режима примем приближенно на основе опытов Дарси (относящимся именно к турбулентному режиму)

$$\lambda=0{,}02.$$

Тогда потери напора на том же участке трубы, но уже при турбулентном режиме, будут равны

$$h_{пут}=\lambda\frac{L}{d}\frac{v^2}{2g}=\frac{0{,}02\cdot 1\,000\cdot 1^2}{1\cdot 19{,}62}=1{,}02 \text{ м}.$$

Как видим, потери энергии в турбулентном потоке в рассмотренном частном примере оказываются почти в триста раз больше, чем в ламинарном.

Такое резкое увеличение потерь энергии в турбулентном потоке по сравнению с ламинарным происходит за счет поглощения энергии в процессе перемешивания. Именно процесс перемешивания вызывает дополнительные напряжения в жидкости в результате обмена количеством движения между слоями.

§ 59. Обмен количеством движения

Пусть в точке A турбулентного потока, движущегося со скоростью u, возникла в некоторый момент времени пульсация скорости с компонентами u'_x и u'_y[1]. Выделим около точки A горизонтальную площадку $\Delta\omega$ и рассмотрим, какие дополнительные напряжения среза должны возникнуть под влиянием компонентов пульсации.

Под действием компонента пульсации u'_y через площадку $\Delta\omega$ за время δt пройдет элементарная масса жидкости

$$\delta m = \rho\, u'_y \Delta\omega\delta t.$$

Эта масса жидкости под действием другого компонента пульсации u'_x получит приращение количества движения в направлении оси абсцисс, равное

$$\delta\,(mv) = \delta m u'_x = \rho u'_x u'_y \Delta\omega\delta t.$$

Вследствие этого по площади должна проявиться некоторая сила инерции ΔA, импульс которой будет равен по величине приращению количества движения.

Тогда имеем

$$\Delta A\delta t = -\rho u'_x u'_y \Delta\omega\delta t.$$

Знак минус поставлен потому, что сила инерции всегда направлена против ускорения.

Из последнего выражения можно определить дополнительное напряжение среза (инерционное), вызванное процессом перемешивания в турбулентном потоке

$$\tau_A = \frac{\Delta A}{\Delta\omega} = -\rho u'_x u'_y,$$

осредненное значение которого обозначим

$$\overline{\tau}_A = -\rho\overline{u'_x u'_y}. \qquad (144)$$

Здесь символом $\overline{u'_x u'_y}$ обозначено не произведение осредненных значений компонентов пульсации u'_x и u'_y, которые равны нулю, а осредненное значение произведений этих компонентов.

Осредненные значения каждого из компонентов пульсации в отдельности равны нулю потому, что компоненты пульсации являются знакопеременными величинами с одинаковой вероятностью как положительных, так и отрицательных значений. Между тем легко понять, что произведение этих компонентов $u'_x \cdot u'_y$ является величиной не знакопеременной, а всегда отрицательной.

В самом деле, рассматривая какой-либо элементарный объем жидкости при положительном, например, компоненте пульсации u'_x, мы должны притти к заключению о появлении деформации удлинения в направлении оси X. Вследствие же неизменности массы жидкости в рассматриваемом объеме, естественно, одновременно должна проявиться деформация укорочения в направлении оси Y, что и выразится отрицательным компонентом пульсации u'_y.

Таким образом произведения $u'_x \cdot u'_y$ всегда отрицательны и, следовательно, осредненное значение таких произведений не будет равно нулю.

Величина $\overline{\tau}_A$ по закону независимости действия сил и напряжений должна быть добавлена к тому чисто вязкостному напряжению, которое действует между отдельными слоями турбулентного потока и вызывается градиентом осредненной скорости.

В частности, если для плоского турбулентного потока ось X направить параллельно осредненной скорости u_x, то суммарное касательное напряжение будет равно

$$\tau = \mu\frac{d\overline{u}_x}{dy} - \rho\overline{u'_x u'_y}, \qquad (145)$$

где первый член правой части отражает чисто вязкостные напряжения, а второй — инерционные напряжения в результате процесса перемешивания.

§ 60. Инерционные напряжения в турбулентном потоке в функции градиентов осредненной скорости

Весьма желательно уравнению (145) придать такой вид, чтобы инерционные напряжения были выражены не в зависимости от компонентов пульсации скорости, а в виде какой-либо функции от осредненной скорости потока.

Пусть налицо турбулентное перемешивание с поперечными пульсирующими скоростями. Частица жидкости, находившаяся в точке A с осредненной скоростью u_x, подхваченная импульсом поперечного течения, перенесется в слой, отстоящий на некотором расстоянии l от точки A, и вызовет там пульсацию скорости.

Осредненная скорость жидкости в новом месторасположении частицы будет

$$u_x \pm \frac{d\overline{u}_x}{dy}\, l.$$

Естественно предположить, что компонент скорости пульсации может быть обозначен

$$u'_x = \pm l\,\frac{d\overline{u}_x}{dy}.$$

Вследствие взаимной связи компонентов пульсации, пульсация скорости u'_x вызовет анало-

[1] Здесь и ниже компонентами пульсации (u'_x, u'_y и u'_z) в отличие от компонентов скоростей (u_x, u_y, u_z) названы мгновенные приращения последних.

гичную, но с обратным знаком пульсацию скорости u'_y. Следовательно, можно записать

$$u'_y = \mp l \frac{d\bar{u}_x}{dy}.$$

Подставляя полученные значения компонентов u'_x и u'_y в уравнение (145), получим

$$\tau = \mu \frac{d\bar{u}_x}{dy} + \rho l^2 \left(\frac{d\bar{u}_x}{dy}\right)^2. \qquad (146)$$

Линейный параметр l введен Прандтлем[1] и назван им „длиной пути перемешивания".

Важно отметить, что уравнение (146) дает обобщенную формулу для напряжений среза при любом режиме движения жидкости.

В самом деле, при ламинарном режиме перемешивания жидкости не происходит, длина пути перемешивания $l=0$ и из (146) вытекает

$$\tau = \mu \frac{d\bar{u}_x}{dy},$$

т. е., что при ламинарном режиме касательные напряжения пропорциональны вязкости и **первой степени** скорости.

Наоборот, если турбулентное движение характеризуется весьма большим перемешиванием масс жидкости (большие значения Re), то второй член в (146) резко возрастает так, что по сравнению с ним вязкостным напряжением можно пренебречь и тогда

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{d\bar{u}_x}{dy}\right)^2. \qquad (147)$$

Это значит, что при высокой степени турбулентности касательные напряжения пропорциональны плотности и **квадрату** скорости.

Наконец, уравнение (146) показывает, что в тех случаях, когда напряжения от сил вязкости, несмотря на их меньшую роль в общем балансе, все же соизмеримы с инерционными напряжениями, общее касательное напряжение будет пропорционально скорости в степени **несколько меньше второй**.

Таким образом теоретически вполне объясняются явления, установленные экспериментально и приведенные в предыдущих главах.

§ 61. Эпюры распределения скоростей при турбулентном движении жидкости

Наличие перемешивания в турбулентном потоке и связанного с этим переноса количества движения из одного слоя жидкости в другой должно приводить к определенному выравниванию осредненных скоростей в различных точках живого сечения.

При этом очевидно, что чем большей степенью турбулентности отличается движение жидкости (чем больше число Рейнольдса), тем больше длина пути перемешивания, тем больше проникновение частиц жидкости из одного слоя в другой и, следовательно, тем более выравненной должна быть эпюра скоростей.

В пределе при бесконечно больших значениях Re следует ожидать совершенно равномерную эпюру распределения скоростей по сечению потока, характерную для идеальной жидкости. Этого и следовало ожидать, так как в идеальной жидкости вязкость отсутствует ($\mu=0$) и число Рейнольдса, следовательно, всегда равно бесконечности.

Последнее обстоятельство позволяет еще раз подчеркнуть, что чем больше число Рейнольдса, тем меньшую роль играют силы вязкости в общем энергетическом балансе.

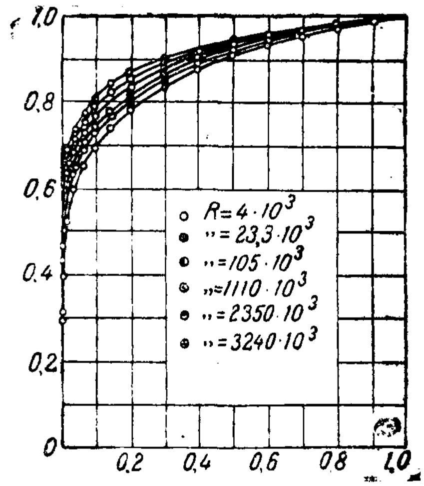
Высказанные соображения об эпюре распределения скоростей в турбулентном потоке полностью подтверждаются опытными данными.

На фиг. 86[1] даны результаты классических опытов Никурадзе над трубами с гладкими стенками. Кривые, показанные на этой фигуре, дают значения отношений местных осредненных скоростей $\bar{u}$, замеренных в той или иной точке сечения трубы, к максимальной осредненной скорости $\bar{u}_m$, замеренной в центре трубы, в функции относительных расстояний $\frac{y}{r_0}$ соответствующих точек от стенок трубы.

Каждому значению числа Рейнольдса в интервале от $Re=4 \cdot 10^3$ до $Re=3{,}24 \cdot 10^6$ соответствует вполне определенная кривая

$$\frac{\bar{u}}{\bar{u}_m} = f\left(\frac{y}{r_0}\right).$$

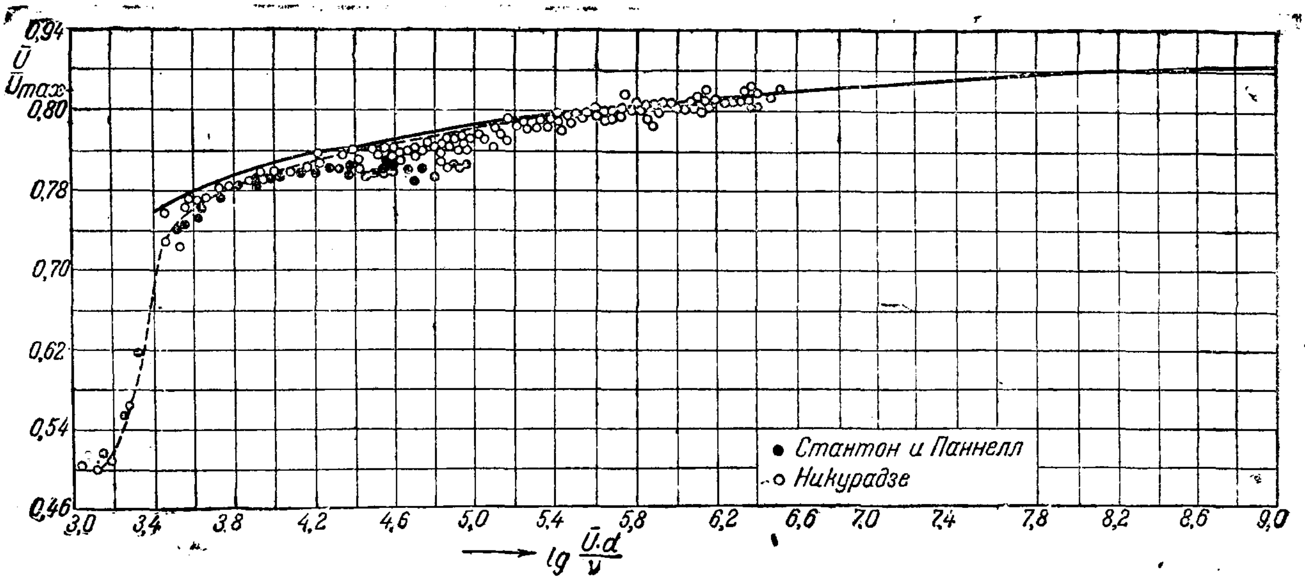
Из фиг. 86 видно, что по мере роста числа Рейнольдса эпюры скоростей становятся все



Фиг. 86

[1] „Проблемы турбулентности", ОНТИ, 1936.

[1] На фиг. 86 отложены по оси абсцисс величины $\frac{y}{r_0}$, по оси ординат $\frac{\bar{u}}{\bar{u}_m}$. Кривые расположены по мере возрастания Re, считая снизу.



Фиг. 87

более равномерными. Интервал изменения отношения $\frac{\bar{u}}{\bar{u}_m}$ в пределах сечения трубы уменьшается с ростом числа Рейнольдса.

К тому же выводу приводит кривая, суммирующая опыты Стантона и Панелла[1] с водой и воздухом и Никурадзе с водой (фиг. 87). По оси абсцисс отложены логарифмы чисел Рейнольдса, а по оси ординат отношения средней скорости v по сечению к максимальной u_m в центре сечения трубы. Эта кривая относится к широкому диапазону изменения Re от значений, соответствующих ламинарному режиму при $\lg Re = 3{,}1$ ($Re = 1{,}26 \cdot 10^3$) до весьма высоких значений Re при турбулентном режиме.

Из фиг. 87 видно, что наибольшей неравномерностью характеризуется эпюра скоростей ламинарного потока:

$$\frac{v}{u_m} = 0{,}5,$$

что вполне согласуется с выводом (134), полученным теоретически. Отношение $\frac{v}{u_m}$ в турбулентном потоке изменяется от 0,75 и выше, обнаруживая явную тенденцию приближаться к единице с увеличением числа Рейнольдса.

Таким образом, несмотря на кажущуюся беспорядочность, турбулентное движение характеризуется определенной закономерностью.

При этом замечательно само по себе то обстоятельство, что показанные кривые действительны для любых жидкостей.

[1] Л. Шиллер, Движение жидкости в трубах, 1938.

§ 62. Ламинарная пленка в турбулентном потоке

Условия движения турбулентного потока у самой стенки русла (трубы) должны отличаться своеобразными особенностями. В отличие от всего потока вблизи самой стенки парализуется возможность перемешивания, так как наличие твердой границы исключает появление поперечных движений и длина пути перемешивания в непосредственной близости к стенке должна стремиться к нулю.

В связи с этим уже давно сложилось представление, что и в турбулентном потоке в непосредственной близости от стенки должен быть расположен пусть весьма тонкий, но ламинарный слой, так называемая ламинарная пленка.

Однако потребовалось много лет, пока, наконец, Стантон и Панелл (в 1920 г.) и затем Никурадзе (в 1933 г.) путем тончайших специально сконструированных измерительных приборов (трубок Пито) доказали бесспорное наличие ламинарной пленки при турбулентном движении жидкости в гладких трубах.

В пределах ламинарной пленки скорость движения жидкости изменяется от нуля у стенки до некоторого конечного значения $u_{пл}$ на границе самой пленки, а далее, под воздействием факторов перемешивания, характер изменения скорости меняется и эпюра скоростей получает рассмотренный в предыдущем параграфе вид.

Попытаемся подойти к установлению толщины ламинарной пленки ($\delta_{пл}$).

Вследствие малости $\delta_{пл}$ градиент скорости в пределах самой ламинарной пленки можно считать равным $\frac{u_{пл}}{\delta_{пл}}$ и потому касательное напряжение на стенке будет

$$\tau_0=\mu\frac{du}{dn}=\mu\frac{u_{пл}}{\delta_{пл}}$$

или после деления обеих частей этого уравнения на ρ

$$\frac{\tau_0}{\rho}=\nu\frac{u_{пл}}{\delta_{пл}}. \qquad (148)$$

Обратим внимание на размерность величины $\frac{\tau_0}{\rho}$. Имеем

$$\left[\frac{\tau_0}{\rho}\right]=\left[\frac{ML^{-1}T^{-2}}{ML^{-3}}\right]=L^2T^{-2}.$$

Как видим, выражение $\frac{\tau_0}{\rho}$ имеет размерность квадрата скорости и, следовательно, $\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ имеет размерность скорости.

Величина $\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ получила поэтому по предложению Л. Прандтля специальное название — „скорость среза у стенки" и обозначается символом скорости со звездочкой внизу

$$\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}=u_*.$$

Разделим теперь обе части уравнения (148) на $\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}=u_*$ и получим

$$u_*=\frac{\nu}{\delta_{пл}}\,\frac{u_{пл}}{u_*}$$

или

$$\frac{u_{пл}}{u_*}=\frac{u_*\,\delta_{пл}}{\nu}. \qquad (149)$$

В безразмерном выражении (149) правая часть конструктивно сходственна с числом Рейнольдса. По аналогии с переходом в целом от ламинарного движения к турбулентному можно полагать, что и переход от ламинарной пленки к турбулентному ядру течения происходит при достижении величиной $\frac{u_*\delta_{пл}}{\nu}$ некоторого постоянного для всех жидкостей значения N.

Записывая вместо (149)

$$\frac{u_{пл}}{u_*}=\frac{u_*\delta_{пл}}{\nu}=N=\text{const}, \qquad (150)$$

получим значение толщины ламинарной пленки

$$\delta_{пл}=N\frac{\nu}{u_*}.$$

Многочисленные тщательные опыты Никурадзе[1] с гладкими трубами полностью подтверждают постоянство значения равенства (150) и устанавливают численное значение постоянной

$$N\approx 11{,}6. \qquad (151)$$

В связи с этим толщина ламинарной пленки определяется уравнением

$$\delta_{пл}=11{,}6\frac{\nu}{u_*}. \qquad (152)$$

Обращаясь к уравнениям (96) и (99), можно установить, что

$$u_*=\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}=\sqrt{gRI} \qquad (153)$$

и получить для толщины ламинарной пленки вместо (152) другое уравнение

$$\delta_{пл}=\frac{11{,}6}{\sqrt{g}}\,\frac{\nu}{\sqrt{RI}}.$$

Для круглых труб $R=\frac{d}{4}$ и потому можно записать

$$\delta_{пл}=\frac{23{,}2}{\sqrt{g}}\cdot\frac{\nu}{\sqrt{dI}} \qquad (154)$$

или, так как $I=\frac{\lambda v^2}{d2g}$,

$$\delta_{пл}=32{,}8\frac{\nu}{v\sqrt{\lambda}}. \qquad (155)$$

Толщина ламинарной пленки весьма невелика. Так, например, движение воды при 20°С по гладкой трубе со средней скоростью $v=1$ *м/сек* будет характеризоваться ламинарной пленкой толщиной (принимая $\lambda=0{,}02$)

$$\delta_{пл}=\frac{32{,}8\cdot 0{,}01\ см^2/сек}{100\ см/сек\sqrt{0{,}02}}=0{,}023\ см.$$

Придав уравнению (155) вид

$$\delta_{пл}=32{,}8\frac{\nu d}{vd\sqrt{\lambda}}=32{,}8\frac{d}{Re\sqrt{\lambda}}, \qquad (156)$$

приходим к важному заключению, что с увеличением числа Рейнольдса в потоке толщина ламинарной пленки уменьшается.

§ 63. Зависимость потерь энергии от свойств смоченной поверхности стенок русла

При ламинарном движении жидкости потери энергии не зависят от свойств внутренней поверхности стенок русла, т. е. не зависят от материала стенок и характера его обработки

[1] Б. А. Бахметев, Механика турбулентного потока, Госстройиздат, 1939.

(от шероховатости стенок). Это видно из того, что при ламинарном режиме коэфициент $\lambda = \frac{64}{Re}$, т. е. зависит только от числа Рейнольдса.

При турбулентном же режиме шероховатость стенок не будет влиять на потерю энергии только в том случае, если ламинарная пленка полностью прикрывает все выступы шероховатости. Ясно, что в тех случаях, когда выступы шероховатости Δ будут больше $\delta_{пл}$, пленка будет разрушаться и путевые потери энергии при движении жидкости в таком русле будут существенно зависеть от шероховатости стенок.

На основе сказанного можно различать стенки гладкие ($\Delta < \delta_{пл}$) и шероховатые ($\Delta > \delta_{пл}$).

Понятие „гладкая" стенка — относительно. С увеличением числа Рейнольдса $\delta_{пл}$ уменьшается. Поэтому та или иная стенка с выступами определенного размера Δ, проявляясь как „гладкая" при некотором интервале чисел Рейнольдса, должна будет рассматриваться как „шероховатая", когда при увеличении числа Рейнольдса толщина ламинарной пленки станет меньше Δ.

Влияние шероховатости на энергетический баланс при турбулентном движении жидкости будет различно в зависимости от соотношения $\frac{\Delta}{\delta_{пл}}$.

Когда ламинарная пленка полностью разрушена, потери на трение в трубах становятся пропорциональными квадрату скорости. При промежуточных состояниях путевые потери зависят уже не от квадрата скорости, а от несколько пониженной степени ее, что и отмечалось при рассмотрении опытных материалов.

§ 64. Коэфициент λ при турбулентном режиме в гладких трубах

Анализируя свои опыты, о которых сообщалось выше, Рейнольдс подметил, что градиент давления при движении жидкости в трубах зависит от следующих параметров: средней скорости v, диаметра трубы d, коэфициента вязкости жидкости μ и плотности ρ. Независимость от шероховатости стенок показывает, что опыты проводились в гладких трубах.

Предположим, что эта зависимость может быть записана в виде одночлена

$$-\frac{dp}{dx} = N\, v^n\, d^x\, \mu^y\, \rho^z, \tag{157}$$

где показатели степени n, x, y, z при переменных пока не известны, а N — некоторое безразмерное число. Величины трех показателей степени x, y, z определим в функции показателя степени n из условия размерности выражения (157).

Размерности величин, входящих в правую часть уравнения (157), таковы:

$$[v] = LT^{-1},$$

$$[\mu] = \frac{M}{LT},$$

$$[d] = L,$$

$$[\rho] = \frac{M}{L^3};$$

размерность левой части уравнения (157) будет

$$\left[\frac{dp}{dx}\right] = \frac{M}{L^2T^2}.$$

Учитывая это, напишем уравнение размерности выражения (157)

$$\left[ML^{-2}T^{-2}\right] = \left[\frac{L}{T}\right]^n \left[L\right]^x \left[\frac{M}{LT}\right]^y \left[\frac{M}{L^3}\right]^z.$$

Это уравнение можно переписать так:

$$[M]\,[L^{-2}]\,[T^{-2}] = [L^{n+x-y-3z}]\,[M^{y+z}]\,[T^{-n-y}].$$

Размерность правой и левой частей этого уравнения должна быть одинаковой. Поэтому, приравнивая показатели степени при одинаковых множителях в обеих частях, получим три уравнения

$$\left.\begin{aligned} 1 &= y + z, \\ -2 &= n + x - y - 3z, \\ -2 &= -n - y. \end{aligned}\right\} \tag{158}$$

Решая эти уравнения, найдем

$$x = n - 3;\quad y = 2 - n;\quad z = n - 1$$

и уравнение (157) получит такой вид:

$$-\frac{dp}{dx} = N v^n d^{n-3} \mu^{2-n} \rho^{n-1}.$$

Из уравнения Бернулли легко установить, что $\gamma I = -\frac{dp}{dx}$ и поэтому имеем

$$\gamma I = N\frac{v^n}{d^{3-n}}\,\rho\left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{2-n}. \tag{159}$$

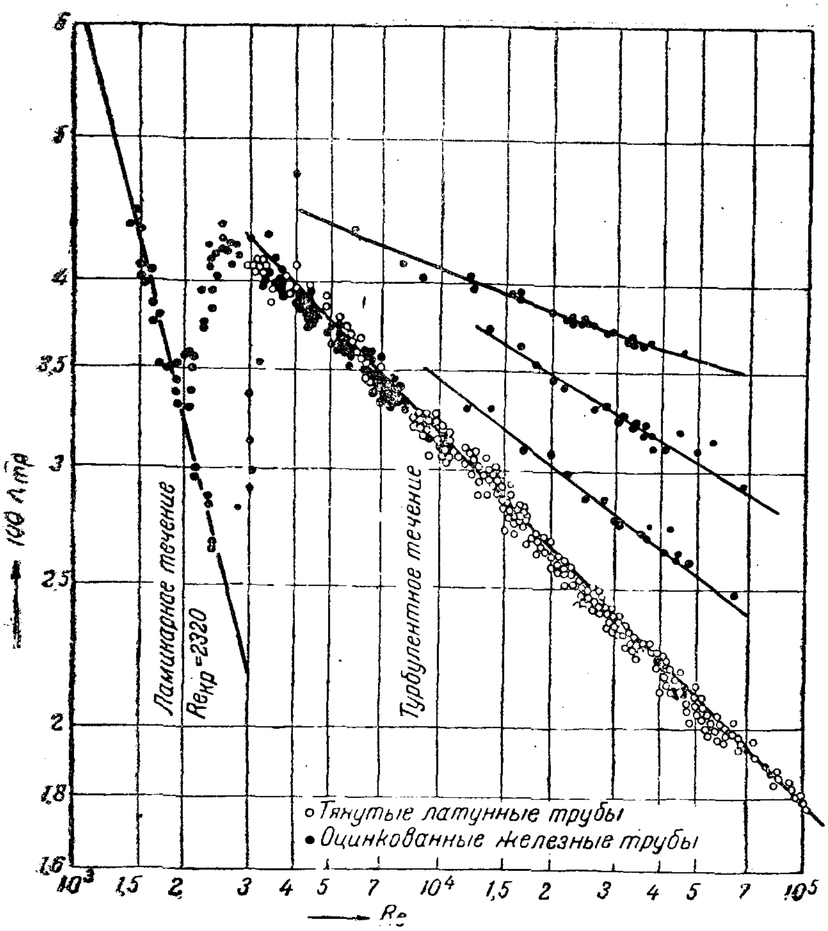
Это и есть общая форма зависимости потерь на трение в гладких трубах, предложенная Рейнольдсом. Показатель n в этой формуле может изменяться в пределах от $n = 1$ до $n = 2$.

Подставим в левую часть уравнения (159) значение пьезометрического уклона по Дарси:

$$\gamma\,\frac{\lambda}{d}\,\frac{v^2}{2g} = N\,\frac{v^n}{d^{3-n}}\,\rho\left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{2-n}.$$

Учитывая, что $\gamma = \rho g$, из этой формулы можно найти общее выражение для коэфициента λ:

$$\lambda = \frac{N}{\left(\rho\frac{vd}{\mu}\right)^{2-n}} = \frac{N}{Re^{2-n}}. \tag{160}$$



Фиг. 88

Результаты работы Блазиуса показаны в логарифмических координатах на фиг. 88. По оси абсцис отложены значения Re, а по оси ординат соответствующие им опытные данные значений 100 λ.

В интервале изменения Re до 2 000 опытные точки хорошо ложатся на прямую, соответствующую ламинарному режиму и характеризующуюся уравнением

$$\lambda = \frac{64}{Re}.$$

В интервале изменения Re от 2 000 до 100 000 опытные точки плотно группируются около прямой, уравнение которой

$$\lambda = \frac{0{,}316}{Re^{0,25}}. \qquad (161)$$

Выражение (161) представляет так называемый закон Блазиуса для коэффициента потерь в гладких трубах.

Сравнивая (161) с (160), легко убедиться, что показатель степени n в формуле (160) в интервале изменения Re от 2 000 до 100 000 равен

$$n = 1{,}75.$$

Последняя формула не только подтверждает полученный ранее вывод, что для гладких труб λ есть функция числа Рейнольдса, но и дает форму этой зависимости.

Формула (160) охватывает и ламинарный режим. В самом деле, как уже известно, потери энергии при ламинарном движении жидкости пропорциональны первой степени скорости ($n = 1$) и уравнение (160) превращается в (142) при значении числа N, равном 64.

Посмотрим, подтверждается ли уравнение (160) экспериментальной проверкой.

В 1913 г. Блазиус[1] впервые обработал по принципам подобия обширные и хорошо проведенные опыты Шафа и Шодера над движением воды в гладких латунных трубах. Интервал изменения чисел Рейнольдса в этих опытах колебался от значений, соответствующих ламинарному режиму, до $Re = 100\,000$.

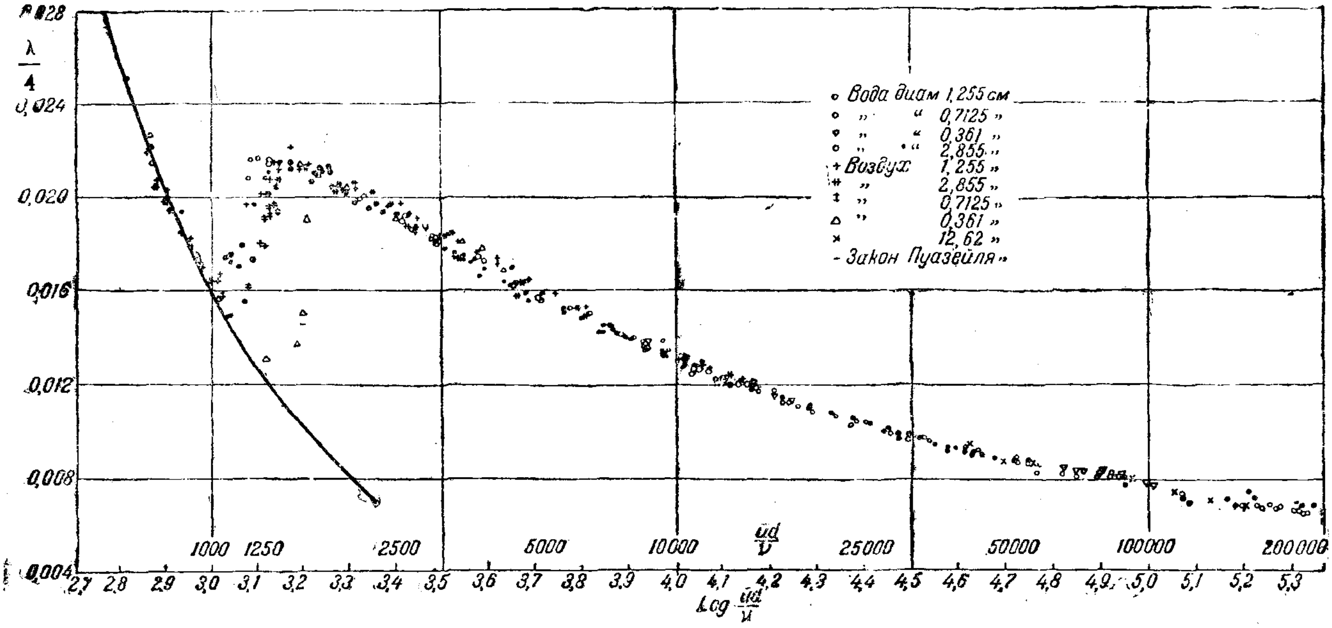
Следовательно, по формуле Блазиуса потери энергии в гладких трубах пропорциональны средней скорости в степени 1,75.

Однако Блазиус обработал опыты в сравнительно небольшом интервале изменения числа Рейнольдса. В 1914 г. английские исследователи Стантон и Паннел[1] произвели опыты над движением воды и воздуха в гладких трубах диаметром от 0,361 до 12,62 *см* при значениях числа Рейнольдса, доходивших до 500 000.

Результаты их опытов показаны на фиг. 89. При этом экспериментаторы пришли к выводу, что при интервале изменения чисел Рейнольдса, превосходящем интервал Блазиуса, формула (161) оказывается уже недостаточно точной, а это значит, что высказанное выше предположение об одночленном выражении градиента давления (157) уже не оправдывается.

[1] H. Blasius „Das Aenlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten" Forsch. Arb. a. d. Geb d. Ing. Wes, № 131, 1913.

[1] Stanton and Pannell, „Similarity of Motion in Relation to Surface Friction of Fuids", Phil Trans. Roy. Soc., London, 1914.



Фиг. 89

В 1915 г. английский исследователь Лиис обработал опыты Стантона и Паннела и предложил вместо (160) двухчленную зависимость такого общего вида:

$$\lambda = a + \frac{b}{Re^x}, \tag{162}$$

где a и b — некоторые числовые параметры.

Лиис в результате обработки опытных данных предложил свою формулу:

$$\lambda = 0{,}00714 + \frac{0{,}6104}{Re^{0{,}35}}. \tag{163}$$

Последующие экспериментаторы приводили свои данные к типу формулы, предложенной Лиисом.

Так, например, в 1930 г. Шиллер и Герман предложили на основании своих опытов формулу, которая в переработанном Никурадзе виде может быть записана так:

$$\lambda = 0{,}0054 + \frac{0{,}396}{Re^{0{,}3}}. \tag{164}$$

Эта формула согласно опытам Никурадзе применима до значений $Re = 2\,500\,000$.

Наконец, Никурадзе в 1933 г., на основании собственных опытов и сопоставления с теорией, предложил свою формулу, охватывающую еще больший интервал (до $Re = 3\,240\,000$)

$$\lambda = 0{,}0032 + \frac{0{,}221}{Re^{0{,}237}}. \tag{165}$$

Опыты Никурадзе, опубликованные им в 1933 г.[1], весьма интересны и систематичны. Опыты проводились в трубах с искусственно приданной им шероховатостью.

Искусственную шероховатость Никурадзе получал следующим образом. Он отсеивал определенные фракции песка и равномерно посыпал отсеянным песком стенки гладкой трубы радиуса r, предварительно покрытые специальным лаком.

Никурадзе принимал крупность зерен в качестве меры для выступа шероховатости. Таким образом для экспериментов он получил целую серию труб, характеризующихся определенным значением относительной шероховатости $\frac{\Delta}{r} = \varepsilon$ или относительной гладкости

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{r}{\Delta}.$$

Понятие об относительной гладкости, обратное понятию об относительной шероховатости, оказалось более удобным для оформления опытов.

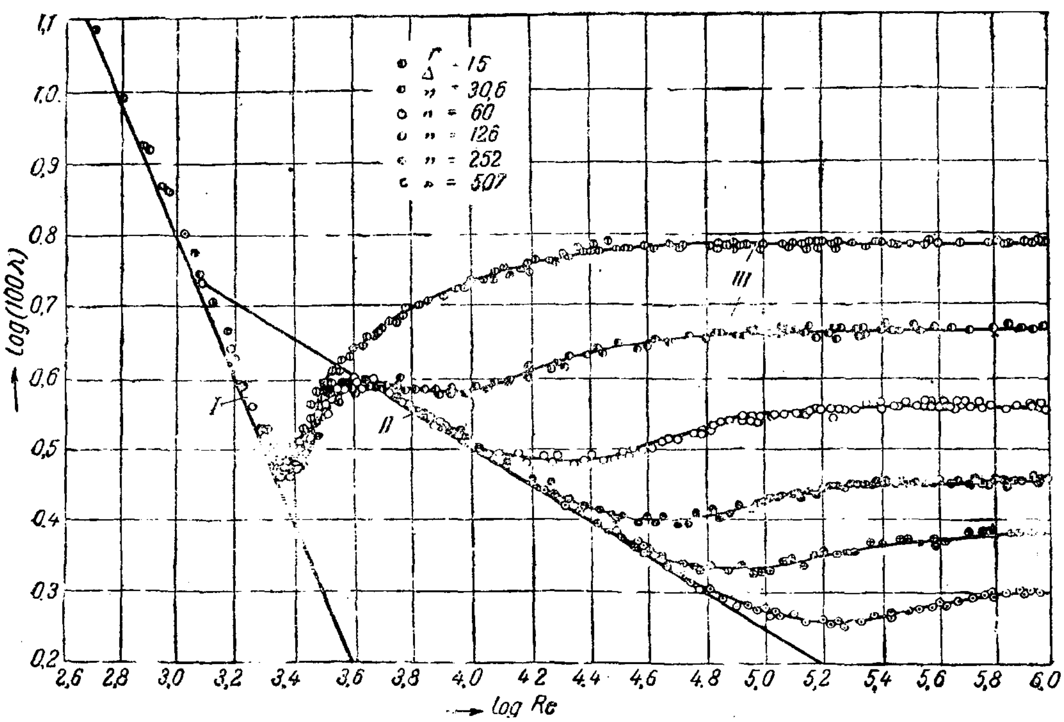
На фиг. 90 показаны результаты опытов Никурадзе. По оси абсцисс отложены значения $\lg Re$, а по оси ординат значения $\lg 100\lambda$. Для облегчения анализа на диаграмму нанесены прямые:

I — соответствующая ламинарному движению;

II — соответствующая закону Блазиуса.

Кривые *III* дают опытные значения коэфициента λ, соответствующие определенным значениям относительной гладкости, нанесенные в функции числа Рейнольдса.

[1] Nikuradse, Strömmungsgesetze in rauhen Röhren, VDI. Forschungshef № 361, 1933.



Фиг. 90

Вся сложная и своеобразная механика движения жидкости в трубах отражена на этом замечательном графике. *Анализируя его, мы видим,* что в области ламинарного движения до значений $Re \approx 2\,000$ коэфициент потерь λ не зависит от относительной шероховатости $\frac{\Delta}{r}$ или от относительной гладкости трубы $\frac{r}{\Delta}$. Все опытные точки ложатся независимо от значений $\frac{r}{\Delta}$ около прямой *I* для ламинарного режима.

В интервале Re от $2\,000$ ($\lg Re \approx 3{,}3$) до $Re = 3\,200$ ($\lg Re \approx 3{,}5$) происходит переход от ламинарного режима к турбулентному. В этом интервале опытные точки для всех значений $\frac{r}{\Delta}$ лежат достаточно кучно. При дальнейшем повышении числа Рейнольдса режим движения жидкости становится уже определенно турбулентным. Но оказывается, что закон сопротивления уже различен для различных значений относительной гладкости $\frac{r}{\Delta}$. Иначе говоря, здесь оправдывается зависимость

$$\lambda = \Phi\left(Re, \frac{\Delta}{r}\right).$$

При больших значениях шероховатости, т. е. при малых значениях относительной гладкости (верхняя кривая $\frac{r}{\Delta} = 15$) коэфициент сопротивления λ непрерывно возрастает и, пересекая кривую Блазиуса, достигает при $Re \approx 40\,000$ ($\lg Re \approx 4{,}6$) независимости от числа Рейнольдса (*квадратичный закон*).

Вторая сверху кривая, соответствующая большей относительной гладкости $\frac{r}{\Delta} = 30{,}6$, тоже пересекает кривую Блазиуса, т. е. ламинарной пленки также не образуется. Но в зоне пересечения с кривой *II* зависимость $\lambda = \Phi(Re)$ имеет некоторую впадину вниз (сказывается некоторое влияние сил вязкости). Затем следует опять подъем и при $Re \approx 160\,000$ ($\lg Re \approx 5{,}2$) достигается область квадратичного закона.

Для всех остальных еще больших значений относительной гладкости от $\frac{r}{\Delta} = 60$ до $\frac{r}{\Delta} = 507$ неизменно существует некоторый интервал изменения числа Рейнольдса Re, тем больший, чем больше относительная гладкость, в пределах которого ламинарная пленка полностью покрывает все выступы шероховатости. В этой области закон сопротивления совпадает с законом $\lambda = \Phi(Re)$ для гладких труб и опытные точки группируются у прямой Блазиуса.

Затем следуют опять переходные участки, характеризующиеся впадинами в значениях λ и, наконец, при некоторых значениях Re тем больших, чем больше относительная гладкость достигается область квадратичного закона.

Рассмотрев особенности потерь энергии в гладких трубах, перейдем к теоретическому освещению этого же вопроса для труб шероховатых.

§ 65. Основы теории Кармана-Прандтля

Выявление теоретических основ потерь энергии при турбулентном движении в шероховатых руслах издавна являлось сложнейшей проблемой гидравлики, являлось по выражению Буссинеска „загадкой, внушающей отчаяние“. Только за последние десятилетия благодаря работам Прандтля и Кармана сделан большой шаг вперед в выяснении проблемы турбулентности.

Эти разработки, частично уже использованные выше, не дают еще достаточных данных для производственного применения, но уже и в современной своей стадии представляют исключительный интерес, подводя теоретическую основу для последующего развития вопроса и накопления необходимых числовых параметров.

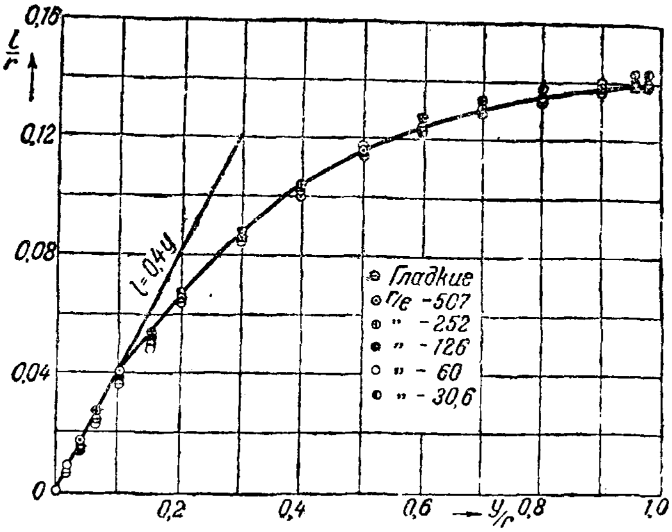
В настоящем курсе мы ограничиваемся лишь самым кратким изложением основных положений, вытекающих из работ Прандтля и Кармана. При этом мы считали возможным в отдельных местах поступиться строгостью математического анализа, обратив главное внимание на сущность самого явления.

1. Логарифмический закон распределения скоростей. Длина пути перемешивания l, как уже отмечалось и выше, должна изменяться от некоторого максимального своего значения в центре трубы до нулевого значения у стенки, где возможность перемешивания парализуется как наличием самой стенки, так и влиянием сил вязкости.

Никурадзе были произведены подробные исследования, позволяющие установить зависимость пути перемешивания l в той или иной точке поперечного сечения трубы от расстояния y рассматриваемой точки от стенки. На фиг. 91 отображены результаты исследований в широком диапазоне изменения числа Рейнольдса от $Re = 105 \cdot 10^3$ до $Re = 3\,240 \cdot 10^3$, т. е. когда роль вязкостных сил может быть игнорирована. На этой фигуре показана зависимость относительных величин $\frac{l}{r_0}$ и $\frac{y}{r_0}$. Как видно из фигуры, опытные данные группируются около одной и той же кривой, характеризующейся нулевым значением $\frac{l}{r_0}$ у стенки и максимальным значением $\frac{l}{r_0} \approx 0{,}14$ при $\frac{y}{r_0} = 1$, т. е. в центре трубы. Тангенс угла наклона начального участка этой кривой к оси абсцисс по опытам Никурадзе получен равным

$$\varkappa = \left|\frac{dl}{dy}\right|_{y=0} \approx 0{,}38.$$

Это значение оказывается постоянным для всех родов жидкости и потому получило название „универсальной постоянной“.



Фиг. 91

На основе этих опытов примем в дальнейшем условно

$$l = \varkappa y.$$

Теперь возьмем уравнение (147) для напряжения сдвига при турбулентном движении и перепишем его в такой форме:

$$\sqrt{\frac{\tau}{\rho}} = l\,\frac{d\bar{u}_x}{dy} = \varkappa y\,\frac{d\bar{u}_x}{dy}$$

или

$$d\bar{u}_x = \frac{1}{\varkappa}\sqrt{\frac{\tau}{\rho}}\,\frac{dy}{y}. \tag{166}$$

В последнем уравнении величина $\sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$ является переменной. Если мы ограничимся узкой зоной вблизи стенки, то можно будет пренебречь изменением величины напряжения τ и принять его равным напряжению среза на стенке τ_0.

Интегрируя (166) с такой оговоркой, имеем

$$\bar{u}_x = \frac{1}{\varkappa}\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\ln y + C = \frac{u_*}{\varkappa}\ln y + C, \tag{167}$$

т. е. вблизи стенки турбулентного потока скорость изменяется как натуральный логарифм расстояния от стенки.

Л. Прандтль выдвинул предложение, что такой простой логарифмический закон распределения скорости должен быть присущ для всей области турбулентного потока. Опыты Никурадзе подтвердили, что уравнение (167) очень хорошо согласуется с действительностью, если значение «универсальной постоянной» принять

$$\varkappa = 0{,}40. \tag{168}$$

Логарифмический закон распределения скоростей или уравнение (167) применимы для области потока, где влиянием сил вязкости можно пренебречь. Такой областью будет зона от оси трубы до границы ламинарной пленки при гладких трубах и до какого-то слоя, отстоящего от стенки на некотором расстоянии при шероховатых трубах.

На основе этих соображений установим значение постоянной в уравнении (167).

Для гладких труб запишем уравнение (167) для границы ламинарной пленки ($y=\delta_{пл}$)

$$\overline{u}_{пл}=\frac{u_*}{\varkappa}\ln\delta_{пл}+C,$$

откуда

$$C=u_{пл}-\frac{u_*}{\varkappa}\ln\delta_{пл}$$

и, следовательно, для гладких труб вместо (167) имеем

$$\overline{u}_x=\frac{u_*}{\varkappa}\ln y+u_{пл}-\frac{u_*}{\varkappa}\ln\delta_{пл}=u_{пл}+\frac{u_*}{\varkappa}\ln\frac{y}{\delta_{пл}}$$

или

$$\frac{\overline{u}_x}{u_*}=\frac{u_{пл}}{u_*}+\frac{1}{\varkappa}\ln\frac{y}{\delta_{пл}}. \tag{169}$$

На основе (150) подставим в (169)

$$\frac{u_{пл}}{u_*}=N \text{ и } \delta_{пл}=N\frac{\nu}{u_*}$$

и получим для гладких труб

$$\frac{\overline{u}_x}{u_*}=N+\frac{1}{\varkappa}\ln\frac{yu_*}{N\nu}=\left(N-\frac{1}{\varkappa}\ln N\right)+\frac{1}{\varkappa}\ln\frac{yu_*}{\nu}$$

или, обозначая двучлен в скобках

$$\left(N-\frac{1}{\varkappa}\ln N\right)=A_{гл},$$

получим

$$\frac{\overline{u}_x}{u_*}=A_{гл}+\frac{1}{\varkappa}\ln\frac{yu_*}{\nu}. \tag{170}$$

Для шероховатых труб напишем уравнение (167) для точки, где твердые выступы шероховатости Δ не мешают перемешиванию. Расстояние такой точки от стенки можно считать пропорциональным размеру выступов, т. е. равным $m\Delta$, где m — некоторый коэфициент пропорциональности. Скорость в этой точке (на границе) обозначим $u_{гр}$ и тогда уравнение (167) примет вид

$$u_{гр}=\frac{u_*}{\varkappa}\ln(m\Delta)+C,$$

откуда

$$C=u_{гр}-\frac{u_*}{\varkappa}\ln(m\Delta),$$

и следовательно, для шероховатых труб

$$\overline{u}_x=\frac{u_*}{\varkappa}\ln y+u_{гр}-\frac{u_*}{\varkappa}\ln(m\Delta)=u_{гр}+\frac{u_*}{\varkappa}\ln\frac{y}{m\Delta}$$

или

$$\frac{\overline{u}_x}{u_*}=\frac{u_{гр}}{u_*}+\frac{1}{\varkappa}\ln\frac{y}{m\Delta}=\left(\frac{u_{гр}}{u_*}-\frac{1}{\varkappa}\ln m\right)+\frac{1}{\varkappa}\ln\frac{y}{\Delta}. \tag{171}$$

Обозначая двучлен в скобках

$$\left(\frac{u_{гр}}{u_*}-\frac{1}{\varkappa}\ln m\right)=A_ш, \tag{172}$$

получим для шероховатых труб

$$\frac{\overline{u}_x}{u_*}=A_ш+\frac{1}{\varkappa}\ln\frac{y}{\Delta}. \tag{173}$$

Таким образом получены уравнения для относительной местной скорости как для гладких, так и для шероховатых труб.

Если учесть (151), (168) и перейти от натуральных логарифмов к десятичным, то получим:

для гладких труб

$$\frac{\overline{u}_x}{u_*}=5{,}5+5{,}75\lg\frac{u_*y}{\nu}, \tag{174}$$

для шероховатых труб

$$\frac{\overline{u}_x}{u_*}=A_ш+5{,}75\lg\frac{y}{\Delta}, \tag{175}$$

где величина $A_ш$ должна иметь различные значения в зависимости от того или иного типа шероховатости (равнозернистая, острогранная, волнистая и тому подобные шероховатости).

По опытам Никурадзе над трубами с искусственно созданной равнозернистой шероховатостью получилось $A_ш=8{,}48$. Численные значения $A_ш$ для других типов шероховатости могут быть установлены путем специальных опытов, аналогичных опытам Никурадзе.

Из уравнений (174) и (175) легко получить зависимости для максимальной скорости по оси трубы, т. е. при $y=r_0$. Эти зависимости будут:

для гладких труб

$$\frac{\overline{u}_{\max}}{u_*}=5{,}5+5{,}75\lg\frac{u_*r_0}{\nu}, \tag{176}$$

для шероховатых труб

$$\frac{\overline{u}_{\max}}{u_*}=A_ш+5{,}75\lg\frac{r_0}{\Delta}. \tag{177}$$

Интересно и важно отметить, вычитая из (176) уравнение (174) и соответственно из (177) уравнение (175), что

$$\frac{\overline{u}_{\max}-\overline{u}_x}{u_*}=5{,}75\lg\frac{r_0}{y} \tag{178}$$

как для гладких, так и для шероховатых труб.

Уравнение (178) показывает, что разность между максимальной и местной скоростью $(\bar{u}_{max}-\bar{u}_x)$ или так называемый «дефицит скоростей» зависит только от относительного расстояния $\frac{r_0}{y}$ и от скорости среза у стенки u_*.

Относительный же дефицит скорости $\frac{\bar{u}_{max}-\bar{u}_x}{u_*}$ зависит только от положения рассматриваемой точки.

2. Соотношение между средней и максимальной скоростью. Средняя скорость по сечению трубы рассматривается как результат деления расхода на площадь поперечного сечения:

$$v=\frac{Q}{\omega}=\frac{Q}{\pi r_0^2}.$$

Расход через трубу может быть выражен как интеграл расходов через бесконечно узкие концентрические кольца по всему сечению, пренебрегая особенностями ламинарной пленки ввиду ее малости:

$$Q=\int_0^{r_0} u d\omega=\int_0^{r_0} u 2\pi(r_0-y)dy.$$

Подставим в это выражение значение u из (178); переходя на натуральные логарифмы:

$$Q=2\pi\int_0^{r_0}\left(u_{max}-\frac{u_*}{\varkappa}\ln\frac{r_0}{y}\right)(r_0-y)dy=2\pi r_0\int_0^{r_0}u_{max}dy+$$

$$+2\pi r_0\int_0^{r_0}\frac{u_*}{\varkappa}\ln\frac{y}{r_0}\,dy-2\pi\int_0^{r_0}u_{max}\,y dy-$$

$$-2\pi\int_0^{r_0}\frac{u_*}{\varkappa}y\ln\frac{y}{r_0}\,dy=2\pi u_{max}r_0^2+$$

$$+2\pi\frac{u_*}{\varkappa}\left|r_0 y\left(\ln\frac{y}{r_0}-1\right)\right|_0^{r_0}-\pi r_0^2 u_{max}-$$

$$-2\pi\frac{u_*}{\varkappa}\left|\frac{y^2}{4}\left(2\ln\frac{y}{r_0}-1\right)\right|_0^{r_0}=\pi r_0^2\left(u_{max}-\frac{3}{2}\frac{u_*}{\varkappa}\right).$$

Отсюда получим среднюю скорость по сечению

$$v=\frac{Q}{\pi r_0^2}=u_{max}-\frac{3}{2}\frac{u_*}{\varkappa}=u_{max}-Du_*, \qquad (179)$$

где $D=\frac{3}{2\varkappa}=\text{const}$ называется постоянной Прандтля.

По опытам Никурадзе значение постоянной Прандтля получается $D=4{,}07$, что соответствует

$$\varkappa=0{,}368.$$

Уравнение (179) может быть формулировано как постоянство относительного дефицита средней скорости

$$\frac{u_{max}-v}{u_*}=D=\text{const}.$$

3. Теоретическое выражение коэфициента λ при турбулентном движении жидкости в трубах. Запишем уравнение (99) в таком виде:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=\frac{v}{\sqrt{8}\sqrt{gRI}}$$

или, учитывая выражение (153),

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=\frac{v}{\sqrt{8}u_*}. \qquad (180)$$

Подставив в последнее уравнение значение v по (179), имеем

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=\frac{u_{max}-Du_*}{\sqrt{8}u_*}. \qquad (181)$$

Заменяя в уравнении (181) значение u_{max} по (176) или по (177), получим формулы, определяющие λ для гладких труб в первом случае и для шероховатых во втором.

Для гладких труб вместо уравнения (181) получаем

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=\frac{u_*\left(A_{гл}+5{,}75\lg\frac{u_*r_0}{\nu}\right)-Du_*}{\sqrt{8}u_*}=$$

$$=\frac{A_{гл}-D}{\sqrt{8}}+\frac{5{,}75}{\sqrt{8}}\lg\frac{u_*r_0}{\nu} \qquad (182)$$

или, подставляя численное значение $D=4{,}07$ и для гладких труб $A_{гл}=5{,}5$,

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=0{,}5+2\lg\frac{u_*r_0}{\nu}.$$

Уравнению (182) можно придать и другой вид, заменив u_* его значением по (180),

$$u_*=v\sqrt{\frac{\lambda}{8}},$$

а именно

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=0{,}5+2\lg\frac{d\cdot v}{2\nu}\sqrt{\frac{\lambda}{8}}=\left(0{,}5+2\lg\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{8}}\right)+$$
$$+2\lg(Re\sqrt{\lambda})$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=A'_{гл}+2\lg(Re\sqrt{\lambda}),$$

где величина $A'_{гл}=0{,}5+2\lg\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{8}}\approx-1.$

По опытам Никурадзе установлено, что $A'_{гл} = -0{,}8$ и потому для гладких труб запишем:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2\lg(Re\sqrt{\lambda}) - 0{,}8. \tag{183}$$

Для шероховатых труб уравнение (181) примет вид

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{u_*\left(A_ш + 5{,}75\lg\frac{r_0}{\Delta}\right) - Du_*}{\sqrt{8}\,u_*} =$$

$$= \frac{A_ш - D}{\sqrt{8}} + \frac{5{,}75}{\sqrt{8}}\lg\frac{r_0}{\Delta}$$

или, обозначая для краткости $\frac{A_ш - D}{\sqrt{8}} = A'_ш$, имеем для шероховатых труб

$$\lambda = \frac{1}{\left(A'_ш + 2\lg\frac{r_0}{\Delta}\right)^2}, \tag{184}$$

где $A'_ш$, так же как и $A_ш$ в формуле (175), должно устанавливаться опытным путем для разных типов шероховатости. В частности для равнозернистой шероховатости по данным Никурадзе $A'_ш = 1{,}74$.

Уравнение (184) имеет громадное значение, несмотря на то что практическое его использование пока почти исключено из-за отсутствия накопленных опытных данных, определяющих численные значения параметров в этой формуле. Значение этих формул не только в том, что теперь экспериментальная работа может ставиться не вслепую, а на вполне рациональных основах, но и в том, что, располагая этими теоретическими формулами, можно правильно подойти к оценке громадного эмпирического материала, накопленного веками, но определявшегося часто, исходя из не совсем верных предпосылок.

Теория Кармана-Прандтля основана на рассмотрении движения жидкости в трубах круглого сечения.

Однако законы Кармана-Прандтля могут быть применены к движению жидкости не только в круглых трубах.

Келеган[1], использовав результаты классических опытов Базена (1855—1860 гг.) на опытном канале у Дижона (Франция), показал полную применимость теории Кармана-Прандтля для открытых лотков (каналов).

[1] Kelegan «Laws of turbulent flow in open channels», Jurnal of National Bureau of Standarts, vol. 21, № 6.

ГЛАВА IX

ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАСЧЕТА ПОТЕРЬ НАПОРА ПРИ ТУРБУЛЕНТНОМ РАВНОМЕРНОМ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ

Теоретические формулы, приведенные в предыдущей главе, установлены сравнительно недавно применительно к движению жидкости в трубах круглого сечения. Как уже отмечалось, пользование ими пока ограничено отсутствием накопленных опытных данных о числовых значениях коэфициентов для различных типов шероховатости.

Практическая деятельность человека между тем требовала нахождения приемов расчета тех или иных сооружений для подачи жидкости (воды) или, иначе говоря, требовала нахождения формул для расчета потерь напора.

В связи с этим ряд исследователей опытным путем стремились установить способы определения величины λ применительно к формуле (99) или C для формулы (106).

§ 66. Эмпирические формулы и их классификация

Общее число эмпирических формул, накопившихся к настоящему времени, очень велико[1]. Многие из них базировались на упрощенных представлениях о механизме движения жидкости и представляют сейчас лишь исторический интерес. Некоторые же из эмпирических формул, базирующихся на большом фактическом материале, не утратили своего значения и поныне и широко применяются при гидравлических расчетах.

Рассматривая ниже эти эмпирические формулы, мы более подробно остановимся лишь на тех из них, которые не утратили своего производственного значения.

Все разнообразие формул целесообразно, как то рекомендует Матью[1], подразделить на несколько классов, в зависимости от того, как выражены в них коэфициенты λ применительно к формуле Дарси (99) или C применительно к формуле Шези (106). Для каждого из классов мы рассмотрим лишь некоторые основные формулы.

[1] См. П. Ф. Горбачев, Формулы скорости течения жидкости, 1936.

[1] Mathieu, Influence de la rugosité des conduits sur le rendement hydraulique, A. d. P. e. Ch, 1939, X, pp. 331—396.

I класс формул. $\lambda=\text{const}$; $C=\text{const}$.

Формулы, относящиеся к этому классу, представляют лишь исторический интерес, ибо коэфициенты λ или C приняты в них постоянными независимо от рода стенок и размеров водоводов.

Сюда относятся формулы Шези (старая), Дюбуа, Вольтмана, Эйтельвейна, Тадини, Ранкина и т. п., появившиеся за период с 1775 по 1854 г. и известные в двух написаниях $\frac{dI}{4}=bv^2$

или

$$v=C\sqrt{RI},$$

где b и C — постоянные величины

II класс. $\lambda=f_1(v)$; $C=f_2(v)$.

К этому классу относятся формулы, в которых коэфициенты λ и C принимаются как функции одной лишь скорости движения воды независимо от рода стенок и размеров водоводов.

Сюда относятся формулы Прони, Эйтельвейна, Д'Обюиссона и др., имеющие вид

$$\frac{dI}{4}=\alpha v+\beta v^2,$$

где α и β — постоянные,

и формулы Вейсбаха, Кноделя, Сен-Венана и др.:

$$\frac{dI}{4}=\left(a+\frac{b}{\sqrt{d}}\right)v^2,$$

где a и b — также постоянные величины.

Этот класс формул также представляет лишь исторический интерес.

III класс. $\lambda=f_1(d)$; $C=f_2(R)$.

В формулах этого класса коэфициенты λ и C даются зависящими от диаметра труб или гидравлического радиуса.

При этом в отличие от формул I и II класса формулы III класса имеют некоторые параметры, отражающие шероховатость (род) стенок.

Формулы этого класса не утратили и сейчас своего значения и поэтому рассмотрим их подробнее.

К этому классу относятся:

1. Формула Дарси (1856 г.)

$$\lambda=\alpha+\frac{\beta}{d},$$

где α и β — коэфициенты, меняющиеся в зависимости от рода стенок.

Для движения воды в **новых** чугунных трубах на основе опытов с трубами диаметром от $d=0{,}01$ *м* до $d=0{,}5$ *м* Дарси принимает постоянные значения α и β и формула его принимает вид (101):

$$\lambda=0{,}02+\frac{0{,}0005}{d}.$$

Для труб не новых, а загрязненных значение λ должно быть увеличено. Уточнение формулы Дарси проводилось последующими исследователями. В частности проф. Самусь предложил (1923 г.) определять λ по такой исправленной формуле:

$$\lambda=a\left(1+\frac{0{,}025}{d}\right)-b\sqrt{d}, \tag{185}$$

где a и b должны иметь разные значения в зависимости от состояния труб. Проф. Самусь принимает для новых труб $a=0{,}022$ и $b=0{,}005$; для загрязненных $a=0{,}03$ и $b=0{,}01$; для старых труб $a=0{,}04$ и $b=0{,}01$.

По данным проф. Самусь можно для чугунных труб пользоваться значениями λ, приведенными в табл. 6, вычисленной по (185).

Таблица 6

Значения коэфициента λ

Состояние труб	75	100	125	150	175	200	250	300	400	500
	Диаметры в миллиметрах									
Новые	0,028	0,026	0,025	0,024	0,023	0,022	0,022	0,021	0,020	0,02
Загрязненные	0,037	0,034	0,033	0,031	0,030	0,029	0,028	0,027	0,026	0,024
Старые	0,051	0,047	0,045	0,043	0,041	0,040	0,039	0,038	0,036	0,035

2. Формулы Куттера, Базена, Горбачева и др., имеющие общий вид

$$C=\frac{N}{1+\frac{n}{\sqrt{R}}},$$

где n — так называемый коэфициент шероховатости, характеризующий состояние стенок русла, а N — постоянное число.

Значения N и n различны в формулах разных авторов.

Из этих формул отметим (в метровом исчислении):

а) формулу Куттера для чугунных труб

$$C=\frac{100}{1+\frac{n_\kappa}{\sqrt{R}}} \tag{186}$$

со значением $n_\kappa=0{,}20$ для новых труб и $n_\kappa=0{,}25$ для труб, бывших в употреблении;

б) формулу Базена

$$C=\frac{87}{1+\frac{n_Б}{\sqrt{R}}}, \tag{187}$$

получившую применение при расчетах открытых русел со значениями коэфициента шероховатости $n_Б$, приводимыми в табл. 7.

Таблица 7

Таблица к формуле Базена

№ категорий	Род стенки	$n_Б$
I	Очень гладкие стенки (строганые доски, гладкая цементная штукатурка и т. д.) .	0,06
II	Гладкие стенки (нестроганые доски, тесовая и кирпичная кладка, бетонные и чугунные трубы, весьма хорошая бетонировка и др.)	0,16
III	Негладкие стенки (хорошая бутовая кладка, посредственная бетонировка) . . .	0,46
IV	Промежуточная категория (грубая бутовая кладка; весьма грубая бетонировка по скале; замощение булыжником; стенки в плотных землистых грунтах, притом весьма хорошо содержимые; стенки чисто высеченные в скале)	0,85
V	Земляные стенки в обычном состоянии (сюда же — мощеные, но несколько заросшие и т. п.)	1,30
VI	Земляные русла, оказывающие сильное сопротивление (при плохом содержании, значительных водорослях, скалистом с валунами или крупногалечном дне и пр.) . .	1,75

3. Формула Гангилье-Куттера

$$C=\frac{\left(23+\frac{0,00155}{I}\right)+\frac{1}{n_г}}{1+\left(23+\frac{0,00155}{I}\right)\frac{n_г}{\sqrt{R}}}, \qquad (188)$$

где $n_г$ — коэфициент шероховатости;

I — пьезометрический уклон, равный для открытых русел при равномерном движении жидкости уклону дна русла;

R — гидравлический радиус.

При уклонах $I>0{,}0005$ влияние члена $\frac{0,00155}{I}$ в формуле Гангилье-Куттера весьма мало и потому этим членом в таких случаях пренебрегают.

Формула Гангилье-Куттера получила широкое применение при гидравлических расчетах открытых русел.

4. Так называемые показательные или степенные формулы общего вида

$$C=\frac{1}{n_г}R^y,$$

где $n_г$ — коэфициент шероховатости, имеющий те же численные значения, что и в формуле Гангилье-Куттера;

y — показатель степени, различный в формулах разных авторов.

Из степенных формул приведем:

а) формулу Маннинга

$$C=\frac{1}{n_г}R^{\frac{1}{6}}; \qquad (189)$$

б) формулу Форхгеймера

$$C=\frac{1}{n_г}R^{0,2}; \qquad (190)$$

в) формулу Павловского

$$\left.\begin{aligned} C&=\frac{1}{n_г}R^{1,5\sqrt{n}}\ (\text{при } R<1\ м);\\ C&=\frac{1}{n_г}R^{1,3\sqrt{n}}\ (\text{при } R>1\ м).\end{aligned}\right\} \qquad (191)$$

Значения коэфициента шероховатости $n_г$ для формул (188)—(191) приводятся в табл. 8 и 9.

Таблица 8

Таблица значений коэфициента шероховатости к формулам Гангилье-Куттера (188), Маннинга (189), Форхгеймера (190) и Павловского (191)

№ категорий	Род стенки	$n_г$	$\frac{1}{n_г}$
I	Исключительно гладкие поверхности; поверхности, покрытые эмалью или глазурью	0,009	111,1
II	Весьма тщательно остроганные доски, хорошо пригнанные. Лучшая штукатурка из чистого цемента . .	0,010	100,0
III	Лучшая цементная штукатурка (1/3 песку). Чистые (новые) гончарные, чугунные и железные трубы, хорошо уложенные и соединенные. Хорошо остроганные доски	0,011	90,9
IV	Нестроганые доски, хорошо пригнанные. Водопроводные трубы в нормальных условиях, без заметной инкрустации; весьма чистые водосточные трубы: весьма хорошая бетонировка	0,012	83,3
V	Тесовая кладка в лучших условиях, хорошая кирпичная кладка. Водосточные трубы в нормальных условиях; несколько загрязненные водопроводные трубы	0,013	76,9
VI	„Загрязненные" трубы (водопроводные и водосточные); бетонировка каналов в средних условиях	0,014	71,4
VII	Средняя кирпичная кладка, облицовка из тесаного камня в средних условиях. Значительно загрязненные водостоки. Брезент по деревянным рейкам	0,015	66,7
VIII	Хорошая бутовая кладка; старая (расстроенная) кирпичная кладка; сравнительно грубая бетонировка. Исключительно гладкая, весьма хорошо разработанная скала	0,017	58,8
IX	Каналы, покрытые толстым, устойчивым илистым слоем; каналы в плотном лессе и в плотном мелком гравии, затянутые сплошной илистой пленкой (все притом в безукоризненном состоянии)	0,018	55,6
X	Средняя (вполне удовлетворительная) бутовая кладка; булыжная мостовая. Каналы, весьма чисто высеченные в скале. Каналы в лессе, плотном гравии, плотной земле, затянутые илистой пленкой (в нормальном состоянии)	0,020	50,0

№ категорий	Род стенки	$n_г$	$\frac{1}{n_г}$
XI	Каналы в плотной глине. Каналы в лессе, гравии, земле, затянутые несплошной (местами прерываемой) илистой пленкой. Большие земляные каналы, находящиеся в условиях содержания и ремонта выше средних	0,0225	44,4
XII	Хорошая сухая кладка. Большие земляные каналы в средних условиях содержания и ремонта и малые — в хороших. Реки в весьма благоприятных условиях (чистое прямое ложе со свободным течением, без обвалов и глубоких промоин)	0,025	40,0
XIII	Земляные каналы: большие — в условиях содержания и ремонта ниже средней „нормы", малые—в средних условиях	0,0275	36,4
XIV	Земляные каналы в сравнительно плохих условиях (например, местами с водорослями, булыжником или гравием по дну); заметно заросшие травой; с местными обвалами откосов и пр. Реки в благоприятных условиях течения (см. п. XII)	0,030	33,3
XV	Каналы, находящиеся в весьма плохих условиях (с неправильным профилем; заметно засоренные камнями и водорослями и пр.) Реки в сравнительно благоприятных условиях, но с некоторым количеством камней и водорослей	0,035	28,6
XVI	Каналы в исключительно плохих условиях (значительные промоины и обвалы; заросли камыша; густые корни, крупные камни по руслу и пр.). Реки при дальнейшем ухудшении условий течения (по сравнению с предыдущими пунктами); увеличение количества камней и водорослей; извилистое ложе с небольшим количеством промоин и отмелей и т. д.	0,040	25,0

Таблица 9

Коэфициенты шероховатости $n_г$ для бетонированных каналов[1]

№ категорий	Характеристика гидравлических условий	Значен. коэфициента $n_г$ для лучших условий	для средних условий	для худших условий
I	Наиболее гладкие поверхности, встречаемые на практике, с весьма тщательной отделкой откосов и дна, с хорошо устроенными швами облицовки, без песка и гравия на дне, при небольшом количестве на трассе канала закруглений, имеющих к тому же большие радиусы	0,011	0,012	0,013

[1] Для бетонированных каналов, поросших мхом, приводимые в таблице значения коэфициентов $n_г$ следует увеличивать примерно на 0,002.

№ категорий	Характеристика гидравлических условий	Значен. коэфициента $n_г$ для лучших условий	для средних условий	для худших условий
II	Без специальной весьма гладкой отделки бетонной поверхности (без тщательной сплошной штукатурки) или при не вполне ровно затертой поверхности, с удовлетворительно устроенными швами, при закруглениях в плане средней величины, без песка и гравия на дне	0,013	0,014	0,015
III	Предыдущие случаи при наличии песка и гравия на дне, шероховатые бетонные поверхности, худшие швы, крутые закругления	0,015	0,016	0,018
IV	Бетонировка, исполненная посредством цемент-пушки:			
	а) в лучших условиях, т. е. при сглаживании поверхности при помощи проволочных щеток	0,016	—	—
	б) в средних условиях производства работ, без сглаживания щетками	—	0,019	—
	в) при плохом производстве работ	—	—	0,021

Проф. Гончаров[2] в результате обобщения экспериментальных данных предложил формулу для расчета скорости движения жидкости как в закрытых, так и в открытых руслах

$$v = 6{,}25 \left(\frac{R}{\Delta}\right)^{0,2} \sqrt{gRI}, \tag{192}$$

где Δ — средняя высота выступов шероховатости в *м*.

Не касаясь существа вывода этой формулы, установленной проф. Гончаровым по соображениям, отличным от теории Кармана-Прандтля, отметим правильность ее с точки зрения размерности и формы построения.

Формула проф. Гончарова может быть при метровом исчислении переписана в таком виде:

$$v = \frac{6{,}25\sqrt{g}}{\Delta^{0,2}} R^{0,2} \sqrt{RI} = \frac{19{,}6}{\Delta^{0,2}} R^{0,2} \sqrt{RI},$$

откуда следует, что по Гончарову коэфициент Шези

$$C = \frac{19{,}6}{\Delta^{0,2}} R^{0,2},$$

что соответствует формуле Форхгеймера при

[2] В. Н. Гончаров, „Движение наносов", ОНТИ, 1938.

оценке фактора шероховатости величиной $\frac{19{,}6}{\Delta^{0,2}}$ вместо $\frac{1}{n_г}$.

На основе обработки многочисленных опытных данных, главным образом американских, проф. Гончаров и инж. Г. Н. Лапшин предлагают шкалу шероховатости Δ согласно табл. 10.

Таблица 10

Таблица к формуле Гончарова (192)

№ категорий	Характер русла	Высота шероховатости Δ *м*	$\frac{19{,}6}{\Delta^{0,2}}=\frac{1}{n_г}$	$n_г=\frac{\Delta^{0,2}}{19{,}6}$
Iа	Весьма гладкие поверхности (металлические, застекленные, эмалированные, строганые деревянные из тщательно пригнанных досок; весьма тщательная железнённая цементная штукатурка)	0,0005	89,62	0,011
Iб	Асфальтированные ровные поверхности черных металлов и дерева. Строганые лотки в удовлетворительном состоянии (без и со слизью). Железнённая цементная штукатурка в удовлетворительном состоянии	0,0005—0,0010	89,62—78,02	0,011—0,013
II	Поверхности черных металлов в нормальных условиях с небольшой инкрустацией. Деревянные лотки из строганых поперечных досок. Цементная штукатурка без железнения. Каменная тесовая кладка. Кирпичная кладка хорошего и среднего состояния .	0,001—0,002	78,02—67,94	0,013—0,015
III	Лотки из нестроганых досок. Лотки и трубы деревянные, изношенные, со слизью. Бетонные русла с негладкой поверхностью нештукатуренные и штукатуренные старые с небольшими повреждениями. Хорошая бетонировка. Грубая кирпичная кладка. Каменная нетесовая кладка с чистой отделкой	0,002—0,005	67,94—56,55	0,015—0,018
IV	Правильные, хорошо выполненные и содержимые каналы из глины и суглинка или других грунтов, покрытых ровной коркой плотного ила. Ровные русла с песчаным дном. Шероховатые бетонированные каналы (торкретированные, старые штукатуренные с сильно истертой штукатуркой). Обыкновенная бутовая кладка в удовлетворительном состоянии. Старая (расстроенная) кирпичная кладка. Гладкая, весьма хорошо разработанная скала	0,005—0,010	56,55—49,23	0,018—0,020
V	Ровные земляные русла с наносами и илом в удовлетворительном состоянии без значительных выступов и промоин. Гравелистые и галечные русла с диаметром камней до 50 *мм*. Бетонированные русла с грубой нештукатуренной поверхностью. Бутовая кладка грубая. Мостовая тщательно выполненная. Каналы чисто высеченные в скале	0,010—0,020	49,23—42,86	0,020—0,023
VI	Галечные русла. Русла земляные и гравийные с наличием на дне булыжников. Вспаханные и затем взбороненные земляные поверхности. Каналы в скале при посредственной обработке поверхности. Мостовая в удовлетворительном состоянии	0,020—0,040	42,86—37,31	0,023—0,027
VII	Гравелистые и галечные русла в плохом состоянии. Русла из булыжников. Земляные русла неправильные с размывами. Старая расстроенная мостовая. Мостовая из рваного камня с грубыми выступающими углами .	0,040—0,080	37,31—32,48	0,027—0,031

IV класс формул. $\lambda = f(Re)$.

Сюда относятся эмпирические и полуэмпирические формулы, в которых λ выражено в функции числа Рейнольдса или которые построены по типу формулы Рейнольдса (160).

Из формул этого класса можно указать на формулы Блазиуса (161), Лииса (163), Шиллер-Германа (164), Никурадзе (165) и Прандтля (183), рассмотренные выше.

Эти формулы относятся к трубам с гладкими стенками, зависимость этих формул от Re делает их пригодными и для расчетов движения в гладких трубах различных жидкостей. Значения λ, вычисленные по этим формулам для разных значений Re, сведены в табл. 11.

Таблица 11

Значения коэфициента λ для гладких труб

Re	Значения λ по формулам				
	Блазиуса $\lambda = \frac{0{,}316}{Re^{0{,}25}}$	Лииса $\lambda = \frac{0{,}6104}{Re^{0{,}35}} + 0{,}00714$	Шиллер-Германа $\lambda = \frac{0{,}396}{Re^{0{,}3}} + 0{,}0054$	Никурадзе $\lambda = \frac{0{,}221}{Re^{0{,}237}} + 0{,}0032$	Прандтля $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2\lg(Re\sqrt{\lambda}) - 0{,}8$
4 000	0,0397	0,0406	0,0383	0,0342	0,0400
5 000	0,0376	0,0381	0,0362	0,0326	0,0372
6 000	0,0359	0,0361	0,0345	0,0313	0,0356
7 000	0,0345	0,0346	0,0332	0,0303	0,0338
8 000	0,0334	0,0334	0,0321	0,0295	0,0327
10 000	0,0316	0,0314	0,0304	0,0281	0,0309
15 000	0,0286	0,0282	0,0276	0,0258	0,0278
20 000	0,0256	0,0262	0,0257	0,0243	0,0258
25 000	0,0252	0,0247	0,0244	0,0232	0,0244
30 000	0,0240	0,0237	0,0234	0,0224	0,0235
35 000	0,0231	0,0228	0,0226	0,0217	0,0226
40 000	0,0223	0,0221	0,0219	0,0211	0,0220
45 000	0,0217	0,0215	0,0213	0,0206	0,0214
50 000	0,0211	0,0209	0,0208	0,0202	0,0209
60 000	0,0202	0,0201	0,0200	0,0195	0,0200
70 000	0,0194	0,0194	0,0193	0,0189	0,0194
80 000	0,0188	0,0188	0,0188	0,0184	0,0188
100 000	0,0178	0,0179	0,0179	0,0176	0,0180
150 000	0,0161	0,0165	0,0165	0,0163	0,0166
200 000	0,0149	0,0156	0,0156	0,0154	0,0157
250 000	0,0141	0,0150	0,0149	0,0148	0,0150
300 000	0,0135	0,0145	0,0144	0,0143	0,0145
350 000	0,0130	0,0141	0,0140	0,0139	0,0141
400 000	0,0126	0,0138	0,0137	0,0136	0,0137
450 000	0,0122	0,0135	0,0134	0,0133	0,0134
500 000	0,0119	0,0133	0,0131	0,0130	0,0132
600 000	0,0114	0,0129	0,0127	0,0126	0,0128
700 000	0,0109	0,0126	0,0124	0,0123	0,0124
800 000	0,0106	0,0123	0,0121	0,0120	0,0121
1 000 000	0,0100	0,0119	0,0117	0,0116	0,0117
1 500 000	0,0090	0,0113	0,0110	0,0108	0,0109
2 000 000	0,0084	0,0109	0,0105	0,0103	0,0104
2 500 000	0,0079	0,0106	0,0102	0,0099	0,0100
3 000 000	0,0076	0,0104	0,0099	0,0096	0,0097
3 500 000	0,0073	0,0102	0,0097	0,0094	0,0095

В этом классе следует еще упомянуть формулу Ланга-Мизеса

$$\lambda = a + \frac{1{,}7}{\sqrt{Re}}. \tag{193}$$

Эту формулу применяют при расчетах нефтепроводов. При этом можно в среднем принять $a = 0{,}02$.

Для определенных видов нефтепродуктов величина a может быть уточнена на основе полученных в СССР опытных данных при перекачке нефти, а именно:

для чистой парафинистой нефти . . . . $a=0{,}011$

для смеси $\frac{1}{3}$ бензина и $\frac{2}{3}$ парафинистой нефти $a=0{,}0161$

для смеси $\frac{2}{3}$ бензина и $\frac{1}{3}$ нефти . . . . $a=0{,}0175$

для балахнинской легкой нефти . . . . $a=0{,}0136$

для сураханской легкой нефти . . . . $a=0{,}0129$

V класс формул. $\lambda = f(v, d)$; $C = f_2(v, d)$.

К этому классу могут быть отнесены формулы, установленные их авторами для строго определенного типа русел. Благодаря этому они являются наименее универсальными. Однако это обстоятельство ни в коей мере не снижает их ценности при расчетах именно таких типов русел, для которых эти формулы установлены.

Формулы этого класса несколько отличны и по своей структуре от ранее рассмотренных. Для удобства пользования мы приводим их выражение непосредственно для скорости движения жидкости.

Сюда относятся

1. Формула Хазена-Вильямса

$$v = C'R^{0{,}63}I^{0{,}64}. \tag{194}$$

Эта формула предложена инж. Хазеном и проф. Вильямсом для расчета чугунных водопроводных труб и получила широкое применение в США.

В формуле (194) коэфициент C' зависит от диаметра труб и продолжительности их эксплоатации. Значения C^1 для метрового исчисления даны в табл. 12.

Таблица 12

Значения коэфициента C' (для метров) в формуле Хазена-Вильямса (194)

Диаметр d *см*	Число лет эксплоатации труб						
	0	5	10	20	30	40	50
10	110	100	90	75	63	54	46
20	110	100	92	78	70	62	55
30	110	101	94	81	73	65	59
40	110	101	94	83	74	67	61
60	110	101	95	85	75	68	63
75	110	101	95	85	76	70	64
90	110	101	95	85	76	70	64
100	110	101	95	85	76	70	65
150	110	101	95	85	76	70	65

2. Формулы Скобея.

Инженеру Скобею (США) принадлежит подробная и тщательная разработка обширных материалов по движению воды в деревянных, бетонных и клепаных металлических трубах.

В результате этой обработки инж. Скобей предложил частные формулы для каждого типа труб, а именно (в метровом исчислении):

а) Для деревянных клепочных труб

$$v = 49{,}7\ d^{0{,}65}\ I^{0{,}555}. \qquad (195)$$

б) Для бетонных и железобетонных труб

$$v = C''\, d^{0{,}625}\, I^{0{,}5}, \qquad (196)$$

где значения C'' принимаются по табл. 13.

Таблица 13

Значения коэфициента C'' к формуле Скобея для бетонных труб

№ категорий	Характеристика трубопровода	C''
I	Бетонные трубы при мало удовлетворительном производстве работ, укладываемые из отдельных коротких звеньев, без достаточного внимания к устройству гладких стыков	25,57
II	Бетонные трубы из обычных отдельных звеньев при вполне удовлетворительном производстве работ, оштукатуренные цементным раствором с правильным устройством стыков; монолитные трубы при деревянных формах . .	29,68
III	При хорошем производстве работ: бетонные трубы с длинными звеньями диаметром не менее 0,6 *м* (= 24″) и средних размеров монолитные трубы, набиваемые в металлические формы, причем указанные трубы асфальтированы или покрыты штукатуркой из чистого цемента, в особенности с применением механических притирочных снарядов; железные трубы, тщательно облицованные цементом	33,03
IV	При наилучшем производстве работ и высоком качестве материалов: бетонные трубы с весьма гладкой внутренней поверхностью (тщательно зажелезненной „под глазурь") и большие железные трубы, весьма гладко цементированные (стыки устраиваются с наибольшей возможной аккуратностью так, чтобы по окончании работ нельзя было обнаружить „заплечиков" в стыках); монолитные трубы, набиваемые в металлические формы, смазываемых маслом (отмеченные для IV класса качества работ практически выполнимы вообще лишь для труб диаметром не менее 0,75 м)	35,42

в) Для клепаных железных и стальных труб

$$v = C'' d^{0{,}58}\ I^{0{,}525}, \qquad (197)$$

где значения C'' для новых труб принимаются по табл. 14. Скорость течения в таких трубах

Таблица 14

Значения коэфициента C'' к формуле Скобея для железных и стальных труб

№ категорий	Характеристика трубопровода	C''
I	Трубопроводы с продольной и поперечной клепкой, с разделением их на следующие четыре подкласса:	
	Ia — толщина склепываемых листов $\delta \leqslant 5$ *мм*	37,91
	Ib — толщина листов $\delta = 5 \div 10$ *мм* при соединении внахлестку	35,12
	Ic — толщина листов $\delta \geqslant 12$ *мм* при соединении внахлестку и $\delta = 6 \div 10$ *мм* при соединении встык	33,54
	Id — толщина листов $\delta \geqslant 12$ *мм* при соединении встык	32,15
II	Трубопроводы с поперечной клепкой, причем продольные соединения устроены так, что не вносят практически заметных гидравлических сопротивлений	40,20
III	Трубопроводы с поперечными и продольными соединениями, не дающими практически заметных гидравлических сопротивлений	41,50

несколько снижается по мере увеличения срока их эксплоатации. Скобей рекомендует вводить в формулу (197) поправочный коэфициент меньше единицы в зависимости от длительности срока эксплоатации труб[1].

§ 67. Коэфициент шероховатости естественных русел

Коэфициент шероховатости естественных русел зависит от многих факторов — от собственно „шероховатости" русел, от неправильности формы поперечных сечений, наличия в русле и на пойме промоин, деревьев, размывов, наносов. Наблюдения показывают, что коэфициент шероховатости изменяется не только по длине русел, но на одном и том же участке изменяется с изменением горизонта жидкости. Поэтому обычно коэфициент шероховатости определяют по гидрометрическим данным рассматриваемого русла и только в случае отсутствия таких данных прибегают к выбору его из таблиц или других источников.

Коэфициент шероховатости находят по одной из формул, например, Базена или Маннинга, определив предварительно из естественных условий коэфициент Шези.

Для определения коэфициента C из естественных условий следует реку разделить на отдельные участки с более или менее однотипным характером ложа реки в пределах участка.

[1] См. подробности в гидравлических справочниках.

Пусть имеется в результате гидрометрических работ наблюденные в натуре для двух створов следующие данные:

Z_1 и Z_2 — отметки горизонтов воды в избранных сечениях на расстоянии L друг от друга;

ω_1 и ω_2 — площади живых сечений, причем

$\omega_{cp} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ типично для всего участка.

Тогда, определяя $I = \frac{Z_1 - Z_2}{L}$, $\omega_{cp} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ и $R_{cp} = \frac{R_1 + R_2}{2}$, можно вычислить по формуле Шези (106) численное значение коэфициента C.

Зная C, найдем коэфициент шероховатости: при пользовании, например, формулой Маннинга

$$n_г = \frac{R_{cp}^{\frac{1}{6}}}{C_{cp}},$$

формулой Базена

$$n_Б = \left(\frac{87}{C_{cp}} - 1\right)\sqrt{R_{cp}}.$$

Найденные таким путем величины будут средними коэфициентами шероховатости данного участка реки при данном горизонте воды.

Если имеется несколько наблюденных естественных профилей на данном участке реки и соответствующие им расходы, то, вычислив $n_г$ или n_b для отдельных горизонтов, можно установить характер изменяемости коэфициента шероховатости с изменением горизонта в виде кривой зависимости $n_г$ или $n_Б$ от средней отметки свободной поверхности Z_{cp} на данном участке. Этой кривой можно воспользоваться для выбора коэфициента шероховатости при различных расчетных горизонтах.

При отсутствии данных для коэфициента шероховатости при высоких уровнях к выбору его по кривой путем экстраполяции надо подходить осторожно, имея в виду, что для ряда рек (пойменные реки) коэфициент шероховатости с увеличением Z_{cp} (горизонтов) уменьшается, но затем при включении поймы в живое сечение резко увеличивается.

При отсутствии гидрометрических данных, на основе которых мог бы быть определен коэфициент шероховатости, для выбора последнего можно воспользоваться материалами по другим рекам, сходным по характеру с данной рекой, или приводимыми таблицами инж. М. Срибного[1] и инж. Б. Полякова[2].

[1] Инж. М. Ф. Срибный, Нормы сопротивления движению естественных водотоков и расчет отверстий больших мостов по способу бытовых морфологических характеристик, 1932.

[2] Проблемы Волго-Каспия изд. Академии наук СССР, 1934, т. 2.

Таблица Срибного (табл. 15) составлена применительно к формуле Гангилье-Куттера на основе опытного материала, относящегося глав-

Таблица 15

Значения коэфициентов шероховатости естественных водотоков по Срибному

№ категорий	Характеристика русла	Коэфициент шероховатости	
		$n_Б$	$n_г$
I	Естественные русла в весьма благоприятных условиях (чистое, прямое, незасоренное, земляное со свободным течением русло)	1,25	0,025
II	Русла постоянных водотоков равнинного типа (преимущественно больших и средних рек) в благоприятных состояниях ложа и течения воды. Периодические потоки (большие и малые) при очень хорошем состоянии поверхности и формы ложа	2,0	0,033
III	Сравнительно чистые русла постоянных равнинных водотоков в обычных условиях, извилистые с некоторыми неправильностями в направлении струи или же прямые, но с неправильностями в рельефе дна (отмели, промоины, местами камни). Земляные русла периодических водотоков (сухих логов) в относительно благоприятных условиях	2,75	0,040
IV	Русла (больших и средних рек) значительно засоренные, извилистые и частично заросшие, каменистые с неспокойным течением. Периодические (ливневые и весенние) водотоки, несущие во время паводка заметное количество наносов с крупногалечным или покрытым растительностью (травой и пр.) ложем. Поймы больших и средних рек, сравнительно разработанные, покрытые нормальным количеством растительности (травы, кустарника)	3,75	0,050
V	Русла периодических водотоков сильно засоренные и извилистые. Сравнительно заросшие, неровные, плохо разработанные поймы рек (промоины, кустарники, деревья с наличием заводей). Галечно-валунные русла горного типа с неправильной поверхностью водного зеркала. Порожистые участки равнинных рек	5,50	0,067
VI	Реки и поймы, весьма значительно заросшие (со слабым течением) с большими глубокими промоинами. Валунные, горного типа, русла с бурливым пенистым течением, с изрытой поверхностью водного зеркала (с летящими вверх брызгами воды)	7,00	0,080
VII	Поймы такие же, как предыдущей категории, но с сильно неправильным течением, заводями и пр. Горноводопадного типа русла с крупновалунным извилистым строением ложа, перекаты ярко выражены, пенистость настолько сильна, что вода, потеряв прозрачность, имеет белый цвет; шум потока доминирует над всеми остальными звуками, делает разговор затруднительным	9,00	0,100

Продолжение табл 15.

№ категорий	Характеристика русла	Коэфициент шероховатости $n_Б$	$n_г$
VIII	Характеристика горных рек примерно та же, что и предыдущей категории. Реки болотного типа (заросли, кочки, во многих местах почти стоячая вода и пр.). Поймы с очень большими мертвыми пространствами, с местными углублениями, озерами и пр.	12,0	0,133
IX	Потоки типа селевых, состоящие из грязи, камней и пр. Глухие поймы (сплошь лесные, таежного типа) . .	20,0	0,200

ным образом к рекам района Турксиба. Таблица Полякова (табл. 16) составлена применительно к формуле Маннинга на основе материалов наблюдений на реках Дон, Хопер, Медведица.

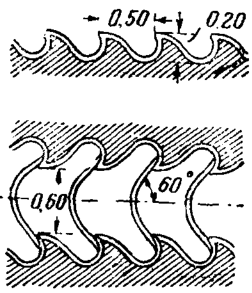
Таблица 16

Значения коэфициента шероховатости для равнинных рек по Б. Полякову

№ категорий	Характеристика русла равнинных рек	Коэфициент шероховатости $n_Б$	$n_г$
I	Русло песчаное, ровное, без растительности, с незначительным влечением донных наносов	1,00 — 1,50	0,02 — 0,023
II	Русло песчаное, извилистое с большими перемещениями донных масс. Пойма покрыта лугом без кустарника . .	1,5 — 2,50	0,023 — 0,033
III	Пойма, покрытая кустарником или редким лесом	2,5 — 4,0	0,033 — 0,045
IV	Пойма, покрытая лесом	4,0 — 5,5	0,045 — 0,060

§ 68. Усиленная шероховатость

В гидротехническом строительстве часто приходится придавать водосбросным сооружениям или отдельным частям их усиленную шероховатость в целях уменьшения скорости течения потока.



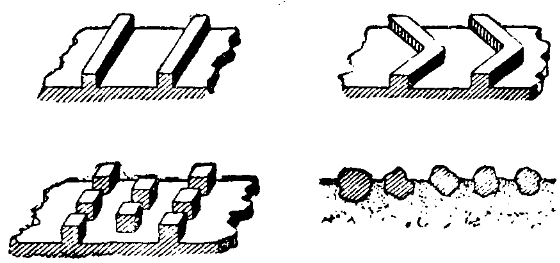
Фиг. 92

Впервые искусственное создание усиленной шероховатости было осуществлено бельгийским гидротехником Денилем (Denil) при устройстве рыбохода на реке Урте в 1914 г. Усиленная шероховатость была обеспечена в этом случае путем криволинейных зубьев (фиг. 92), установленных по дну лотка и направленных своими гребнями против течения.

Устройством таких зубьев на упомянутом рыбоходе был достигнут довольно высокий коэфициент шероховатости порядка $n_г = 0{,}122$ или $n_Б = 5{,}63$.

Зубья Дениля были применены на рыбоходе при Волховской плотине.

Усиленная шероховатость может быть создана и другими приспособлениями, например, устройством на дне зигзагообразных выступов (фиг. 93)[1], ребер, шашек в шахматном порядке, втапливанием в бетон крупных камней резких очертаний и т. п.



Фиг. 93

Лабораторные исследования некоторых видов усиленной шероховатости (главным образом в виде ребер) производились в Лаборатории ВНИИГИМ инженерами Ф. И. Пикаловым и А. Я. Фалькович[2].

Применение усиленной шероховатости является эффективным средством для уменьшения скорости течения в пределах сооружения.

При проектировании неисследованных еще типов усиленной шероховатости необходимо определять значения коэфициента шероховатости постановкой специальных лабораторных исследований.

§ 69. Соответствие эмпирических формул теории Кармана-Прандтля

Большинство эмпирических формул, рассмотренных в предыдущих параграфах, неправильны с точки зрения размерности. Поэтому коэфициенты, характеризующие шероховатость стенок русла, лишь косвенно связаны с геометрическим понятием о шероховатости и имеют разные значения для разных формул и в различных системах мер.

Однако некоторые эмпирические формулы, а именно степенные (Павловского, Маннинга, Форхгеймера) отражают в определенных пре-

[1] Плотоход с такими выступами построен на Северном Кавказе на реке Ладе.

[2] См. труды ВНИИГИМ, т. XIII, стр. 5 — 73. Там же изложен метод расчета лотков с искусственной шероховатостью, предложенный Ф. И. Пикаловым и А. Я. Фальковичем, и даны значения коэфициента шероховатости для ряда типов последней.

делах формулы Кармана-Прандтля, в чем можно убедиться по нижеследующим соображениям.

Напишем формулу Кармана-Прандтля, например, для шероховатых труб (184) в таком общем виде:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=K+0{,}87\ \ln R, \qquad (198)$$

где

$$K=A'_{ш}+2\lg 2-2\lg\Delta.$$

В этой формуле в отличие от (184) для удобства последующих рассуждений вместо r_0 введено R. Замена геометрического радиуса гидравлическим не меняет существа формулы, так как отразится только на численном значении K.

Рассмотрим, можно ли заменить уравнение (198) одночленным степенным выражением такого вида:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=NR^{y}, \qquad (199)$$

где N и y—некоторые постоянные величины

Логарифмируя (199), получим

$$\ln\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=\ln N+y\ln R$$

или

$$d\ln\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=y\,d\ln R,$$

откуда

$$y=\frac{d\ln\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}{d\ln R}. \qquad (200)$$

Из (198) имеем

$$d\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=0{,}87\,d\ln R,$$

откуда

$$d\ln R=\frac{d\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}{0{,}87}=-\frac{1}{2}\,\frac{d\lambda}{\lambda^{\frac{3}{2}}0{,}87}.$$

Учитывая, что

$$d\ln\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=-\frac{d\lambda}{2\lambda},$$

найдем вместо (200) окончательно значение показателя степени

$$y=\frac{d\ln\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}{d\ln R}=0{,}87\sqrt{\lambda}. \qquad (201)$$

В результате получаем, что уравнение (198) может быть заменено одночленно таким выражением:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=NR^{0{,}87\sqrt{\lambda}}.$$

Отсюда, учитывая, что $C=\sqrt{\frac{8g}{\lambda}}=\sqrt{8g}\,\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, получаем

$$C=\sqrt{8g}\,NR^{0{,}87\sqrt{\lambda}} \qquad (202)$$

Сравнивая выражение (202) со степенными формулами (189)—(191), приходим к заключению, что закон Кармана-Прандтля принципиально может быть отражен этими формулами в том случае, когда λ постоянна.

Следовательно, эмпирические степенные формулы находятся в полном соответствии с теорией, но при постоянном значении показателя степени y (Маннинг, Форхгеймер) могут быть применены лишь в определенном интервале изменения $\sqrt{\lambda}$.

Рассмотрим относительное изменение показателя степени y в зависимости от изменения $\sqrt{\lambda}$.

Из (201) имеем

$$dy=0{,}435\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}}$$

или

$$\frac{dy}{y}=0{,}5\frac{d\lambda}{\lambda},$$

т. е. относительное изменение показателя y в два раза меньше относительного изменения λ.

Последнее обстоятельство объясняет достаточную устойчивость показателя степени в формулах типа (189)—(191) и ту популярность, которую сравнительно быстро завоевали степенные формулы.

Установим количественную связь величины показателя степени y с шероховатостью стенок труб, пользуясь результатами опытов Никурадзе, согласно которым для равнозернистой шероховатости [см. формулу (184)]:

$$\lambda=\frac{1}{\left(2\lg\frac{r_0}{\Delta}+1{,}74\right)^2}. \qquad (203)$$

В табл. 17 сведены значения y, вычисленные по (201) при разных значениях λ по (203) при-

Таблица 17

$\frac{r_0}{\Delta}$	1 000	800	600	400	200	100	80	60	40	20
y	0,112	0,115	0,118	0,125	0,137	0,151	0,160	0,164	0,175	0,200

менительно к серии значений $\frac{r_0}{\Delta}$. Из этой таблицы видно, например, что при $\frac{r_0}{\Delta}=20$ формула Форхгеймера точно соответствует проведенному теоретическому анализу, так как в этом случае $y=0{,}2$. Вообще же в зависимости от относительной шероховатости должен варьировать и показатель степени в расчетной формуле.

Табл. 17 составлена для случая равнозернистой шероховатости, когда $A'_ш=1{,}74$. Очевидно, что, установив экспериментально значения $A'_ш$ для разных типичных видов шероховатости, можно получить вполне рациональные основы к выбору показателя степени y.

Следует отметить, что для придания стандартности расчетам можно условиться применять формулу с постоянным значением показателя степени, например, $y=0{,}2$ (по Форхгеймеру). При этом придется лишь соответственно выбирать значение n.

В самом деле, пусть истинное значение C определяется формулой

$$C=\frac{1}{n}R^y.$$

То же значение C можно получить, пользуясь формулой

$$C=\frac{1}{n'}R^{0{,}2},$$

если новый коэфициент шероховатости n' будет связан с обычным коэфициентом уравнением

$$n'=nR^{0{,}2-y}.$$

§ 70. Относительная оценка формул для расчета труб и каналов

Мнения различных авторов в части оценки достоинства и недостатков эмпирических формул, приведенных в § 66, расходятся. Следует отметить, что законченных работ по этому вопросу с учетом современных сведений о турбулентном движении жидкости не опубликовано.

Приведенный выше анализ позволяет утверждать, что ни одна из эмпирических формул не учитывает в полной и правильной форме все многообразие факторов, влияющих на равномерное движение жидкости. Однако этот недостаток, вообще говоря, пока не устраним, так как современный уровень наших знаний о турбулентности потока исключает, повидимому, возможность такой универсализации.

Приведенные выше формулы должны рассматриваться и применяться лишь для тех условий, для которых они были установлены.

Однако точное разграничение областей применимости для подавляющего большинства формул невозможно, поскольку исходные предпосылки для их построения были различными и не получили достаточного освещения в литературе.

Некоторые формулы излишне сложны (Гангилье-Куттера), что не окупается относительной их точностью. В этом смысле наибольшей простотой обладают степенные формулы.

За степенными формулами помимо их простоты имеется и то преимущество, что при соответствующем выборе показателя степени и коэфициентов шероховатости они становятся наиболее обоснованными и с точки зрения теории.

Поэтому в дальнейшем этот тип формул принят нами в качестве основного. Однако не исключается возможность применения и других формул, в особенности при расчетах в условиях, близких к тем, для которых устанавливалась та или иная эмпирическая формула.

Так, например, при гидравлическом расчете деревянных труб из бочарной клепки, безусловно, целесообразно пользоваться формулой Скобея (194), как специально определявшейся именно для таких труб.

Задача 15. Определить напор, необходимый для подачи воды при $t=10°C$ со скоростью $v=0{,}10$ *м/сек* через трубопровод с диаметром $d=200$ *мм*, длиной $L=20$ *м*. Трубы весьма гладкие с тщательной железненной цементной штукатуркой.

Определяя число Рейнольдса

$$Re=\frac{vd}{\nu}=\frac{10\cdot 20}{0{,}0131}=15\,252>2\,000,$$

устанавливаем, что режим движения в трубе турбулентный.

Поверхность трубы при тщательной железненной штукатурке характеризуется согласно табл. 10 высотой шероховатости $\Delta=0{,}5$ *мм*.

Если толщина ламинарной пленки перекроет эти выступы шероховатости, то труба должна будет рассматриваться как „гладкая".

Поэтому находим толщину ламинарной пленки по (156), принимая по табл. 11 $\lambda=0{,}028$, т. е. пока условно считая трубу гладкой.

Имеем

$$\delta_{пл}=32{,}8\frac{d}{Re\sqrt{\lambda}}=32{,}8\frac{200}{15\,252\sqrt{0{,}028}}\approx 2{,}6\text{ мм}.$$

Так как толщина ламинарной пленки получилась больше выступов шероховатости, то принятое значение $\lambda=0{,}028$ является правильным и искомый напор будет

$$h_{пут}=\lambda\frac{L}{d}\frac{v^2}{2g}=0{,}028\frac{20}{0{,}2}\frac{0{,}10^2}{19{,}62}\approx 0{,}00143\text{ м}=0{,}14\text{ см}.$$

Задача 16. Определить потребный напор для тех же условий, что и в предыдущей задаче, но при скорости течения в трубе $v=0{,}8$ *м/сек*.

Режим движения в этом случае также турбулентный, так как

$$Re=\frac{vd}{\nu}=\frac{80\cdot 20}{0{,}0131}\approx 122\,000.$$

Толщина ламинарной пленки, считая в первом приближении $\lambda=0{,}02$, будет

$$\delta_{пл}=32{,}8\frac{d}{Re\sqrt{\lambda}}=32{,}8\frac{200}{122\,000\sqrt{0{,}02}}=0{,}38\text{ мм}$$

и оказывается уже меньше выступов шероховатости $\Delta = 0{,}5$ *мм*. В условиях этой задачи трубу, следовательно, нужно рассматривать как шероховатую.

Теоретически для определения λ в шероховатых трубах нужно применить формулу (184), но для ее применения необходимо иметь численные значения $A'_ш$, которые определены Никурадзе только для равнозернистой шероховатости.

В данном случае, если считать поверхность тщательной бетонировки равнозернистой и принять $A'_ш = 1{,}74$, получим

$$\lambda = \frac{1}{\left(A'_ш + 2\lg\frac{r_0}{\Delta}\right)^2} = \frac{1}{\left(1{,}74 + 2\lg\frac{0{,}10}{0{,}0005}\right)^2} = 0{,}0249$$

и потерянный напор

$$h_{пут} = \lambda\frac{L}{d}\frac{v^2}{2g} = 0{,}0249\,\frac{20}{0{,}2}\,\frac{0{,}8^2}{19{,}62} = 0{,}081\ м = 8{,}1\ см.$$

Обращаясь к чисто эмпирическим формулам для определения C в формуле Шези, определим напор из (106):

$$v = C\sqrt{RI} = C\sqrt{R\frac{h_{пут}}{L}},\ \text{откуда}\ h_{пут} = \frac{v^2L}{C^2R}.$$

Коэфициент C найдем по степенным формулам. Имеем по Маннингу

$$C = \frac{1}{n}R^{\frac{1}{6}} = \frac{1}{0{,}011}\,0{,}05^{\frac{1}{6}} = 55{,}2,$$

по Форхгеймеру

$$C = \frac{1}{n}R^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{0{,}011}\,0{,}05^{\frac{1}{5}} = 49{,}2,$$

по Павловскому

$$C = \frac{1}{n}R^{1{,}5\sqrt{n}} = \frac{1}{0{,}011}\,0{,}05^{1{,}5\sqrt{0{,}011}} = 56{,}8.$$

Тогда величина потерянного напора получится по Маннингу

$$h_{пут} = \frac{v^2L}{C^2R} = \frac{0{,}8^2\cdot 20}{55{,}2^2\cdot 0{,}05} = 8{,}4\ см,$$

по Форхгеймеру

$$h_{пут} = \frac{0{,}8^2\cdot 20}{49{,}2^2\cdot 0{,}05} = 10{,}4\ см,$$

по Павловскому

$$h_{пут} = \frac{0{,}8^2\cdot 20}{56{,}8^2\cdot 0{,}05} = 8{,}0\ см.$$

Задача 17. Определить расход Q в деревянном трубопроводе из бочарной клепки при напоре $H = 20$ *м*, если $d = 150$ *мм* и $L = 2\,000$ *м*.

Определяем скорость течения воды в трубопроводе по формуле Скобея (195).

Имеем

$$v = 49{,}7\,d^{0{,}65}I^{0{,}555} = 49{,}7\cdot 0{,}15^{0{,}65}\left(\frac{20}{2\,000}\right)^{0{,}555} = 1{,}1\ м/сек.$$

Тогда расход жидкости по трубопроводу будет

$$Q = v\omega = \frac{\pi d^2}{4}v = 0{,}785\cdot 0{,}15^2\cdot 1{,}1 = 0{,}0194\ м^3/сек = 19{,}4\ л/с.$$

ГЛАВА X

ИСТЕЧЕНИЕ ИЗ ОТВЕРСТИЙ, НАСАДОК И КОРОТКИХ ТРУБ

Движение реальной жидкости по тому или иному руслу в конечном итоге зависит от тех затрат энергии, которые необходимы для преодоления путевых и местных сопротивлений движению.

При этом удельный вес путевых и местных сопротивлений может быть различным.

В зависимости от роли того или другого вида сопротивлений в формировании движения жидкости можно установить такую классификацию движения жидкости:

1. Движение жидкости, определяемое в основном только местным сопротивлением. Сюда нужно отнести истечение жидкости из отверстий в каких-либо сосудах, резервуарах. При таких случаях движения последний член уравнения Бернулли $h_{тр}$ будет отражать только потери напора на преодоление чисто местного сопротивления отверстия.

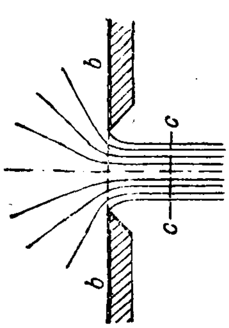
2. Движение жидкости в таких условиях, когда потери напора на преодоление как путевых сопротивлений, так и местных сопоставимы между собой. Сюда нужно отнести случаи движения жидкости в сравнительно коротких руслах (трубах), с наличием на таком сравнительно коротком участке и местных сопротивлений (колен, задвижек, клапанов и т. п.). При расчетах таких случаев движения жидкости должны учитываться все виды возникающих сопротивлений, как путевые, так и местные.

3. Движение жидкости в руслах, имеющих значительное развитие в длину (трубопроводы, каналы). Если в таких случаях местные сопротивления встречаются редко, то потери напора, ими вызываемые, оказываются малыми по сравнению с путевыми потерями и потому практически местные потери напора могут быть исключены из рассмотрения при гидравлических расчетах.

В настоящей главе рассматриваются первые два из этих трех случаев.

§ 71. Истечение из отверстий в тонкой стенке

Схема истечения в тонкой стенке показана на фиг. 94, на которой подчеркнуто, что гидравлический смысл термина „тонкая“ стенка не связан с представлением о фактической тол-



Фиг. 94

щине самой стенки. Имеется в виду, что края отверстия представляют острую кромку, создающую только местное сопротивление.

При истечении жидкости из отверстия в тонкой стенке линии токов в плоскости самого отверстия будут непараллельны друг другу и поэтому само течение в этом месте не может считаться плавно изменяющимся.

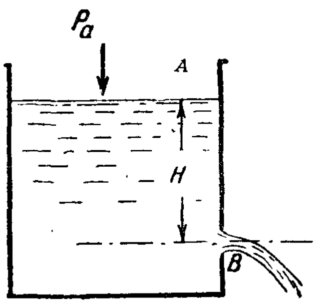
На некотором удалении от плоскости отверстия кривизна линий токов уменьшается, отдельные струйки все более и более приближаются к параллельным. Одновременно имеет место и некоторое уменьшение сечения всей струи.

Наиболее близко расположенное к отверстию сечение струи $C-C$, в котором движение приобретает почти параллельно-струйный характер, называется „сжатым сечением".

Обозначим площадь сжатого живого сечения струи через $\omega_{сж}$. Отношение $\omega_{сж}$ к площади ω сечения отверстия называется „коэфициентом сжатия":

$$\varepsilon = \frac{\omega_{сж}}{\omega}.$$

Применяя к рассматриваемому случаю истечения жидкости уравнение Бернулли, мы должны помнить, что последнее справедливо лишь для сечений потока плавно изменяющегося движения жидкости.



Фиг. 95.

В качестве таковых сечений в данном случае могут быть выбраны: сечение на свободной поверхности сосуда и сжатое сечение струи.

Составляя уравнение Бернулли относительно горизонтальной оси, проведенной через центр тяжести сжатого сечения струи, для точек A и B (фиг. 95), получим

$$H + \frac{p_a}{\gamma} + \frac{\alpha v_0^2}{2g} = 0 + \frac{p_a}{\gamma} + \frac{\alpha v^2}{2g} + h_{тр}.$$

Здесь v_0 — скорость подхода жидкости к отверстию;

v — скорость истечения жидкости в сжатом сечении;

p_a — атмосферное давление, одинаковое в обоих рассматриваемых сечениях;

$h_{тр}$ — потеря напора (в данном случае местная) в тонкой стенке.

Обозначая напор, исправленный на скорость подхода

$$H + \frac{\alpha v_0^2}{2g} = H_0$$

и в общем виде

$$h_{тр} = \Sigma\zeta \frac{v^2}{2g},$$

получим

$$H_0 = \frac{v^2}{2g}(\alpha + \Sigma\zeta)$$

или для рассматриваемого случая

$$H_0 = \frac{v^2}{2g}(\alpha + \zeta_{т.с}).$$

Следовательно, жидкость в сжатом сечении будет иметь скорость

$$v = \sqrt{\frac{1}{\alpha + \zeta_{т.с}}}\sqrt{2gH_0}$$

или, обозначая так называемый к о э ф и ц и е н т с к о р о с т и в общем виде

$$\sqrt{\frac{1}{\alpha + \Sigma\zeta}} = \varphi, \tag{204}$$

окончательно

$$v = \varphi\sqrt{2gH_0}. \tag{205}$$

Так как скорость определена в сжатом сечении с площадью $\omega_{сж} = \varepsilon\omega$, то расход жидкости из отверстия будет

$$Q = \omega_{сж} v = \varepsilon\omega v$$

или, подставляя значение скорости по (205),

$$Q = \varphi\varepsilon\omega\sqrt{2gH_0} = \mu\omega\sqrt{2gH_0}, \tag{206}$$

где произведение коэфициентов скорости φ и сжатия ε обозначено в виде так называемого к о э ф и ц и е н т а р а с х о д а

$$\mu = \varphi\varepsilon. \tag{207}$$

Уравнения (205) и (206) определяют истечение из отверстий в тонкой стенке, если будут известны коэфициенты скорости и расхода.

§ 72. Различные типы сжатия. Значения коэфициента сжатия

Сжатие струи в конечном итоге определяется траекторией крайних ее струек (линиями токов).

Проследим траектории движения частиц жидкости у стенок сосуда.

Сначала частица жидкости опускается вдоль стенки и затем по некоторой кривой движется к отверстию.

Если отверстие отстоит достаточно далеко от направляющих стенок, кривизна траекторий будет наибольшей и сжатие струи проявится в полной мере со всех сторон.

Чем ближе будет расположено отверстие к направляющей стенке, тем меньшей кривизны будут траектории частиц, поступающие вдоль стенки, и тем слабее будет выражено сжатие струи со стороны этой стенки.

Если же отверстие будет расположено вплотную у ребра стенок, то при этом часть линий токов будет прямолинейна и струя в какой-то части периметра отверстия не получит сжатия.

В связи с изложенным различают сжатие:

а) полное, когда струя по всему периметру отверстия получает то или иное сжатие;

б) неполное, когда часть периметра отверстия непосредственно примыкает к ребрам стенок, когда стенки, следовательно, являются как бы направляющими плоскостями для струек жидкости; степень „неполноты" сжатия может характеризоваться отношением части периметра без сжатия ко всему периметру отверстия.

Полное сжатие в свою очередь должно быть подразделено на совершенное и несовершенное:

1. Совершенное сжатие — когда расстояние от любой стороны контура отверстия до направляющих стенок сосуда (резервуара) — не меньше тройного поперечного размера отверстия, нормального направлению измеряемого расстояния.

Применительно к фиг. 96 условия совершенного сжатия будут

$$l_1 > 3b,$$

$$l_2 > 3a.$$

2. Несовершенное сжатие — при более близком расположении отверстия к направляющим стенкам. В последнем случае сжатие хотя и будет наблюдаться со всех сторон отверстия, но оно проявится слабее.

Наиболее изучены опытным путем численные значения коэфициента сжатия для случая совершенного (а следовательно, полного) сжатия струи при истечении из круглых и квадратных отверстий в тонкой стенке.

В среднем коэфициент совершенного сжатия для практических расчетов принимают

$$\varepsilon \approx 0{,}64 \div 0{,}60.$$

При этом меньшим размерам отверстий соответствуют большие коэфициенты сжатия и наоборот.

Величина коэфициента сжатия ε при неполном и несовершенном сжатии будет больше, чем в случае пóлного и совершенного сжатия.

Однако вследствие неопределенности значений этих коэфициентов эффект неполноты и несовершенства сжатия учитывается обычно некоторым увеличением коэфициента расхода.

§ 73. Некоторые опытные данные о коэфициентах

Коэфициент расхода μ. Из всех параметров, входящих в формулу (206), наиболее доступным непосредственному определению является коэфициент расхода μ.

Измерив при определенном напоре H фактический расход Q весовым или объемным способом, можно найти значение коэфициента расхода μ по формуле

$$\mu = \frac{Q}{\omega\sqrt{2gH_0}}.$$

Подобных опытов было проведено весьма много. Результаты их показали, что коэфициент расхода μ может колебаться в довольно широких пределах; однако для малых отверстий в тонкой стенке при совершенном сжатии можно считать в среднем

$$\mu = 0{,}62 \div 0{,}60,$$

прибегая (в случае необходимости) для уточнения к специальным таблицам опытных данных, приводимым в гидравлических справочниках.

В случае неполного сжатия коэфициент расхода $\mu_{неп}$ будет больше, нежели коэфициент расхода μ для случая полного сжатия. Зависимость между этими коэфициентами по опытам Бидона и Вейсбаха может быть выражена формулой

$$\mu_{неп} = \mu\left(1 + C\frac{n}{p}\right), \tag{208}$$

где p — периметр всего отверстия;

n — периметр той части контура отверстия, на которой отсутствует сжатие;

C — коэфициент, равный 0,13 для круглых отверстий и 0,15 для прямоугольных.

Грасгоф различает эффект отсутствия сжатия по боковым (вертикальным) стенкам отверстия от такового по нижней горизонтальной кромке его. Формула Грасгофа имеет такой вид:

$$\mu_{неп} = \mu\left(1 + 0{,}12\frac{s}{p} + 0{,}16\frac{a}{p}\right); \tag{209}$$

здесь s — длина одной или двух вертикальных сторон контура отверстия, смотря по тому, отсутствует ли сжатие с одной или двух сторон;

a — ширина отверстия; p — периметр отверстия.

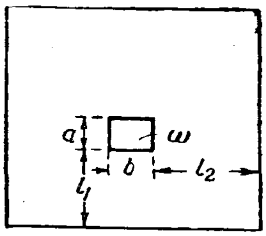
Из (209) видно, что неполнота сжатия по нижней кромке отверстия больше сказывается на увеличении коэфициента расхода, чем неполнота по вертикальным кромкам.

Что касается несовершенного сжатия, то учет его влияния Вейсбах предлагает производить в зависимости от соотношения площади сечения отверстия ω к площади Ω стенки, в которой расположено отверстие (фиг. 96).

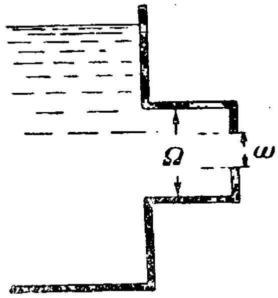
По данным Вейсбаха

$$\mu_{нес}=\mu\left[1+0{,}641\left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2\right]. \tag{210}$$

Всего яснее влияние несовершенства сжатия проявляется в том случае, когда отверстие с сечением ω помещено не в стенке сосуда, а в



Фиг. 96



Фиг. 97

поперечном сечении Ω патрубка (фиг. 97). Для этого случая Вейсбах дает

$$\mu_{нес}=\mu\,[1+a\,(b^n-1)], \tag{210'}$$

где $n=\frac{\omega}{\Omega}$; a и b — постоянные коэфициенты, равные:

для круглых отверстий

$$a=0{,}04564,$$
$$b=14{,}821;$$

для прямоугольных отверстий

$$a=0{,}076,$$
$$b=9{,}0.$$

Задача 18. Определить расход круглого отверстия в поперечном сечении вертикального патрубка, если поперечное сечение $\Omega=6{,}3$ *дцм*^{3}, площадь отверстия $\omega=1{,}6$ *дцм*^{2}, а напор поддерживается постоянным $H=6$ *м*.

Так как налицо несовершенное сжатие, определяем коэфициент расхода по (210'):

$$\mu_{нес}=0{,}62\,[1+0{,}046(14{,}82^{0{,}254}-1)]=0{,}65.$$

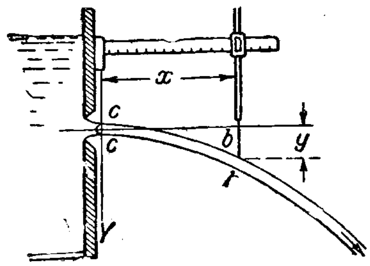
Искомый расход тогда определится по (206), пренебрегая скоростью подхода,

$$Q=\mu\omega\sqrt{2gH}=0{,}65\cdot 0{,}016\cdot 4{,}43\sqrt{6}=0{,}111\ м^3/сек=111\ л/сек.$$

Коэфициент скорости φ. Коэфициент скорости φ может быть определен экспериментально двумя способами. Первый из них требует замера площади сжатого сечения $\omega_{сж}$ и расхода через отверстие Q при заданном напоре H_0.

При этом коэфициент скорости получается

$$\varphi=\frac{Q}{\omega_{сж}\sqrt{2gH_0}}.$$



Фиг. 98

Второй способ основан на принятии траектории струи при истечении из отверстия в вертикальной стенке, за параболу с вершиной в точке O (фиг. 98). При помощи прибора, показанного на фигуре, для заданного расстояния x от сжатого сечения $c-c$ до центра тяжести некоторого сечения струи $b-b$, всегда может быть измерена разница y в высотном расположении центров тяжести этих сечений.

При скорости в сжатом сечении струи, равной v, имеем

$$x=vt,$$

где t — время движения частицы из сечения $c-c$ в сечение $b-b$, а

$$y=\frac{gt^2}{2},$$

где g — ускорение силы тяжести.

Исключая из этих уравнений t, найдем

$$v=x\sqrt{\frac{g}{2y}}.$$

Отсюда коэфициент скорости

$$\varphi=\frac{v}{\sqrt{2gH_0}}=\frac{x}{2\sqrt{yH_0}}.$$

Путем соответствующих измерений и расчетов было установлено, что при истечении из отверстия в тонкой стенке

$$\varphi\approx 0{,}97.$$

Коэфициент потерь $\zeta_{т.с}$. Сумма коэфициентов потерь в формуле (204) для случая истечения в тонкой стенке сводится к одному коэфициенту потерь в плоскости отверстия.

Поэтому имеем такое соотношение между коэфициентами:

$$\varphi=\frac{1}{\sqrt{\alpha+\zeta_{т.с}}},$$

где α — коэфициент Кориолиса.

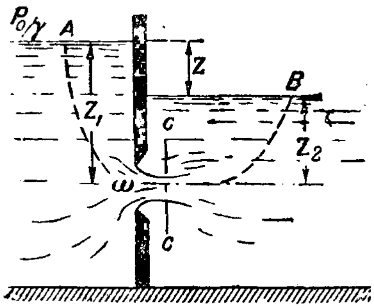
Измерения распределения скоростей в сжатом сечении струи, произведенные Базеном, позволяют считать их почти одинаковыми по сечению и, следовательно, $\alpha=1$.

Тогда значение коэфициента потерь в тонкой стенке будет

$$\zeta_{т.с}=\frac{1}{\varphi^2}-1=\frac{1}{0{,}97^2}-1=0{,}06, \tag{211}$$

§ 74. Истечение жидкости через затопленные отверстия

Затопленным называется отверстие, истечение из которого (фиг. 99) происходит не в атмосферу, как это рассматривалось выше, а под уровень жидкости, находящейся с низовой стороны отверстия. Пусть горизонт жидкости с низовой стороны отверстия превышает отметку центра тяжести отверстия на высоту z_2, в то время как горизонт воды с верховой стороны расположен над центром тяжести отверстия на высоте z_1.



Фиг. 99

Напишем уравнение Бернулли для точек A и B, показанных на фиг. 99. Пренебрегая скоростью в упомянутых точках и учитывая, что давление на поверхности жидкости с обеих сторон отверстия равно атмосферному, имеем:

$$z_1 = z_2 + \Sigma h_{mp}.$$

Потери напора, подлежащие учету, таковы:

1. Некоторая потеря на сжатие струи, аналогичная потере при истечении из отверстия в атмосферу,

$$h_1 = \zeta_{сж} \frac{v^2}{2g}.$$

2. Потеря на внезапное расширение струи от сжатого сечения до сечения в резервуаре. Эта потеря в соответствии с теоремой Борда может быть положена равной

$$h_2 = \frac{v^2}{2g}.$$

Подставляя эти значения потерь в формулу Бернулли, найдем

$$z = z_1 - z_2 = (1 + \zeta_{сж}) \frac{v^2}{2g},$$

откуда скорость истечения будет

$$v = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta_{сж}}} \sqrt{2gz},$$

где z — разность горизонтов воды в водоемах.

Обозначим

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta_{сж}}}$$

и назовем его попрежнему коэфициентом скорости.

Площадь струи в сжатом сечении c—c можно, как и ранее, обозначить

$$\omega_{сж} = \varepsilon\omega.$$

Отсюда расход через затопленное отверстие будет

$$Q = \varepsilon\varphi\omega\sqrt{2gz}$$

или, обозначая $\varepsilon\varphi = \mu$ и называя его опять коэфициентом расхода, придем к формуле для расхода через затопленное отверстие

$$Q = \mu\omega\sqrt{2gz}, \qquad (212)$$

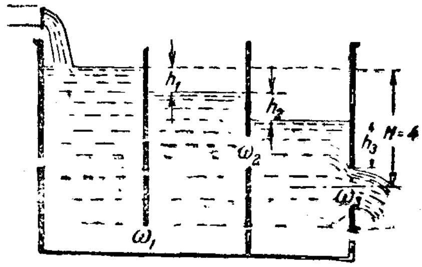
аналогичной (206).

Многочисленные исследования показали, что коэфициент расхода μ для затопленного отверстия почти не отличается от отверстия незатопленного. Следовательно, все, что было сказано в § 73, остается в силе и для коэфициента μ при затопленном отверстии.

Разница между формулой (212) для затопленного отверстия и формулой (206) для свободного истечения в атмосферу заключается лишь в том, что в формуле затопленного отверстия вместо напора H_0 над центром тяжести отверстия фигурирует z — разность отметок горизонтов жидкости с обеих сторон отверстия.

Задача 19. Резервуар имеет две перегородки (фиг. 100), в которых устроены одно квадратное и два круглых отверстия в тонкой стенке. Квадратное отверстие $\omega_1 = 1$ *дцм*^{2} расположено одной стороной непосредственно у дна; круглые отверстия с совершенным сжатием $\omega_2 = 2{,}5$ *дцм*^{2} и $\omega_3 = 4$ *дцм*^{2}.

Фиг. 100



Определить расход и расположение уровней, если вода в первом сосуде поддерживается все время на одном уровне, а истечение из выходного отверстия происходит свободно в атмосферу.

В данном случае имеем установившееся движение и расход Q во всех отверстиях будет одинаковым. По (205) для каждого отверстия имеем свой рабочий напор в виде

$$h = \frac{Q^2}{\mu^2\omega^2 2g}. \qquad (213)$$

В сумме отдельные напоры у всех отверстий равны согласно чертежу, $H = 4$ *м*,

$$h_1 + h_2 + h_3 = 4 \text{ м}$$

или

$$\frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{\mu_1^2\omega_1^2} + \frac{1}{\mu_2^2\omega_2^2} + \frac{1}{\mu_3^2\omega_3^2}\right) = 4 \text{ м}. \qquad (214)$$

Коэфициенты расхода для последних двух круглых отверстий при совершенном сжатии примем: $\mu_2 = \mu_3 = 0{,}62$, а μ_1 для первого отверстия, находящегося в условиях неполного сжатия, определится по Бидону (208):

$$\mu_{неп} = 0{,}62\left(1 + 0{,}15\,\frac{1}{4}\right) = 0{,}64.$$

Подставим значения μ и ω для всех отверстий в (214) и найдем $Q = 51{,}0$ *л/сек*. Зная же Q, из уравнений типа (213) найдем

$$h_1 = 32{,}27 \text{ дцм}, \quad h_2 = 5{,}56 \text{ дцм}, \quad h_3 = 2{,}17 \text{ дцм}.$$

§ 75. Истечение через большие отверстия

Под большими отверстиями будем подразумевать такие отверстия, размер которых по высоте достаточно велик по сравнению с напором H_0 над центром тяжести отверстия.

Благодаря этому распределение скоростей по сжатому сечению струи не может быть уже принято равномерным. Кроме того работа отверстий больших размеров в действительности почти всегда сопряжена с неполным и несовершенным сжатием.

Отмеченные особенности больших отверстий не вносят, конечно, принципиальных изменений в расчетные уравнения, а отражаются лишь на численных значениях коэфициентов.

Поэтому для расчета больших отверстий остаются в силе в общем виде те же уравнения, что и для малых отверстий [1].

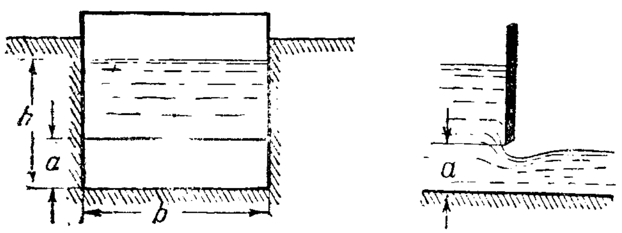
Для практических расчетов до накопления более точных данных можно пользоваться следующими значениями коэфициента расхода [2].

1. Отверстия средних размеров со сжатием струи со всех сторон, при отсутствии направляющих стенок . . . . . $\mu = 0{,}65$
2. Отверстия больших размеров с несовершенным, не всесторонним сжатием . $\mu = 0{,}70$
3. Донные отверстия (т. е. вовсе не имеющие сжатия по дну) со значительным влиянием бокового сжатия . . . . . $\mu = 0{,}65 \div 0{,}70$
4. Донные отверстия с умеренным влиянием бокового сжатия . . . . $\mu = 0{,}70 \div 0{,}75$
5. Донные отверстия с плавными боковыми подходами . . . . $\mu = 0{,}80 \div 0{,}85$
6. Исключительные случаи весьма плавных подходов воды к отверстию со всех сторон (при условии обязательной лабораторной проверки) . . . . $\mu = 0{,}90$

Задача 20. Определить расход через прямоугольное щитовое отверстие на канале шириной $b = 2{,}5$ *м* при глубине воды в верхнем бьефе $h = 2$ *м* и высоте поднятия щита $a = 0{,}8$ *м*. Щит перегораживает всю ширину канала (фиг. 101).

Расход через большое отверстие определим по (206):

$$Q = \mu\omega\sqrt{2gH_0}.$$



Фиг. 101

[1] В гидротехнической практике существенно важным является расчет истечения из больших щитовых отверстий. Этот вопрос подробно рассматривается ниже в главе XXIII.

[2] Н. Н. Павловский, Гидравлический справочник.

В данном случае напор над центром тяжести отверстия будет

$$H = h - \frac{a}{2} = 2 - \frac{0{,}8}{2} = 1{,}6 \text{ м},$$

а коэфициент расхода примем $\mu = 0{,}85$.

Тогда, пренебрегая пока скоростью подхода, получим в первом приближении

$$Q = 0{,}85 \cdot 2{,}5 \cdot 0{,}8\sqrt{19{,}62 \cdot 1{,}6} = 9{,}4 \text{ м}^3/\text{сек}.$$

При таком расходе скорость подхода воды к отверстию будет

$$v_0 = \frac{Q}{\Omega} = \frac{9{,}4}{2{,}5 \cdot 2} = 1{,}88 \text{ м/сек}$$

и

$$\frac{v_0^2}{2g} = \frac{1{,}88^2}{19{,}62} \approx 0{,}2 \text{ м}.$$

Исправляя напор на скорость подхода, имеем

$$H_0 = H + \frac{v_0^2}{2g} = 1{,}6 + 0{,}2 = 1{,}8 \text{ м}$$

и искомый расход

$$Q = \mu\omega\sqrt{g2H_0} = 0{,}85 \cdot 2{,}5 \cdot 0{,}8 \cdot 4{,}43\sqrt{1{,}8} \approx 10 \text{ м}^3/\text{сек}.$$

При этом расходе скорость подхода будет

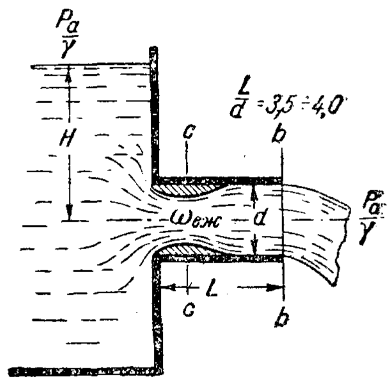
$$v_0 = \frac{10}{2{,}5 \cdot 2} = 2 \text{ м/сек}$$

и скоростной напор практически не изменится.

§ 76. Понятие о насадках. Истечение из насадок

Рассмотрим, как будет происходить истечение жидкости из отверстий при наличии у отверстия направляющей трубки некоторой длины.

Если такую направляющую трубку сделать из прозрачного материала, то можно наблюдать (фиг. 102) образование заштрихованной на чертеже „мертвой“ зоны“ или „зоны отжима“ потока от стенок трубы.



Фиг. 102

Благодаря кривизне линий токов, получаемой при выходе из отверстия, струя заполняет полностью все сечение трубки не сразу, а лишь на некотором расстоянии от отверстия.

Воздух, охваченный струей в „мертвой зоне“, довольно быстро увлекается потоком и в этой зоне образуется вакуум со степенью разрежения, зависящей от скорости движения жидкости (или, иначе говоря, от напора).

Наличие вакуума в области сжатого сечения струи должно привести к ускорению движения жидкости в этом сечении по сравнению со случаем истечения непосредственно в атмосферу.

Однако наличие трубки приведет к некоторым потерям энергии на путевые сопротивления и это обстоятельство должно, наоборот, вызвать замедление движения жидкости.

Как будет показано ниже, при сравнительно коротких трубках фактор „подсасывания" жидкости в связи с образованием вакуума оказывает более сильное влияние на процесс истечения, чем возросшие в какой-то мере путевые сопротивления, и потому в конечном итоге расход из отверстия увеличивается.

При более же значительной длине трубки эффект подсасывания не компенсирует возрастающие потери по длине и в итоге расход из отверстия станет меньше, чем при свободном истечении в атмосферу из отверстия в тонкой стенке.

Применительно к фиг. 102 напишем уравнение Бернулли для точки, лежащей на поверхности жидкости в сосуде и для точки в центре тяжести выходного сечения трубки.

Получим (считая $\alpha=1$)

$$H_0=\frac{v^2}{2g}(1+\Sigma\zeta). \tag{215}$$

Из сопротивлений движению в данном случае имеем:

1) острую кромку отверстия; 2) внезапное расширение струи; 3) путевые сопротивления.

Следовательно,

$$\Sigma\zeta=\zeta_{m.c}+\zeta_{в.р}+\zeta_{пут},$$

причем все коэфициенты должны быть отнесены к скорости v в выходном сечении.

Коэфициент сопротивления тонкой стенки, отнесенный к скорости в сжатом сечении, равен 0,06 согласно (211). Учитывая отношение скоростей $\frac{v}{v_{сж}}=\frac{\omega_{сж}}{\omega}=\varepsilon\approx0{,}64$, мы в данном случае должны принять

$$\zeta_{m.c}=\frac{0{,}06}{0{,}64^2}\approx0{,}15.$$

Сопротивление при расширении струи должно быть учтено по Борда (108), откуда

$$\zeta_{в.р}=\left(\frac{\Omega}{\omega}-1\right)^2=\left(\frac{1}{0{,}64}-1\right)^2=0{,}32.$$

Тогда

$$\Sigma\zeta=0{,}15+0{,}32+\lambda\frac{L}{d}\approx0{,}5+\lambda\frac{L}{d}.$$

Суммарный коэфициент $0{,}15+0{,}32\approx0{,}5$, учитывающий влияние кромки и расширения, называют коэфициентом сопротивления входа в

Возвращаясь к уравнению (215), имеем

$$v=\sqrt{\frac{1}{1+\zeta_{вх}+\lambda\frac{L}{d}}}\sqrt{2gH_0}=\varphi\sqrt{2gH_0},$$

где коэфициент скорости

$$\varphi=\sqrt{\frac{1}{1{,}5+\lambda\frac{L}{d}}}. \tag{216}$$

Так как истечение из конца трубки происходит полным сечением (коэфициент сжатия $\varepsilon=1$), то коэфициент расхода будет равен коэфициенту скорости

$$\mu=\varepsilon\varphi=\varphi.$$

Определим, при какой длине трубки коэфициент расхода будет иметь то же значение $\mu=0{,}62$, как и при истечении из отверстия без трубки.

Полагая приближенно $\lambda=0{,}02$ устанавливаем по (216), что значение $\varphi=\mu=0{,}62$ будет достигнуто при

$$\frac{L}{d}\approx55.$$

Таким образом видим, что, несмотря на появление путевых потерь, расход из трубки длиной около 55 диаметров сохранится, как и при истечении из отверстия.

При более коротких трубках коэфициент μ будет увеличиваться, а при более длинных уменьшаться.

Опыт показывает, что минимальная длина трубки, при которой струя заполнит (после сжатия) все сечение трубки, должна быть около $(3\div4)\,d$ и, следовательно, максимальное значение коэфициента расхода μ будет иметь место при коротких трубках длиной

$$L=(3\div4)d.$$

Такие короткие трубки называются насадками.

§ 77. Внешний цилиндрический насадок Вентури

Насадок Вентури (фиг. 102) представляет собой прямую цилиндрическую трубку длиной $(3\div4)\,d$, приставленную к отверстию того же диаметра с внешней стороны сосуда.

Коэфициенты такого насадка получаются по опытным данным

$$\varphi_{Вент}=\mu_{Вент}=0{,}82,$$

что весьма близко отвечает и теоретическим условиям формулы (216).

В пределах насадка Вентури имеет место понижение давления (вакуум) вплоть до выходного сечения.

Наибольшего значения вакуум достигает в сжатом сечении.

Найдем выражение для вакуума в сжатом сечении $c-c$.

Если обозначить давление в нем через p_c, то в соответствии с фиг. 102 имеем

$$\frac{p_a}{\gamma}+H_0=\frac{p_c}{\gamma}+\frac{v_c^2}{2g}+h_{mp}.$$

Так как

$$v_c^2=\frac{v^2}{\varepsilon^2}; \qquad h_{mp}=\zeta_{m.c}\frac{v_c^2}{2g}=\frac{\zeta_{m.c}}{\varepsilon^2}\frac{v^2}{2g},$$

то получим

$$\frac{p_a-p_c}{\gamma}=\frac{v^2}{2g}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{\zeta_{m\cdot c}}{\varepsilon^2}\right)-H_0.$$

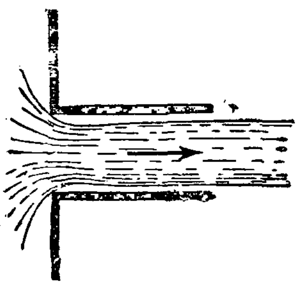
Заменяя скоростной напор равным ему выражением $\varphi^2 H_0$, окончательно запишем

$$\frac{p_a-p_c}{\gamma}=\left(\varphi^2\,\frac{1+\zeta_{m\cdot c}}{\varepsilon^2}-1\right)H_0. \qquad (217)$$

Таким образом при постоянных параметрах $\varphi, \zeta_{m\cdot c}$ и ε максимальный вакуум в насадке (в сжатом сечении) пропорционален напору.

Учитывая численные значения параметров (217), можно для насадка Вентури считать значение вакуума

$$\frac{p_a-p_c}{\gamma}\approx 0{,}8H_0.$$



Фиг. 103

Опыт показывает, что в ряде случаев происходит отрыв струи жидкости полностью или частично от внутренних стенок насадка Вентури с соответствующим понижением коэфициента расхода μ и, следовательно, пропускной способности насадка. На фиг. 103 показан такой случай. При этом насадок работает как отверстие в тонкой стенке, т. е. с коэфициентом расхода $\mu=0{,}60\div 0{,}62$.

Выясним условия, способствующие такому понижению эффективности работы насадка.

Вакуум в сжатом сечении насадка, как было показано выше, может достигнуть до 80% от напора перед насадком.

Предельная величина вакуума теоретически равна 10 *м*. Следовательно, теоретически предельный напор, под которым патрубок еще может работать, как насадок Вентури, равен

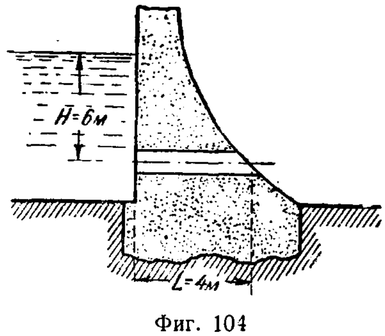
$$H_{\max}=\frac{10}{0{,}8}=12{,}5 \text{ м}.$$

Практически предельное допустимое значение вакуума около 7 *м*. Следовательно, практически предельное значение напора для насадка Вентури

$$H_{\max}\approx\frac{7}{0{,}8}=8\div 9 \text{ м}.$$

Значит во всех случаях, когда напор перед насадком Вентури или системой, ему эквивалентной, близок к 8—9 *м*, следует опасаться отрыва струи от стенок с соответствующим понижением коэфициента расхода μ.

Отрыв струи от стенок должен произойти и в том случае, когда возможен доступ воздуха в насадок, например, через какие-либо отверстия или неплотности в его стенке.



Фиг. 104

Задача 21. Рассчитать диаметр водоспуска, устроенного в теле плотины (фиг. 104) для пропуска расхода $Q=10 \text{ м}^3/\text{сек}$ при напоре над осью трубы $H=6$ *м*. Длина водоспуска $L=4$ *м*.

Из уравнения расхода

$$Q=\mu\omega\sqrt{2gH_0}$$

имеем

$$\omega=\frac{Q}{\mu\sqrt{2gH_0}}=\frac{\pi d^2}{4}$$

и находим

$$d=0{,}54\sqrt{\frac{Q}{\mu\sqrt{H_0}}}.$$

Предположим, что рассматриваемый водоспуск по соотношению его длины к диаметру соответствует насадку Вентури и поэтому пока условно примем $\mu=0{,}82$.

Тогда, пренебрегая скоростью подхода воды к отверстию ввиду ее незначительности, получим

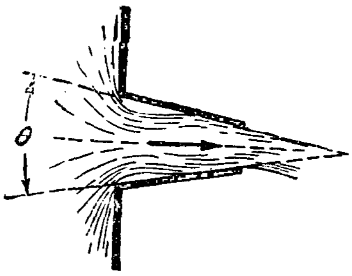
$$d=0{,}54\sqrt{\frac{10}{0{,}82\sqrt{6}}}=1{,}2 \text{ м}.$$

При таком диаметре водоспуск длиной $L=4$ *м* действительно будет работать как насадок Вентури и принятое значение $\mu=0{,}82$ теряет свою условность.

Так как напор перед насадком в данном случае не превышает 8—9 *м*, то работу водоспуска с коэфициентом расхода $\mu=0{,}82$ можно считать устойчивой, не опасаясь срыва вакуума.

§ 78. Нецилиндрические насадки

Сходящиеся насадки. Если придать насадку форму конуса, сходящегося по направлению к выходному сечению его (фиг. 105), то получим конический насадок, имеющий применение в соплах турбин Пельтона, пожарных брандспойтах, гидромониторах и т. д.



Фиг. 105

Опыты показывают, что как коэфициент φ, так и коэфициент μ зависят от угла конусности насадка θ, причем при $\theta \approx 13^\circ$ коэфициент расхода достигает своего максимального значения.

Для иллюстрации в табл. 18 приведены результаты опытов Добюиссона и Кастеля над насадком диаметром $d=15$ *мм*, длиной 40 *мм*, при напоре 3 *м*.

Таблица 18

θ	μ	φ	θ	μ	φ	θ	μ	φ
0	0,829	0,829	10°20	0,938	0,951	19°28	0,924	0,970
3°10	0,895	0,894	12°04	0,942	0,955	23°00	0,914	0,974
5°26	0,924	0,919	13°24	0,946	0,963	40°20	0,870	0,980
7°52	0,930	0,932	14°28	0,941	0,966	48°50	0,847	0,984

Из рассмотрения чисел, приведенных в таблице, видно, что по мере возрастания угла конусности θ от 0 до 48°50′ коэфициент скорости φ непрерывно возрастает от 0,829 до 0,984.

Рост коэфициента φ с увеличением угла конусности объясняется главным образом уменьшением потери на удар. Более подробный анализ, который здесь не приводится, показывает, что при значении угла конусности $\theta=13 \div 14^\circ$, потери на удар совершенно исчезают, ибо сжатое сечение приближается по величине к выходному. При дальнейшем увеличении угла конусности насадок начинает работать как хорошо оформленное отверстие в тонкой стенке, что способствует дальнейшему росту φ.

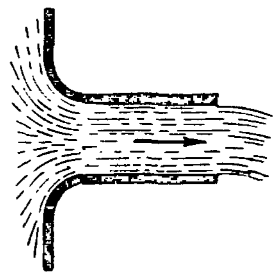
То обстоятельство, что при угле конусности $\theta=13^\circ$ коэфициент расхода μ достигает своего максимума, объясняется дополнительным при дальнейшем увеличении θ сжатием струи при выходе из насадка, что служит причиной уменьшения коэфициента расхода, несмотря на возрастание коэфициента скорости.

Дополнительное сжатие струи при выходе из насадка вследствие конусности его внутренней поверхности является некоторым недостатком конических форм насадков.

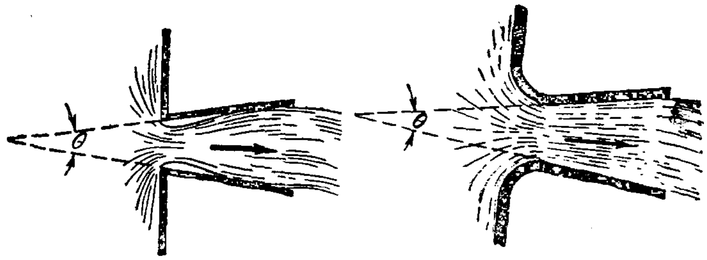
Этот недостаток устранен в так называемых „коноидальных насадках“, выполняемых по форме струи, вытекающей из отверстия. Выходной участок в этих насадках имеет цилиндрическую форму, входной участок выполнен по сложной поверхности двоякой кривизны (фиг. 106).

Значение коэфициентов скорости и расхода $\varphi=\mu$ для насадков коноидальной формы по опытам Вейсбаха можно принимать в интервале 0,97 — 0,99 в зависимости от напора и качества обработки внутренней поверхности насадка.

Расходящиеся насадки. Схема такого насадка показана на фиг. 107. Вакуум в сжатом сечении расходящегося насадка больше, чем в насадке Вентури, и тем больше, чем больше угол конусности. С другой стороны, расходящаяся форма насадка способствует отрыву потока от стенок насадка.



Фиг. 106



Фиг. 107

Поэтому угол конусности θ должен быть достаточно мал и предельный напор еще более ограничен, чем в насадке Вентури, для того чтобы насадок работал полным сечением.

Потери энергии в расходящемся насадке больше, чем в насадке Вентури.

Значения коэфициентов расхода μ и скорости φ в расходящихся насадках зависят от угла конусности θ и от оформления входа в насадок. Вопрос этот исследован еще недостаточно. В среднем можно принимать для выходного сечения

$$\varphi=\mu=0,45,$$

что соответствует суммарному коэфициенту потерь $\Sigma\zeta=4$.

Однако если отнести коэфициент расхода к отверстию в стенке резервуара, а не к выходному отверстию, т. е. полагать

$$\mu=\frac{4Q}{\pi d^2 \sqrt{2gH_0}},$$

то величина μ достигает больших значений. Таким образом если к отверстию в тонкой стенке приставить расходящийся насадок, то расход значительно увеличивается — насадок „сосет“ жидкость.

Расходящиеся насадки применяются в тех случаях, где желательно иметь большую пропускную способность при относительно малых выходных скоростях.

Расходящиеся насадки используются также во всех тех случаях, где необходимо иметь значительный вакуум (водоструйные насосы, эжекторы, гидроэлеваторы).

§ 79. Сравнение отверстий и насадков по пропускной способности и энергетическим показателям

В предыдущих параграфах были даны средние значения коэфициентов расхода и скорости для отверстий и насадков различных типов.

Сопоставим между собой секундные расходы струи, вытекающей через эти устройства, и ее живую силу.

Расход и скорость струи равны

$$Q=\mu\omega\sqrt{2gH_0}; \quad v=\varphi\sqrt{2gH_0}.$$

Живая сила струи будет

$$\frac{Mv^2}{2}=\frac{\gamma Q\cdot v^2}{g\cdot 2}=\frac{\gamma\mu\omega\sqrt{2gH_0}}{2g}\varphi^2 2gH_0=$$
$$=\gamma\mu\varphi^2\omega H_0\sqrt{2gH_0}. \qquad (218)$$

Таким образом при равенстве напоров H_0 и площадей ω пропускная способность и живая сила будут зависеть соответственно от значений μ и $\mu\varphi^2$ для сравниваемых устройств.

Сопоставление различных типов насадков с отверстием в тонкой стенке по этим признакам дано в табл. 19.

Из рассмотрения этой таблицы видно, что наибольшей скоростью истечения характеризуется отверстие в тонкой стенке и сходящиеся насадки.

Максимальная пропускная способность достигается сходящимися и коноидальными насадками. Струя жидкости, вытекающая из коноидальных насадков, характеризуется максимальной живой силой.

Таблица 19

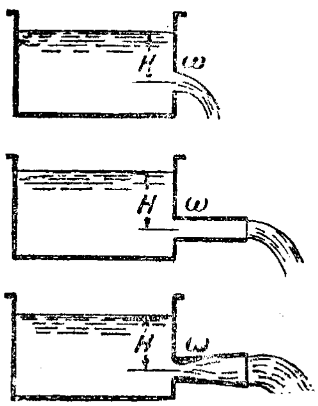
№ по пор.	Наименование	φ	μ	$\mu\varphi^2$
1	Отверстие в тонкой стенке	0,97	0,62	0,583
2	Цилиндрический насадок Вентури	0,82	0,82	0,551
3	Конически сходящийся насадок при $\theta=13°$	0,97	0,95	0,894
4	Коноидальный насадок	0,97	0,97	0,913
5	Конически расходящийся насадок[1]	0,45	0,45	0,091

Насадки расходящиеся дают минимальные значения скорости и живой силы при выходе струи из насадка.

Несмотря на то что в смысле пропускной способности насадок Вентури превосходит отверстие в тонкой стенке, живая сила струи, вытекающей из отверстия, несколько больше, чем у цилиндрического насадка.

[1] Приводимые величины отнесены к выходному сечению расходящегося насадка.

Задача 22. Определить, как изменится расход из круглого отверстия с $d=10$ *см*, если к отверстию приставить насадок Вентури или расходящийся насадок с углом конусности $\theta=6°$ (фиг. 108). Напор в центре тяжести отверстия $H=3$ *м*. Длина насадка $l=0,35$ *м*.



Фиг. 108

Сводные данные в табл. 19 даны для выходных сечений. Площади выходных отверстий для случая тонкой стенки и для насадка Вентури будут равны

$$\omega=\frac{\pi d^2}{4}=0,785\cdot 0,10^2=$$
$$=0,00785\ м^2.$$

Для конически расходящегося насадка диаметр выходного отверстия в данном случае будет

$$d'=d+2\cdot 0,35\ \mathrm{tg}\ 3°=$$
$$=0,10+0,7\cdot 0,0524\approx 0,137\ м$$

и площадь выходного отверстия

$$\omega'=0,785\cdot 0,137^2=0,01473\ м^2.$$

Искомые расходы получим по (206) при частных значениях μ для каждого вида истечения, а именно:

для отверстия в тонкой стенке

$$Q=\mu\omega\sqrt{2gH}=0,62\cdot 0,00785\cdot 4,43\sqrt{3}=0,0373\ м^3/сек=$$
$$=37,3\ л/сек;$$

для насадка Вентури

$$Q=\mu\omega\sqrt{2gH}=0,82\cdot 0,00785\cdot 4,43\sqrt{3}=0,0494\ м^3/сек=$$
$$=49,4\ л/сек;$$

для конически расходящегося насадка

$$Q=\mu\omega\sqrt{2gH}=0,45\cdot 0,01473\cdot 4,43\sqrt{3}=0,0509\ м^3/сек=$$
$$=50,9\ л/сек.$$

Скорость истечения жидкости при этом будет:

из отверстия в тонкой стенке

$$v=\varphi\sqrt{2gH}=0,97\cdot 7,673=7,44\ м/сек,$$

из насадка Вентури

$$v=\varphi\sqrt{2gH}=0,82\cdot 7,673=6,29\ м/сек,$$

из конически расходящегося насадка

$$v=\varphi\sqrt{2gH}=0,45\cdot 7,673=3,45\ м/сек.$$

§ 80. Истечение из коротких труб. Коэфициент расхода системы

Из предыдущих параграфов видно, что истечение из отверстий и насадков характеризуется стабильными значениями коэфициентов скорости и расхода для каждого конкретного типа отверстия или насадка.

При нестандартной длине труб или при наличии каких-либо дополнительных местных сопротивлений (повороты, колена, задвижки и т. п.) коэфициенты скорости и расхода будут в каждом отдельном случае определяться той суммой сопротивлений, которая встречается по пути потока в рассматриваемой системе до выходного сечения.

Если при этом сумма местных потерь не очень мала по сравнению с путевыми потерями, то трубу называют короткой.

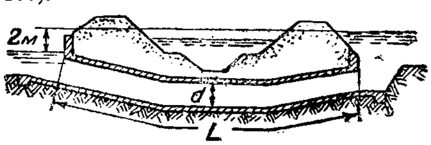
Общий вид формул для коэфициентов скорости и расхода, установленный выше для отверстий и насадков, остается, конечно, без изменений и для системы, названной нами короткой трубой.

Иначе говоря,

$$\varphi_{сист} = \mu_{сист} = \sqrt{\frac{1}{1+\Sigma\zeta}} \tag{219}$$

при условии, что все коэфициенты сопротивлений ζ отнесены к скорости истечения из выходного отверстия трубы.

Задача 23. Определить расход воды через железобетонный дюкер диаметром $d = 2$ *м*, длиной $L = 50$ *м*, проложенный под судоходным каналом, если разность уровней жидкости верхнего и нижнего бьефа составляет 2 *м* (фиг. 109).



Фиг. 109

Истечение через дюкер нужно рассматривать как истечение из короткой трубы и учитывать потери напора как путевые, так и местные, определяющие значение расходного коэфициента $\mu_{сист}$ по (219).

В данном случае имеем:

$$\Sigma\zeta = \zeta_{вх} + \zeta_{пут} + 2\zeta_{пов} + \zeta_{вых} = 0{,}5 + \lambda\,\frac{L}{d} + 2\cdot 0{,}05 + 1 =$$

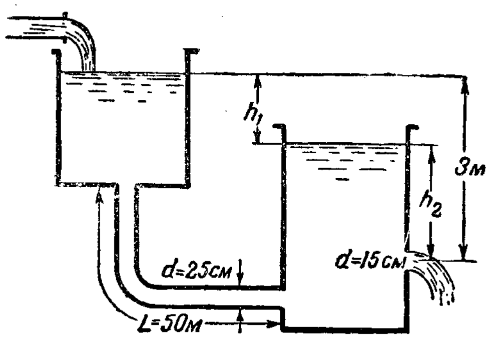
$$= 0{,}5 + 0{,}02\,\frac{50}{2} + 0{,}1 + 1 = 2{,}1,$$

$$\mu_{сист} = \frac{1}{\sqrt{1+\Sigma\zeta}} = \frac{1}{\sqrt{3{,}1}} = 0{,}57$$

и определяем искомый расход

$$Q = \mu\omega\sqrt{2gH} = 0{,}57\cdot 0{,}785\cdot 2^2\cdot 4{,}43\,\sqrt{2} = 11{,}21\ м^3/сек.$$

Задача 24. Из бака под постоянным напором вода подается через трубу в ящик, из которого она вытекает свободно в атмосферу. Определить при размерах, показанных на фиг. 110, расход системы Q и высоты расположения уровней h_1 и h_2.



Фиг. 110

Установим значение коэфициента расхода системы, подающей воду в ящик.

Имеем

$$\mu_{сист} = \frac{1}{\sqrt{1+\Sigma\zeta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_{вх} + \lambda\,\dfrac{L}{d} + \zeta_{вых}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6{,}5}} = 0{,}392.$$

Далее, замечая, что расход, вытекающий из отверстия в ящик, должен равняться расходу, поступающему через трубу в ящик, запишем:

$$\mu_{т.с}\,\omega_2\sqrt{2gh_2} = \mu_{сист}\omega_1\sqrt{2gh_1} = \mu_{сист}\omega_1\sqrt{2g(3-h_2)},$$

откуда получим

$$\frac{3-h_2}{h_2} = \frac{\mu^2_{т.с}\,\omega^2_2}{\mu^2_{сист}\,\omega^2_1} = \left(\frac{\mu_{т.с}}{\mu_{сист}}\right)^2\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4 =$$

$$= \left(\frac{0{,}62}{0{,}39}\right)^2\left(\frac{15}{25}\right)^4 = 0{,}327$$

или

$$h_2 = 2{,}26\,м \text{ и } h_1 = 3 - h_2 = 0{,}74\ м.$$

Расход системы получим в виде

$$Q = \mu_{т.с}\,\omega_2\sqrt{2gh_2} = 0{,}62\cdot 0{,}785\cdot 0{,}15^2\cdot 4{,}43\sqrt{2{,}26} =$$

$$= 0{,}0729\,м^3/сек = 72{,}9\,л/сек$$

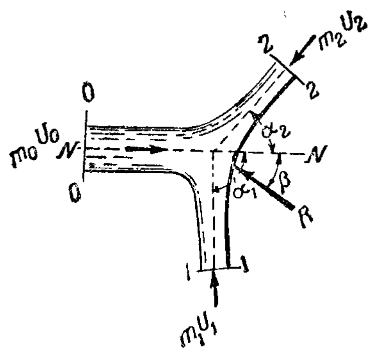
или

$$Q = \mu_{сист}\omega_1\sqrt{2gh_1} = 0{,}39\cdot 0{,}785\cdot 0{,}25^2 4{,}43\sqrt{0{,}74} =$$

$$= 0{,}0729\,м^3/сек = 72{,}9\ л/сек.$$

§ 81. Динамические свойства струи

Перейдем теперь к рассмотрению динамических свойств струи, вытекающей из отверстия или насадка, и прежде всего к удару этой струи о твердую преграду. Пусть на фиг. 111 показан общий случай удара струи о преграду произвольной формы, причем поперечные размеры преграды больше, нежели поперечные размеры струи.



Фиг. 111

Струя в непосредственной близости к ударяемому ею телу характеризуется почти цилиндрической формой, с осью, совпадающей с осью удара $N - N$ и участком растекания, в пределах которого и происходит передача давления на тело.

Для упрощения рассмотрим явление в одной плоскости. Пусть количество движения жидкости в граничных сечениях *0-0*, *1-1* и *2-2* отсека жидкости, показанного на фиг. 111, будут $m_0 v_0$, $m_1 v_1$ и $m_2 v_2$. При этом векторы двух последних количеств движения составляют с осью $N-N$ углы, соответственно равные α_1 и α_2.

Взаимодействие между телом и струей проявится в виде некоторой реактивной силы R, приложенной к центру тяжести тела под углом β к оси $N-N$, и момента M.

Для определения силы R можно написать такое условие

$$m_0 v_0 - m_1 v_1 \cos\alpha_1 - m_2 v_2 \cos\alpha_2 - R\cos\beta = 0,$$

откуда реакция тела

$$R = \frac{m_0 v_0 - m_1 v_1 \cos\alpha_1 - m_2 v_2 \cos\alpha_2}{\cos\beta}. \tag{220}$$

Обычно рассcматривают явление так называемого симметричного и нормального удара, при котором вследствие симметрии тела относительно оси $N-N$, направление реактивной силы R совпадает с этой осью, а реактивный момент $M = 0$.

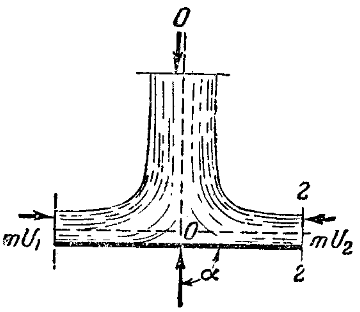
При этом вследствие симметрии растекания имеем

$$m_1 v_1 = m_2 v_2,$$
$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha,$$
$$\beta = 0.$$

Учитывая сказанное, вместо (220) получим

$$R = m_0 v_0 - 2 m_1 v_1 \cos\alpha. \tag{221}$$

Наиболее простым случаем симметричного нормального удара является удар о пластинку, показанный на фиг. 112.



Фиг. 112

Пластинка расположена нормально к оси удара, $\cos\alpha = 0$ и

$$R = m_0 v_0,$$

т. е. реакция пластинки равна количеству движения набегающей массы жидкости.

При этом реакция пластинки или противоположная ей сила удара будет

$$R = m_0 v_0 = \frac{\gamma}{g}\,\omega v^2. \tag{222}$$

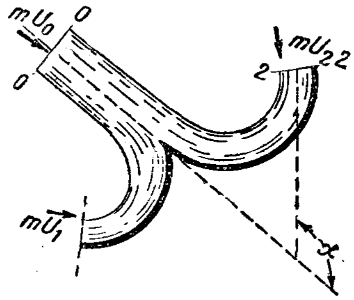
Если отнести эту силу удара к поперечному сечению струи ω, то напряжение удара получим равным

$$\sigma = \frac{R}{\omega} = \frac{\gamma}{g}\,v^2,$$

т. е. напряжение удара в два раза превосходит напряжение, соответствующее скоростному напору струи в сечении *0-0*.

Силу удара и напряжение можно еще более повысить, если создать такую форму поверхности ударяемого тела, что $\cos\alpha$ в (221) станет отрицательным.

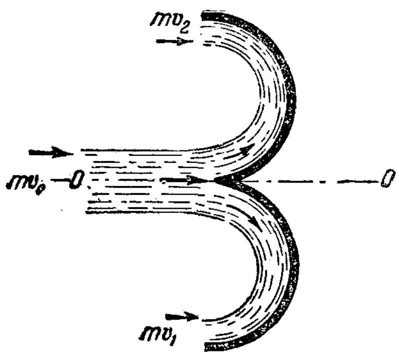
На фиг. 113 показаны криволинейные поверхности, для которых угол $\alpha > \frac{\pi}{2}$. Для таких



Фиг. 113

поверхностей в соответствии с формулой (221) имеем

$$R = m_0 v_0 + 2 m_1 v_1 \cos(\pi - \alpha). \tag{223}$$



Фиг. 114

В частности, если угол α довести до значения $\alpha = \pi$ (фиг. 114), давление на поверхность достигнет максимума и будет

$$R = m_0 v_0 + 2 m_1 v_1. \tag{224}$$

Таким образом отклонение набегающей на тело струи на 180° максимальным образом увеличивает силу удара.

Обычно по типу, показанному на фиг. 114, выполняются лопатки рабочего колеса турбин Пельтона. При этом форму и длину ударной поверхности выполняют таким образом, что $2 m_1 v_1 \approx m_0 v_0$.

Поэтому сила удара струи о поверхность получается равной

$$R = 2 m_0 v_0 = 2\,\frac{\gamma}{g}\,\omega v_0^2 \tag{225}$$

и напряжение удара, отнесенное к сечению струи, равно

$$\sigma=\frac{R}{\omega}=2\,\frac{\gamma}{g}\,v_0^2=4\gamma\left(\frac{v_0^2}{2g}\right),$$

т. е. учетверенному скоростному напору струи.

Сказанное в этом параграфе является базой для многих технических приложений, в частности может быть использовано для построения теории активных водяных турбин (так называемых турбин Пельтона), рассматриваемых в специальных курсах.

ГЛАВА XI

ИСТЕЧЕНИЕ ИЗ ОТВЕРСТИЙ ПРИ ПЕРЕМЕННОМ НАПОРЕ

Истечение жидкости из сосуда при переменном напоре имеет место в тех случаях, когда уровень жидкости в сосуде не поддерживается на постоянной высоте.

Если при истечении жидкости из сосуда притока в него нет или если приток есть, но в количестве, меньшем расхода из него, то очевидно, что уровень жидкости в сосуде будет непрерывно опускаться или до полного опорожнения или до некоторого предела. Если же приток больше расхода, то уровень жидкости будет повышаться.

В том и другом случае в каждую последующую единицу времени рабочий напор изменяется, а следовательно, меняется и расход, и таким образом налицо неустановившееся движение. Неустановившееся движение более подробно рассматривается в специальной главе. В связи с рассмотрением истечения из отверстий здесь даются отдельные простые решения для таких случаев неустановившегося движения, когда можно пренебрегать влиянием инерционных сил.

§ 82. Истечение при переменном напоре и постоянном притоке

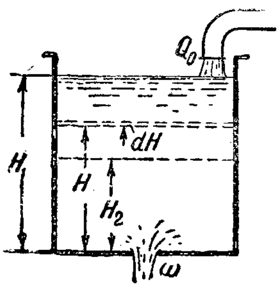
Из сосуда с отверстием ω происходит истечение жидкости, причем в сосуд одновременно поступает постоянное количество жидкости Q_0.

Для того чтобы из отверстия ω в единицу времени вытекало точно такое же количество жидкости Q_0, необходимо иметь в сосуде такой напор H_0 над отверстием, при котором

$$Q_0=\mu\omega\sqrt{2gH_0},$$

т. е. напор должен бы равняться

$$H_0=\frac{Q_0^2}{2g\mu^2\omega^2}. \tag{226}$$



Фиг. 115

Если в сосуде в данный момент имеется не H_0 по (226), а некоторый другой напор H_1 (фиг. 115), то будет наблюдаться:

а) при $H_1 < H_0$ фактический расход из отверстия меньше Q_0, жидкость в сосуде постепенно прибывает, напор H увеличивается, и когда он сравняется с H_0, то по (226) расход будет равен притоку и движение жидкости станет установившимся с постоянным расходом $Q=Q_0$;

б) при $H_1 > H_0$, по аналогии уровень постепенно понижается, пока напор не уменьшится с H_1 до H_0 и движение снова установится при $Q=Q_0$ и, наконец,

в) если H_1 уже равно H_0, то уровень жидкости остается постоянным.

Проследим аналитически процесс такого истечения во времени.

Рассмотрим весь процесс за бесконечно малый промежуток времени, считая движение за этот промежуток установившимся и H постоянным.

За время dt приток в сосуд составит $Q_0\cdot dt$. В это же время из отверстия выльется жидкость в количестве

$$dQ=\mu\omega\sqrt{2gH}\,dt$$

и объем жидкости в сосуде изменится на величину

$$Q_0dt-\mu\omega\sqrt{2gH}\,dt=(Q_0-\mu\omega\sqrt{2gH})dt.$$

В результате изменения объема уровень жидкости в сосуде также изменится в ту или иную сторону на бесконечно малую высоту dH.

Если мы обозначим площадь поперечного сечения сосуда на уровне H через F, то должно существовать равенство

$$FdH=(Q_0-\mu\omega\sqrt{2gH})dt,$$

откуда, учитывая (226),

$$dt=\frac{F}{\mu\omega\sqrt{2g}}\cdot\frac{dH}{\sqrt{H_0}-\sqrt{H}}. \tag{227}$$

Интегрируя уравнение (227) в пределах от $H=H_1$ до $H=H_2$, мы узнаем время t, в течение которого уровень жидкости в сосуде, фиксированный в положении H_1, изменится до положения H_2.

Чтобы выполнить интегрирование, заменим в (227) выражение $\sqrt{H_0}-\sqrt{H}$ через новую переменную y, полагая

$$\sqrt{H}=\sqrt{H_0}-y$$

и, следовательно,

$$\frac{dH}{2\sqrt{H}}=-dy,$$

откуда

$$dH=-2\sqrt{H}dy=-2(\sqrt{H_0}-y)dy,$$

при этом для новой переменной пределы интегрирования будут:

$$y_1=\sqrt{H_0}-\sqrt{H_1},\ y_2=\sqrt{H_0}-\sqrt{H_2}.$$

Тогда получаем

$$t=\frac{2}{\mu\omega\sqrt{2g}}\int_{y_1}^{y_2}F\left(1-\frac{\sqrt{H_0}}{y}\right)dy. \qquad (228)$$

Подинтегральное выражение (228) содержит кроме введенного переменного y в общем случае еще и переменное F, и потому интегрирование будет возможно, если выразить F в виде функции от y.

В данном же случае будем полагать сосуд призматическим; тогда $F=\text{const}$ вынесем за знак интеграла и получим

$$t=\frac{2F}{\mu\omega\sqrt{2g}}\int_{y_1}^{y_2}\left(1-\frac{\sqrt{H_0}}{y}\right)dy$$

или

$$t=\frac{2F}{\mu\omega\sqrt{2g}}\left(\sqrt{H_1}-\sqrt{H_2}+\right.$$

$$\left.+\sqrt{H_0}\ln\frac{\sqrt{H_0}-\sqrt{H_1}}{\sqrt{H_0}-\sqrt{H_2}}\right). \qquad (229)$$

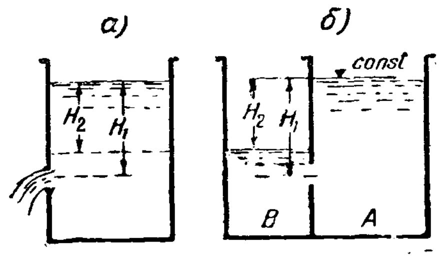
Уравнение (229) дает возможность определить время, в течение которого уровень жидкости в сосуде с напором над центром отверстия H_1 изменится на другой с напором H_2 при наличии притока Q_0.

Это уравнение справедливо как для случая опускания, так и для случая подъема уровня.

§ 83. Истечение при переменном напоре в атмосферу или при постоянном горизонте под переменный уровень

На фиг. 116 истечение жидкости показано при отсутствии притока в сосуд, причем истечение происходит свободно в атмосферу.

Рабочий напор в процессе истечения непрерывно убывает и поэтому расход и скорость соответственно уменьшаются.



Фиг. 116

Совершенно одинаков процесс истечения из сосуда A с постоянным уровнем в сосуд B (фиг. 116б), так как и в этом случае рабочий напор — разность уровней в обоих сосудах — будет по мере истечения жидкости постепенно убывать из-за встречного подъема воды во втором сосуде.

Поэтому оба случая фиг. 116 можно бы охарактеризовать как истечение при отсутствии притока с переменным рабочим напором и, следовательно, рассматривать как частный случай истечения, представленного выше уравнением (229) при $Q_0=0$.

Расчетное уравнение времени изменения рабочего напора с величины H_1 до H_2 мы получим из (229), полагая в нем $H_0=0$, что следует из отсутствия притока.

Получаем

$$t=\frac{2F}{\mu\omega\sqrt{2g}}(\sqrt{H_1}-\sqrt{H_2}). \qquad (230)$$

Полагая теперь в последнем уравнении $H_2=0$, мы, очевидно, получим время полного опорожнения сосуда или время полного выравнивания горизонтов обоих сосудов в виде

$$T=\frac{2F\sqrt{H_1}}{\mu\omega\sqrt{2g}}. \qquad (231)$$

Напомним, что последние уравнения (231) и (230), как и (229), относятся к сосудам призматическим.

За время T опорожнения призматического сосуда из последнего через выходное отверстие вытекает количество жидкости в объеме сосуда от центра отверстия до уровня H_1, т. е.

$$W=FH_1. \qquad (232)$$

При постоянном напоре H_1 из выходного отверстия в единицу времени вытечет объем $\mu\omega\sqrt{2gH_1}$, а за время T объем

$$W'=\mu\omega\sqrt{2gH_1}T$$

или, подставляя значение T по (231),

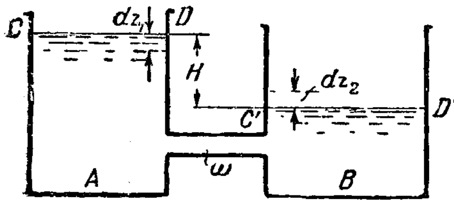
$$W'=\mu\omega\sqrt{2gH_1}\frac{2F\sqrt{H_1}}{\mu\omega\sqrt{2g}}=2FH_1. \qquad (233)$$

Из сравнения (232) и (233) заключаем, что:

при переменном напоре и отсутствии притока опорожнение сосуда происходит в два раза медленнее, чем истечение такого же количества жидкости при постоянном напоре.

§ 84. Истечение при переменном напоре под переменный уровень

Рассмотрим два резервуара (фиг. 117), в которых в некоторый момент уровни жидкости расположены по CD и $C'D'$. Из резервуара A с площадью поперечного сечения F_1 жидкость перетекает в резервуар B, с площадью поперечного сечения F_2, через трубку с поперечным сечением ω. Уровень жидкости в резервуаре A понижается, а в B повышается; в результате рабочий напор, равный H в начальный момент постепенно уменьшается и в конечном итоге, когда уровни в обоих сосудах сравняются, рабочий напор равен нулю и истечение прекращается.



Фиг. 117

В любой момент, когда рабочий напор равен H, можно в течение бесконечно малого промежутка времени dt считать, что истечение происходит под напором H, постоянным для этого бесконечно малого промежутка времени.

Тогда за время dt через выходное сечение трубки ω из резервуара A в B перейдет количество жидкости

$$dQ=\mu_c\omega\sqrt{2gH}\,dt,$$

где μ_c — расходный коэфициент системы с учетом всех потерь при течении жидкости по трубке.

В сосуде A при этом уровень изменится на $-dz_1$, а во втором на $+dz_2$, так что изменения в кубатуре жидкости в обоих сосудах будут одинаковы и равны объему жидкости, прошедшему через трубку за это время, т. е.

$$-F_1dz_1=F_2dz_2=dQ. \tag{234}$$

Изменение уровней жидкости в сосудах приведет к изменению рабочего напора на величину

$$dH=dz_1-dz_2. \tag{235}$$

Напишем равенство расхода по трубке за бесконечно малое время dt изменению кубатуры жидкости в любом из сосудов, скажем в первом:

$$\mu_c\omega\sqrt{2gH}\,dt=-F_1dz_1,$$

откуда

$$dt=-\frac{1}{\mu_c\omega\sqrt{2g}}\frac{F_1dz_1}{\sqrt{H}} \tag{236}$$

и время t в виде неопределенного интеграла

$$t=-\frac{1}{\mu_c\omega\sqrt{2g}}\int\frac{F_1dz_1}{\sqrt{H}}.$$

Интегрирование этого выражения возможно, если выразить F_1 и dz_1 в виде функций от H, а для сосудов призматического сечения, ввиду $F=\text{const}$, достаточно лишь найти для dz_1 выражение через H, чем и займемся.

Найдем из (234) $dz_2=-\frac{F_1}{F_2}dz_1$ и, подставляя найденное значение вместо dz_2 в (235), получим

$$dH=dz_1+\frac{F_1}{F_2}dz_1=\frac{F_1+F_2}{F_2}dz_1,$$

откуда

$$dz_1=\frac{F_2}{F_1+F_2}dH. \tag{237}$$

Для призматических сечений F_1 и F_2 суть величины постоянные и dz_1, следовательно, получено как функция только напора H.

Теперь поставим себе задачей определить время t, по истечении которого разность уровней в сосудах (рабочий напор) изменится от значения $H=H_1$ до значения $H=H_2$. Для этого проведем интегрирование (236) в упомянутых границах значений переменной H, заменив dz_1, по (237).

Имеем для призматического сосуда

$$t=-\frac{1}{\mu_c\omega\sqrt{2g}}\int_{H_1}^{H_2}\frac{F_1}{\sqrt{H}}\frac{F_2}{F_1+F_2}dH=$$

$$=\frac{F_1F_2}{F_1+F_2}\frac{1}{\mu_c\omega\sqrt{2g}}\int_{H_2}^{H_1}\frac{dH}{\sqrt{H}}$$

или

$$t=\frac{2F_1F_2}{(F_1+F_2)}\frac{\sqrt{H_1}-\sqrt{H_2}}{\mu_c\omega\sqrt{2g}}. \tag{238}$$

Принимая в уравнении (238) $H_2=0$, получим время, по истечении которого жидкость в обоих резервуарах установится на одном общем уровне, равное

$$T=\frac{2F_1F_2\sqrt{H_1}}{(F_1+F_2)\mu_c\omega\sqrt{2g}} \tag{239}$$

Отметим попутно, исходя из (237), что изменение рабочего напора на величину $\Delta H = H_1 - H_2$ сопровождается изменением положения начальных уровней жидкости: в первом сосуде на

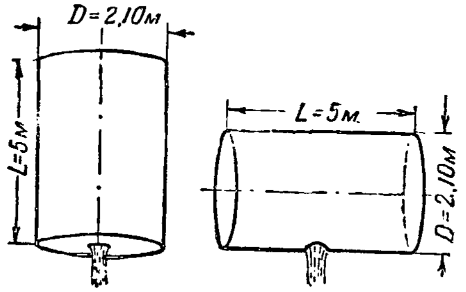
$$\Delta z_1 = \frac{F_2}{F_1 + F_2}\,\Delta H,$$

а во втором на

$$\Delta z_2 = \frac{F_1}{F_1 + F_2}\,\Delta H.$$

Наконец, обратим внимание на то, что, если один из резервуаров весьма велик по сравнению с другим, то уравнение (239) превратится в (231).

Задача 25. Определить: а) время опорожнения цилиндрической бочки, поставленной вертикально, из отверстия в дне $\omega = 1$ *дцм*^{2}, при размерах по фиг. 118 и б) как



Фиг. 118

изменится время опорожнения этой бочки, если ее положить горизонтально с отверстием того же размера внизу на боковой поверхности (в обоих случаях в самой высшей точке полагать отверстие для свободного доступа воздуха).

В первом случае мы имеем истечение под переменным напором из сосуда цилиндрического, т. е. с постоянным поперечным сечением $F = \pi r^2$, не зависящим от изменения напора. Следовательно, можем в данном случае применить сразу уравнение (231):

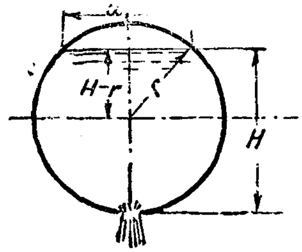
$$T = \frac{2F\sqrt{H}}{\mu\omega\sqrt{2g}}.$$

Находим $F = \pi r^2 = 3{,}14 \cdot 1{,}05^2 = 3{,}46$ *м*^{2}; принимая μ для тонкой стенки равным 0,62, имеем

$$t = \frac{2 \cdot 3{,}46\sqrt{5}}{0{,}62 \cdot 0{,}01 \cdot 4{,}43} = 563 \text{ сек.} = 9 \text{ мин. } 23 \text{ сек.}$$

Во втором случае применение уравнения (231) уже невозможно, так как F является величиной переменной и зависящей от высоты напора. Поэтому будем исходить из уравнения (227), справедливого для всякой формы сосуда, и находить интересующее нас время истечения как интеграл (227), но считая в нем $Q_0 = 0$, за отсутствием в данном случае притока

$$dt = -\frac{1}{\mu\omega\sqrt{2g}}\,\frac{F\,dH}{\sqrt{H}}. \quad (240)$$



Фиг. 119

Прежде чем приступить к интегрированию, необходимо выразить переменную F, как функцию от H. Пусть в некоторый момент уровень жидкости в бочке стоит на высоте H над отверстием (фиг. 119). Очевидно, что свободная поверхность жидкости представляет собой четыреугольники постоянной длины $L = 5$ *м* и переменной ширины x, которая вначале увеличивается до $x = 2r$, а затем при дальнейшем понижении уровня ниже центра снова уменьшается до нуля.

В общем виде, следовательно, имеем

$$F = xL.$$

Как видно из фигуры,

$$x = 2\sqrt{r^2 - (H - r)^2} = 2\sqrt{H(2r - H)}$$

и, таким образом,

$$F = 2L\sqrt{H(2r - H)} = f(H).$$

Имея $F = f(H)$, подставим его значение в (240)

$$dt = -\frac{2L\sqrt{H(2r - H)}}{\mu\omega\sqrt{2g}}\,\frac{dH}{\sqrt{H}} = -\frac{2L}{\mu\omega\sqrt{2g}}\sqrt{2r - H}\,dH$$

и напишем интеграл в пределах от $H_1 = 2r$ до $H_2 = 0$ в виде

$$t = -\frac{2L}{\mu\omega\sqrt{2g}}\int_{2r}^{0}\sqrt{2r - H}\,dH.$$

Введем новую переменную $2r - H = y$, откуда $dy = -dH$ и интегрирование проведем с новой переменной в пределах уже от $y_1 = 0$ до $y_2 = 2r$. Имеем

$$t = \frac{2L}{\mu\omega\sqrt{2g}}\int_0^{2r}\sqrt{y}\,dy = \frac{2L}{\mu\omega\sqrt{2g}}\left|\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right|_0^{2r = d}$$

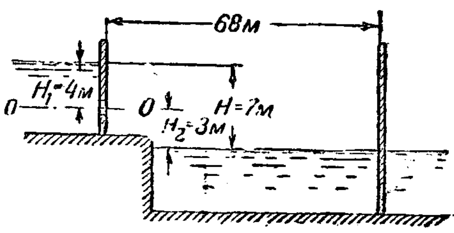
или, подставляя пределы,

$$t = \frac{4Ld\sqrt{d}}{3\mu\omega\sqrt{2g}}$$

Для численных значений данной задачи получаем

$$t = \frac{4 \cdot 5 \cdot 2{,}1\sqrt{2{,}1}}{3 \cdot 0{,}62 \cdot 0{,}01 \cdot 4{,}43} \approx 739 \text{ сек.} = 12 \text{ мин. } 19 \text{ сек.}$$

Задача 26. Определить время наполнения и опорожнения шлюзовой камеры (фиг. 120) при следующих данных: длина камеры 68 *м*, ширина ее 12 м; площадь водопропускных отверстий как верхних, так и нижних по 3,2 *м*^{2}, центр тяжести верхних отверстий находится на глубине 4 *м*; разность горизонтов верхнего и нижнего бьефов составляет 7 *м*; в камере устроена стенка падения высотой 5 *м*.



Фиг. 120

Время наполнения камеры складывается из:

а) времени t_1, необходимого для заполнения части камеры до центра тяжести верхних отверстий, когда уровень воды в камере не влияет на истечение из этих отверстий;

б) времени t_2, необходимого для дальнейшего наполнения камеры до выравнивания горизонта воды в камере с верхним бьефом.

Определяя

$$t_1=\frac{F_1H_2}{\mu\omega\sqrt{2gH}}=\frac{(68\cdot12)3}{0,65\cdot3,2\cdot4,43\sqrt{4}}=133 \text{ сек.}$$

и

$$t_2=\frac{2F\sqrt{H_1}}{\mu\omega\sqrt{2g}}=\frac{2\cdot68\cdot12\sqrt{4}}{0,65\cdot3,2\cdot4,43}=355 \text{ сек.},$$

устанавливаем время наполнения всей камеры

$$T_1=t_1+t_2=133+355=488 \text{ сек.}$$

Опорожнение всей камеры представляет собой процесс однотипный, отражаемый уравнением (231). Поэтому время опорожнения камеры составит

$$T_2=\frac{2F\sqrt{H}}{\mu\omega\sqrt{2g}}=\frac{2\cdot68\cdot12\sqrt{7}}{0,65\cdot3,2\cdot4,43}=470 \text{ сек.}$$

ГЛАВА XII

РАСЧЕТ ДЛИННЫХ ТРУБОПРОВОДОВ

§ 85. Основные расчетные уравнения равномерного движения

Длинными трубопроводами будем считать такие, при которых путевые потери по длине настолько превышают местные потери, что последними практически можно пренебрегать при расчетах[1].

Движение жидкости на отдельных участках трубопровода, одинаковых по диаметру и характеру шероховатости, при учете только путевых потерь, рассматривается как равномерное.

При этом скорость движения жидкости будет определяться уравнением Шези

$$v=C\sqrt{RI},$$

а для круглых труб

$$v=0,5C\sqrt{d\cdot I},$$

или

$$v=\sqrt{\frac{8g}{\lambda}}\sqrt{RI},$$

а для круглых труб

$$v=\sqrt{\frac{2g}{\lambda}}\sqrt{d\cdot I}, \qquad (241)$$

где C или λ должны определяться на основе материалов гл. IX.

Эти уравнения можно записать в таком виде:

$$H=\frac{v^2L}{C^2R}, \text{ а для круглых труб } H=\frac{4v^2L}{C^2d}$$

или

$$H=\frac{\lambda L}{4R}\frac{v^2}{2g}, \text{ а для круглых труб } H=\frac{\lambda L}{d}\frac{v^2}{2g}. \qquad (242)$$

Расход жидкости через сечение площадью ω при скорости v будет

$$Q=\omega v=\omega C\sqrt{RI}. \qquad (243)$$

[1] При расчетах водопроводов местные потери учитывают суммарно в итоговых результатах, предусматривая в расчетном напоре определенный запас в виде некоторого процента от путевых потерь.

Для русла постоянного сечения при одинаковом материале ложа отдельные члены уравнения (243), а именно ω, C, R приобретают постоянное значение.

Объединяя эти три члена, постоянные для данного сечения русла, и обозначая

$$K=\omega C\sqrt{R}, \qquad (244)$$

будем пользоваться при расчетах равномерного движения жидкости уравнением (243) в следующем виде:

$$Q=K\sqrt{I}, \qquad (245)$$

В этом уравнении $I=\frac{H}{L}$ — число отвлеченное и потому K должно иметь размерность расхода. Легко видеть из (243), что K представляет собой расход жидкости в русле при уклоне I, равном единице.

Величину $K=\omega C\sqrt{R}$ называют расходной характеристикой или модулем расхода данного русла (трубы, канала и т. п.).

Для разных диаметров водопроводных труб можно вычислить численные значения расходной характеристики K по (244), подставляя $\omega=\frac{\pi d^2}{4}$, $R=\frac{d}{4}$ и C по одной из формул, рассмотренных в гл. IX.

При дальнейших расчетах трубопроводов мы принимаем за основу формулу Маннинга (193). Отметим при этом, что для водопроводных расчетов проф. Б. А. Бахметев рекомендует принимать (при метровом исчислении) в формуле Маннинга следующие оправданные на практике значения:

$\frac{1}{n}=91$ для чистых труб;

$\frac{1}{n}=80$ для нормальных труб;

$\frac{1}{n}=70$ для грязных труб.

Расходная характеристика для круглых труб по Маннингу выразится так:

$$K=\omega C\sqrt{R}=\frac{\pi d^2}{4}\,\frac{1}{n}R^{0,67}=\frac{1}{n}\,0{,}785d^2\left(\frac{d}{4}\right)^{0,67},$$

что при подстановке приведенных выше численных значений K даст в метрах:

для чистых труб $K=28{,}35\ d^{2,67}$ *м³/сек*;

" нормальных $K=24{,}92\ d^{2,67}$ *м³/сек*; (246)

" грязных $K=21{,}81\ d^{2,67}$ *м³/сек*.

По последним выражениям для стандартных сортаментов труб вычислены значения расходной характеристики K, приводимые в табл. 20. В этой таблице даны также значения скоростной характеристики

$$S=C\sqrt{R}.$$

Подставим в уравнение (245) значение $I=\frac{H}{L}$, где L — длина трубопровода, а H — напор, затрачиваемый на поддержание движения жидкости по трубопроводу.

Получим

$$Q=K\sqrt{\frac{H}{L}}\ \text{или}\ Q^2=K^2\frac{H}{L},$$

откуда имеем уравнение для вычисления необходимого напора

$$H=\frac{Q^2L}{K^2}. \qquad (247)$$

Член $\frac{L}{K^2}$ при $Q=1$ численно равен H, т. е. показывает величину необходимого напора для преодоления сопротивлений в трубопроводе при расходе, равном единице.

Будем поэтому называть $\frac{L}{K^2}$ удельным сопротивлением трубопровода. В таблице значений расходной характеристики приведены и численные данные для K^2.

Таблица 20

Значение скоростных и расходных характеристик по формуле Маннинга

Состояние труб		Нормальные $\frac{1}{n}=80$				Чистые $\frac{1}{n}=90$				Грязные $\frac{1}{n}=70$			
Диаметр: дюймы	миллиметры	S *м/сек*	K *л/сек*	$\frac{K^2}{1\,000}$	$\frac{1\,000}{K^2}$	S *м/сек*	K *л/сек*	$\frac{K^2}{1\,000}$	$\frac{1\,000}{K^2}$	S *м/сек*	K *л/сек*	$\frac{K^2}{1\,000}$	$\frac{1\,000}{K^2}$
1,5	40	3,713	4,666	0,022	45,93	4,424	5,308	0,028	35,50	3,249	4,083	0,017	59,99
2	50	4,550	8,460	0,072	13,97	5,175	9,624	0,092	10,80	3,981	7,403	0,055	18,25
3	75	5,646	24,94	0,622	1,607	6,423	28,37	0,805	1,242	4,941	21,83	0,476	2,099
4	100	6,826	53,72	2,886	0,353	7,771	61,11	3,734	0,269	5,973	47,01	2,209	0,455
5	125	7,930	97,40	9,487	0,105	9,030	110,8	12,28	0,0813	6,945	85,23	7,264	0,138
6	150	8,954	158,4	25,09	0,0400	10,186	180,2	32,46	0,0309	7,834	138,6	19,21	0,0526
7	175	9,938	238,9	57,08	0,0175	11,342	271,8	73,86	0,0134	8,695	209,0	43,70	0,0224
8	200	10,859	341,0	116,4	0,0086	12,353	388,0	150,6	0,0036	9,501	298,5	89,08	0,0112
9	225	11,744	467,0	218,1	0,0046	13,359	531,2	282,2	0,0035	10,276	408,6	167,0	0,0060
10	250	12,605	618,5	382,5	0,0026	14,332	703,5	494,9	0,0023	11,029	541,2	292,8	0,0034
12	300	14,224	1 006	1 011	0,00098	16,248	1 144	1 309	0,00076	12,445	880	774,4	0,0013
14	350	15,766	1 517	2 301	0,00043	17,934	1 726	2 978	0,80034	13,796	1 327	1 762	0,00057
16	400	17,240	2 166	4 691	0,00021	19,643	2 464	6 070	0,00016	15,085	1 895	3 592	0,00028
18	450	18,642	2 965	8 792	0,00011	21,707	3 373	11 380	0,00009	16,314	2 594	6 731	0,00015
20	500	20,003	3 927	15 410	0,00006	22,756	4 467	19 950	0,00005	17,501	3 436	11 810	0,00008
24	600	22,574	6 386	40 780	0,0000246	25,717	7 264	52 760	0,0000189	19,744	5 587	31 220	0,0000392
28	700	25,019	9 632	92 780	0,0000108	28,535	10 960	120 100	0,0000083	21,883	8 428	71 040	0,0000141
30	750	26,205	11 580	134 100	0,0000075	29,808	13 170	173 400	0,0000058	22,932	10 130	102 600	0,0000097
32	800	27,369	13 750	189 100	0,0000053	31,172	15 640	244 700	0,0000041	23,938	12 030	144 800	0,0000069
36	900	29,591	18 830	354 500	0,0000028	33,664	21 420	453 600	0,0000022	25,882	16 470	271 400	0,0000037
40	1 000	31,750	24 930	621 700	0,0000016	36,120	28 360	801 500	0,0000012	27,780	21 820	476 000	0,0000021

§ 86. Основные задачи при расчете трубопроводов

Соотношения

$$Q=K\sqrt{I},$$

$$H=Q^2\frac{L}{K^2}$$

дают возможность решать ряд задач по расчету простого водопровода с постоянным по всей его длине диаметром труб.

Основными вопросами при этом могут быть:

а) определение расхода Q при заданных размерах труб, заданном напоре H и длине трубопровода L;

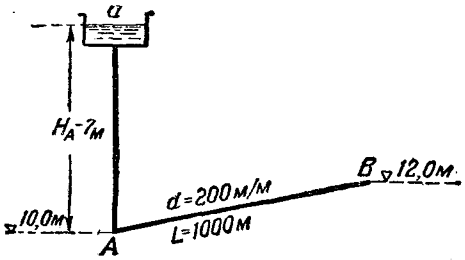
б) определение необходимого напора H для пропуска заданного расхода Q через трубопровод заданной длины L при диаметре его d;

в) определение нужного диаметра труб d для пропуска заданного расхода Q при длине трубопровода L и наличии напора H.

Разрешение этих вопросов проследим на отдельных задачах.

Задача 27. Определить расход через трубопровод показанных на фиг. 121 размеров, если условная отметка точки A равна 10 *м*, а точки B — 12 *м*. Трубы нормальные — бывшие в употреблении.

Решение этой задачи проведем, применяя различные формулы для C в целях сопоставления даваемых ими результатов. Применим формулы Дарси, Маннинга и Кут-



Фиг. 121

тера (старую). Для формулы Маннинга пользуемся табл. 20 вычисленных значений K, а для остальных формул вычислим K непосредственно.

Находим пьезометрический уклон как отношение разности высот жидкости (в напорном баке и в месте выхода ее) к длине пути. В данном случае

$$I = \frac{H}{L} = \frac{(10+7)-12}{1\,000} = 0{,}005.$$

При диаметре $d = 200$ *мм* для нормальных труб найдем по таблице значений расходных характеристик по формуле Маннинга $K = 341$ *л/сек*.

Подставляя в (244) значение C по формуле Куттера, имеем $K = 332$ *л/сек*, а вычисляя C по формуле Дарси со значением $\lambda = 0{,}031$, $K = 351$ *л/сек*.

Чтобы получить расход трубопровода, остается лишь согласно (245) умножить модуль расхода на $\sqrt{I}$.

Тогда имеем:

$$Q = K\sqrt{I} = 351\sqrt{0{,}005} = 24{,}82 \text{ л/сек по Дарси,}$$

$$Q = K\sqrt{I} = 332\sqrt{0{,}005} = 23{,}48 \text{ л/сек по Куттеру,}$$

$$Q = K\sqrt{I} = 341\sqrt{0{,}005} = 24{,}11 \text{ л/сек по Маннингу.}$$

Значения Q получились по всем трем формулам близкими.

Задача 28. Определить напор, необходимый для пропуска через трубопровод, приведенный в предыдущей задаче, расхода $Q = 50$ *л/сек*.

Пользуемся уравнением (247), придав ему такую форму:

$$H = Q^2 L \frac{1\,000}{K^2},$$

где L выражена в *км*.

Подставляя $Q = 50$ *л/сек*, $L = 1\,000$ *м* $= 1$ *км* и пользуясь значением $\frac{1\,000}{K^2} = 0{,}0086$ из соответствующей колонки табл. 20 для $d = 200$ *мм*, имеем

$$H = 50^2 \cdot 1 \cdot 0{,}0086 = 21{,}5 \text{ м}.$$

Отметка напорного бака, следовательно, должна быть

$$H_A = 21{,}5 + (12 - 10) = 23{,}5 \text{ м}.$$

Задача 29. Определить диаметр трубопровода, рассчитываемого на пропуск расхода $Q = 250$ *л/сек*, при следующих данных о трубопроводе: длина его $L = 2\,500$ *м*, рабочий напор $H = 30$ *м*, трубы—водопроводные, новые.

При дальнейшей работе трубопровода произойдет некоторое загрязнение стенок и потому расчет обычно ведут для нормальных труб, а для трубопроводов, работающих в неблагоприятных условиях — для грязных труб.

Как мы видели выше, каждому сортаменту труб соответствует определенная расходная характеристика K и обратно при заданных условиях определенному значению K соответствует некоторый конкретный диаметр трубопровода.

Поэтому практически расчет диаметра трубопровода сводится к нахождению расходной характеристики K и затем установлению по таблице соответствующего значения d.

Для условий данной задачи имеем

$$K = \frac{Q}{\sqrt{I}} = \frac{250}{\sqrt{\frac{30}{2\,500}}} = 2\,283 \text{ л/сек.}$$

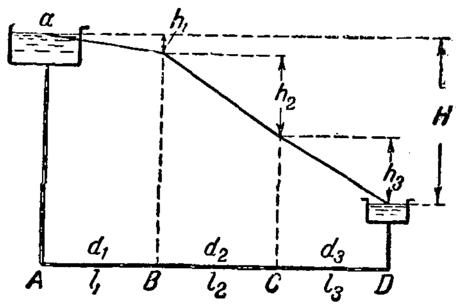
По табл. 20, составленной по формуле Маннинга, видно, что необходимое нам значение $K = 2\,283$ *л/сек* находится между $K_1 = 2\,166$ *л/сек* для $d_1 = 400$ *мм* и $K_2 = 2\,965$ *л/сек* для $d_2 = 450$.

Нужный диаметр трубопровода, следовательно, должен быть между $d_1 = 400$ *мм* и $d_2 = 450$ *мм*:
при $d = 400$ *мм* потребуется напор $H > 30$ *м*, а при $d = 450$ *мм* потребуется напор $H < 30$ *м*.

При необходимости же использовать напор H, равный именно 30 *м*, нужно (ввиду отсутствия труб промежуточного диаметра) делать трубопровод составным из обоих размеров труб d_1 и d_2, что приводит к так называемому последовательному соединению труб, рассматриваемому ниже.

§ 87. Трубопровод из последовательно соединенных труб разных диаметров

Пусть имеется трубопровод из системы труб разных длин и диаметров (фиг. 122), через который пропускается расход Q.



Фиг. 122

Означенный расход Q проходит последовательно через все участки трубопровода, каждый из которых характеризуется своим удельным сопротивлением $\left(\frac{l}{K^2}\right)$.

Для продвижения расхода Q через любой из участков трубопровода необходимо затратить некоторую часть напора

$$h_i = Q^2 \frac{l_i}{K_i^2},$$

где значок i — указатель номера участка трубопровода.

Через весь трубопровод расход Q пройдет с затратой напора:

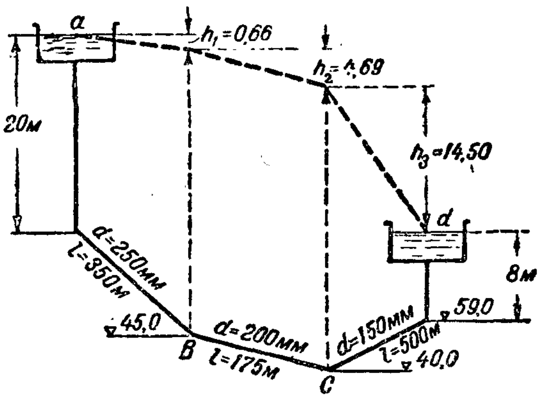
$$H = h_1 + h_2 + \ldots + h_n = \Sigma h.$$

Так как в выражении для h_i величина Q является постоянной, общей для всех участков трубопровода, то можно записать

$$H = Q^2 \Sigma \frac{l_i}{K_i^2}. \qquad (248)$$

Таким образом при последовательном соединении труб необходимый рабочий напор равен произведению квадрата расхода на сумму удельных сопротивлений всех участков.

Задача 30. Построить для условий фиг. 123 пьезометрическую линию при расходе $Q = 23{,}6$ *л/сек;* трубы загрязненные.



Фиг. 123

Начало пьезометрической линии лежит на уровне жидкости в резервуаре a, а конец — на уровне жидкости в резервуаре d.

При трубопроводе одинакового диаметра на всем протяжении потери были бы равномерны на каждой единице длины и пьезометрическая линия представляла бы одну прямую линию между уровнями жидкости в резервуарах.

Однако мы имеем три участка разного диаметра и потому равномерность падения пьезометрической линии будет только в пределах каждого отдельного участка. Вся же пьезолиния представляет ломаную линию, меняющую свой уклон в местах перемены диаметров, т. е. в данном случае в B и C. Для нанесения пьезометрической линии определяем потери напора на каждом отдельном участке.

Имеем:

$$h_{aB} = Q^2 \frac{l_1}{K_1^2} = 23{,}6^2 \frac{350}{292\,800} = 0{,}66 \text{ м},$$

$$h_{BC} = Q^2 \frac{l_2}{K_2^2} = 23{,}6^2 \frac{750}{89\,080} = 4{,}69 \text{ м},$$

$$h_{Cd} = Q^2 \frac{l_3}{K_3^2} = 23{,}6^2 \frac{500}{19\,210} = 14{,}50 \text{ м}.$$

Далее от линии уровня жидкости в первом резервуаре откладываем на вертикалях (вниз) величины скоростного напора и путевых потерь до соответствующей вертикали. Соединяя полученные точки, найдем искомую пьезометрическую линию.

Задача 31. Рассчитать трубопровод по условию задачи 29 с тем, чтобы был использован весь напор $H = 30$ *м*.

При решении задачи 29 было установлено, что диаметр трубопровода должен быть от 400 до 450 *мм*.

Чтобы напор соответствовал ровно 30 *м*, нужно сделать трубопровод из последовательно соединенных труб обоих вышеупомянутых диаметров. Нашей задачей и является установить, какова должна быть длина труб каждого диаметра из общего протяжения $L = 2\,500$ *м*.

Обозначим длину труб с $d_1 = 400$ *мм* через l_1, а следовательно, длину труб с $d_2 = 450$ *мм* через $(L - l_1)$.

Тогда уравнение (248) для последовательно соединенного трубопровода напишется так:

$$H = Q^2 \left(\frac{l_1}{K_1^2} + \frac{L - l_1}{K_2^2} \right) \qquad (249)$$

или, подставляя численные значения данной задачи,

$$30 = 250^2 \left(\frac{l_1}{4\,691\,000} + \frac{2\,500 - l_1}{8\,792\,000} \right).$$

Решаем последнее уравнение относительно l_1:

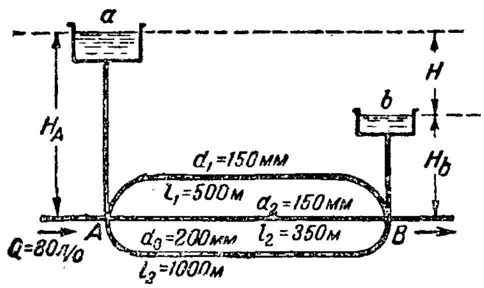
$$0{,}00615 l_1 = 12{,}225 \text{ м},$$

$$l_1 = 1\,988 \text{ м}.$$

Следовательно, труб диаметром 400 *мм* должно быть уложено 1 988 *м*, а диаметром 450 *мм*—(2 500—1 988)=512 *м*.

§ 88. Параллельное соединение трубопроводов

Между точками трубопроводов A и B с пьезометрическими напорами в них H_A и H_B проходит несколько линий труб, образуя так называемое параллельное соединение (фиг. 124).



Фиг. 124

Точки A и B являются общими для каждой из линий соединения и поэтому движение по любой линии происходит под одинаковой разностью напоров в начальной и конечной точке

$$H = H_A - H_B,$$

но с различными, в зависимости от длины линий l_i, пьезометрическими уклонами, равными:

$$I = \frac{H_A - H_B}{l_i} = \frac{H}{l_i}.$$

Расход через любую из соединяющих точки A и B линий трубопровода можем записать на общих основаниях в виде

$$Q_i = K_i \sqrt{\frac{H}{l_i}}, \qquad (250)$$

причем для n соединяющих линий можно написать n уравнений типа (250).

Кроме того можно записать, что сумма расходов Q_i по отдельным линиям равна расходу Q, подводимому к точке A, т. е.

$$Q = Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n = \Sigma Q_i. \qquad (251)$$

Уравнения (250) и (251) дают всего $n+1$ уравнений, что дает возможность определить $n+1$ неизвестных, которыми обычно являются H — напор, затрачиваемый на прохождение расходов через параллельные линии труб, и n отдельных расходов Q_i каждой линии.

Задача 32. Расход $Q = 80$ *л/сек* протекает по трубопроводу из трех параллельно соединенных труб. Принимая длины и размеры труб по фиг. 124, найти распределение общего расхода Q по отдельным линиям Q_1, Q_2, Q_3 и потерю напора H_{AB} между узловыми точками (трубы — нормальные).

Выражаем расходы отдельных линий через один из них, скажем через Q_1, по уравнениям (250).

Имеем:

расход левой линии Q_1

расход средней линии $Q_2 = Q_1 \frac{K_2}{K_1}\sqrt{\frac{l_1}{l_2}} =$

$$= Q_1 \frac{158}{158}\sqrt{\frac{500}{350}} = 1{,}195\, Q_1;$$

расход правой линии $Q_3 = Q_1 \frac{K_3}{K_1}\sqrt{\frac{l_1}{l_3}} =$

$$= Q_1 \frac{341}{158}\sqrt{\frac{500}{1\,000}} = 1{,}526\, Q_1.$$

Расход всей системы

$$Q = 80 \text{ л/сек} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 3{,}721\, Q_1,$$

откуда

$$Q_1 = 21{,}5 \text{ л/сек},\quad Q_2 = 1{,}195\, Q_1 = 25{,}7 \text{ л/сек},$$
$$Q_3 = 1{,}526\, Q_1 = 32{,}8 \text{ л/сек}.$$

Потерю напора между узловыми точками A и B можем определить по любой линии из уравнения:

$$H = Q^2 \frac{l_i}{K_i^2}.$$

Например, по первой (левой) линии получим

$$H_{AB} = 21{,}5^2 \frac{500}{25\,090} = 9{,}25 \text{ м}.$$

Такое же значение H_{AB} получится и по данным остальных линий.

§ 89. Потери напора в зависимости от характера распределения расхода

В предыдущих рассуждениях и при решении изложенных выше задач расход по трубопроводу подавался сосредоточенно в конец того или иного участка трубопровода. По всему участку трубопровода между двумя точками водоразбора проходит некоторый постоянный расход.

В таких случаях говорят, что расход Q проходит по участку транзитом и самый расход называют транзитным.

Все установленные выше расчетные формулы для трубопроводов относятся, следовательно, к трубопроводам с наличием только транзитных расходов.

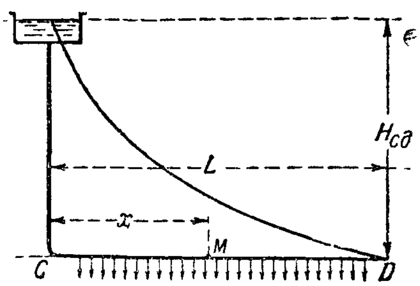
Если точки водоразбора распределяются по длине участка трубопровода очень часто, то можно говорить с известным приближением о непрерывной раздаче расхода по пути.

Будем полагать, что на участке с непрерывной раздачей по пути расход, поступивший в начале участка, по мере движения по трубопроводу уменьшается постепенно и равномерно в связи с раздачей воды на каждой единице пути по $\frac{Q_p}{L}$ *л/сек*.

Заранее можно ожидать, что потеря на участке при непрерывной раздаче некоторого расхода должна быть меньше, чем в том случае, когда тот же расход проходил бы от начала до конца участка транзитом.

Для установления аналитического выражения потери напора при непрерывной раздаче по пути рассмотрим условия движения на таком участке.

В сечении M, взятом на произвольном расстоянии x от начала участка CD (фиг. 125),



Фиг. 125

расход $Q_м$ будет меньше расхода Q_p, вступившего в начале участка, на величину распределенного уже расхода по пути x, т. е.

$$Q_м = Q_p - \frac{Q_p}{L}\, x = \frac{Q_p}{L}(L - x).$$

Иначе говоря, в сечении M трубопровод несет расход, достаточный для раздачи на остающемся до конца участка пути $L - x$ по той же равномерной норме $\frac{Q_p}{L}$.

Пьезометрический уклон во всяком сечении равен по (245)

$$I = \frac{Q^2}{K^2}.$$

Подставляя значение расхода в сечении M, равное $\frac{Q_p}{L}$ $(L-x)$, получим пьезометрический уклон для этого сечения:

$$I_м=\frac{Q_p^2(L-x)^2}{L^2K^2}.$$

Тогда падение напора вдоль бесконечно малого элемента пути dx будет

$$dH=Idx=\frac{Q_p^2(L-x)^2}{L^2K^2}dx.$$

Интегрируя это выражение в пределах всей длины участка CD, т. е. от $x=0$ до $x=L$, получим потерю напора на всем участке с непрерывной раздачей.

Имеем

$$H_{CD}=\frac{Q_p^2}{L^2K^2}\int_0^L(L-x)^2dx, \tag{252}$$

откуда

$$H_{CD}=\frac{1}{3}Q_p^2\frac{L}{K^2}. \tag{253}$$

Сравнивая уравнение (253) с уравнением (247) для потери напора при транзитном расходе, видим, что:

при непрерывной раздаче по пути требуется напор в три раза меньше, чем при транзите того же расхода.

Представим уравнение (253) в виде

$$Q_p=\sqrt{3}K\sqrt{\frac{H}{L}}=\sqrt{3}K\sqrt{I}.$$

Сравнивая его с уравнением (245) видим, что один и тот же напор при непрерывной раздаче подает воды в $\sqrt{3}$ раз больше, чем при транзитной подаче.

Уравнение (252) при верхнем пределе, равном не всей длине L, а некоторому расстоянию l, дает потерю напора h на длине l и может служить для построения пьезометрической линии по точкам, взятым на разных расстояниях l от начала участка.

Наконец, рассмотрим тот же участок CD трубопровода (фиг. 125), поставив дополнительное условие, чтобы, кроме непрерывной раздачи по пути, участок CD пропускал и некоторый транзитный расход Q_m, забираемый сосредоточенно в конце участка.

В этом случае в сечении M трубопровод должен пропускать расход

$$Q_м=\frac{Q_p}{L}(L-x)+Q_m=(Q_p+Q_m)-\frac{Q_p x}{L}.$$

Уравнение падения напора вдоль элемента dx напишется так:

$$dH=I_м dx=\frac{Q_м^2dx}{K^2}=\left[\frac{(Q_p+Q_m)^2}{K^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{2Q_p}{LK^2}(Q_p+Q_m)x+\frac{Q_p^2}{L^2K^2}x^2\right]dx.$$

Интегрируя последнее равенство в пределах от 0 до L, получим расчетное уравнение для потери напора на всем участке длиной L:

$$H=\int_0^L\left[\frac{(Q_p+Q_m)^2}{K^2}-\frac{2Q_p(Q_p+Q_m)}{LK^2}x+\right.$$

$$\left.+\frac{Q_p^2}{L^2K^2}x^2\right]dx,$$

откуда

$$H=\left|\frac{(Q_p+Q_m)^2}{K^2}x-\frac{Q_p(Q_p+Q_m)}{LK^2}x^2+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3}\frac{Q_p^2}{L^2K^2}x^3\right|_0^L$$

или окончательно

$$H=\frac{L}{K^2}\left(Q_m^2+Q_mQ_p+\frac{1}{3}Q_p^2\right). \tag{254}$$

Легко видеть, что уравнение (253) является частным случаем (254) при $Q_m=0$.

Уравнение (254) при замене L частными значениями l дает возможность строить пьезометрическую линию по точкам.

Уравнение (254) для практического пользования преобразуем, вынеся за скобку величину Q^2_m.

Получим

$$H=\frac{LQ_m^2}{K^2}\left[1+\frac{Q_p}{Q_m}+\frac{1}{3}\left(\frac{Q_p}{Q_m}\right)^2\right] \tag{255}$$

или, обозначая трехчлен в квадратных скобках через $\Psi\left(\frac{Q_p}{Q_m}\right)$,

$$H=\frac{L}{K^2}Q_m^2\cdot\Psi\left(\frac{Q_p}{Q_m}\right). \tag{256}$$

Последним равенством будем пользоваться при расчетах, получая численные значения $\Psi\left(\frac{Q_p}{Q_m}\right)$ из табл. 21.

Уравнение (254) можно представить и в таком виде:

$$H\approx\frac{L}{K^2}(Q_m+0{,}55Q_p)^2. \tag{257}$$

Тогда, называя величину в скобках расчетным расходом, т. е.

$$Q_{расч}=Q_m+0{,}55Q_p$$

Таблица 21

Таблица значений $\Psi\left(\frac{Q_p}{Q_m}\right)$

$\frac{Q_p}{Q_m}$	.00	.02	.05	.08	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90
0	1,00	1,02	1,05	1,08	1,10	1,24	1,33	1,45	1,58	1,72	1,86	2,01	2,17
1	2,33	2,37	2,42	2,47	2,50	2,68	2,86	3,05	3,25	3,95	3,66	3,88	4,10
2	4,33	4,38	4,45	4,52	4,57	4,81	5,06	5,32	5,58	5,85	6,13	6,41	6,70
3	7,00	7,06	7,15	7,24	7,30	7,61	7,93	8,25	8,58	8,92	9,26	9,61	9,97
4	10,33	10,41	10,48	10,63	10,70	11,08	11,46	11,85	12,65	12,65	13,06	13,48	13,90
5	14,33	14,42	14,55	14,68	14,77	15,21	15,66	16,12	16,58	17,05	17,53	18,01	18,50

приходим к формуле для расчета напора при смешанном расходе:

$$H=\frac{L}{K^2}Q^2_{расч},$$

совершенно одинаковой по структуре с (247).

§ 90. Расчет всасывающей линии водопровода

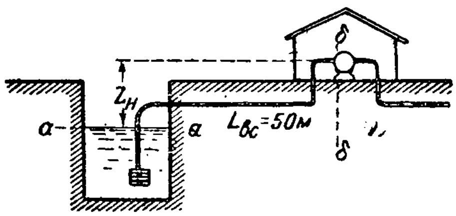
Водопроводную сеть с точки зрения гидравлического расчета можно разделить на следующие основные части:

а) всасывающая линия;

б) нагнетательная линия;

в) распределительная сеть.

Всасывающая линия водопровода представляет обычно очень короткий трубопровод от места забора воды в источнике водоснабжения до насосной установки (фиг. 126). По этой линии вода „присасывается" насосом вследствие образования в последнем определенного разрежения (вакуума).



Фиг. 126

В отношении гидравлического расчета всасывающей линии нужно сделать следующие замечания:

1. Ввиду небольшой длины таких линий местные потери играют заметную роль в общем балансе потерь напора и потому в этом случае неприемлемы формулы, построенные на учете только путевых потерь, и необходимо вычислять все потери, имеющиеся налицо.

2. Исходными данными для гидравлического расчета являются: средняя скорость подачи воды по всасывающей линии к насосам и величина вакуума, практически достигаемая при работе насоса.

Гидравлический расчет всасывающей линии рассмотрим на конкретном примере.

Задача 33. Центробежный насос (фиг. 126) устанавливается для подачи воды из колодца в количестве $Q=200$ *л/сек*. Длина всасывающей трубы $L_{вс}=50$*м*; труба снабжена предохранительной сеткой и обратным клапаном.

Определить диаметр всасывающей трубы и высоту установки насоса ($z_н$) над горизонтом воды в колодце так, чтобы вакуум не превосходил 6 *м* вод. ст.

1. Диаметр всасывающей трубы определяют, задаваясь желательной скоростью движения воды в трубе.

Обычно принимают $v_{вс}\approx(0{,}8\div1{,}25)$ *м/сек*. Пусть в данном случае $v_{вс}=1$ *м/сек* и тогда, исходя из равенства

$$Q=\omega v=\frac{\pi d^2}{4}v,$$

найдем

$$d=\sqrt{\frac{4.Q}{\pi\ v}}=\sqrt{\frac{4.0{,}2}{\pi\cdot1}}=0{,}51\ м.$$

Практически принимаем ближайший по существующему сортаменту труб $d=0{,}50$ *м*, при котором скорость всасывания $v_{вс}=1{,}02$ *м/сек*.

2. Напишем уравнение Бернулли для сечения $a-a$ и $б-б$ относительно оси $a-a$, считая скорость на поверхности колодца $v_1=0$:

$$0+\frac{p_a}{\gamma}+0=z_н+\frac{p_н}{\gamma}+\frac{v^2_{вс}}{2g}+\Sigma h_{mp}$$

или

$$\frac{p_a-p_н}{\gamma}=z_н+\frac{v^2_{вс}}{2g}(1+\Sigma\zeta).$$

Левая часть последнего уравнения показывает превышение атмосферного давления p_a над давлением $p_н$ в трубе у входа в насос и называется вакуумом

$$\frac{p_a-p_н}{\gamma}=\mathrm{Vac}.$$

Тогда имеем

$$z_н=\mathrm{Vac}-(1+\Sigma\zeta)\frac{v^2_{вс}}{2g},\qquad(258)$$

для решения которого нужно вычислить значение $\Sigma\zeta$.

Из сопротивлений движению имеем:

1) сопротивление сетки и обратного клапана при входе в трубу с коэфициентом $\zeta_{сет}=10$;

2) сопротивления на трех закруглениях (считая радиус закругления $r=0{,}5$ *м*) с $\zeta_{закр}=0{,}294$ на каждом.

$$3\zeta_{закр}=0{,}294\cdot3=0{,}88;$$

3) сопротивления путевые по длине всей трубы с коэфициентом

$$\zeta_{пут}=\frac{\lambda L}{d}=\frac{0,02\cdot 50}{0,50}=2.$$

Подставим эти численные значения в (258) и получим

$$z_н=6-(1+12,88)\ \frac{1,02^2}{19,62}\approx 5,3\ м.$$

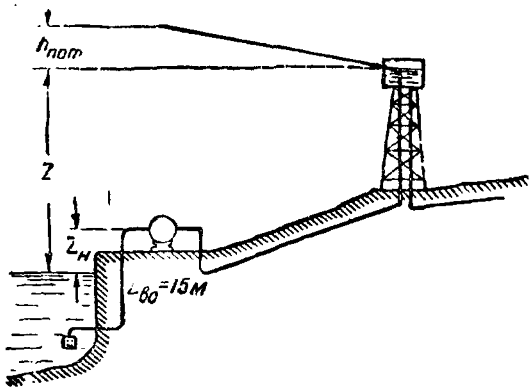
§ 91. Расчет нагнетательной или напорной линии

Через нагнетательную линию благодаря давлению (напору), создаваемому насосами, вода подается в напорный бак для дальнейшего распределения (под напором из бака) по водопроводной сети.

Расчет нагнетательной линии, т. е. определение необходимого диаметра труб, вообще является задачей неопределенной, так как, строго говоря, нужное количество воды может быть пропущено через трубу любого диаметра, если обеспечен соответствующий напор.

Определенность в решение задачи вносят следующие соображения.

Насосная установка должна производить работу по подъему расхода на геометрическую высоту z (фиг. 127) и кроме того преодолевать



Фиг. 127

сопротивления движению, характеризуемые высотой потерянного напора $h_{пот}$.

Работа насосной установки равносильна, следовательно, подаче воды на высоту $H=z+h_{пот}$.

Если выразить вес подаваемой жидкости в килограммах, высоту полного напора H в метрах и обозначить к.п.д. насоса через $\eta_н$, а к.п.д. двигателя через $\eta_{дв}$, то необходимая мощность энергетической установки будет

$$N=\frac{\gamma Q(z+h_{пот})}{75\eta_н\eta_{дв}}\ л.\ с.$$

или

$$N=\frac{\gamma Q(z+h_{пот})}{1,36\cdot 75\eta_н\eta_{дв}}\ квт.$$

Часть этой мощности

$$N_1=\frac{\gamma Q}{75\eta_н\eta_{дв}}\,z$$

расходуется для подъема воды на геометрическую высоту z, определяемую разностью отметок уровней воды в источнике водоснабжения и напорном баке.

Эта часть N_1 очевидно, не зависит от размера труб, которые будут проложены от насосов к баку.

Другая часть полной мощности

$$N_2=\frac{\gamma Q}{75\eta_н\eta_{дв}}\,h_{пот}$$

расходуется на преодоление трения в трубах и с изменением диаметра труб будет потребна в большем или меньшем количестве.

С увеличением диаметра трубопровода потери напора на трение сильно уменьшаются и, следовательно, чем больше диаметр труб, тем меньшая мощность N_2 расходуется на подачу воды.

Однако с увеличением диаметра увеличиваются единовременные капиталовложения на устройство трубопровода и соответственно увеличиваются и ежегодные затраты по амортизации капиталовложений.

Таким образом видно, что расчет нагнетательной линии должен сводиться к нахождению такого „экономически наивыгоднейшего“ диаметра трубопровода, при котором общие ежегодные затраты как на энергию, так и на погашение капитальных вложений были бы минимальными.

Вопрос сводится, следовательно, к нахождению минимума выражения:

$$S=S_1+pS_2, \tag{259}$$

где S_1 — годичная стоимость энергии, затрачиваемой на преодоление трения в трубопроводе; S_2 — сумма капиталовложений по устройству трубопровода, зависящих от диаметра его, а p — доля ежегодного погашения капитальных затрат.

S_1 — стоимость энергии в год — получим, обозначив через t число часов годичной работы установки и через s_1 стоимость одной лошадиной силы в час, в виде

$$S_1=\frac{\gamma Q h_{пут}}{75\eta}\,ts_1, \tag{260}$$

где $\eta=\eta_н\cdot\eta_{дв}$ — к. п. д. всей установки.

Подставляя в (260) значение $h_{nym}=Q^2\,\frac{L}{K^2}$, запишем

$$S_1=\frac{s_1t\gamma Q^3L}{75\gamma_iK^3}. \qquad (261)$$

Величину K^3 по Маннингу можно согласно (246) представить в виде

$$K^2=A^2d^{5,34},$$

причем, так как γQ вошло в уравнение в килограммах, то K должно быть выражено в *л/сек*. Поэтому в формуле $K^2=A^2d^{5,34}$ будем брать d в дециметрах и A, представляющее пропускную способность трубы с $d=1$ *дцм*, будем считать (округляя) равным:

для чистых труб $A=60$;

„ нормальных труб $A=54$;

„ грязных труб $A=47$.

Подставляя в (261) значение $K^2=A^3\,d^{5,34}$, находим

$$S_1=\frac{s_1t\gamma}{75\eta A^2}\;Q^3Ld^{-\,5,34}$$

Что касается второго члена (259), то, обозначая через s_2 стоимость 1 *пог. м* трубы диаметром, равным единице, и считая стоимость трубы примерно пропорциональной диаметру, можно его выразить в виде

$$pS_2=ps_2Ld.$$

Подставим записанные значения S_1 и S_2 в (259) и получим

$$S=\frac{s_1t\gamma}{75\gamma_iA^2}\,Q^3Ld^{-\,5,34}+ps_2Ld. \qquad (262)$$

Теперь определим, при каком значении диаметра d мы будем иметь минимум годичных затрат S.

Для этого находим

$$\frac{\partial S}{\partial d}=-\frac{5,34}{75A^2}\,\frac{s_1t\gamma}{\eta}\,Q^3Ld^{-\,6,34}+ps_2L=0$$

или

$$\frac{0,07s_1t\gamma}{A^2\eta}\,Q^3Ld^{-6,34}=ps_2L,$$

откуда

$$d=\sqrt[6,34]{\frac{0,07\gamma}{A^2}}\;\sqrt[6,34]{\frac{Q^3ts_1}{ps_2\eta}}. \qquad (263)$$

Первый сомножитель (263) при численном значении A для разных типов труб получает следующие значения при $\gamma=1$ *кг/дцм*^{3}:

для чистых труб

$$\sqrt[6,34]{\frac{0,07\gamma}{A^2_ч}}=0,181,$$

для нормальных труб

$$\sqrt[6,34]{\frac{0,07\gamma}{A^2_н}}=0,187,$$

для грязных труб

$$\sqrt[6,34]{\frac{0,07\gamma}{A^2_г}}=0,195.$$

Уравнение (263) может служить для определения диаметра, близкого к экономически наивыгоднейшему.

Часто определение диаметра нагнетательной линии производят постепенным подбором, определяя каждый раз сумму затрат S_1+pS_2 и выбирая из них наименьшее. Технику такого подбора рассмотрим при решении задач.

Кроме изложенного некоторой придержкой при расчете трубопроводов является вопрос о „допускаемых“ в трубопроводе скоростях движения воды.

Слишком малые скорости движения воды в трубопроводах, в особенности при наличии в воде взвешенных наносов, могут послужить причиной оседания частиц по стенкам трубопровода.

Слишком большие скорости могут уже вызывать некоторое стирание стенок водовода и в особенности требуют осторожности в связи с возможностью так называемых гидравлических ударов, при внезапном уменьшении скорости движения, например, вследствие закрытия задвижки, крана и т. п.

Вопрос этот в части детального выяснения численных значений крайних пределов скоростей, могущих быть допускаемыми при расчетах, без опасения оседания наносов или повреждения труб, далеко еще не разработан применительно к различным сочетаниям условий работы трубопровода.

В практике водопроводного дела часто пользуются данными, рекомендованными Фляманом в качестве допустимых предельных скоростей и приводимыми ниже в табл. 22 для водопроводных труб разного диаметра.

Таблица 22

Таблица допустимых предельных скоростей[1]

Диаметр *мм*	Допустимая предельная скорость *м/сек*	Расход при предельной скорости *л/сек*	Диаметр *мм*	Допустимая предельная скорость *м/сек*	Расход при предельной скорости *л/сек*
60	0,70	2	400	1,25	157
100	0,75	6	500	1,40	275
150	0,80	14	600	1,60	453
200	0,90	28	800	1,80	905
250	1,00	49	1 000	2,00	1 571
300	1,10	78	1 100	2,20	2 093

[1] Проф. И. Г. Есьман, Гидравлика, стр. 165. Изд. 1926 г.

Задача 34. Произвести гидравлический расчет трубопровода от источника водоснабжения до напорного резервуара при следующих данных:

1. Вода подается поршневым насосом с электромотором в течение 20 час. в сутки по 50 *л/сек* (вакуум насоса — 7 *м*).
2. Коэфициент полезного действия насоса $\eta_н = 0{,}85$, а электромотора $\eta_{дв} = 0{,}9$.
3. Стоимость одной тонны труб — 200 руб., а стоимость 1 *квтч* электроэнергии — 5 коп.
4. Ежегодное погашение капитальных затрат (амортизация, ремонт, процент на затраченный капитал и др.) — 10%.
5. Длина всасывающей линии 15 *м*, а нагнетательной — 3 500 *м*. Отметка центра насоса 5,75 *м*, а уровня воды в напорном резервуаре 30,75 *м*, считая от горизонта воды в колодце.

Рассчитаем отдельно всасывающую и нагнетательную линии:

Всасывающая линия. Примем скорость всасывания $v_{вс} = 1$ *м/сек*; тогда имеем $Q = 0{,}785\, d^2 v_{вс}$ или

$$d = \sqrt{\frac{Q}{0{,}785 v_{вс}}} = \sqrt{\frac{0{,}050}{0{,}785 \cdot 1}} = 0{,}252\ м.$$

Остановимся на ближайшем по сортаменту диаметре труб $d = 250$ *мм*, при котором фактическая скорость во всасывающей трубе будет 1,02 *м/сек*.

Проверим вакуум во всасывающей трубе по (258):

$$\mathrm{Vac} = z_н + (1 + \Sigma\zeta)\frac{v_{вс}^2}{2g},$$

где $\Sigma\zeta$ — сумма как путевых, так и местных коэфициентов сопротивлений во всасывающей трубе. В данном случае

$$\Sigma\zeta = \zeta_{сетки} + 3\zeta_{закр} + \zeta_{пут} = 10 + 3 \cdot 0{,}294 +$$
$$+ 0{,}022\frac{15}{0{,}25} = 12{,}20$$

(радиус закруглений принят $r = 250$ мм).

Тогда

$$\mathrm{Vac} = 5{,}75 + 13{,}20\frac{1{,}02^2}{19{,}62} = 6{,}45\ м.$$

Разрежение получилось допустимое (меньше 7 *м*) и потому на принятом размере $d = 250$ *мм* останавливаемся.

Нагнетательная линия. При расчете нагнетательной линии нужно иметь данные о весе пог. метра труб разных диаметров, для чего приводим справочную табл. 23.

Расчет нагнетательной линии проведем вначале по (263), считая трубы нормальными:

$$d = 0{,}187 \sqrt[6{,}34]{\frac{Q^3 t s_1}{p s_2 \eta}}.$$

Для условий данной задачи имеем:

$Q^3 = 50^3 = 125\,000$; $t = 20 \cdot 365 = 7\,300$ час. в год;

s_1 — стоимость 1 *л. с. ч.* $= 0{,}05 \cdot 1{,}36 = 0{,}068$ руб.;

p — согласно условию $= 0{,}10$;

$$\eta = \eta_н \cdot \eta_{дв} = 0{,}85 \cdot 0{,}90 = 0{,}765;$$

s_2 — стоимость 1 *пог. м* трубы диаметром в 1 *дцм* получим, замечая по справочной таблице, что 1 *пог. м* такой трубы с раструбом весит 23,19 *кг* и полагая по условию цену тонны в 200 руб.,

$s_2 = 200 \cdot 0{,}02319 = 4{,}638$ руб.,

тогда

$$d = 0{,}187 \sqrt[6{,}34]{\frac{125\,000 \cdot 0{,}068 \cdot 7\,300}{0{,}1 \cdot 4{,}638 \cdot 0{,}765}} = 2{,}6\ дцм = 260\ мм.$$

Таблица 23

Справочная таблица веса водопроводных чугунных труб по русскому нормальному сортаменту

Внутренний диаметр		Вес в *кг*			
		Одной трубы		1 *пог. м* трубы	
дм	*мм*	С раструбом	С фланцами	С раструбом	С фланцами
1,5	40	19,50	20,89	9,75	10,44
2	50	23,35	25,11	11,68	12,55
3	75	50,39	38,83	16,77	19,17
4	**100**	**69,57**	**73,07**	**23,19**	**24,66**
5	125	90,48	94,84	30,16	31,62
6	150	113,9	118,4	37,78	39,43
7	175	138,3	145,1	46,09	48,36
8	200	165,0	172,4	54,98	57,46
9	225	193,7	202,8	64,50	67,60
10	250	223,8	233,6	74,58	77,85
12	300	290,7	307,4	96,89	102,5
14	350	433,0	373,4	115,5	124,2
16	400	531,6	455,4	141,8	151,8
18	450	640,4	555,2	170,8	185,1
20	500	758,4	656,1	202,2	218,7
24	600	1 024	881,9	273,2	294,0
28	700	1 327	1 162	353,9	387,3
30	750	1 496	1 303	399,0	434,3
32	800	1 671	1 474	445,7	491,3
36	900	2 054	1 809	547,7	602,9
40	1 000	2 478	2 183	660,9	727,7
48	1 200	3 444	3 081	918,4	1 027

За отсутствием такого сортамента труб останавливаемся на ближайшем большем диаметре

$$d = 300\ мм.$$

Расчет нагнетательной линии подбором производим, располагая все вычисления по следующей схеме (табл. 24):

Таблица 24

d *мм*	$\frac{1\,000}{K^2}$	$h_{тр} = Q^3 L_{км}\frac{1\,000}{K^3}$	$N_2 = \frac{\gamma Q h_{пот}}{1{,}36 \cdot 75\eta}$ *квт*	$S_1 = N_2 t s_1$	$pS_2 = pLs_2\tau$	$S_1 + pS_2$
225	0,0046	40,25	25,79	9 413	4 515	13 928
250	0,0026	22,75	14,58	5 322	5 221	10 543
300	0,00098	8,57	5,49	2 004	6 782	8 786
350	0,00043	3,76	2,41	880	8 081	8 961

В этой схеме τ обозначает вес погонного метра трубы, а s_2 — стоимость единицы веса труб.

По последней колонке схемы замечаем, что экономически наивыгоднейшим диаметром будет

$$d = 300\ мм,$$

так как для условий рассматриваемой задачи как увеличение, так и уменьшение диаметра влекут за собой рост годичных затрат.

Остановившись на этом диаметре, определяем необходимую полную мощность установки:

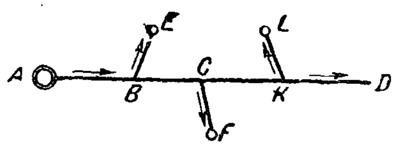
$$N=\frac{\gamma Q(z+h_{mp})}{1{,}36\cdot 75\cdot \eta}=\frac{50\,(30{,}75+0{,}65+8{,}57)}{1{,}36\cdot 75\cdot 0{,}765}=25{,}6\ \text{квт}.$$

§ 92. Расчет простых распределительных водопроводных сетей

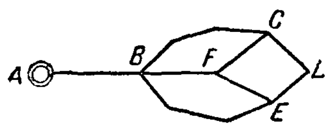
Распределительные водопроводные сети делят на:

а) разомкнутые, состоящие из главной линии — магистрали и боковых ветвей (фиг. 128), и

б) замкнутые или кольцевые, представляющие замкнутую систему водоводных линий, выходящих и сходящихся в общих точках-узлах (фиг. 129).



Фиг. 128



Фиг. 129

При расчете распределительной сети могут в основном встретиться два случая:

1) расчет новой проектируемой сети, когда отсутствует заранее обусловленный напор (отметка горизонта воды в напорном баке);

2) расчет распределительной сети с учетом уже существующего напора, что имеет место, например, при наличии готовых сооружений напорного бака или при включении новых линий в существующий водопровод.

Разомкнутая сеть. Магистральная линия сети по мере удаления от водопроводной башни имеет расход, уменьшающийся после ответвления каждой боковой линии.

Магистральная линия, следовательно, должна рассматриваться как трубопровод, состоящий из отдельных последовательно соединенных участков с определенным расходом Q_i на протяжении l_i каждого участка.

При расчете сети без заданного напора проектировщику известны: геодезические данные местности, длины отдельных участков сети и расходы в начале и конце каждого отдельного участка трубопровода.

Как уже упоминалось выше, отсутствие заданного напора делает решение вопроса неопределенным и потому при расчетах обычно исходят из положения, что трубопровод должен быть запроектирован по предельно допускаемой скорости течения воды в целях возможно большего уменьшения расчетного диаметра труб.

Если принять за основу данные о допускаемых в трубопроводах предельных скоростях, приведенные при расчете нагнетательной линии в табл. 22, то расчет магистральной линии распределительной сети сведется к весьма простой операции подбора диаметров труб для отдельных участков магистрали для заданных на этих участках расходов воды.

Если диаметры отдельных участков будут выбраны, то можно будет определить потери напора, ожидаемые на каждом из участков трубопровода,

$$h_{пут}=\frac{Q_i^2 l_i}{K_i^2},$$

а также и весь необходимый напор H — как сумму потерь напора по всей длине магистрали:

$$H=\Sigma h_{пут}=\Sigma\frac{Q_i^2 l_i}{K_i^2}.$$

Для случая расчета магистрали, включаемой в уже существующую сеть, с определенным напором в начале проектируемой линии, приведенные выше соображения полностью не могут быть применены.

В этом случае проектировщик располагает для всей магистрали определенным напором и, следовательно, связан некоторым средним пьезометрическим уклоном всей линии

$$I_{ср}=\frac{H}{\Sigma l_i}.$$

На каждом участке магистрали для пропуска заданного расхода при пьезометрическом уклоне $I_{ср}$ нужны трубы с расходной характеристикой K, определяемой соотношением

$$K_i^2=\frac{Q_i^2}{I_{ср}}.$$

Каждому найденному значению пропускной характеристики соответствует и определенный диаметр труб на каждом участке магистрали.

Но среди выпускаемых заводами стандартных сортаментов труб может не быть таких диаметров, которые соответствуют значению K_i, и практически, при обращении к таблице расходных характеристик, в последней будем иметь два значения K, ближайших по величине к нужной K_i, причем одно из них $K_1<K_i$ и соответствует $d_1<d_i$ и второе $K_2>K_i$ и соответствует $d_2>d_i$.

Если на всех участках магистральной линии принять трубы с $K_1<K_i$, то при этом мы будем иметь наименьший расход металла на трубы, но заданного напора H нехватит для преодоления потерь в трубопроводе.

Если же на всех участках остановиться на трубах с $K_2>K_i$, то имеющегося напора H

вполне хватит (часть его останется неиспользованной), но так как на всех участках диаметры труб будут с запасом, то расход металла будет излишне велик.

Очевидно, что практически решение вопроса должно сводиться к назначению диаметра труб на одних участках с $K_1 < K_i$, а на других с $K_2 > K_i$, но так, чтобы в общем итоге иметь вариант, при котором максимально используется имеющийся напор с минимальной затратой металла на трубы.

Можно считать, что количество металла на трубы примерно пропорционально произведению диаметра трубы на ее длину (Ld), и тогда можно говорить, что проектирование должно быть проведено с соблюдением двух условий:

$$\Sigma \frac{Q_i^2 L_i}{K_i^2} \leqslant H$$

и

$$\Sigma L_i d_i = \min.$$

Практическое проведение расчета с соблюдением поставленных условий рассмотрим ниже при решении конкретных задач.

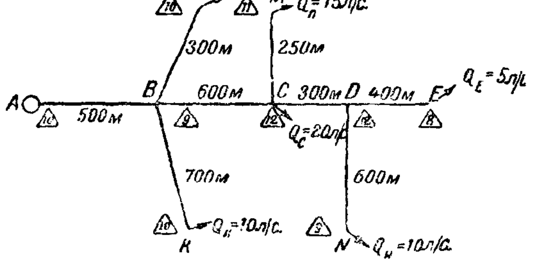
При законченном расчете магистральной линии (независимо от рассмотренных выше двух случаев) будет известен не только напор в начальной точке магистральной линии, но и потери напора на каждом из отдельных ее участков.

В местах ответвления боковой линии от магистрали (точки B, C, K фиг. 128) напор будет равен начальному напору $H_{нач}$ за вычетом суммы потерь напора на отдельных участках магистрали, предшествующих данному ответвлению.

При расчете отдельной ветви, отходящей от данной точки магистрали, следовательно, вопрос будет сводиться к определению диаметра труб при заданной длине ветви L, расходе через нее Q, напоре $H_{нач}$ в начале ветви на магистрали и остаточном напоре $H_{кон}$ в конце ветви.

Такой расчет не представляет затруднений и был уже нами рассмотрен выше при решении задач.

Задача 35. Рассчитать диаметры новой разомкнутой распределительной сети согласно данным фиг. 130 при условии сохранения в концах всех линий свободного напора $\geqslant 5$ *м*.



Фиг. 130

Трубы нормальные. Цифры в треугольниках обозначают гипсометрические отметки точек трубопровода.

Определяем, какие расходы должны пропускаться через отдельные участки трубопровода, считая для удобства подсчетов с конца магистрали; применительно к этим расходам по таблице предельных скоростей назначаем диаметры труб отдельных участков; подсчитываем величины потерь напора на отдельных участках и напоры в местах ответвлений.

Вычисления располагаем по такой схеме (табл. 25):

Таблица 25

Точки	Участки магистрали	L *км*	Q *л/сек*	d *мм*	$\frac{1\,000}{K^2}$	$h_{пут}$ *м*	Отметки точек пьезометрической линии
A	AB	0,5	65	300	0,00098	2,09	25,22
B	BC	0,6	50	250	0,0026	3,90	23,13
C	CD	0,3	15	150	0,040	2,70	19,23
D	DE	0,4	5	100	0,353	3,53	16,53
E							13,00

Колонка значений отметок пьезометрической линии получена из расчета, что отметка пьезометрической линии в конечном пункте E должна быть равна $8+5=13$ *м* (8 *м* — отметка точки E и 5 *м* — свободный напор в конце по условию задачи), а остальные отметки возрастают на величину потерянного напора на последующем участке.

Напор в начальной точке A, или, иначе говоря, гидравлически необходимая высота сооружения $H_A = 25{,}22 - 10 = 15{,}22$ *м*.

Расчет ветвей проведем по следующей схеме (табл. 26):

Таблица 26

Ветви	L *м*	Q *л/сек*	Отметки точек пьезометрической линии, *м*: начала	конца	$h_{пут}$ *м*	$I=\frac{h_{пут}}{L}$	$\frac{K_i^2}{1\,000}$ *л/сек*	d_i *мм*
1	2	3	4	5	6	7	8	9
BF	300	5	23,13	15	8,13	0,0271	0,922	100
BK	700	10	23,13	15	8,13	0,0116	8,621	125
CM	250	15	19,23	16	3,23	0,0129	17,442	150
DN	600	10	16,53	14	2,53	0,0042	23,809	150

Значения d_i в колонке 9 записаны как соответствующие ближайшим большим величинам $\frac{K^2}{1\,000}$ по таблице расходных характеристик труб.

При этом, конечно, фактические потери напора на ветках будут несколько меньше значений колонки 6 и потому свободный напор в концах веток будет больше 5 *м*.

Если бы по условию задачи была необходимость дать свободный напор ровно в 5 *м*, то пришлось бы прибегнуть к составлению ветки из двух последовательно соединенных участков труб с разными диаметрами применительно к уравнению (249).

Задача 36. Рассчитать диаметры разомкнутой распределительной сети по данным задачи 35 и фиг. 130 при дополнительном условии, что в начальной точке сети имеется водонапорный бак с горизонтом воды в нем на отметке 22 *м*.

Согласно условию отметка пьезометрической линии в начальной точке *A* равна 22 *м*, а в конечной точке *E* соответственно 13 *м*.

На протяжении всего трубопровода *AE* длиной $\sum L = 1\,800$ *м* имеем возможность использовать напор $H = 22 - 13 = 9$ *м*, что дает средний пьезометрический уклон

$$I_{cp} = \frac{H}{\sum L} = \frac{9}{1\,800} = 0{,}005.$$

Применительно к полученному пьезометрическому уклону определяем расходную характеристику труб для отдельных участков магистрали в зависимости от расхода воды на участке по формуле

$$K_i^2 = \frac{Q_i^2}{I_{cp}}.$$

Далее выбираем из таблицы расходных характеристик труб ближайшие бо́льшие и меньшие значения *K* и вычисляем потери напора на каждом участке для обоих взятых из таблиц значений *K*.

Вычисления проводим по следующей схеме (табл. 27):

Таблица 27

Участки	L_i	Q *л/сек*	Q_i^2	$\frac{1\,000}{K^2}$	Данные для стандартных расходных характеристик					
					ближайшие меньшие			ближайшие большие		
					$\frac{1\,000}{K_i^2}$	d'_i	$h'_{пут}$	$\frac{1\,000}{K_i^2}$	d''_i	$h''_{пут}$
AB	0,5	65	4 225	0,0012	0,0026	250	5,49	0,00098	300	2,07
BC	0,6	50	2 500	0,0020	0,0026	250	3,90	0,00098	300	1,47
CD	0,3	15	225	0,0222	0,0400	150	2,70	0,0175	175	1,18
DE	0,4	5	25	0,2000	0,353	100	3,53	0,105	125	1,05

На каждом участке магистрали мы имеем возможность брать одно из двух значений диаметра *d'* или *d''*, зная, что потери на участке будут при этом равны вычисленным значениям $h'_{пут}$ или соответственно $h''_{пут}$.

Для выбора более удачного варианта составляем все возможные комбинации различных диаметров.

Если число отдельных участков обозначим через *n*, то, имея на каждом из них выбор из двух значений диаметра, общее количество всех комбинаций будет $2n$.

Для условий рассматриваемой задачи можно составить комбинации, которые сведены в табл. 28.

Таблица 28

№ по пор.	Диаметры участков				Потери напора на участках				$\sum h_{пут}$
	AB	*BC*	*CD*	*DE*	*AB*	*BC*	*CD*	*DE*	
1	250	250	150	100	5,49	3,90	2,70	3,53	15,62
2	300	250	150	100	2,07	3,90	2,70	3,53	12,20
3	250	300	150	100	5,49	1,47	2,70	3,53	13,19
4	250	250	175	100	5,49	3,90	1,18	3,53	14,10
5	250	250	150	125	5,49	3,90	2,70	1,05	13,14
6	300	250	150	100	2,07	1,47	2,70	3,53	9,77
7	300	250	175	100	2,07	3,90	1,18	3,53	10,68
8	300	250	150	125	2,07	3,90	2,70	1,05	9,72
9	250	300	175	100	5,49	1,47	1,18	3,53	11,67
10	250	300	150	125	5,49	1,47	2,70	1,05	10,71
11	250	250	175	125	5,49	3,90	1,18	1,05	11,62
12	300	300	175	150	2,07	1,47	1,18	3,53	8,25
13	300	300	150	125	2,07	1,47	2,70	1,05	7,29
14	300	250	175	125	2,07	3,90	1,18	1,05	8,20
15	250	300	175	125	5,49	1,47	1,18	1,05	9,19
16	300	300	175	125	2,07	1,47	1,18	1,05	5,77

Рассматривая все варианты по сумме потерь напора, замечаем, что приемлемыми являются только № 12, 13, 14 и 16, а все остальные отпадают, как требующие напора большего, чем мы располагаем ($\sum h_{пут} > 9$ *м*).

Из отмеченных четырех вариантов, приемлемых по $\sum h_{пут}$, на первом месте по полноте использования имеющегося напора стоит вариант № 12.

Прежде чем остановиться окончательно на одном из вариантов, посмотрим их показатели в части затраты материала на трубы.

Имеем (табл. 29):

Таблица 29

№ вариантов	Участки магистрали								$\sum Ld$
	AB		*BC*		*CD*		*DE*		
	L	*d*	*L*	*d*	*L*	*d*	*L*	*d*	
12	500	300	600	300	300	175	400	100	422 500
13	500	300	600	300	300	150	400	125	425 000
14	500	300	600	250	300	175	400	125	402 500
16	500	300	600	300	300	175	400	125	432 500

Отсюда заключаем, что по второму признаку выделяется вариант № 14.

Выбор между вариантами № 12 и 14 можно будет сделать лишь на основе расчета веток применительно к обоим вариантам. Для этого установим отметки пьезометрической линии по магистрали для обоих вариантов (табл. 30).

Таблица 30

Точки	Участки	Потери напора на участках при вариантах		Отметки точек пьезометрической линии при вариантах	
		№ 12	№ 14	№ 12	№ 14
A				22,00	22,00
	AB	2,07	2,07		
B				19,93	19,93
	BC	1,47	3,90		
C				18,46	16,03
	CD	1,18	1,18		
D				17,28	14,85
	DE	3,53	1,05		
E				13,75	13,80
		8,25	8,20		

Расчет боковых ветвей проведем по следующей схеме (табл. 31 и 32):

Таблица 31

К варианту № 12

Ветви	*L* *м*	*Q* *л/сек*	Пьезометрические отметки ветви		*H* *м*	$\frac{1}{I} = \frac{L}{H}$	$\frac{K^2}{1\,000}$	*d*	*Ld*
			начала	конца					
BF	300	5	19,93	15	4,93	60,85	1,521	100	30 000
BK	700	10	19,93	15	4,93	141,99	14,199	150	105 000
CM	250	15	18,46	16	2,46	101,63	22,867	150	37 500
DN	600	10	17,28	14	3,28	182,93	18,293	150	90 000
									262 500

Таблица 32

К варианту № 14

Ветви	L м	Q л/сек	Пьезометрические отметки ветви: начала	конца	H м	$\frac{1}{I}=\frac{L}{H}$	$\frac{K^2}{1000}$	d	Ld
BF	300	5	19,93	15	4,93	60,85	1,521	100	30 000
BK	700	10	19,93	15	4,93	141,99	14,199	150	105 000
CM	250	15	16,03	16	0,03	8 333,33	1 875,0	350	87 500
DN	600	10	14,85	14	0,85	705,88	70,588	200	120 000
									342 500

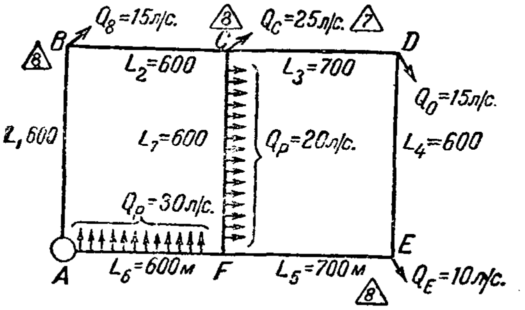
Сравним теперь общую сумму членов Ld как по магистрали, так и веткам. Находим:

для варианта № 12 $\sum Ld = 422\,500 + 262\,500 = 685\,000$,

» » № 14 $\sum Ld = 402\,500 + 342\,500 = 745\,000$,

откуда и делаем окончательное заключение в пользу варианта № 12, который и должен быть принят, тем более что при варианте № 14 ветвь CM получается по существу необеспеченной напором.

Замкнутая или кольцевая сеть (фиг. 131) в плане представляет собой ряд многоугольников (колец), по периметру которых в том или ином направлении (последовательно или встречно) могут подаваться те или иные расходы.



Фиг. 131

В практике водопроводного дела замкнутые сети имеют большое распространение, в особенности потому, что замкнутая сеть позволяет в случае необходимости выключать отдельные ее участки (для ремонта и других целей), не нарушая подачи воды в остальную сеть.

Расчет замкнутых сетей рассмотрим для случая проектирования новой сети, когда известны длины отдельных линий, расходы воды по всем участкам и направление движения. Последнее назначается из соображений большей равномерности в нагрузке отдельных линий, из учета запросов района проложения линий и т. д.

Сущность расчета замкнутой сети при упомянутых условиях заключается в следующем:

1. Наметив направления расходов по разным линиям, выбираем звено трубопровода от напорного бака с одинаковым направлением движения (до места встречного расхода), рассматриваем его как магистральную линию разомкнутого трубопровода и проводим расчет приведенными выше приемами.

При этом будут получены отметки пьезометрической линии в узловых точках.

2. Остальные звенья сети будут представлять собой (после расчета выбранной магистрали) линии водопровода с известными концевыми напорами, длинами и расходами, расчет которых не представляет особых трудностей.

При этом следует помнить, что пьезометрические линии разных звеньев должны в пунктах встречи противоположных направлений движения пересекаться в общей точке, т. е. вода должна подходить к узловой точке с разных сторон с одинаковым (примерно) остаточным напором.

Рассмотрим технику гидравлической части расчета на следующих задачах.

Задача 37. Определить диаметры отдельных участков замкнутой сети. Длины участков в метрах, расходы в *л/сек* и отметки в метрах даны на фиг. 131.

Давление в начальной точке A равно 3 *ат*, минимальное давление в концевых пунктах требуется 20 *м*.

Возьмем наиболее удаленную от A точку D и в ней мысленно разомкнем сеть. Будем считать направление тока воды от A в двух направлениях: по $ABCD$ и $AFED$, причем расход, необходимый в точке D (15 *л/сек*), будем подводить по CD — 10 *л/сек* и по ED — 5 *л/сек*.

Что же касается расхода для непрерывной раздачи по FC, то будем считать, что целесообразнее его направить по ближайшему пути, т. е. по направлению AFC.

Наметив таким образом направление движения воды, будем иметь следующие расходы на отдельных участках (табл. 33):

Таблица 33

№ участков	1	2	3	4	5	6	7	Примечание
Название участка	AB	BC	CD	ED	FE	AF	FC	
Расход	50	35	10	5	15	35+(30)	(20)	Расходы, непрерывно раздаваемые по пути, показаны в скобках

Рассчитываем линию $ABCD$ как разомкнутую магистраль, полагая отметку пьезолинии в точке $A = 10 + 30 = 40$ *м* и в точке $D = 7 + 20 = 27$ *м*, т. е. располагая напором $H = 40 - 27 = 13$ *м* на линии $ABCD$ длиной $L = 1\,900$ *м* (табл. 34).

Таблица 34

Участки	L км	Q л/сек	Q^2	$\frac{1000}{K^2}$	Данные для стандартных диаметров: Ближайшие меньшие: $\frac{1000}{K_1^2}$	d_1	$h_{пут}$	Ближайшие большие: $\frac{1000}{K^2}$	d_2	$h_{пут}$
AB	0,6	50	2500	0,0027	0,0027	250	4,05	0,0027	250	4,05
BC	0,6	35	1225	0,0055	0,0086	200	6,32	0,0027	250	1,98
CD	0,7	10	100	0,0684	0,105	125	7,35	0,040	150	2,80
							17,72			8,83

Составляем варианты (табл. 35):

Таблица 35

№ по пор.	Диаметры участков			Потери напора на участках			Σh_{nym}
	AB	*BC*	*CD*	*AB*	*BC*	*CD*	
1	250	200	125	4,05	6,32	7,35	17,72
2	250	250	125	4,05	1,98	7,35	13,38
3	250	200	150	4,05	6,32	2,80	13,17
4	250	250	150	4,05	1,98	2,80	8,83

Приемлемым является только один 4-й вариант с потерей напора в 8,83 *м*. При этом пьезометрические отметки в характерных точках будут равны:

1) в точке A . . . . . . $z_A + H_A = 10 + 30 = 40$ *м*

2) в точке B . . . . . . $z_B + H_B = 40 - 4{,}05 = 35{,}95$ *м*

3) в точке C . . . . . . $z_C + H_C = 35{,}95 - 1{,}98 = 33{,}97$ *м*

4) в точке D . . . . . . $z_D + H_D = 33{,}97 - 2{,}80 = 31{,}17$ *м*

Свободный напор в точке D будет $31{,}17 - 7 = 24{,}17$ *м*, что не противоречит условию задачи $24{,}17 > 20$.

Перейдем к расчету линии $AFED$ длиной $L = 1\,900$ *м*. Имея уже определившиеся концевые отметки пьезолинии, необходимо вести расчет с общим пьезометрическим уклоном:

$$I_{cp} = \frac{40 - 31{,}17}{1\,900} = 0{,}004647$$

и потерей напора

$$\Sigma h_{nym} = 8{,}83 \text{ м}.$$

На линии $AFED$ участок AF несет смешанный расход, а именно транзитом $Q_m = 35$ *л/сек* и с непрерывной раздачей $Q_p = 30$ *л/сек*. Расходную характеристику труб и потерю напора участка AF нужно рассчитать по (256) в виде

$$K^2 = \frac{Q_m^2}{I}\Psi\left(\frac{Q_p}{Q_m}\right) = \frac{35^2}{0{,}004647}\,2{,}1 = 553\,583,$$

$$h_{nym} = \frac{L}{K^2}Q^2_m\Psi\left(\frac{Q_p}{Q_m}\right).$$

Остальные участки не требуют особых замечаний.

Имеем (табл. 36):

Таблица 36

Участки	L *км*	Q *л/сек*	$Q^2\Psi\left(\frac{Q_p}{Q_m}\right)$	$\frac{1\,000}{K^2}$	Данные стандартных диаметров: Ближайшие меньшие: $\frac{1\,000}{K_1^2}$	d_1	h_{nym}	Ближайшие большие: $\frac{1\,000}{K^2_2}$	d_2	h_{nym}
AF	0,6	35+30	2 572,5	0,00181	0,0026	250	4,01	0,000981	300	1,51
FE	0,7	15	225	0,0207	0,040	150	6,30	0,0175	175	2,76
ED	0,6	5	25	0,186	0,353	100	0,30	0,105	125	1,58
							15,61			5,65

Составляем возможные комбинации (табл. 37):

Таблица 37

№ по пор.	Диаметры участков			Потери напора на участках			Σh_{nym}
	AF	*FE*	*ED*	*AF*	*FE*	*ED*	
1	250	150	100	4,01	6,30	5,30	15,61
2	300	150	100	1,51	6,30	5,30	13,11
3	250	175	100	4,01	2,76	5,30	12,07
4	250	150	125	4,01	6,30	1,58	11,89
5	300	175	100	1,51	2,76	5,30	9,57
6	300	150	125	1,51	6,30	1,58	9,39
7	250	175	125	4,01	2,76	1,58	8,35
8	300	175	125	1,51	2,76	1,58	5,65

Чтобы получить совпадение остаточных напоров в точке D по обоим направлениям, необходимо остановиться на варианте № 7, как дающем $\Sigma h_{nym} = 8{,}35$ *м*, ближайшем к нужной нам $\Sigma h_{nym} = 8{,}83$ *м*.

Расхождение $8{,}83 - 8{,}35 = 0{,}48$ *м* можно уничтожить, увеличив потери напора на одном из участков (хотя в данном случае разностью 0,48 *м* по малости можно бы и пренебречь).

Увеличение потерь можно получить хотя бы на участке ED, сделав его составным, т. е. уложив его трубами двух диаметров: на протяжении l *м* с $d_1 = 125$ *мм* и на остальном протяжении $(L - l)$ *м* с $d_2 = 100$ *мм*, причем протяжение отдельных диаметров найдем по (249), задаваясь потерей напора на участке $h_{nym} = 1{,}58 + 0{,}48 = 2{,}06$ *м*.

Имеем

$$2{,}06 = 25\left(\frac{l}{9{,}49\cdot10^3} + \frac{600 - l}{2{,}83\cdot10^3}\right),$$

откуда

$$l = 523 \text{ м с } d_1 = 125 \text{ мм},$$
$$L - l = 77 \text{ м с } d_2 = 100 \text{ мм}.$$

Наконец, переходим к расчету последней линии — поперечной FC, исходя из пьезометрических отметок концов ее. В точке F отметка пьезометрической линии равна $30 + 10 - 4{,}01 = 35{,}99$ *м*; для точки C нами ранее уже было установлено $Z_c + H_c = 33{,}97$ *м*.

Таким образом на линии FC мы располагаем и должны использовать напор $(H_F + Z_F) - (H_C + Z_C) = 2{,}02$ *м*; иначе говоря, линия FC должна быть запроектирована с пьезометрическим уклоном $I = \frac{2{,}02}{600} = 0{,}003367$.

На линии FC имеем только непрерывную раздачу $Q_p = 20$ *л/сек*.

Применяя уравнение (253), получим

$$2{,}02 = \frac{1}{3}\,\frac{20^2\cdot600}{K^2},$$

откуда найдем

$$\frac{K^2}{1\,000} = 39{,}6.$$

Обращаясь к справочной таблице расходных характеристик труб, замечаем, что среди стандартных размеров имеются трубы с характеристиками

$$\frac{K_1^2}{1\,000} = 25 < 39{,}6, \text{ соответствующее } d_1 = 150 \text{ мм}$$

и

$$\frac{K_2^2}{1\,000} = 57 > 39{,}6, \text{ соответствующее } d_2 = 175 \text{ мм}.$$

Чтобы полностью использовать напор 2,02 *м*, проектируем линию состоящей из l *м* труб с $d = 175$ *мм* и $(600 - l)$ метров с $d = 150$ *мм*.

На протяжении l *м* отрезка линии FC (считая от F) имеем непрерывную раздачу, и кроме того через этот же участок транзитом проходит расход для последующей непрерывной раздачи на остатке линии $L - l$.

Тогда по (257) и (253) потеря напора по FC выразится в виде

$$H = \frac{l}{K_2^2}\left[\frac{Q_p(L - l)}{L} + 0{,}55\frac{Q_p l}{L}\right]^2 + \frac{1}{3}\left[\frac{Q_p(L - l)}{L}\right]^2\frac{L - l}{K_1^2}$$

или, подставляя численные значения,

$$2{,}02 = \frac{l}{57\cdot10^3}\left[\frac{20(600 - l)}{600} + 0{,}5\frac{20\cdot l}{600}\right]^2 + \frac{1}{3}\left[\frac{20(600 - l)}{600}\right]^2\frac{600 - l}{25\cdot10^3}.$$

Решая это уравнение, получим

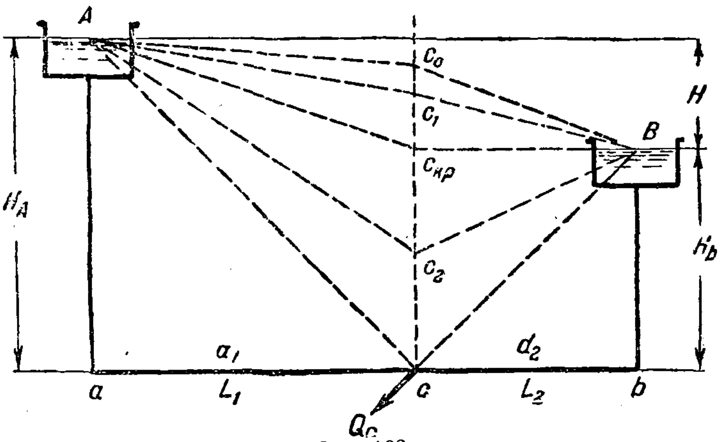
$$l = 178 \text{ м с } d_2 = 175 \text{ мм},$$
$$L - l = 600 - 178 = 422 \text{ м с } d_1 = 150 \text{ мм}.$$

§ 93. Уравнительные баки в сети. Гидравлическая сторона вопроса

Всякая водопроводная сеть рассчитывается, как мы видели выше, на некоторый средний секундный расход. Между тем фактически водоразбор отличается от принятого среднего расчетного, поднимаясь в определенные периоды дня до некоторого максимума и достигая минимума в другие часы. Для выравнивания расхода применяются уравнительные баки. Схематически задачу уравнительного бака можно характеризовать таким образом: в часы минимального водоразбора из сети излишки поступающей в нее воды подаются в уравнительный бак, который в период максимального водоразбора в свою очередь будет обратно отдавать ее в сеть.

Не ставя своей задачей детальный расчет уравнительных баков водопроводной сети, рассматриваемый в специальных курсах водоснабжения, остановимся лишь на гидравлической стороне основной сущности вопроса.

Пусть имеем два резервуара A и B (фиг. 132),



Фиг. 132

соединенных между собой трубопроводом, из которого в точке C происходит водоразбор в количестве Q_C, изменяющемся во времени.

При отсутствии водоразбора из C (т. е. при $Q_C = 0$) вода из бака A под рабочим напором $H = H_A - H_B$ питает бак B и движение ее в это время характеризуется пьезометрической линией AC_0B.

Поступление воды в бак B из A происходит в количестве

$$Q = \sqrt{\frac{H_A - H_B}{\Sigma \frac{L}{K^2}}}. \tag{264}$$

Начнем теперь водоразбор из точки C. По мере увеличения расхода Q_C растут потери напора на участке AC, ввиду чего уменьшается остаточный напор в точке C и опускается над ней положение пьезометрической линии.

При некотором расходе (который обозначим $Q_{C(кр)}$ и назовем «критическим») сумма потерь напора на участках от A до C достигнет величины $H_A - H_B$ и положение пьезометрической линии над точкой C окажется в один уровень с баком B (линия $AC_{кр}B$) и, следовательно, прекратится движение воды по участку BC за отсутствием свободного напора.

При водоразборе из точки C расхода $Q = Q_{C(кр)}$ бак B совершенно не участвует: он не получает ничего из сети и не подает в сеть. В точке C весь расход происходит за счет подачи из A.

Численное значение «критического» расхода, при котором нейтрализуется бак B, определится на основе изложенного как

$$Q_{C(кр)} = \sqrt{\frac{H_A - H_B}{\Sigma_A^C \frac{L}{K^2}}}. \tag{265}$$

При всяком расходе $Q_C < Q_{C\,кр)}$ потери напора на участке AC будут меньше, чем $H_A - H_B$, остаточный напор в точке C будет $H_C > H_B$ и пьезометрическая линия занимает положение, промежуточное между AC_0B и $AC_{кр}B$.

Резервуар A при этом, очевидно, питает не только точку C, но и бак B, т. е.

$$Q_A = Q_C + Q_B.$$

Аналогично при расходах $Q_C > Q_{C(кр)}$ пьезометрическая линия примет положение типа AC_2B, из которого видно, что ток жидкости должен происходить в направлениях к точке C как со стороны A, так и со стороны B.

Точка C питается из обоих резервуаров, так что

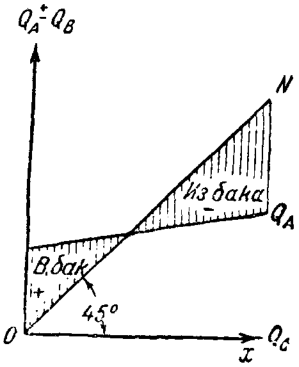
$$Q_C = Q_A + Q_B = K_1 \sqrt{\frac{H_A - H_C}{L_1}} + K_2 \sqrt{\frac{H_B - H_C}{L_2}}.$$

Возможный забор воды из точки C достигнет своего максимума при использовании полностью всего напора обоих баков по отношению к месту выхода, что будет иметь место при свободном истечении воды при точке C в атмосферу.

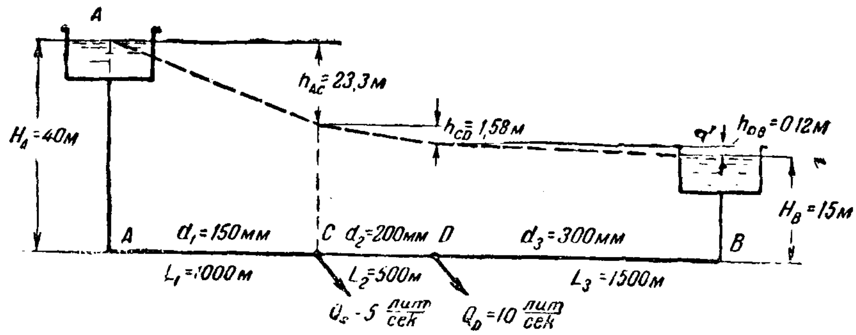
Максимальный расход в C будет характеризоваться положением пьезометрической линии ACB и работой участка AC под напором H_A, а участка BC под напором H_B.

При этом

$$Q_{C(\max)} = K_1 \sqrt{\frac{H_A}{L_1}} + K_2 \sqrt{\frac{H_B}{L_2}}. \tag{266}$$



Фиг. 133



Фиг. 134

Ход рассмотренного явления графически можно изобразить диаграммой, изображенной на фиг. 133.

По оси абсцисс откладываем значения Q_C, а по оси ординат значения $Q_A \pm Q_B$. Линия ON, проведенная из начала координат под углом 45°, будет, очевидно, линией Q_C, как отвечающая условию $Q_C = Q_A \pm Q_B$.

Откладывая значение только Q_A по OY применительно к разным значениям Q_C по OX, получим кривую Q_A.

Разности ординат обеих проведенных линий дают непосредственно значения Q_B. Последнее в точке пересечения обеих линий равно нулю, и эта точка соответствует названному выше «критическому» расходу.

Разности ординат вправо от пересечения показывают расход из бака B в точке C, а влево — поступление в B.

Для построения диаграммы достаточно вычислить значения Q_A для нескольких значений Q_C (скажем для $Q_C=0$; $Q_C=Q_{C(кр)}$; $Q_C=Q_{C(\max)}$).

При достаточном масштабе диаграммы распределение расходов между баками A и B возможно определять графически.

Задача 38. Резервуары A и B соединены трубопроводом $ACDB$ с водоразбором в двух точках C и D. Определить направление течения в трубах, характер работы баков и давления в точках C и D, если $Q_C = 5$ *л/сек*, а $Q_D = 10$ *л/сек*.

Размеры системы показаны на фиг. 134. Трубы — нормальные.

Допустим временно, что за точкой D последний участок с баком B выключен, и посмотрим, с каким напором H_D приходила бы вода к точке D со стороны первого бака:

$$H_D = H_A - h_{AC} - h_{CD}.$$

Так как при сделанном предположении по участку AC проходит расход $Q_1 = Q_C + Q_D = 5 + 10 = 15$ *л/сек*, то при показанных на чертеже размерах труб на этом участке будет потерян напор

$$h_{AC} = Q_1^2 \frac{L_1}{K_1^2} = 15^2 \frac{1\,000}{25\,090} = 9 \text{ м},$$

аналогично

$$h_{CD} = Q_D^2 \frac{L_2}{K_2^2} = 10^2 \frac{500}{116\,400} = 0,43 \text{ м}.$$

Напор в точке D получился больше, чем встречный со стороны бака B ($30,57 > 15$), и поэтому можем утверждать, что и при свободном включении последнего участка будет налицо ток воды от D дальше в бак B, с некоторым расходом Q_B.

Величину поступления в бак B определим, исходя из соображения, что на всем трубопроводе имеется напор $H_A - H_B = 40 - 15 = 25$ *м*, который затрачивается на подачу расходов:

1) $Q_C + Q_D + Q_B = (15 + Q_B)$ на участке AC;
2) $Q_D + Q_B = (10 + Q_B)$ на участке CD;
3) Q_B на участке DB.

Уравнение потери напора на всем трубопроводе будет

$$H = (15 + Q_B)^2 \frac{L_1}{K_1^2} + (10 + Q_B)^2 \frac{L_2}{K_2^2} + Q_B^2 \frac{L_3}{K_3^2},$$

что дает в числах

$$25 = (15 + Q_B)^2 \frac{1\,000}{25\,090} + (10 + Q_B)^2 \frac{500}{116\,400} + Q_B^2 \frac{500}{1\,011 \cdot 10^3}$$

или окончательно

$$Q_B^2 + 28,1 Q_B - 340 = 0,$$

откуда

$$Q_B \approx 9,13 \text{ л/сек}.$$

Потери напора на разных участках будут

$$h_{AC} = Q_1^2 L_1 \frac{1\,000}{K^2} = 24,13^2 \cdot 1 \cdot 0,04 = 23,3 \text{ м}.$$

$$h_{CD} = Q_2^2 L_2 \frac{1\,000}{K_2^2} = 19,13^2 \cdot 9,5 \cdot 0,0086 = 1,58 \text{ м}.$$

$$h_{DB} = Q_3^2 L_3 \frac{1\,000}{K_3^2} = 9,13^2 \cdot 1,5 \cdot 0,00098 = 0,12 \text{ м}.$$

При этом $\Sigma h_{пут} = 25,00$ *м*, откуда узнаем давления:

в точке C $H_C = 40 - 23,30 = 16,70$ *м*

» » D $H_D = 16,70 - 1,58 = 15,12$ *м*

9*

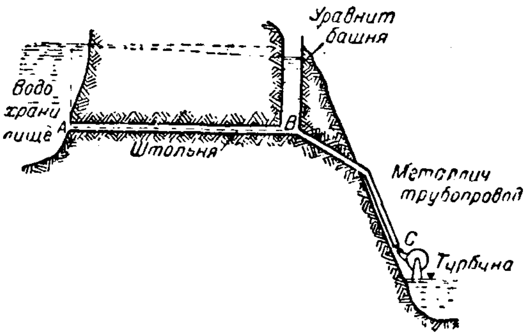
НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ В ТРУБОПРОВОДАХ

§ 94. Постановка вопроса

Неустановившимся движением жидкости, как уже отмечалось, называется движение, при котором гидравлические элементы в заданной точке пространства, заполненного жидкостью,— скорости, давления и пр., зависят не только от координат самой точки x, y, z, но и от времени t, т. е. являются функциями четырех независимых переменных: x, y, z, t.

Как и в случае установившегося движения, различают: напорное и безнапорное неустановившееся движение, одно- и двухразмерное, т. е. линейное и плоское и, наконец, пространственное движение (трехразмерное), которое обычно редко приходится встречать в условиях работы искусственных гидросооружений.

Примером неустановившегося напорного одноразмерного движения может служить движение ударной волны в трубопроводе гидростанции при регулировании работы турбин, их пуске и остановке, а также колебательные движения жидкости в системе: штольня-уравнительная башня (фиг. 135). Движение волн попусков в подводящих и отводящих каналах гидростанций во время регулирования тех же турбин служит примером плоского безнапорного неустановившегося движения. Наконец, движением тех же волн попусков на закруглениях каналов можно иллюстрировать неустановившееся движение в пространстве.



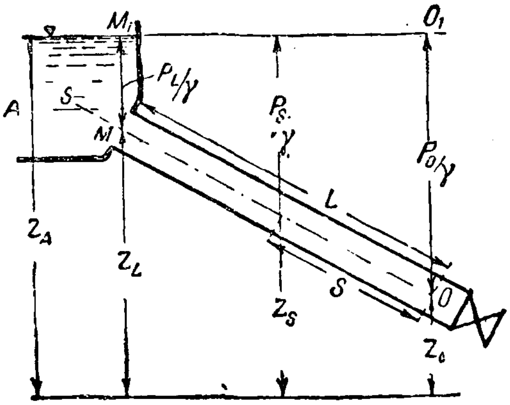
Фиг. 135

Неустановившееся движение жидкости в напорных системах требует в некоторых случаях учета упругих свойств как самой жидкости, так и стенок трубопроводов.

Известно, например, что всякое резкое изменение расхода в трубопроводе (при быстром закрытии задвижек или внезапной остановке турбин) сопровождается рядом чередующихся повышений и понижений давления внутри жидкости, действующих в виде ударов на стенки трубопровода. Это явление называется «гидравлическим ударом» и может быть обнаружено непосредственно по глухому звуку и по сотрясению трубы.

Явление удара менее резко сказывается при коротких трубопроводах, при достаточно медленном регулировании турбин, при наличии резервуара, аккумулирующего жидкость при уменьшении расхода воды по подводящим трубопроводам гидростанции и, наоборот, питающего последние при увеличении расхода воды по ним.

Ту или иную степень действия упругих сил наглядно иллюстрирует типичная схема гидроустановки, представленная на фиг. 135. Напорная штольня AB, примыкающая непосредственно к питающему резервуару (водохранилище), переходит в металлический трубопровод (один или несколько), подводящий воду к турбинам. Весь напор, образованный разностью уровней в водо-



Фиг. 136

хранилище и отводящем канале гидростанции, за исключением потерь в штольне и трубопроводе, используется турбинами. При большой длине такой напорной системы, в месте перехода от штольни к трубопроводу обычно устраивается так называемая уравнительная башня, представляющая по сути дела огромный пьезометр, уровень которого соответствует давлению в точке B.

Изменение расхода в рассматриваемой системе будет различным образом сказываться на отдельных частях этой системы.

В металлическом трубопроводе эти изменения распространяются почти мгновенно и сопровождаются резким изменением давления в жидкости. Как скорость распространения, так и изменение величины самого давления тесно связаны с упругими свойствами жидкости и материала стенок трубы.

В штольне картина получается совершенно иная: в случае уменьшения или увеличения расхода на турбине движение в штольне в первые моменты остается прежним, так как в случае уменьшения излишний расход, идущий по штольне, поступает в уравнительную башню, а в случае увеличения, наоборот, башня питает трубопровод и, таким образом, резкое изменение режима в штольне устраняется. Практически явление будет развиваться так, что упругостью жидкости и материала стенок штольни можно при расчете пренебречь.

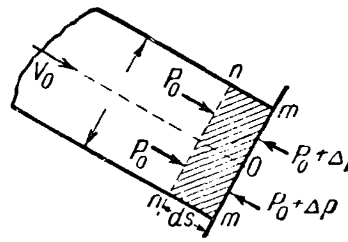
Отмеченные выше особые свойства неустановившегося движения в напорных системах определяют и характер возникающего при этом действия сил трения. Явление гидравлического удара характеризуется большими скоростями распространения и большими величинами удара, периоды колебаний давления составляют доли секунды и практически действием сил трения на протяжении столь коротких промежутков времени можно пренебречь. При неустановившемся движении в штольне, когда явления развиваются значительно медленнее, влиянием сил трения пренебрегать без значительных погрешностей уже нельзя.

А. НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ УПРУГОЙ ЖИДКОСТИ В УПРУГИХ ТРУБОПРОВОДАХ (ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ УДАР)

§ 95. Предварительный анализ явлений при внезапной остановке трубопровода

Ограничимся случаем цилиндрического трубопровода и положим в основу анализа схему на фиг. 136, на которой представлен цилиндрический трубопровод MO длиной L, питающийся из резервуара A и снабженный на конце затвором (клапан, задвижка, направляющий аппарат турбины и т. п.). В точке O перед затвором поместим начало отсчета расстояний s вдоль оси трубы по направлению к резервуару, т. е. от точки O к точке M. Пусть размеры резервуара таковы, что уровень в нем будет постоянным независимо от изменений расхода в трубопроводе. Обозначим через D диаметр трубопровода, e — толщину его стенок, E — модуль упругости материала последних и будем считать эти величины постоянными на всем протяжении L. Среднюю скорость воды v в трубопроводе до закрытия затвора будем считать такой, что скоростным напором, ввиду его незначительной величины, можно будет в дальнейшем пренебрегать и, следовательно, пьезометрическую высоту $\frac{p_L}{\gamma}$ в точке M считать расположенной на линии полного напора M_1O_1. Пренебрегая в силу сказанного ранее потерями на трение по пути, мы можем вообще принять, что пьезометрическая линия совпадает с горизонтальной линией полного напора M_1O_1. Для упрощения дальнейших рассуждений предположим сначала, что стенки трубопровода совершенно не упруги, и рассмотрим случай мгновенного удара в трубопроводе.

В связи с мгновенным закрытием трубопровода возникает мгновенное увеличение давления в месте закрытия. Ход явления можно представить так: в начальный момент останавливается некоторый слой жидкости (фиг. 137); так как жидкость сжимаема, то эта остановка происходит в какой-то очень малый промежуток времени Δt, в течение которого остановившийся слой сжимается под влиянием следующих за ним еще не остановившихся слоев и прижимается к плоскости затвора mm, причем освободившаяся часть объема $\omega\Delta S$ (где ω — площадь живого сечения трубопровода) занимается продолжающими движение следующими слоями.



Фиг. 137

Если обозначить через p_0 давление в точке O до закрытия трубопровода, а через $p_0+\Delta p$ давление, возникшее после остановки, то легко по теореме импульса и количества движения подсчитать увеличение давления Δp.

В самом деле, если на mm действует давление $p_0+\Delta p$, а на nn — давление p_0, то величина импульса, действовавшего в течение промежутка времени Δt, будет равна $\Delta p\omega\Delta t$, изменение же количества движения при этом будет равно $\rho\omega\Delta s v_0$. Отсюда, сокращая на ω, получим

$$\Delta p\Delta t=\rho v_0\Delta s$$

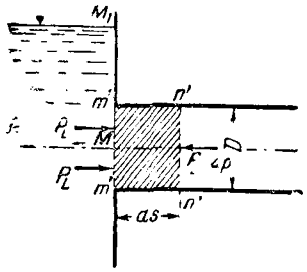
и, обозначая отношение $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ через c, найдем

$$\Delta p=\rho c v_0 \quad \text{и} \quad \frac{\Delta p}{\gamma}=\frac{cv_0}{g}. \tag{267}$$

Дальше останавливается ближайший к первому второй слой, на который давят следующие слои, и т. д. Так постепенно увеличенное давление, появившееся у преграды, распространится вверх по трубопроводу, против течения. Величина $c=\frac{\Delta s}{\Delta t}$ представляет собой скорость этого распространения и, согласно молекулярно-кинетической теории, не может превышать скорости движения молекул жидкости, совпадая со скоростью звука в той же жидкости.

Величина c тем больше, чем больше толщина слоя Δs, останавливающегося в течение промежутка времени Δt, иначе говоря, чем менее сжимаема жидкость.

По истечении времени $\frac{L}{c}$ остановится последний слой в трубе в точке M: вся жидкость будет находиться в мгновенном покое и сжатом состоянии. Однако это состояние не может быть устойчивым, так как по исходному предположению уровень в резервуаре не зависит от явлений, происходящих в трубопроводе, и следовательно, давление на $m'm'$ (фиг. 138) должно иметь величину, соответствующую постоянному давлению в точке M, т. е. p_L, в то время как на противоположную сторону $n'n'$ будет действовать давление $p_L + \Delta p$. Под влиянием избыточного давления, следующего за моментом $\frac{L}{c}$, последний слой $m'n'$ начнет двигаться в сторону резервуара, а не задвижки и к концу промежутка времени Δt скорость v_0 переменит свой знак на обратный. Одновременно избыточное давление Δp погасится и начнет распространяться новое состояние движения с восстановившимся первоначальным давлением с той же скоростью c от точки M к O, так что к моменту $\frac{2L}{c}$ заключенная в трубе масса жидкости примет всюду первоначальный удельный объем и давление, находясь, однако, в состоянии движения в сторону от задвижки и стремясь оторваться от последней лишь только на ее поверхности, давление достигнет начального значения p_0.



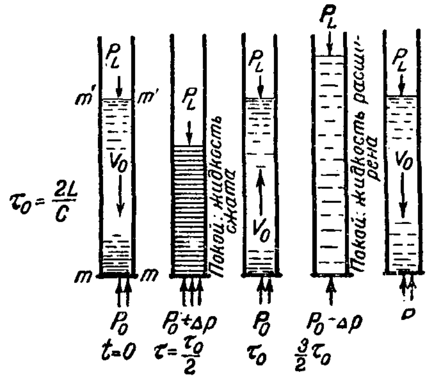
Фиг. 138

Предположим, что этот отрыв жидкости от затвора не произойдет, т. е. скорость v_0 не распространится на частицы, прилипшие к затвору, тогда путем рассуждений, аналогичных первоначальным, мы должны будем сказать, что в момент $\frac{2L}{c}$ давление на затвор понизится на ту же величину $\Delta p = \rho c v_0$. Абсолютное давление в точке O, равное в момент остановки движения в трубопроводе $p_0 + p_a + \Delta p$, перейдет в момент $\frac{2L}{c}$ в давление $p_0 + p_a - \Delta p$, и так как по нашему предположению отрыва при этом не должно быть, то величина $\Delta p = \rho c v_0$ должна удовлетворять условию: $p_0 + p_a > \rho c v_0$, что в большинстве случаев и имеет место.

В случае отрыва в образовавшееся пространство между затвором и жидкостью должны были бы выделиться пары жидкости и только что сделанное заключение о величине понижения давления было бы неверным.

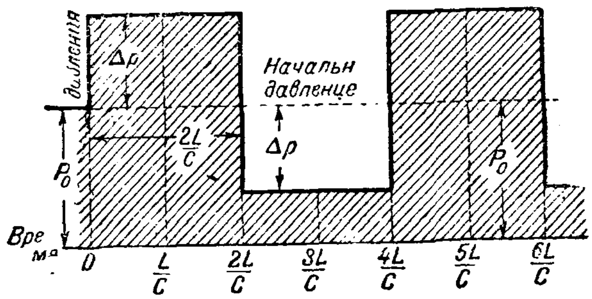
В том же порядке, как и повышенное давление, пониженное давление будет распространяться вверх по течению и в момент $\frac{3L}{c}$ достигнет резервуара. Так как наступивший мгновенный покой всей жидкости в этом разреженном состоянии, как и в сжатом, невозможен, то в точке M снова возникает скорость v_0 в направлении от M к O при соответствующем давлении p_L. К моменту $\frac{4L}{c}$ вся жидкость будет в первоначальном состоянии.

Последовательность только что описанных фаз движения жидкости в трубопроводе схематически представлена на фиг. 139[1].



Фиг. 139

На фиг. 140 представлена диаграмма давления в точке O. Мы видим, что она состоит из отрезков, параллельных оси времени, находящихся от последней попеременно то на расстоянии $p_0 + \Delta p$, то $p_0 - \Delta p$. Чередование этих давлений

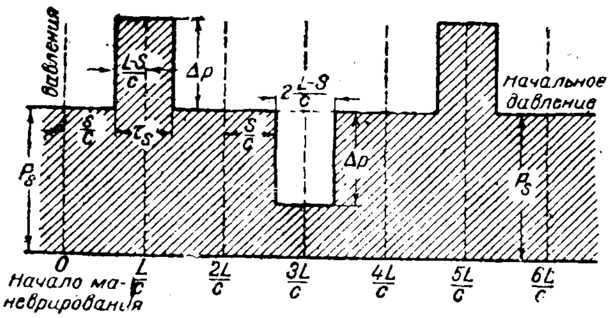


Фиг. 140

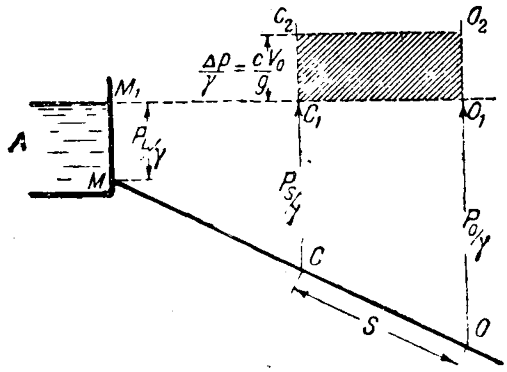
происходит через промежуток времени $\frac{2L}{c}$, который мы будем в дальнейшем, следуя Аллиеви (Allievi), называть **длительностью фазы** или просто **фазой** и обозначать $\frac{2L}{c} = \tau_0$.

Для любого сечения на расстоянии s от затвора диаграмма будет изображаться уже в виде, представленном на фиг. 141. Так как фазы в данном случае начинаются позже, а кончаются раньше на величину $\frac{s}{c}$, то длительность их, как

[1] См. G. de Marchi „Idraulica" vol. I, p. II, 1939.



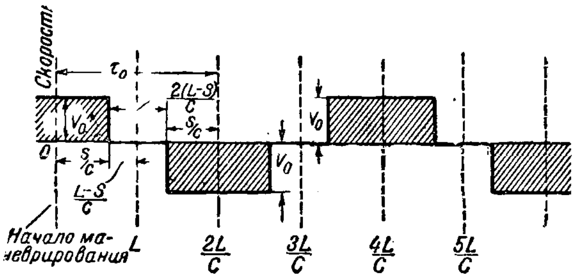
Фиг. 141



Фиг. 143

видно из этой фигуры, будет равняться уже не $\tau_0'=\frac{2L}{c}$, а $\tau_s=\frac{2(L-s)}{c}=\tau_0-\frac{2s}{c}$, величина Δp будет оставаться, однако, той же, что и на диаграмме для точки O.

Далее, на фиг. 142 представлена диаграмма скорости: последняя у затвора всегда остается равной нулю (при условии, конечно, отсутствия отрыва), в произвольном же сечении s (чему и



Фиг. 142

соответствует приводимая диаграмма) будут поочередно чередоваться фазы скоростей $+v_0$ с фазами нулевых скоростей[1] и скоростей $-v_0$. В начале трубопровода в точке M скорость до момента $\frac{L}{c}$ остается равной v_0, после чего резко переходит к величине $-v_0$ и остается таковой в продолжение $\tau_0=\frac{2L}{c}$ и т. д.

Наконец, на фиг. 143 представлено распределение пьезометрического давления вдоль трубы: линия пьезометрических высот идет вначале на отрезке M_1C_1 горизонтально вдоль такой же горизонтальной линии напоров M_1O_1, затем также горизонтально, но на расстоянии $\frac{\Delta p}{\gamma}=\frac{cv_0}{g}$ выше M_1O_1, что соответствует моменту времени $t<\frac{2L}{c}$ $\left(\text{или } t=t'+n\tau_0 \text{ при } n \text{ четном и } t'\leqslant\frac{2L}{c}\right)$, когда жидкость в трубопроводе находится в сжатом состоянии на протяжении s от начала O. Если $\tau_0<t<2\tau_0$ (или $t=t'+n\tau_0$, где n — нечетное число и $t'>\tau_0$), то пьезометрическая линия на том же отрезке C_1O_1 была бы ниже M_1O_1 на ту же величину $\frac{cv_0}{g}$.

В заключение отметим, что сущность описанных выше явлений останется той же, если учесть упругость стенок трубопровода. Здесь вся разница будет заключаться только в том, что в случае, например, увеличения давления толщина слоя Δs будет меньше, чем прежде, благодаря расширению стенок трубы и, следовательно, скорость распространения ударной волны $c=\frac{\Delta s}{\Delta t}$ будет также меньше. Весь процесс будет протекать так, как если бы мы прежнюю жидкость заменили другой, более упругой.

Диаграммы давления у конца трубопровода O, полученные Камишелем[1] (Camichel) на основе его опытных данных, вполне подтверждают все сказанное выше.

§ 96. Скорость распространения ударной волны в трубопроводе с упругими стенками

Величину скорости c, входящей в формулу (267), можно определить следующим путем.

В указанную нами ранее освободившуюся за промежуток времени Δt часть объема $\omega\Delta s$, равную $\omega v_0\Delta t$, поступает масса жидкости $\rho\omega v_0\Delta t$; это поступление происходит за счет расширения стенок трубы и уплотнения жидкости.

Будем предполагать, что

1) сжимаемость жидкости очень мала и, следовательно, модуль упругости, или сжимаемости, жидкости

$$K=\rho\frac{dp}{d\rho} \tag{268}$$

очень велик;

[1] Нулевая фаза соответствует повышенным или пониженным давлениям.

[1] Camichel E. G., Étude théorétique et expérimentale des coups de bélier, Toulouse, 1919.

2) модуль упругости материала стенок (сталь, чугун, железо)

$$E=\frac{D}{dD}d\sigma \qquad (269)$$

(D — диаметр трубы, σ — напряжение стенок) также очень велик;

3) толщина стенок e удовлетворяет условиям формулы Мариотта

$$\sigma=\frac{pD}{2e}, \qquad (270)$$

т. е. достаточно мала.

Тогда, пренебрегая бесконечно малыми высшего порядка, будем иметь такое очевидное равенство:

$$\rho\omega v_0 dt=[(\rho+d\rho)(\omega+d\omega)-\rho\omega]cdt=(\rho d\omega+\omega d\rho)cdt,$$

где $\rho\omega cdt$—масса воды в объеме ωds до закрытия трубопровода, $(\rho+d\rho)(\omega+d\omega)cdt$ — после закрытия.

Отсюда

$$v_0=c\left(\frac{d\rho}{\rho}+\frac{d\omega}{\omega}\right),$$

но согласно (268)

$$\frac{d\rho}{\rho}=\frac{dp}{K}$$

и, согласно (269) и (270),

$$\frac{d\omega}{\omega}=\frac{dD^2}{D^2}=\frac{2dD}{D}=\frac{2d\sigma}{E}=\frac{2Ddp}{2eE}=\frac{D}{eE}dp,$$

так что

$$v_0=cdp\left(\frac{D}{eE}+\frac{1}{K}\right),$$

откуда

$$c=\frac{v_0}{dp\left(\frac{D}{eE}+\frac{1}{K}\right)}$$

обращаясь к формуле (267) и полагая $dp=\Delta p$, получим искомую формулу скорости распространения удара:

$$c=\sqrt{\frac{K}{\rho}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{K}{E}\frac{D}{e}}}. \qquad (271)$$

В случае абсолютно неупругих стенок ($E=\infty$) будем иметь

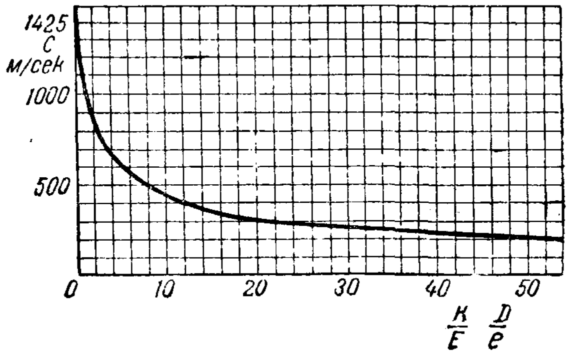
$$c=\sqrt{\frac{K}{\rho}},$$

известную формулу Ньютона для скорости звука в неограниченной жидкой среде. Как видим, введение упругости стенок эквивалентно увеличению сжимаемости жидкости в отношении 1 к $1+\frac{KD}{eE}$.

В приводимой ниже таблице даны величины E и $\frac{K}{E}$ для воды и наиболее часто встречающихся материалов стенок труб.

	$K:E$	E кг/м²
Вода	1,00	$2{,}07\cdot10^8$
Железо и сталь	0,01	$2\cdot10^{10}$
Чугунные трубы	0,02	$1\cdot10^{10}$
Бетонные трубы	0,1	$2\cdot10^9$
Деревянные	0,2	$1\cdot10^9$
Свинцовые	0,4 — 10	$5\cdot10^8$—$2\cdot10^7$

На фиг. 144 дан график зависимости скорости c от отношения $\frac{K}{E}\cdot\frac{D}{e}$. Мы видим, что ско-



Фиг. 144

рости распространения упругих возмущений в трубопроводе очень велики по сравнению с обычно встречающимися в гидравлике; так, например, для железного трубопровода диаметром $D=1{,}0$ м и толщиной $e=0{,}02$ м имеем $\frac{K}{E}\frac{D}{e}=0{,}5$ и $c=1\,160$ м/сек; для деревянных труб при тех же D и e мы имели бы $c=430$ м/сек, что указывает, между прочим, на значительное влияние упругости стенок трубопровода.

§ 97. Решение задачи в общем случае

Ограничимся, как и ранее, случаем остановки движения жидкости в трубопроводе, происходящей, однако, не мгновенно, а постепенно, в течение хотя и малого, но конечного промежутка времени T_c, равного продолжительности маневрирования задвижкой (в нашем случае — времени ее полного закрытия).

Постепенное закрытие задвижки в течение времени T_c можно представить себе в виде ряда мгновенных понижений скорости Δv_i, вызывающих соответствующий ряд мгновенных повышений давления $\Delta p_i=\rho c\Delta v_i$, которые, суммируясь, дают при $T_c<\frac{2L}{c}$ повышение давления за любой промежуток времени $t\leqslant T_c$ от начала закрытия.

Пусть изменение скорости v происходит по некоторой зависимости от времени

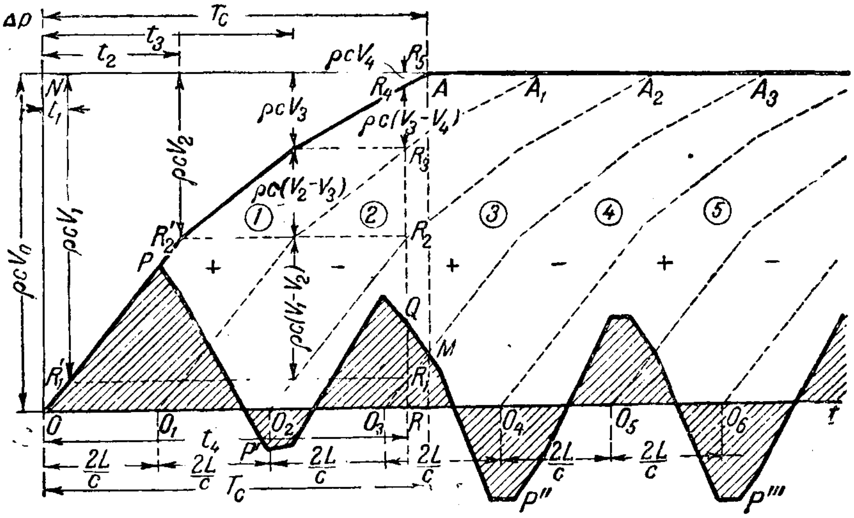
$$v=\Psi(t),$$

причем при $t=0$ имеем $v=\Psi(0)=v_0$ (где v_0 — скорость в трубопроводе до начала закрытия задвижки), а при полном закрытии задвижки ($t=T_c$) имеем $v=\Psi(T_c)=0$. Тогда, в силу сказанного, повышение давления $\Delta p=p-p_0$ в каком-либо сечении трубопровода в любой момент времени $t<T_c$ будет даваться формулой

$$\Delta p=\rho c[v_0-\Psi(t)]. \qquad (272)$$

В случае $T_c > \frac{2L}{c}$ решение не будет столь простым, поэтому мы воспользуемся здесь одним достаточно простым и наглядным методом графического построения, предложенным впервые Конти[1].

На фиг. 145 это построение дано для сечения у задвижки ($s=0$). По оси абсцисс отложено время t, по оси ординат соответствующие повышения давления $\Delta p = p - p_0$ у задвижки. На диаграмме проведен ряд графических



Фиг. 145

построений функции $\rho c[v_0 - \Psi(t)]$ вначале — в виде кривой $OPAA_1$, проходящей через начало координат и обращающейся при $t=T_c$ в прямую, параллельную оси t, затем — в виде кривых O_1A_1, O_2A_2, O_3A_3 и т. д., повторяющих первую через промежутки времени, равные длительности фазы $\tau_0 = \frac{2L}{c}$.

При $t \leqslant \frac{2L}{c}$ изменение давления $\Delta p = p - p_0$ у затвора будет даваться непосредственно кривой $OPAA_1$ и будет равно

$$\Delta p = \rho c[v_0 - \Psi(t)].$$

Если же $t > \frac{2L}{c}$, явление становится более сложным. Как мы уже знаем, волна повышения давления, возникшая у затвора в момент $t=0$ и начавшая распространяться в сторону входного сечения трубопровода, возвратится к моменту $t = \frac{2L}{c}$ к сечению у задвижки и, превратившись в волну понижения давления, начнет «гасить» саму себя, причем повышение давления Δp, следовавшее до этого закону кривой $OPAA_1$, начнет понижаться на величину, даваемую кривой понижения давления O_1A_1, повторяющей кривую $OPAA_1$, перенесенную вдоль оси t в точку O_1 на расстояние $t = \tau_0 = \frac{2L}{c}$ от начала координат. Через время $t = 2\tau_0 = \frac{4L}{c}$, т. е. через $\frac{2L}{c}$ после возникновения у затвора волны понижения, последняя начнет сама гаситься возникшей из нее волной повышения давления, следующего закону кривой O_2A_2, повторяющей, как и O_1A_1, кривую $OPAA_1$, перенесенную в точку O_2 на расстояние $t = 2\tau_0 = \frac{4L}{c}$ от начала координат.

Тот же процесс гашения повторится и с этой волной и т. д. При этом непогашенные части последовательных волн давления у затвора будут соответствовать, очевидно, вертикальным отрезкам между каждой парой соседних кривых: $OPAA_1$ и O_1A_1, O_1A_1 и O_2A_2, O_2A_2 и O_3A_3 и т. д., дающих полосы *1*, *2*, *3* и т.д., снабженные на фиг. 145 знаками + или — соответственно фазе непогашенной части волны и, следовательно, знаку вертикальных отрезков.

Воспользовавшись только что описанным вспомогательным построением, найдем для примера величину повышения давления у затвора в момент $3\tau_0 < t_4 < 4\tau_0$. На оси абсцисс выбранному нами моменту $t = t_4$ соответствует точка R, на кривых же $OPAA_1$, O_1A_1, O_2A_2, O_3A_3 — точки R_4, R_3, R_2 и R_1 с ординатами: $\overline{RR_4} = \rho c(v_0 - v_4)$, $\overline{RR_3} = \rho c(v_0 - v_3)$, $\overline{RR_2} = \rho c(v_0 - v_2)$ и $\overline{RR_1} = \rho c(v_0 - v_1)$.

На давление у затвора в этот момент успеют оказать свое влияние четыре волны, непогашенные части которых дадут следующие повышения давления:

1. Положительное повышение $\overline{R_4R_3} = \overline{RR_4} - \overline{RR_3} = \rho c(v_3 - v_4)$
2. Отрицательное » $\overline{R_3R_2} = \overline{RR_3} - \overline{RR_2} = \rho c(v_2 - v_3)$
3. Положительное » $\overline{R_2R_1} = \overline{RR_2} - \overline{RR_1} = \rho c(v_1 - v_2)$
4. Отрицательное » $\overline{R_1R} = \rho c(v_0 - v_1)$

Суммируясь, они дадут искомое повышение давления у затвора в момент $t = t_4$:

$$\Delta p = p_4 - p_0 = \overline{R_4R_3} - \overline{R_3R_2} + \overline{R_2R_1} - \overline{R_1R}.$$

Таким образом, если, как мы уже условились, каждой полосе давать знак + или — соответственно четности или нечетности ее номера, то получается такое правило для определения величины Δp в любой произвольно выбранный момент:

— чтобы получить величину повышения или понижения давления Δp у затвора в момент t, нужно взять алгебраическую сумму отрезков, отсекаемых положительными и отрицательными полосами на вертикали, проведенной через соответствующую точку на оси абсцисс.

По этому правилу и построена заштрихованная на фиг. 145 диаграмма $OPP'P''P'''$ изменения давления у затвора как во время его закрытия, так и по окончании последнего.

Для построения диаграммы гидравлического удара в любом сечении s трубопровода необходимо все положительные полосы сдвинуть вдоль оси t вправо на величину $\frac{s}{c}$, отрицательные же на ту же величину влево. Плоскость диаграммы покроется при этом полосами шириной не $\tau_0 = \frac{2L}{c}$, а $\frac{2(L-s)}{c}$, отделенными друг от друга зонами шириной $\frac{2s}{c}$ без знака + или —, ввиду того что в них величина Δp изменяться не будет. Это вытекает из тех же соображений, что и при построении диаграммы удара в произвольном сечении при мгновенном закрытии задвижки (фиг. 141).

[1] Conti, Condotte forzate (Corso di costruzione idrauliche). Roma, 1922.

Приведенный на фиг. 145 способ построения, а также сама диаграмма удара приводят к следующим выводам:

1. Повышение или понижение давления при гидравлическом ударе не зависит от начального давления p_0.

2. Только при $t < \tau_0 = \frac{2L}{c}$, т. е. в фазе, как говорят, прямого удара, диаграмма Δp совпадает с кривой $\rho c(v_0 - v)$.

3. Начиная с момента T_c полного закрытия задвижки, диаграмма принимает периодический характер с периодом, равным двойной продолжительности фазы: длина трубопровода представляет четверть длины волны.

4. Повышение давления достигает максимума в интервале T_c или в конце его. Для $t > T_c$ оно может достигать этой величины, но ни в коем случае не превышать ее.

5. Диаграмма повышений и понижений давления Δp имеет в общем случае разрыв непрерывности в моменты $\frac{2L}{c}$, $\frac{4L}{c}$,... и T_c, $T_c + \frac{2L}{c}$,... Разрыв в последних точках отсутствовал бы только в том случае, если бы кривая $\rho c(v_0 - v)$ имела горизонтальную касательную при $t = 0$ и соответственно при $t = T_c$. Исключая такую возможность, максимальные и минимальные значения Δp мы можем получить только в моменты $\frac{2L}{c}$, $\frac{4L}{c}$,..., а также T_c, $T_c + \frac{2L}{c}$,...

6. Обозначим через σ площадь (на фиг. 145 заштрихована), заключенную между осью абсцисс и кривой ударного давления в интервале от 0 до t (принимая, конечно, за положительные — площади над осью абсцисс и за отрицательные — под этой осью). Так как $\sigma = \int_0^t \Delta p dt$, то произведение $\sigma\omega_0$, где ω_0 — площадь поперечного сечения трубопровода, представляет импульс, с которым разность давления $\sigma\Delta p$ действует на жидкость в трубе при ее движении в течение промежутка времени от 0 до t. Если к концу этого промежутка движение полностью прекратится (т. е. прекратится не только само истечение в конце трубопровода, но и всякие упругие колебания в жидкости), то количество движения обратится в 0 и так как количество движения всей жидкости до маневрирования затвором равнялось $\rho L\omega_0 v_0$, то мы имеем

$$\rho L\omega_0 v_0 = \omega_0 \sigma$$

или

$$v_0 = \frac{\sigma}{\rho L}; \quad Q_0 = \frac{\omega_0 \sigma}{\rho L}.$$

Таким образом, зная площадь σ, можно определить расход в трубопроводе. На этом принципе основан метод измерения расхода, предложенный Гибсоном [1].

§ 98. Частные случаи маневрирования затвором

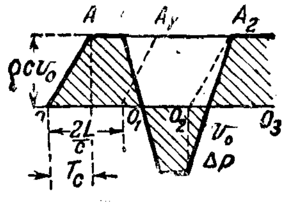
Рассмотрим поведение кривой $\rho c(v_0 - v)$ в некоторых частных случаях маневрирования затвором.

1. Внезапная остановка движения при мгновенном закрытии затвора. Графическое построение уже дано было на фиг. 140 и может быть получено из диаграммы на фиг. 145, построенной по способу Конти, путем простого выпрямления, полосок OAA_1O_1 $O_1A_1A_2O_2$,... Повышение давления будет равно $\Delta p_{max} = \rho c v_0$ и зависит (через посредство c) от упругих свойств системы.

[1] N. A. Gibson, Pressure in penstocks caused by the gradual closing of turbins gates; Trans. ASCE, 1919—1920. K. Pantell, Das Gibson's Messverfahren, VDI, 12—IV, 1924.

2. Скорость в начальном сечении внезапно переходит от значения v_0 к значению $v_1 > 0$ под влиянием внезапного частичного закрытия затвора. Диаграмма давления Δp в этом случае будет иметь вид, аналогичный диаграмме на фиг. 140, причем повышения и понижения давления будут чередоваться через те же промежутки, равные $\frac{2L}{c}$, но величина их уменьшится до величины $\rho c(v_0 - v_1)$.

3. Скорость (в начальном сечении) постепенно уменьшается до нуля в течение промежутка времени $T_c < \frac{2L}{c}$. Последнее означает, что закрытие затвора происходит в течение промежутка времени, меньшего продолжительности фазы. Максимального своего значения повышение давления у затвора достигает к концу промежутка времени T_c и равно, согласно формуле (272): $\Delta p_{max} = \rho c v_0$, как и при внезапном закрытии; таким образом оно не зависит от T_c. Это значение Δp будет поддерживаться в течение времени $\left(\frac{2L}{c} - T_c\right)$ у затвора и $\left(\frac{2L - s}{c} - T_c\right)$ — в промежуточном сечении s. Если $T_c > 0$, то в сечениях, наиболее близких к резервуару, повышение давления не будет достигать величины $\rho c v_0$, так как отраженная волна в этой части трубопровода успеет возникнуть раньше, чем дойдет волна, соответствующая моменту полного закрытия. При $T_c = 0$ давление будет везде одинаковым. На фиг. 146 представлена диаграмма для случая $T_c < \frac{2L}{c}$.



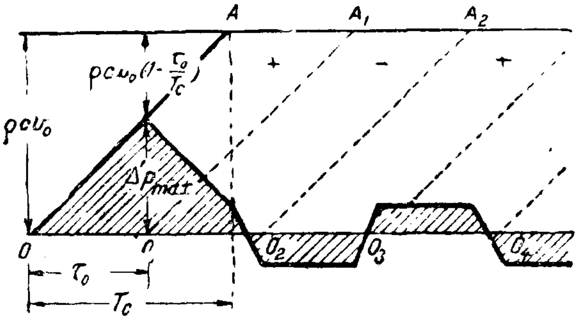
Фиг. 146

4. Скорость (в начальном сечении) постепенно убывает до нуля в течение промежутка времени $T_0 > \frac{2L}{c}$. В этом случае повышение давления не достигнет нигде, даже у самого затвора, значения $\rho c v_0$: максимальное значение повышения давления при таком закрытии затвора всегда меньше Δp_{max}.

Возьмем, в частности, случай убывания скорости по линейному закону

$$v = v_0\left(1 - \frac{t}{T_c}\right).$$

На фиг. 147 представлена диаграмма изменения Δp при T_c, близком к $\frac{4L}{c}$, построенная по



Фиг. 147

тому же способу Конти. Легко видеть, что повышение давлéния $\Delta_0 p$ у затвора достигнет своей максимальной величины к концу первой фазы, т. е. в момент $t=\frac{2L}{c}$, когда $v=v_0\left(1-\frac{2L}{cT_c}\right)$; этот максимум $\Delta_0' p_{\max}$ будет по формуле (272) равен

$$\Delta_0' p_{\max}=\frac{2\rho L v_0}{T_c}, \tag{273}$$

т. е. некоторой доли, равной $\frac{\tau_0}{T_c}=\frac{2L}{cT_c}$ от $\rho c v_0$. Выраженный в высоте водяного столба, он примет величину:

$$\Delta_0' h_{\max}=\frac{\Delta_0' p_{\max}}{\gamma}=\frac{2Lv_0}{gT_c}. \tag{274}$$

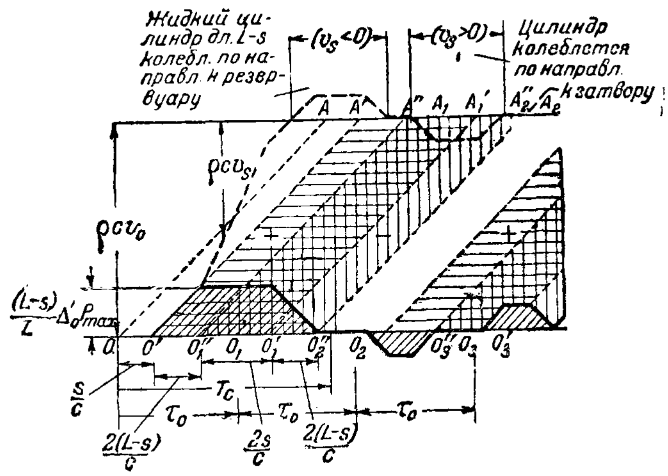
Как видно, и та и другая величина не зависит от упругой характеристики системы, т. е. от c. Формула (273) и (274) носит название формулы Мишо (Michaud).

В случае произвольного сечения s максимальное повышение давления будет составлять только долю, равную $\frac{L-s}{L}$ от значения $\Delta_0' p_{\max}$, получаемого по предыдущим формулам. Оно будет оставаться таковым до конца первой фазы, как это видно из диаграммы на фиг. 148 [1], на которой кроме кривой $\Delta_s p$ представлена пунктирной линией кривая $\rho c(v_0-v_s)$.

5. **Удар при закрытии, линейном по времени.** В реальных условиях маневрирования затвором вместо закона изменения скорости по времени: $v=\Psi(t)$ дается закон, по которому происходит закрытие или открытие задвижки

$$\Omega=f(t),$$

где Ω — меняющаяся с течением времени площадь отверстия задвижки. Типичным примером



Фиг. 148

в данном случае могут служить напорные трубопроводы в электросиловых установках, в которых турбины снабжены автоматическими регуляторами, функционирующими в той или иной зависимости от изменения нагрузки на генераторах. В зависимости от конструкции регулятора площадь отверстия регулирующего органа турбины более или менее непрерывно изменяется по тому или иному закону.

Наиболее близким к действительности является линейный закон изменения открытия или закрытия турбины

$$\Omega=\Omega_0\left(1-\frac{t}{T}\right).$$

Мы не будем останавливаться подробно на этом случае, а отметим лишь, что теоретический анализ, проведенный Аллиеви, Спарре и др., показывает, что при не слишком больших $\frac{\Delta p_{\max}}{p_0}=\frac{cv_0}{gH_0}$, где $H_0=\frac{p_0}{\gamma}$ — напор на турбине, максимальные величины гидравлического удара можно рассчитывать или по формуле внезапного закрытия

$$\Delta p=\rho c v_0 \text{ при } T_c<\frac{2L}{c}$$

или по формуле Мишо

$$\Delta_s' p=\frac{2(L-s)v_0}{gT_c} \text{ при } T_c>\frac{2L}{c}.$$

Это условие применимо в высоконапорных установках, где H_0 очень велико, но и в общем случае формула Мишо применима, если выполняется, согласно Маркетти, условие

$$\frac{2\rho L v_0}{T_c}<2{,}2p_0$$

или, иначе,

$$\frac{2Lv_0}{gT_c}\leqslant 2{,}2H_0,$$

[1] Диаграмма на этой фигуре получена путем указанного выше перемещения положительных и отрицательных полос на фиг. 147 на величину $\frac{s}{c}$.

что практически, как правило, и выполняется в гидроустановках, в которых обычно так называемое критическое значение повышения давления Δp не допускается свыше $0{,}10 \div 0{,}25 p_0$.

Задача 39. Трубопровод постоянного диаметра с постоянной толщиной стенок имеет длину $L = 2$ *км* и работает при разности между максимальной отметкой уровня в водохранилище и отметкой у сечения задвижки $\frac{p_0}{\gamma} = H_0 = 600$ *м*. Нормальная скорость воды $v_0 = 3$ *м/сек*, критическое повышение давления допускается равным $0{,}10 p_0$, т. е. 6 *кг/см²*, $c = 900$ *м/сек*. Проверить работу трубопровода на удар.

Полное закрытие должно совершаться, согласно формуле Мишо, в течение

$$T_c = \frac{2\rho L v_0}{\Delta p_{крит}} = \frac{2 \cdot 102 \cdot 2\,000 \cdot 3}{6 \cdot 10^4} = 20{,}4 \text{ сек.}$$

Длительность фазы

$$\tau_0 = \frac{2L}{c} = \frac{4\,000}{900} = 4{,}44 \text{ сек.},$$

следовательно, маневрирование затвором при поставленном условии относительно Δp должно начинаться с открытия

$$\frac{\Omega}{\Omega_0} = \frac{\tau_0}{T_c} = \frac{4{,}44}{20{,}4} = 0{,}217$$

при начальной скорости

$$v_0 = \frac{\tau_0}{T_c} v_0 = 0{,}217 \cdot 3 = 0{,}65 \text{ м/сек}$$

и продолжаться 4,44 сек.

Прочность трубопровода в сечении затвора должна быть проверена при внутреннем давлении $1{,}1 \cdot 60$ *кг/см²*. Если же взять сечение, находящееся, например, на расстоянии километра от резервуара, то проверку нужно было бы делать на давление $p_s + \Delta p_s = \gamma\,(300 + 0{,}5 \cdot 60) = 330 \cdot 1\,000$ *кг/м²*.

В случае постепенного открытия со скоростью, определяемой тем же T_c, критическое понижение давления у затвора было бы численно тем же, что и повышение давления в случае закрытия, и равнялось бы $\frac{1}{10}\,600 = 60$ *м* вод. ст.

Если бы случайно произошло внезапное закрытие затвора, то повышение давления составило бы $\Delta p_{max} = \rho c v_0 = 102 \cdot 900 \cdot 3 = 275\,400$ *кг/м²* или, в высоте водяного столба, 275,4 *м*.

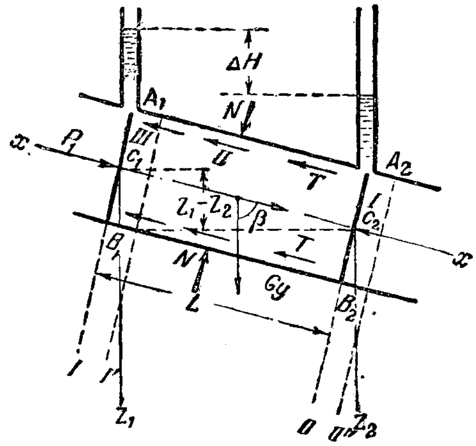
Е. НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ НЕУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ В НЕУПРУГИХ ТРУБОПРОВОДАХ. УРАВНИТЕЛЬНЫЕ БАШНИ

§ 99. Неустановившееся движение в прямолинейных цилиндрических трубах

Будем полагать, что:

1) вода — несжимаемая жидкость,
2) стенки трубы лишены упругости,
3) сечение трубы постоянное.

Вырежем двумя перпендикулярными оси трубы плоскостями *I-I* и *II-II* цилиндр длиной *L*. На этот цилиндр в некоторый момент времени *t* будут действовать силы (фиг. 149):



Фиг. 149

1. Собственный вес $G = \gamma\omega L$.
2. Силы гидродинамического давления

а) слева

$$P_1 = p_1\omega;$$

б) справа

$$P_2 = p_2\omega,$$

где p_1 и p_2 — давления на оси трубы в сечениях *I-I* и *II-II*;

в) на боковой поверхности цилиндра

$$N.$$

Сила гидродинамического давления, действующая на боковой поверхности цилиндра, будучи нормальной к оси последнего, в окончательное уравнение не войдет, как увидим ниже, а потому выражение для N не будем здесь подсчитывать, ограничиваясь только его обозначением.

3. Силы трения

$$T = \tau\chi L,$$

где τ — сила трения, приходящаяся на единицу боковой поверхности цилиндра, χ — смоченный периметр сечения трубы.

4. Силы инерции

$$ma = \frac{\gamma\omega L}{g}\,\frac{dv}{dt}.$$

Проекции перечисленных сил на ось трубы $x - x$ будут соответственно:

$$G_x = \gamma\omega L \cos\beta;$$

$$(P_1)_x = \omega p_1;\ (P_2)_x = -\omega p_2;\ N_x = 0;$$

$$T_x = -\tau\chi L;$$

$$(ma)_x = -\frac{\gamma\omega L}{g}\,\frac{dv}{dt}.$$

Согласно теореме о проекции количества движения на ось x

$$d(\Sigma m v_x)=(\Sigma F_x)dt$$

находим, ввиду того что $d(\Sigma m v_x)=(\Sigma m v_x)_{III}-(\Sigma m v_x)_{I}=0$ (т. е. что проекция приращения количества движения цилиндра за время dt равно разности проекций количеств движения в отсеках III и I, образовавшихся благодаря перемещению цилиндра в течение dt из положения I-II в положение I'-II'):

$$(\Sigma F_x)dt=0 \text{ или } \Sigma F_x=0,$$

причем в число проекций сил F_x входит по принципу Даламбера и проекция силы инерции $(ma)_x$.

Учитывая найденные выше выражения для проекций F_x, получим

$$\gamma\omega L\cos\beta+\omega p_1-\omega p_2-\tau\chi L-\frac{\gamma\omega L}{g}\frac{dv}{dt}=0.$$

Так как согласно фиг. 149

$$L\cos\beta=z_1-z_2,$$

то полученное равенство после деления на $\gamma\omega$ примет вид:

$$z_1-z_2+\frac{p_1}{\gamma}-\frac{p_2}{\gamma}-\frac{\tau\chi L}{\omega\gamma}-\frac{L}{g}\frac{dv}{dt}=0.$$

Имея в виду, что

$$\frac{\omega}{\chi}=R=\frac{D}{4};\ \frac{\tau}{\gamma}=b_1v^2=\frac{v^2}{C^2}=\frac{\lambda}{4}\frac{v^2}{2g},$$

мы можем после соответствующей перегруппировки членов написать основное уравнение неустановившегося движения в прямолинейной цилиндрической трубе в виде

$$\left(z_1+\frac{p_1}{\gamma}\right)-\left(z_2+\frac{p_2}{\gamma}\right)=\lambda\frac{L}{D}\frac{v^2}{2g}+\frac{L}{g}\frac{dv}{dt}$$

или

$$H_1-H_2=\lambda\frac{L}{D}\frac{v^2}{2g}+\frac{L}{g}\frac{dv}{dt}, \tag{275}$$

где $H_1=z_1+\frac{p_1}{\gamma}$; $H_2=z_2+\frac{p_2}{\gamma}$ — напор в сечениях I-I и II-II.

В случае установившегося движения $\frac{dv}{dt}=0$ и мы получим известную формулу Вейсбаха $H_{mp}=\lambda\frac{L}{D}\frac{v^2}{2g}$.

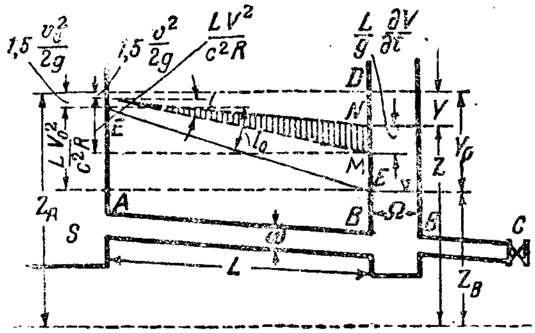
Таким образом

при неустановившемся движении в цилиндрической трубе потеря напора $H_1-H_2=\Delta H$ в данный момент времени t на каком-либо участке длиной L составляется из потерь на трение по длине участка: $\lambda\frac{L}{D}\frac{v^2}{2g}$ и потерь на преодоление инерции массы жидкости на том же участке: $\frac{L}{g}\frac{dv}{dt}$.

§ 100. Колебания уровня воды в уравнительных башнях

Исследование процессов неустановившегося движения, не зависящих от упругих свойств как самой жидкости, так и стенок водоводов, было бы значительно проще по сравнению с предыдущим случаем, если бы не необходимость учитывать, как указывалось в начале настоящей главы, влияние сил трения, играющее основную роль в настоящем случае.

Мы ограничимся исследованием схемы сооружений, представленных на фиг. 150 и уже опи-



Фиг. 150

санных ранее: AB — напорная штольня произвольной длины, начинающаяся у водохранилища S с постоянным горизонтом воды и кончающаяся у входа в уравнительную башню BD. От последней идет напорный трубопровод BC, расход в котором обычно регулируется затвором C. Исследуем изменение расхода и уровня воды в уравнительной башне при определенном изменении расхода в трубопроводе BC.

Исследование произведем при следующих предположениях:

а) длина штольни по сравнению с длиной уравнительной башни очень велика, так что силами инерции заключенной в башне жидкой массы можно пренебречь по сравнению с таковыми в штольне. По той же причине пренебрежем сопротивлением стенок башни;

б) потери на трение как по длине штольни, так и при входе в нее в каждый данный момент времени будем относить к существующему мгновенному расходу; тогда, если R — гидравлический радиус поперечного сечения штольни AB, v — соответствующая средняя мгновенная скорости, C — коэфициент в формуле Шези $v=C\sqrt{RI}$, потеря напора по длине штольни L в данный момент времени будет равна $\frac{v^2L}{C^2R}$, поскольку неизменность сечения штольни и несжимаемость жидкости влекут за собой условие $\frac{dv}{ds}=0$ и, следовательно, $v=\text{const}$ на всем протяжении L;

в) у выходного сечения штольни B кинетическая энергия потока обращается в нуль.

Если индекс „нуль“ относить к значениям в условиях режима, характеризующегося положением $E'E$ пьезометрической линии и пьезометрической отметкой z_B свободной поверхности в башне, то соответствующая разность уровней y_0 в башне и в водохранилище будет равняться

$$y_0 = z_A - z_B = \frac{Lv_0^2}{C^2R} + 1{,}5\frac{v_0^2}{2g} = v_0^2\left(\frac{L}{C^2R} + \frac{1{,}5}{2g}\right) = \frac{L'v_0^2}{C^2R},$$

где $v_0 = \frac{Q_0}{\omega}$, а L' в первом приближении при круглом поперечном сечении штольни равно $L' = L + 60D = L + 240R$.

Всякое маневрирование затвором C обусловливает отклонение от стационарного режима сначала в штольне, потом — в башне и штольне. Разность уровней свободных поверхностей в штольне и водохранилище в некоторый произвольный момент времени будет равна $y = z_A - z$ и уже не будет суммой потерь напора между башней и водохранилищем; в силу уравнения неустановившегося движения (275)

$$y = \frac{L}{g}\frac{dv}{dt} \pm \frac{L'v^2}{C^2R},$$

откуда

$$\frac{1}{g}\frac{dv}{dt} = \frac{y \mp \frac{L'v^2}{C^2R}}{L}. \qquad (276)$$

Числитель в правой части полученного выражения представляет собой разность между падением уровня на пути от водохранилища к башне $DN = y$ (фиг. 150) в рассматриваемый момент и потерей напора по длине штольни и на вход, соответствующей мгновенной средней скорости v.

При положительном значении этой разности $\frac{dv}{dt} > 0$ движение будет ускоренным в случае положительной скорости, т. е. направленной от водохранилища к башне, и замедленным при $v < 0$. Наоборот, при отрицательном значении той же разности движение будет замедленным при направлении скорости от водохранилища к башне в силу преобладающего значения мгновенных потерь на трение и ускоренным при обратном направлении скорости движения в штольне. Так, например, при уровне в башне в точке N при положительных потерях на трение, равных DM, и продвижении в штольне в сторону башни последнее было бы замедленным при величине замедления

$$\gamma\omega\,\overline{MN} = \gamma\omega\frac{L}{g}\frac{dv}{dt}.$$

Обозначим через Ω площадь горизонтального поперечного сечения башни, в общем случае меняющуюся с изменением y, и пусть расход в напорном трубопроводе Q' представляет собой некоторую функцию времени t: $Q' = Q'(t)$; тогда для произвольного элемента времени dt должно существовать равенство

$$Q\,dt + \Omega\,dy = Q'\,dt,$$

показывающее, что объем $Q'dt$, проходящий в промежуток времени dt через некоторое поперечное сечение напорного трубопровода, составляется из объема $Q\,dt = \omega v\,dt$, проходящего в тот же промежуток через поперечное сечение штольни, и объема $\Omega\,dy$ (поскольку y положительно по направлению вниз), соответствующего понижению dy уровня в башне; отсюда

$$\frac{\Omega}{\omega}\frac{dy}{dt} = \frac{Q'}{\omega} - v. \qquad (277)$$

Из уравнений (276) и (277) получается аналитическое решение поставленной нами задачи. Однако после исключения из них скорости v мы придем к диференциальному уравнению второго порядка относительно y, которое в общем случае не решается в квадратурах, и поэтому относящиеся сюда задачи решаются приближенно, графическим или численным (в конечных разностях) методами.

К аналитическому решению в конечном виде, достаточно точному в большинстве практических случаев, можно притти лишь в результате частных предположений о законе изменения расхода в напорном трубопроводе. Наиболее важными являются случаи: а) полного прекращения расхода Q' и б) перехода от режима с расходом Q'_1 к режиму с расходом Q'_2. Непосредственными наблюдениями, а также приближенными вычислениями, установлено, что режим в системе штольня-башня в новых условиях, как правило, устанавливается после ряда затухающих колебаний как уровня в башне, так и скорости в штольне. Но эти колебания, за исключением случая с очень короткими штольнями, происходят в противоположность разобранным ранее упругим колебаниям очень медленно; поэтому любое изменение расхода Q' в напорном трубопроводе можно принимать мгновенным по сравнению с изменением расхода в штольне.

Последнее обстоятельство значительно упрощает уравнение (277), поскольку достаточно иметь в виду только случай внезапного изменения расхода и, следовательно, полагать $Q' = Q_1'$ при $t < 0$ и $Q' = Q'_2$ при $t \geqslant 0$, принимая при этом за начало отсчета времени момент внезапного изменения.

Обычно бывает достаточно установить лишь величину максимального повышения и понижения уровня в башне, при этом поперечное сечение башни выбирается так, чтобы в самом неблагоприятном случае отметка уровня в башне не превышала заданной максимальной величины и не опускалась ниже заданной минимальной, иначе говоря, чтобы колебания уровня в башне происходили в определенных границах. Достаточно с этой целью, как правило, ограничиваться лишь двумя наиболее простыми случаями: полного прекращения расхода и полного открытия регулирующего устройства турбины. И то и другое в силу сказанного выше можно считать внезапным, принимая расход, поступающий из башни в трубопровод, $Q'=Q_0$ или внезапно обращающимся в нуль или, наоборот, увеличивающимся от нуля до Q_0.

Ограничимся исследованием первого случая, полагая $Q'=Q$, $v=v_0$, $y=y_0$ при $t\leqslant 0$ и $Q=0$ при $t>0$. Будем при этом иметь в виду башню цилиндрического сечения, полагая, следовательно, $\Omega=\text{const}$.

Уравнение (277) при $t>0$ дает

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{\omega}{\Omega}v, \tag{278}$$

что после диференцирования по t и подстановки в (276) приведет к уравнению типа

$$\frac{d^2y}{dt^2}\pm B\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+Ny=0, \tag{279}$$

где

$$\frac{1}{N}=\frac{\Omega}{\omega}\frac{L}{g}; \quad B=\frac{L'}{L}\frac{\Omega}{\omega}\frac{g}{C^2R}. \tag{280}$$

Уравнение (279) неинтегрируемо, тем не менее оно дает возможность решить при помощи приема Пражиля (Prašil) поставленную выше задачу об определении необходимой площади Ω горизонтального сечения башни.

Предварительно решим задачу в условии большого упрощения, хотя и не имеющего реального значения, однако позволяющего получить некоторые нужные нам в дальнейшем характеристики любой системы, состоящей из штольни и уравнительной башни.

§ 101. Случай нулевых потерь ($B=0$)

Уравнение движения (279) сводится в этом случае к виду

$$\frac{d^2y}{dt^2}+Ny=0, \tag{281}$$

который, как известно, дает синусоидальные колебания с периодом

$$\tau=\frac{2\pi}{\sqrt{N}}=2\pi\sqrt{\frac{\Omega}{\omega}\frac{L}{g}}. \tag{282}$$

Общий интеграл уравнения (281) можно привести к виду

$$y=A\sin\frac{2\pi}{\tau}(t-a),$$

где A и a — две произвольные постоянные. Так как при $t=0$ $y=0$, то мы должны положить $a=0$, и так как, с другой стороны, $\frac{dy}{dt}=A\frac{2\pi}{\tau}\cos\frac{2\pi}{\tau}t=-\frac{\omega}{\Omega}v$ в силу уравнения (278), то при $t=0$, $v=v_0$ будем иметь

$$A=-\frac{\tau}{2\pi}\frac{\omega}{\Omega}v_0=-v_0\sqrt{\frac{\omega}{\Omega}\frac{L}{g}},$$

откуда видим, что период τ соответствует периоду маятника с длиной $\frac{\Omega}{\omega}L$.

Имея в виду начальные условия, согласно которым при $t=0$ $y=0$, $v=v_0=-\frac{\Omega}{\omega}\frac{dy}{dt}$, находим

$$y=-v_0\sqrt{\frac{L}{g}\frac{\omega}{\Omega}}\sin\frac{2\pi}{\tau}t. \tag{283}$$

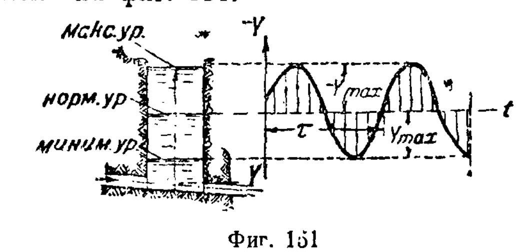
Максимальное повышение и понижение уровня относительно положения равновесия дается, следовательно, абсолютной величиной (283) при $\sin\frac{2\pi}{\tau}t=1$:

$$y_{max}=v_0\sqrt{\frac{L}{g}\frac{\omega}{\Omega}}=v_0\frac{\omega}{\Omega}\frac{\tau}{2\pi}. \tag{284}$$

Уравнение (278) дает в свою очередь

$$v=-\frac{\Omega}{\omega}\frac{dy}{dt}=v_0\cos\frac{2\pi}{\tau}t. \tag{285}$$

Отсюда заключаем, что как скорость в штольне, так и уровень воды в башне изменяются во времени по закону синусоиды, первая — в пределах v_0 и $-v_0$, второй — между значениями z_A+y_{max} и z_A-y_{max} причем колебания скорости происходят по отношению к колебаниям уровня с опозданием в фазе на 90° или во времени на $\frac{\tau}{4}=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\Omega}{\omega}\frac{L}{g}}$. Максимальный уровень достигается при этом через промежуток времени $\frac{\tau}{4}$ после начала маневрирования и в момент, когда скорость и количество движения жидкости, имевшие вначале максимальное значение, обращаются в нуль. Изменение y представлено на фиг. 151.



Фиг. 151

Очень важно здесь отметить, что

период τ зависит только от геометрической характеристики системы штольня-башня и не зависит от скорости v_0 до начала маневрирования.

Он увеличивается с увеличением $\frac{\Omega}{\omega}$, т. е. при определенном сечении штольни с увеличением горизонтального сечения башни. Наоборот,

повышение или понижение уровня в башне пропорционально скорости v_0 и уменьшается с увеличением этого сечения.

Отсюда всякое увеличение сечения башни приводит при равенстве остальных условий к замедлению колебаний и уменьшению их амплитуды.

Качественно, как уже отмечалось ранее, эти результаты остаются теми же и при учете потерь, которые, естественно, приводят лишь к постепенному затуханию колебаний. Выражение (283) входит в этом случае уже в качестве характеристики явления. Во всяком случае очевидно, что в случае нулевых потерь уравнительная башня должна иметь высоту не меньшую $2y_{max}$, если хотят при этом, чтобы колебания целиком умещались на ее протяжении (и если при этом уровень z_A остается неизменным).

Задача 40. Штольня длиной $L = 4$ *км* и площадью поперечного сечения $\omega = 4$ *м*^{2} заканчивается уравнительной башней с площадью поперечного сечения $\Omega = 16$ *м*^{3}. Скорость v_0 в штольне равна 0,5 *м/сек*. Установить характер изменения уровня в башне.

В случае прекращения расхода из башни при нулевых потерях (которые ввиду незначительной скорости действительно должны иметь малую величину) в штольне и башне возникает колебательное движение с периодом согласно (282)

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{4\,000}{9{,}8}\,\frac{16}{4}} = 254 \text{ сек.}$$

и максимальным повышением уровня в башне по (283)

$$y_{max} = 0{,}50\sqrt{\frac{4\,000\cdot 4}{9{,}8\cdot 16}} = 5{,}06 \text{ м},$$

при этом наивысшая отметка уровня в ней $z_{max} = z_A + y_{max}$ будет достигнута к концу промежутка $\frac{\tau}{4} = 63{,}5$ сек. после закрытия задвижки.

§ 102. Случай потерь, отличных от нуля ($B \neq 0$)

Выше указано было, что уравнение (279) не интегрируемо, поэтому удобнее воспользоваться непосредственно уравнениями (276) и (277), которые мы здесь перепишем в виде

$$\frac{L}{g}\,\frac{dv}{dt} = y - \frac{L'}{C^2R}\,v^2;\ \frac{dy}{dt} = -\frac{\omega}{\Omega}\,v,$$

оставив перед вторым членом в правой части первого из этих уравнений знак минус, ввиду того что в начальной фазе движения, следующей непосредственно за моментом прекращения расхода, движение в штольне происходит по направлению к башне.

Разделив почленно написанные уравнения, получим после простых преобразований:

$$\frac{L}{2g}\,\frac{\omega}{\Omega}\,\frac{dv^2}{dy} - \frac{L'}{C^2R}\,v^2 + y = 0 \tag{286}$$

или, после подстановки

$$v^2 = z,$$

в более простом виде

$$\frac{dz}{dy} + Pz + My = 0, \tag{287}$$

где

$$P = -\frac{L'}{C^2R} : \frac{L\omega}{2g\Omega};\qquad M = \frac{2g\Omega}{L\omega}.$$

Воспользовавшись выражением максимальной амплитуды колебания $y_{max} = -v_0\sqrt{\frac{L\omega}{g\Omega}}$ при отсутствии потерь в системе [формула (284)], мы можем выражения P и M представить также в виде

$$P = -\frac{y_0}{v_0^2} : \frac{y^2_{max}}{2v_0^2} = -2\,\frac{y_0}{y^2_{max}};\ M = \frac{2v_0^2}{y^2_{max}}, \tag{288}$$

обозначив через y_0 и v_0 начальные значения y и v (при $t \leq 0$).

Общий интеграл уравнения (286) имеет вид

$$z = e^{-\int P dy}\left[C - \int Mye^{\int Pdy}\,dy\right] = e^{-Py}\left[C - \int Mye^{Py}dy\right]$$

или

$$z = Ce^{-Py} + \frac{M}{P^2}\,(1 - Py).$$

Произвольная постоянная интегрирования C определяется из начальных условий. Имея в виду, что в начальный момент $y = y_0$ и $v = v_0$ и что в силу (288) $z = v_0^2 = -\frac{y_0}{P}\cdot M$, находим $C = -\frac{M}{P^2}\,e^{Py_0}$.

Таким образом интегрирование уравнения (286), приняв во внимание начальные условия, приводит к следующему результату:

$$z = v^2 = -\frac{M}{P^2}\left(Py - 1 + e^{P(y_0 - y)}\right),$$

который, однако, после подстановки $v = -\frac{\Omega}{\omega}\,\frac{dy}{dt}$ дает относительно y диференциальное уравнение, опять-таки не решаемое в квадратурах.

Но это обстоятельство не мешает получить практически важные результаты. В самом деле скорость v в штольне, а следовательно, и левая часть предыдущего выражения обращаются в нуль при достижении свободной поверхности в башне наивысшей отметки, т. е. к концу первого повышения уровня в результате маневрирования.

Обозначив через y'_{max} соответствующее превышение свободной поверхности в башне над гидростатическим уровнем в последней, мы найдем эту величину из уравнения

$$Py-1+e^{P(y-y_0)}=0,$$

имеющего два корня, из которых один положительный, больший y_0 и не имеющий в данном случае реального значения, а другой отрицательный, дающий искомое значени y'_{max}; отрицательный потому, что движение прекращается лишь в тот момент, когда в башне уровень становится выше такового в водохранилище[1].

В силу (288) это уравнение можно переписать в виде

$$1+\frac{2y_0}{y^2_{max}}y=e^A, \tag{289}$$

где

$$A=\frac{2y_0}{y^3_{max}}(y-y_0),$$

по которому можно судить, что максимальное превышение уровня y'_{max} зависит только от y_0 и характеристики системы y_{max}.

Численное значение y'_{max} можно находить разнообразными графическими способами. Так, например, положив $\left(1+\frac{2y_0y}{y^2_{max}}\right)=u$, представим (289) в форме

$$u-\ln u=u_0,$$

тогда для нахождения обоих корней достаточно найти две точки пересечения кривой $w=\lg u$ с прямой $u=u_1-u_0$ (в системе координат u, w).

Описанный выше прием позволяет устанавливать максимальное поднятие уровня в уравнительной башне, имеющее место непосредственно после прекращения расхода, иначе говоря, дает способ проверки поведения системы после выключения нагрузки на турбинах.

На практике, однако, чаще приходится решать обратную задачу: определять размеры башни (площадь горизонтального сечения) таким образом, чтобы максимальное превышение уровня y'_{max} при полном прекращении расхода в системе не превосходило установленной величины δ. Необходимые расчеты производятся по схеме: положив в (289) $y=-\delta$, находят величину y_{max}, затем, пользуясь формулой (284), получают искомую площадь:

$$\Omega=\frac{L\omega}{g}\frac{v_0^2}{y^2_{max}}. \tag{290}$$

Процесс вычисления состоит в следующем: путем простых преобразований выражение (289) приводим к виду

$$\frac{y_0}{y}=1-\frac{y^2_{max}}{2y_0y}\ln\left(1+\frac{2y_0y}{y^2_{max}}\right),$$

в котором искомая величина y_{max}, а следовательно Ω, входит только в правую часть.

Обозначив далее $u=1+\frac{2y_0y}{y^2_{max}}$, перепишем предыдущее выражение в сокращенном виде:

$$\frac{y_0}{y}=1-\frac{\ln u}{u-1}$$

и представим в виде графика кривую $w=1-\frac{\ln u}{u-1}$, постоянную для всех вычислений. Из этого графика определяем величину абсциссы u', соответствующую ординате $w'=-\frac{y_0}{\delta}$, и так как $u'=1-\frac{2y_0\delta}{y^2_{max}}$, то отсюда вычисляем y^2_{max}, а потом по формуле (284) величину площади Ω.

Более просто и быстро получается приближенное решение в случае малых по сравнению с y_{max} величин y_0 и δ, таких, что $\frac{2y_0\delta}{y^2_{max}}$ по абсолютной величине меньше единицы. Это условие обычно и выполняется на практике; тогда отношение $\frac{y'_{max}}{y_{max}}=-\frac{\delta}{y_{max}}$ можно представить приближенно в виде

$$\frac{y'_{max}}{y_{max}}=-\left[1+a\frac{y_0}{y_{max}}+b\left(\frac{y_0}{y_{max}}\right)^2\right],$$

причем коэфициенты a и b определяются следующим образом. Пишут уравнение (289) в форме

$$\ln\left[1+\frac{2y_0y}{y^2_{max}}\right]=\frac{2y_0}{y^3_{max}}(y-y_0) \tag{291}$$

и разлагают в ряд левую часть этого выражения с точностью до членов с квадратами, что после простых операций приводит к выражению:

$$\frac{y}{y_{max}}=-\left[1-{}^2/_3\frac{y_0}{y_{max}}+\frac{1}{9}\left(\frac{y_0}{y_{max}}\right)^2\right]. \tag{292}$$

[1] Напомним, что за положительное направление y нами принято направление сверху вниз от положения равновесия, в данном случае — от гидростатического уровня.

Положив $\frac{y}{y_{\max}}=z;\ \frac{y_0}{y_{\max}}=z_0;\ \frac{2y_0}{y^2_{\max}}\quad (y-y_0)=$ $=2z_0(z-z_0)$ и считая, что $2z_0z<1$, разлагаем в ряд:

$$\ln\left(1+2\frac{y_0 y}{y^2_{\max}}\right)=\ln(1+2z_0z)=2z_0z-\frac{4z_0^2z^2}{2}+$$

$$+\frac{8z_0^3z^3}{3}-\frac{16z_0^4z^4}{4}+\ldots$$

и подставляем в (291), после чего получаем

$$1=-z^2+\frac{4}{3}z_0z^3-2z_0^2z^4+\ldots=$$

$$=-z^2\left[1-\frac{4}{3}z_0z+2z_0^2z^2\right]. \qquad (293)$$

Для решения этого соотношения относительно z полагаем

$$z=-\left(1+az_0+bz_0^2\right),$$

удерживаем при подстановке в (293) только члены не выше второй степени и, принимая во внимание, что (293) должно удовлетворяться при таких значениях z_0, при которых z_0 и z_0^2 имеют коэфициенты, тождественно обращающиеся в нуль, получаем

$$a=-\frac{2}{3};\ b=\frac{1}{9}.$$

После этого, положив $y=y'_{\max}$ и приняв $y'_{\max}=-\delta$, определяют соответствующее $y_{\max}$, откуда при помощи выражения (284) находят потом Ω.

При вычислениях, не требующих большой точности, можно ввести дальнейшие упрощения, замечая, что в (292) третьим членом с правой стороны можно пренебречь по сравнению с первыми двумя: если, например $y_0\leqslant 0{,}3y_{\max}$, то его максимальная величина будет порядка 0,012. Выражение (292) в этом случае сильно упростится:

$$-y'_{\max}=y_{\max}-\frac{2}{3}y_0, \qquad (294)$$

и тогда, как видим, максимальное превышение $-y'_{\max}$, получающееся непосредственно после внезапного прекращения расхода, будет меньше максимального превышения $y_{\max}$ в той же системе штольня-башня при нулевых потерях на две третьих от величины первоначальной разности уровней y_0 в водохранилище и башне. Согласно (293), а также положив $y'_{\max}=-\delta$, мы из (284) получим формулу

$$\Omega=\frac{L\omega}{g}\frac{v_0^2}{\left(\delta+\frac{2}{3}y_0\right)^2},$$

которую можно применять в большинстве практических случаев при вычислении площади сечения уравнительной башни, и только в случае необходимости более точных вычислений следует обращаться к уравнению (291).

Такой же порядок вычисления остается и при определении минимального уровня, наступающего вслед за максимальным повышением, а затем и последующих максимумов и минимумов.

Метод всегда один и тот же: необходимо только менять от одного случая к другому начальные условия. Так, если нужно определить максимальное понижение y'' (положительное) за первый период колебания, достаточно в качестве начальных условий взять уже вычисленный максимальный уровень $y_{\max}=-\delta$ и положить $v=0$, не забывая при этом, что ввиду изменения направления движения в штольне знак при члене $\frac{L'v^2}{C^2R}$ в уравнении (286) нужно переменить на обратный.

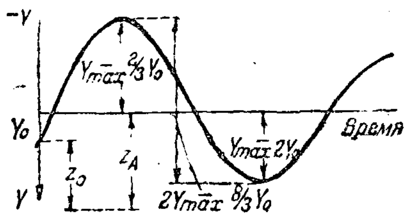
Опуская вычисления, отметим, что в пределах точности выражения (294) можно положить

$$y''=y_{\max}-2y_0,$$

при этом полный размах первого после прекращения расхода колебания будет равен

$$-y'_{\max}+y''=2y_{\max}-\frac{8}{3}y_0.$$

На фиг. 152 дан пример определенного таким образом колебания. Необходимо только помнить,



Фиг. 152

что изложенный прием позволяет получить лишь максимум и минимум, для полного же определения хода графика колебаний (а следовательно, и моментов наступления максимумов и минимумов) необходимо воспользоваться методом конечных разностей.

Для дальнейшего исследования колебаний уровня в башне необходимо было бы рассмотреть противоположный предыдущему случай внезапного включения в работу турбин при начальных условиях, соответствующих статическому состоянию системы.

Такой случай имеет не меньший, чем предыдущий, практический интерес, поскольку в первый момент после включения питание турбин происходит в основном за счет накопленного объема воды в башне. Важно бывает при этом избежать не только опорожнения последней и не дать таким образом проникнуть воздуху в напорный трубопровод, но и кроме того оставить погруженным под уровень выходное сечение штольни в наиболее критическом случае маневрирования затвором. Таким случаем является внезапное включение линии на нормальную нагрузку (или даже, если имеются соответствующие основания, на максимальную нагрузку).

В качестве начальных условий ($t \leqslant 0$) принимают при этом $v=0$, конечных же: $v=v_0$ и $y=y_0$.

И в этом случае в системе штольня-башня конечный режим устанавливается в результате ряда затухающих колебаний, приводящих, как правило, к понижению уровня в башне по отношению к статическому на величину большую y_0 и всегда большую величины y_{max}, даваемой формулой (284) для случая нулевых потерь.

Путем вычислений, подобных предыдущим, которые мы здесь опускаем, можно показать, что максимальное понижение y''_{max} по отношению к гидростатическому уровню дается приближенной формулой

$$y''_{max}=y_{max}+0{,}125\,y_0, \tag{295}$$

достаточно точной практически при $y_0 \leqslant 0{,}7\,y_{max}$.

Таким образом при постоянном уровне в водохранилище высота уравнительной башни (которая предполагается вертикальной) должна быть не меньше

$$-y'_{max}+y''_{max}=2y_{max}+\left(0{,}125-\frac{2}{3}\right)y_0= =2y_{max}-\frac{1{,}625}{3}y_0$$

и, для того чтобы выходное сечение штольни всегда оставалось под уровнем, последний должен иметь минимальную отметку z_{min} такую, чтобы $z_A-z_{min} \geqslant y''_{max}$.

Задача 41. Рассмотрим случай, данный в предыдущем примере, увеличив при этом скорость v_0 до 1 *м/сек* и имея, следовательно, $y_{max}=10{,}12$ *м* вместо 5,06 *м*. Возьмем для C среднее значение, равное 60, и предположим, что сечение штольни—квадрат со стороной в 2 *м*, так что $\omega=4$ *м²*, $\chi=8$ *м*, $R=0{,}5$ *м*, $L'=L+4\cdot 60\,R=4\,120$ *м*, тогда

$$y_0=\frac{L'v_0^2}{C^2R}=\frac{4\,120}{60^2\cdot 0{,}50}=2{,}28\ м;\ \text{при этом}\ y_0\approx 0{,}22\,y_{max}.$$

Максимальное повышение уровня в башне над статическим в случае полного прекращения расхода в напорном трубопроводе находим по формуле (292) (опуская знак):

$$y'_{max}=y_{max}-\frac{2}{3}y_0+\frac{1}{9}\frac{y_0^2}{y_{max}}=10{,}12-\frac{2}{3}2{,}28+ +\frac{1}{9}\frac{2{,}28^2}{10{,}12}=8{,}66\ м.$$

Максимальное понижение для случая внезапного включения установки по формуле (295):

$$y''_{max}=y_{max}+0{,}125y_0=10{,}12+0{,}29=10{,}41\ м$$

и высота башни будет равна 19,07 *м*.

Если теперь, наоборот, подсчитать площадь Ω горизонтального сечения башни так, чтобы максимальное повышение уровня не превосходило величины 5 *м*, то придем к искомым результатам после подстановки $\delta=-y'_{max}=5$ *м* в формулу (294), из которой найдем

$$y_{max}=\delta+\frac{2}{3}y_0=5{,}00+\frac{2}{3}\cdot 2{,}28=6{,}52\ м,$$

после чего из формулы (290) уже находим

$$\Omega=\frac{L\omega}{g}\frac{v_0^2}{y_{max}^2}=\frac{4\,000\cdot 4}{9{,}8}\frac{1}{6{,}52^2}=38{,}4\ м^2.$$

Таким образом, чтобы свести повышение уровня в башне с 10,12 *м* опять к 5 *м*, необходимо площадь сечения башни увеличить с 16 *м²* до 38,4 *м²*.

В башне с новым сечением максимальное понижение уровня при внезапном включении турбин будет равняться

$$y''_{max}=y_{max}+0{,}125y_0=6{,}52+0{,}125\cdot 2{,}28\approx 6{,}80\ м$$

и полная высота башни, следовательно, должна быть уже равной только $5+6{,}80=11{,}80$ *м*.

ГЛАВА XIV

ОСНОВЫ УСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ОТКРЫТЫХ РУСЛАХ

В предыдущей главе рассматривалось движение жидкости в закрытом русле, при котором живое сечение потока соответствует полностью внутреннему геометрическому сечению самого русла. В этом случае появление на пути потока каких-либо факторов, влияющих на гидравлический характер движения, например, отдельных местных сопротивлений, не влечет за собой изменений живого сечения потока, жестко ограниченного замкнутым контуром русла. Влияние упомянутых факторов в заполненном закрытом русле проявляется в распределении падения напора по пути движения потока.

В отличие от изложенного так называемого «напорного» вида движения жидкости в настоящей главе рассматривается установившееся движение жидкости в открытых руслах (включая в это понятие и движение в закрытом русле, частично заполненном жидкостью). Движение в открытом русле характерно тем, что все точки свободной поверхности потока находятся под одинаковым воздействием внешней среды, т. е. под одинаковым давлением.

Всякое изменение условий движения в таком потоке, например, появление какой-либо преграды, расширение или сужение русла, изменение уклона дна русла и т. п., неизбежно влечет за собой изменение живого сечения и, следовательно, координат свободной поверхности потока.

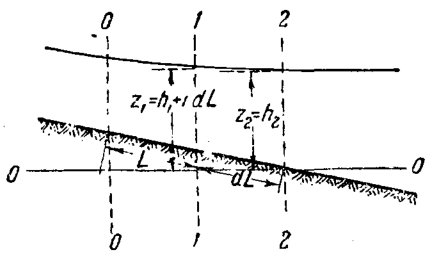
В дальнейшем изложении будет рассматриваться лишь такое установившееся движение жидкости в открытых руслах, которое характеризуется очень малой кривизной отдельных струек жидкости (линий тока) и перпендикулярностью направления скоростей к плоскости живого сечения, принимаемого за плоское.

Такое ограничение позволит при выводах уравнений движения жидкости пренебрегать центробежными силами и составляющими скорости в плоскости живого сечения и полагать, что гидродинамическое давление распределяется по живому сечению, подчиняясь установленным выше законам гидростатики.

Движение жидкости, удовлетворяющее таким условиям и называемое «плавно-изменяющимся», может иметь место в руслах, размеры и форма которых по пути потока изменяются очень плавно.

§ 103. Диференциальное уравнение установившегося плавно-изменяющегося движения жидкости

Рассмотрим продольный профиль прямолинейного потока по линии наибольших глубин, показанный на фиг. 153. Геометрические размеры русла будем полагать изменяющимися по оси движения весьма плавно, а сам поток, следовательно, находящимся в условиях плавно-изменяющегося движения.



Фиг. 153

Рассмотрим в потоке сечение *(1—1)*, отстоящее от произвольно избранного начального сечения *(0—0)* на расстоянии L, и второе сечение *(2—2)* ниже по течению от первого на бесконечно малую величину dL.

Напишем для выделенных сечений уравнение Бернулли (для точек на свободной поверхности) относительно горизонтальной плоскости $0-0$:

$$(h_1+idL)+\frac{p_0}{\gamma}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=h_2+\frac{p_0}{\gamma}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+dH_{mp}.$$

Здесь обозначено:

i — уклон линии дна русла;

v_1, v_2 — средние скорости в соответствующих живых сечениях потока;

α_1, α_2 — коэфициенты, учитывающие неравномерность распределения скоростей по сечению (§ 44);

p_0 — давление на свободной поверхности;

h_1, h_2 — глубины потока в сечениях;

dH_{mp} — потери напора на преодоление сопротивлений (трения) при движении жидкости на пути dL.

Примем в дальнейшем изложении $\alpha_1=\alpha_2=\alpha$ и перепишем уравнение Бернулли так:

$$idL-(h_2-h_1)=\frac{\alpha}{2g}(v_2^2-v_1^2)+dH_{mp}.$$

Заменяя соответствующие разности диференциалами и деля на dL, получим

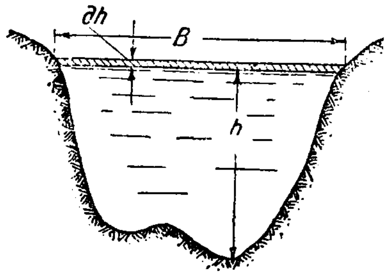
$$i-\frac{dh}{dL}=\frac{\alpha}{2g}\frac{d}{dL}(v^2)+\frac{dH_{mp}}{dL}. \qquad (296)$$

Рассмотрим члены правой части последнего уравнения, записанные пока символически.

Прежде всего выполним диференцирование выражения $\frac{\alpha}{2g}\frac{d}{dL}$ (v^2), заменяя v^2 равным ему значением $Q^2\omega^{-2}$ и учитывая, что $\omega=f(h,L)$. Имеем

$$\frac{\alpha}{2g}\frac{d}{dL}(v^2)=\frac{\alpha}{2g}\frac{d}{dL}(Q^2\omega^{-2})=-\frac{\alpha Q^2}{g\omega^3}\left(\frac{\partial\omega}{\partial L}+\frac{\partial\omega}{\partial h}\frac{dh}{dL}\right).$$

Из рассмотрения фиг. 154 замечаем, что приращению глубины ∂h соответствует прира-



Фиг. 154

щение площади живого сечения $\partial\omega$ (на фиг. 154 заштриховано) и, следовательно,

$$\frac{\partial\omega}{\partial h}=B,$$

где B — ширина потока по линии свободной поверхности.

Поэтому можем записать

$$\frac{\alpha}{2g}\frac{d}{dL}(v^2)=-\frac{\alpha Q^2}{g\omega^3}\left(\frac{\partial\omega}{\partial L}+B\frac{dh}{dL}\right). \qquad (297)$$

Несколько сложнее определение второго члена правой части уравнения (296). До сих пор вопрос о величине сил трения, проявляющихся при плавно-изменяющемся движении, в общем случае не нашел еще своего решения.

Для частного случая — равномерного движения в § 85 было установлено, что потери напора на преодоление путевых сопротивлений равны

$$H_{тр}=\frac{v^2L}{C^2R}=\frac{Q^2}{K^2}L=\frac{Q^2L}{\omega^2C^2R}. \qquad (298)$$

Примем с некоторым допущением, что и при плавно-изменяющемся движении силы трения определяются тем же уравнением, что и при частном его случае — равномерном движении.

Согласиться с таким допущением можно именно в силу плавно-изменяющихся условий движения и потому, что применение уравнений, получаемых при упомянутом допущении, приводит к практически правильным результатам.

Поэтому, учитывая (297) и (298), перепишем уравнение (296) в таком виде:

$$i-\frac{dh}{dL}=-\frac{\alpha Q^2}{g\omega^3}\left(\frac{\partial\omega}{\partial L}+B\frac{dh}{dL}\right)+\frac{v^2}{C^2R}, \qquad (299)$$

откуда

$$\frac{dh}{dL}=\frac{i-\frac{Q^2}{\omega^2C^2R}\left(1-\frac{\alpha C^2R}{g\omega}\frac{\partial\omega}{\partial L}\right)}{1-\frac{\alpha Q^2}{g}\cdot\frac{B}{\omega^3}}. \qquad (300)$$

Правый член знаменателя может быть представлен в таком виде:

$$\frac{\alpha Q^2B}{g\omega^3}=\frac{\alpha v^2}{gh_{cp}},$$

где через h_{cp} обозначено $\frac{\omega}{B}$ или, иначе говоря, h_{cp} — высота прямоугольника шириной B, равновеликого площади живого сечения.

Если эту глубину h_{cp} принять как характерную линейную величину при сравнении между собой живых сечений, то нетрудно видеть (§ 53), что $\frac{\alpha Q^2B}{g\omega^3}$ представляет собой безразмерное число Фруда:

$$\frac{\alpha Q^2B}{g\omega^3}=\frac{\alpha v^2}{gh_{cp}}=\mathrm{Fr}.$$

Уравнение (300) и является общим диференциальным уравнением установившегося плавно-изменяющегося движения жидкости в открытом русле.

При этом отметим, что при выборе в качестве характерной линейной величины глубины потока число Фруда представляет собой удвоенное отношение удельной кинетической энергии потока к удельной его потенциальной энергии и таким образом характеризует, так сказать, энергетическую структуру потока.

Первым, давшим вывод уравнения плавно-изменяющегося движения, был Bélanger (1828). Одновременно этот же вопрос был решен и Poncelet (1828). Дальнейшее развитие и уточнение вопроса связаны с именами: Coriolis'a (1836), Navier (1838), St-Venant'a (1851), Boussinesq'a (1897).

Более подробно с развитием рассматриваемого вопроса можно ознакомиться по работе проф. Б. А. Бахметева: «О неравномерном движении жидкости в открытом русле», 1928 г.

§ 104. Основные виды установившегося движения жидкости в открытом русле

Уравнение (300) отражает собой закон изменения глубин потока по его длине в русле, форма и размеры которого по пути изменяются, но весьма плавно. Иначе говоря, уравнение (300) отражает условия установившегося движения жидкости в непризматическом русле.

Анализ уравнения (300) позволяет легко установить основные виды установившегося движения жидкости в открытом русле как частные его случаи.

Прежде всего рассмотрим частный случай установившегося движения жидкости в призматическом русле, т. е. случай, когда форма и размеры русла постоянны по длине потока.

В этом случае $\frac{\partial\omega}{\partial L}=0$ и уравнение (300) значительно упрощается, принимая частный вид:

$$\frac{dh}{dL}=\frac{i-\frac{Q^2}{\omega^2C^2R}}{1-\frac{\alpha Q^2}{g}\cdot\frac{B}{\omega^3}}. \qquad (301)$$

Если в призматическом русле установившееся движение жидкости происходит при постоянной глубине наполнения русла $h=\text{const}$, то очевидно, что $\omega=\text{const}$ и $v=\frac{Q}{\omega}=\text{const}$, а само движение будет равномерным.

Уравнение (300) в таком частном случае при $\frac{dh}{dL}=0$ примет вид

$$i-\frac{Q^2}{\omega^2C^2R}=0$$

или

$$Q=\omega C\sqrt{Ri}=K_0\sqrt{i},$$

известное уже из § 85 как уравнение равномерного движения жидкости (уравнение Шези).

Величину $K_0=\frac{Q}{\sqrt{i}}=\omega C\sqrt{R}$ будем попрежнему называть расходной характеристикой живого сечения. Эта величина K_0, как видно, имеет размерность расхода и по физическому смыслу представляет собой расход в данном русле при том же наполнении, но при уклоне $i=1$.

Таким образом можно отметить как подлежащие детальному изучению следующие основные виды установившегося движения жидкости в открытом русле:

1. Равномерное движение жидкости

$$Q=\omega C\sqrt{Ri}=K_0\sqrt{i}. \tag{302}$$

2. Установившееся неравномерное движение жидкости в призматических руслах

$$\frac{dh}{dL}=\frac{i-\frac{Q^2}{\omega^2C^2R}}{1-\frac{\alpha Q^2}{g}\cdot\frac{B}{\omega^3}}=i\,\frac{1-\frac{K_0^2}{K^3}}{1-Fr}. \tag{303}$$

3. Установившееся неравномерное движение жидкости в непризматических руслах

$$\frac{dh}{dL}=i\,\frac{1-\frac{Q^3}{\omega^2C^2R}\left(1-\frac{\alpha C^2R}{g\omega}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial L}\right)}{1-\frac{\alpha Q^2}{g}\cdot\frac{B}{\omega^3}}. \tag{304}$$

Отдельно необходимо обратить внимание на следующую особенность уравнений (303) и (304). При числе Фруда, равном единице, или, иначе, при $\frac{\alpha Q^2B}{g\omega^3}=1$, знаменатель (303) и (304) обращается в нуль и тогда $\frac{dh}{dL}=\infty$. Следовательно, при $Fr=1$ наступает разрыв непрерывности рассматриваемой функции, что придется иметь в виду в дальнейшем при интегрировании полученных диференциальных уравнений.

ГЛАВА XV

РАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ОТКРЫТЫХ РУСЛАХ (КАНАЛАХ)

§ 105. Общие сведения

Равномерное движение потока характеризуется постоянством средних скоростей и постоянством осредненных скоростей во всех поперечных сечениях русла.

Равномерное движение жидкости в открытом русле может иметь место лишь при наличии определенных условий, а именно:

1) постоянства расхода ($Q=\text{const}$);

2) постоянства поперечного сечения ($\omega=\text{const}$);

3) постоянства гидравлического уклона, равного в рассматриваемом случае уклону дна русла ($i=\text{const}$);

4) однотипности шероховатости смоченной поверхности русла по его длине;

5) отсутствия местных сопротивлений.

Перечисленные условия имеют место в основном в искусственных водотоках — каналах. В связи с этим в данной главе и рассматриваются главным образом гидравлические расчеты искусственных водотоков.

Основное расчетное уравнение равномерного движения турбулентных потоков базируется на известной формуле Шези и было записано в виде (298) или (302), а именно:

$$Q=\omega C\sqrt{Ri}$$

или

$$Q=K_0\sqrt{i},$$

где $K_0=\omega C\sqrt{R}$ — «расходная характеристика» канала при заданном его наполнении.

Для определения коэфициента C в дальнейших расчетах мы пользуемся в основном формулой Форхгеймера как наиболее простой по своей структуре, отвечающей теоретическим требованиям, изложенным в § 69, и дающей практически вполне удовлетворительные результаты.

От пользования другими, более сложными формулами считаем возможным отказаться и потому, что при практических расчетах в области гидротехники и мелиорации ряд исходных данных не может претендовать на исчерпывающую точность, как, например, расчетный расход и значение коэфициента шероховатости.

§ 106. Поперечное сечение каналов. Гидравлически наивыгоднейший профиль

Поперечное сечение открытых русел может быть самым разнообразным в зависимости от их целевого назначения, характера и условий их работы.

Так, например, в канализационных коллекторах широко употребляются замкнутые круглые или яйцевидные профили, работающие неполным сечением; каналам для осушения или орошения земельных угодий чаще всего придают трапецоидальную форму, с заложением откосов применительно к свойствам грунта; естественные же русла отличаются обычно неправильной криволинейной формой поперечного сечения, слагающейся в результате определенного взаимодействия между движущимся потоком и ложем русла.

С чисто гидравлической точки зрения наивыгоднейшей формой поперечного сечения открытого русла является такая, которая при одинаковой площади живого сечения и заданном уклоне обеспечивает наибольшую пропускную способность или, иначе говоря, при заданном расходе пропустит его при наименьшей площади.

Как видно из уравнения (302), гидравлически наивыгоднейший профиль получится при наибольшем значении гидравлического радиуса $R=\frac{\omega}{\chi}$ или (при данной площади) при наименьшем значении смоченного периметра χ.

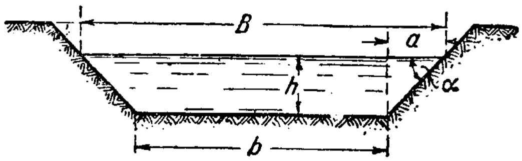
Из всех равновеликих фигур наименьшим периметром отличается круг и, следовательно, для открытого канала гидравлически наивыгоднейшим сечением является полукруг.

Практически полукруглый профиль канала применяется в исключительных случаях, так как он требует специального крепления и вообще трудно выполним.

Большинству искусственно выполняемых каналов придают форму трапеции, причем откос канала m назначается в зависимости от характера одежды канала (см. сведения в гидравлических справочниках).

Ясно, что при выбранном откосе m одна и та же площадь трапеции может быть сконструирована различно, придавая разные соотношения между шириной трапеции по дну и ее высотой (глубиной).

Рассмотрим, при каком же соотношении $\beta=\frac{b}{h}$ будет наименьшим смоченный периметр.



Фиг. 155

Введем для дальнейших расчетов следующие обозначения применительно к фиг. 155:

b — ширина канала по дну;

B — ширина канала по верху;

h — глубина наполнения канала;

$a=h\cdot\operatorname{ctg}\alpha$ — заложение откоса;

$\frac{a}{h}=\operatorname{ctg}\alpha=m$ — мера крутизны откоса, так называемый коэфициент откоса;

$\sqrt{a^2+h^2}=h\sqrt{1+m^2}$ — смоченная длина откоса;

$\chi=b+h\cdot 2\sqrt{1+m^2}$ — смоченный периметр;

$\omega=bh+mh^2$ — живое сечение канала;

$\beta=\frac{b}{h}$ — относительная ширина канала.

При принятых обозначениях найдем, какое соотношение $\beta=\frac{b}{h}$ обеспечит минимум $\chi=b+h\cdot 2\sqrt{1+m^2}$ при заданной площади ω.

Для этого прежде всего заменим в выражениях для χ и ω величину b равной ей βh и решим задачу на минимум.

Имеем: $\omega=\beta h^2+mh^2=h^2(\beta+m)=\text{const}$,

$$d\omega=h^2d\beta+(\beta+m)2hdh=0,$$

$$\chi=h(\beta+2\sqrt{1+m^2}),$$

$$d\chi=hd\beta+(\beta+2\sqrt{1+m^2})dh=0.$$

Определяя из последнего равенства

$$d\beta=-\frac{\beta+2\sqrt{1+m^2}}{h}dh$$

и подставляя найденное значение $d\beta$ в уравнение для $d\omega$, получим

$$-\frac{h^2(\beta+2\sqrt{1+m^2})dh}{h}+(\beta+m)2hdh=0,$$

откуда находим[1]

$$\beta_{г.н}=2(\sqrt{1+m^2}-m). \qquad (305)$$

Следовательно, для получения гидравлически наивыгоднейшего профиля трапецоидальной формы нужно трапецию построить так, чтобы отношение ширины по дну к глубине было равно $\beta_{г.н}$.

Из (305) видно, что $\beta_{г.н}=f(m)$ и, следовательно, для каждого типа откосов $\beta_{г.н}$ имеет постоянные значения, приведенные ниже:

Коэфициент откоса m	0	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,75	3,00
Относительная ширина канала при гидравлически наивыгоднейшем профиле $\beta_{г.н}=\frac{b}{h}$	2,000	1,562	1,236	1,000	0,828	0,702	0,606	0,532	0,472	0,424	0,385	0,325

Отметим, что при гидравлически наивыгоднейшем профиле канала гидравлический радиус R получает характерное значение для всех типов откосов.

Имеем для любого трапецоидального русла:

$$\omega=h^2(\beta+m),$$

$$\chi=h(\beta+2\sqrt{1+m^2}),$$

где $\beta=\frac{b}{h}$.

[1] Здесь и в дальнейшем значком *г.н* обозначаем величины для гидравлически наивыгоднейшего профиля.

Принимая для гидравлически наивыгоднейшего профиля значение β по (305), получим

$$R_{г.н}=\frac{\omega}{\chi}=\frac{h^2(2\sqrt{1+m^2}-m)}{2h(2\sqrt{1+m^2}-m)}=\frac{h}{2}, \qquad (306)$$

т. е. что

гидравлический радиус для каналов гидравлически наивыгоднейшего профиля равен половине глубины наполнения.

Очень часто при расчете осушительных или оросительных каналов глубина воды в канале h предопределяется возлагаемыми на канал специальными мелиоративными задачами.

При заданном заранее значении h, очевидно, отпадает вопрос о гидравлически наивыгоднейшем профиле, если выбор уклона не свободен.

§ 107. Допускаемые скорости течения воды в каналах

При проектировании и расчете каналов нельзя упускать из виду скорость течения, с которой заданный расход проходит по руслу.

Слишком большие скорости вызовут размыв и разрушение канала и, наоборот, скорости ниже некоторого предела приведут к отложению в канале взвешенных в воде наносов и к постепенному заилению его.

Верхняя граница допускаемых скоростей v_{max} зависит от характера материала стенок канала, от его способности противостоять размыву.

Чрезвычайное многообразие различных грунтов и искусственных креплений каналов не позволяет назвать жесткие нормативы предельных скоростей. Однако большой опыт, накопленный в результате наблюдений над каналами, все-таки дает возможность говорить о практических значениях предельных скоростей для тех или иных характерных типов материала стенок каналов.

Подробные данные о допускаемых неразмывающих средних скоростях для различных грунтов и типов одежды каналов приводятся в соответствующих справочниках.

Краткие основные сведения приводятся в табл. 38.

Что же касается допускаемых минимальных скоростей, предохраняющих каналы от заиления, то ясно, что они зависят не от рода материала ложа канала, а от характера взвешенных в воде наносов.

Особенное значение приобретает назначение минимальной скорости при проектировании ирригационных систем.

В мировой оросительной практике для определения $v_{п}$, предохраняющей от заиления, широко пользуются эмпирическими формулами, предложенными Кеннеди и Гриффитс-Лассеем на основе изучения ряда действующих ирригационных систем.

Таблица 38

Допускаемые средние скорости в каналах[1]

№ по пор.	Наименование грунтов или типов креплений	Допускаемые средние скорости м/сек при средней глубине потока			
		0,4 м	1,0 м	2,0 м	3 м и более
1	Мало-плотные глины и суглинки	0,33	0,40	0,46	0,50
2	Средне-плотные „ „ „	0,70	0,85	0,95	1,1
3	Плотные „ „ „	1,0	1,2	1,4	1,5
4	Очень плотные „ „ „	1,4	1,7	1,9	2,1
5	Лессовые грунты средней плотности в условиях закончившихся просадок	0,6	0,7	0,8	0,85
6	Дерн свежий плашмя	0,6	0,8	0,9	1,0
7	„ „ в стенку	1,5	1,8	2,0	2,2
8	Свежие хворостяные покрытия и хворостяные крепления	1,8	2,2	2,5	2,7
9	Одиночная мостовая из булыжника размером около 20 *см*	2,5—2,9	3,0—3,5	3,5—4,0	3,8—4,3
10	Двойная мостовая из булыжника размером около 20 *см*	3,1—3,6	3,7—4,3	4,3—5,0	4,6—5,4
11	Габионы	до 4,2	до 5,0	до 5,7	до 6,2
12	Кладка из кирпича на цементном растворе	1,6	2,0	2,3	2,5
13	Бутовая кладка из слабых пород на цементном растворе	2,9	3,5	4,0	4,4
14	То же из средних пород	5,8	7,0	8,1	8,7
15	Кладка из клинкера на цементном растворе	7,1	8,5	9,8	11
16	Деревянные лотки	до 25 *м* в секунду			

[1] „Стандарты, нормы и технические условия проектирования гидротехнических сооружений гидроэлектростанций", сборник № 1, 1939 г.

Эти эмпирические формулы имеют следующий вид:

а) Формула Кеннеди

$$v_{min}=ah^{0,64} \qquad (307)$$

б) Формула Гриффитс-Лассея

$$v_{min}=a'\cdot\sqrt{R}. \qquad (308)$$

В этих формулах

h — глубина наполнения канала;

R — гидравлический радиус;

a, a' — некоторые численные коэфициенты, имеющие следующие значения (табл. 39):

Таблица 39

Характеристика наносов	a	a'
Крупные песчано-илистые наносы	0,60 — 0,71	0,65 — 0,77
Средние » »	0,54 — 0,57	0,58 — 0,64
Мелкие наносы	0,39 — 0,41	0,41 — 0,45
Очень мелкие наносы	0,34 — 0,37	0,37 — 0,41

Кроме приведенных формул можно также отметить формулу, предложенную проф. В. Н. Гончаровым:

$$p=\frac{0{,}0535}{h}\left(\frac{v_{min}}{v_0h^{0,2}}\right)^4\cdot\left(1-\frac{v_0h^{0,2}}{v_{min}}\right), \qquad (309)$$

где p — весовое содержание фракций наносов крупнее 0,005 *мм* (в промиллях);

v_0 *м/сек* — скорость, при которой происходит осаждение наносов данной крупности при глубине потока $h=1$ *м*;

v_{min} — упомянутая выше минимальная незаиляющая скорость.

Нижеприводимая табл. 40 содержит готовые начения v_{min}, вычисленные по формуле (309).

Таблица 40

Состав взвешенных наносов	Средняя глубина	При весовом содержании фракций наносов крупнее 0,005 *мм* в промиллях						
		0,1	0,5	1,0	2,5	5,0	7,5	10
		Значения v_{min} *м/сек*						
0,25—0,05 *мм* 25 % 0,05—0,005 *мм* 75 %	0,30	0,22	0,28	0,32	0,39	0,45	0,49	0,52
	0,60	0,28	0,37	0,43	0,52	0,60	0,66	0,70
	1,00	0,34	0,45	0,52	0,64	0,75	0,82	0,87
	1,50	0,39	0,54	0,62	0,76	0,89	0,97	1,04
	2,00	0,44	0,60	0,70	0,86	1,01	1,10	1,18
	2,50	0,48	0,66	0,77	0,94	1,11	1,22	1,30
	3,00	0,51	0,71	0,83	1,02	1,20	1,32	1,41
0,25—0,05 *мм* 75 % 0,05—0,005 *мм* 25 %	0,30	0,28	0,37	0,42	0,50	0,58	0,64	0,68
	0,60	0,36	0,48	0,55	0,67	0,78	0,85	0,91
	1,00	0,43	0,59	0,68	0,83	0,97	1,06	1,13
	1,50	0,51	0,69	0,80	0,98	1,15	1,26	1,35
	2,00	0,57	0,78	0,91	1,11	1,31	1,43	1,53
	2,50	0,61	0,86	0,99	1,22	1,44	1,57	1,69
	3,00	0,66	0,92	1,07	1,32	1,55	1,70	1,82
1,0—0,25 *мм* 25 % 0,25—0,05 *мм* 75 %	0,30	0,39	0,51	0,58	0,70	0,81	0,88	0,94
	0,60	0,50	0,67	0,76	0,93	1,08	1,18	1,26
	1,00	0,60	0,82	0,94	1,15	1,34	1,47	1,57
	1,50	0,70	0,96	1,11	1,36	1,59	1,75	1,87
	2,00	0,78	1,08	1,26	1,54	1,80	1,98	2,12
	2,50	0,85	1,19	1,38	1,69	1,99	2,18	2,33
	3,00	0,92	1,28	1,49	1,83	2,15	2,36	2,53
1,0—0,25 *мм* 75 % 0,25—0,05 *мм* 25 %	0,30	0,57	0,73	0,84	1,00	1,16	1,27	1,35
	0,60	0,72	0,96	1,10	1,34	1,56	1,70	1,82
	1,00	0,87	1,18	1,36	1,66	1,93	2,12	2,27
	1,50	1,01	1,39	1,61	1,96	2,30	2,52	2,70
	2,00	1,13	1,56	1,81	2,22	2,60	2,86	3,06
	2,50	1,23	1,71	1,99	2,44	2,87	3,15	3,37
	3,00	1,32	1,85	2,15	2,64	3,10	3,41	3,65

Изложенные выше соображения показывают, что при проектировании каналов необходимо добиваться, чтобы средняя скорость течения в канале находилась в интервале между допускаемыми скоростями, с одной стороны, на заиление и, с другой, на размыв, т. е. $v_{max} > v > v_{min}$.

§ 108. Типы задач при расчете каналов. Основы расчета

В основном все гидравлические расчеты каналов могут быть сведены к двум классам:

1. Гидравлические расчеты при проектировании новых каналов. Посмотрим, какие отдельные элементы могут встречаться при таких расчетах.

Основное уравнение равномерного движения (302) при подстановке значения C по формуле Форхгеймера принимает такой вид:

$$Q = \omega C\sqrt{Ri} = \frac{\sqrt{i}}{n} \cdot \frac{\omega^{1,7}}{\chi^{0,7}}$$

или в общем виде

$$Q = f(b,\ h,\ m,\ n,\ i). \qquad (310)$$

Из последнего равенства видно, что при гидравлическом расчете новых каналов возможен ряд типов задач, сводящихся к определению отдельных компонентов уравнения (310) при заданных значениях остальных из них.

2. Гидравлические расчеты для существующих каналов с заданными размерами и характером ложа. В этом случае известны: профиль поперечного сечения с его линейными размерами, продольный уклон дна русла и коэфициент шероховатости.

Расчету в этом случае подлежат или расход Q при той или иной заданной глубине наполнения h или же глубина наполнения при пропуске определенного расхода.

Уравнение Шези в форме $Q = \omega C\sqrt{Ri}$ для перечисленных типов задач содержит одно неизвестное. Однако, при подстановке отдельных компонентов ω, C, R в уравнение, последнее часто становится по структуре сложным и решение его оказывается возможным только методом постепенных приближений — подбором.

Технику расчета каналов подбором по уравнению Шези рассмотрим на следующем примере.

Пусть требуется определить ширину по дну b трапецоидального канала с коэфициентом откоса m при глубине h, коэфициенте шероховатости n и уклоне i так, чтобы расход канала равнялся Q.

Задаваясь в первом приближении некоторым произвольным значением ширины по дну b_1, определяют соответствующие величине b_1 значения:

$$\omega_1 = b_1 h + mh^2;$$

$$\chi_1 = b_1 + 2h\sqrt{1+m^2};$$

$$R_1 = \frac{\omega_1}{\chi_1}$$

и C_1—по одной из эмпирических формул § 66.

Подстановкой полученных значений ω_1, C_1, R_1 в уравнение Шези определяют расход Q_1 канала при намеченной ширине его b_1.

Как правило, полученное значение Q_1 окажется больше или меньше расхода Q, заданного по условию. Тогда принимают для второго приближения другое значение ширины по дну b_2 и снова вычисляют соответствующие значения ω_2, χ_2, R_2, C_2 и получают новое значение расхода $Q_2 = \omega_2 C_2\sqrt{R_2 i}$, более близкое к заданной величине Q.

Так путем постепенных приближений, наконец, определяют искомое значение b, обеспечивающее пропуск заданного расхода Q.

Расчет каналов правильной формы, например трапецоидальной, можно проводить, не прибегая к постепенному подбору, пользуясь так называемым «методом абстрактной модели», к рассмотрению которого и перейдем.

§ 109. Абстрактная модель каналов

Как видно из уравнения (310), равномерное движение жидкости в открытом русле определяется рядом факторов. Многообразие их усложняет технику расчетов при проектировании новых каналов. Чтобы освободиться от многообразия отдельных факторов, введем в рассмотрение понятие об «абстрактной модели канала», сущность которой заключается в следующем.

Допустим, что в результате проектирования должен быть получен канал с определенными геометрическими размерами, который при заданном коэфициенте шероховатости n и уклоне i обеспечивает пропуск нужного расхода Q, т. е. удовлетворяет уравнению (310):

$$Q = \frac{\omega^{1,7}}{\chi^{0,7}} \cdot \frac{\sqrt{i}}{n}.$$

Построим мысленно вместо рассматриваемого реального канала его модель с геометрически подобным живым сечением, приняв за линейный масштаб моделирования некоторую величину λ.

При этом ясно, что λ представляет собой отношение любых линейных размеров канала к соответствующим размерам модели, т. е.

$$\frac{B}{B_м} = \frac{b}{b_м} = \frac{h}{h_м} = \frac{\chi}{\chi_м} = \frac{R}{R_м} = \lambda,$$

где величины с индексом $м$ — отдельные геометрические размеры модели.

Отношение же соответствующих площадей будет определяться квадратом линейного масштаба:

$$\frac{\omega}{\omega_{мод}} = \lambda^2.$$

Построенной таким образом геометрически подобной модели канала придадим такую шероховатость, которой по шкале Гангилье-Куттера соответствовало бы значение $n = 1$, и поставим ее с уклоном $i = 1$.

Модель канала, удовлетворяющую перечисленным условиям, будем называть „абстрактной моделью канала".

Для предусмотренных условий абстрактная модель канала является физически реальной категорией и, следовательно, равномерное движение жидкости в ней будет также подчиняться общему уравнению (310).

Принимая во внимание, что для абстрактной модели канала $n = 1$ и $i = 1$, получим

$$Q_м = \frac{\omega_м^{1,7}}{\chi_м^{0,7}}. \tag{311}$$

Выбор масштаба моделирования λ рассмотрим на конкретных примерах.

Возьмем каналы полукруглого сечения. Живые сечения таких каналов будут вполне определены линейными размерами радиуса r и глубины наполнения h. В качестве масштаба моделирования могут быть поэтому избраны или $\lambda_1 = r$ или $\lambda_2 = h$.

В первом случае ($\lambda_1 = r$) абстрактные модели каналов будут выражены полукругом с $r = 1$ и расход модели будет зависеть только от h. В этом случае для расходов абстрактной модели может быть составлена таблица или график $Q_м = f(h)$ по уравнению (311).

Во втором случае абстрактные модели сведутся к полукругам различного радиуса, но с постоянной глубиной $h = 1$ *м*. Расходы абстрактной модели в данном случае можно также вычислить по (311) в виде

$$Q_м = f(r_м).$$

Так как моделирование может быть производимо лишь при условии, когда известен численный его масштаб, то ясно, что выбор масштаба в приведенных двух случаях зависит от того, какая из двух величин r или h задана в условиях проектирования.

Рассмотрим каналы также полукруглого сечения, но работающие полным сечением, т. е. при $h = r$. Очевидно, что в этом случае живое сечение вполне определяется одним параметром — r. Поэтому масштабом моделирования должно быть принято $\lambda = r$. Для любых полукругов, работающих полным сечением, мы получим единую абстрактную модель канала в виде полукруга с $r_м = 1$. Расход такой модели при $n = 1$ и $i = 1$ уже не будет функциональной величиной, а примет постоянное значение:

$$Q_м = \frac{\omega_м^{1,7}}{\chi_м^{0,7}} = \frac{\pi}{2^{1,7}} = 0{,}966 \ м^3/сек.$$

Остановимся еще на трапецоидальных каналах, имеющих наиболее существенное значение с точки зрения гидротехнической практики.

Живое сечение трапецоидального канала определенного откоса m определяется двумя параметрами: шириной по дну b и глубиной наполнения h. Следовательно, в этом случае возможны два масштаба моделирования $\lambda_1 = h$ или $\lambda_2 = b$, выбор которых, как уже ясно из предыдущего, зависит от того, какая из этих двух величин задана в условиях проектирования.

При масштабе моделирования $\lambda = h$ абстрактные модели каналов будут представлены рядом подобных трапеций того же откоса m с глубиной наполнения $h = 1$ *м* и шириной по дну $b_м = \beta = \frac{b}{h}$. Расходы таких моделей будут зависеть от ширины модели по дну β. Численные значения расходов таких моделей могут быть вычислены в виде таблицы или графика $Q_м = f(\beta)$.

При масштабе же моделирования $\lambda = b$ абстрактные модели также будут подобными трапециями с $\beta = 1$ *м* и глубиной $h_м = \frac{h}{b}$, а расходы будут

$$Q_м = f(h).$$

Для каналов гидравлически наивыгоднейшего профиля при заданном коэфициенте откоса m абстрактные модели сведутся только к одной трапеции.

При $\lambda = h$ это будет трапеция с глубиной $h_м = 1$ *м* и шириной согласно (305)

$$\beta_{г.н} = 2(\sqrt{1+m^2} - m).$$

Расход такой модели будет постоянной величиной:

$$Q'_м = \frac{\omega_м^{1,7}}{\chi_м^{0,7}} = \frac{(\beta_{г.н}+m)^{1,7}}{(\beta_{г.н}+2\sqrt{1+m^2})^{0,7}} = \frac{2\sqrt{1+m^2} - m}{2^{0,7}} = f(m). \tag{312}$$

Установив таким образом понятие об абстрактной модели и ее особенностях, составим уравнение связи между реальным каналом и его абстрактной моделью.

Для этого, имея

$$\omega = \omega_м \cdot \lambda^2,$$
$$\chi = \chi_м \cdot \lambda,$$

перепишем уравнение (310) в таком виде:

$$Q = \frac{(\omega_м \lambda^2)^{1,7}}{(\chi_м \cdot \lambda)^{0,7}} \cdot \frac{\sqrt{i}}{n} = \frac{\omega_м^{1,7}}{\chi_м^{0,7}} \cdot \lambda^{2,7} \frac{\sqrt{i}}{n}$$

или, с учетом (311),

$$Q = Q_м \cdot \lambda^{2,7} \frac{\sqrt{i}}{n}. \tag{313}$$

На основе этого уравнения можно притти к заключению, что всякое проектирование реального канала с расходом Q может быть сведено к расчету абстрактной модели с другим расходом

$$Q_м = Q \cdot \lambda^{-2,7} \frac{n}{\sqrt{i}}. \tag{314}$$

При этом, конечно, все линейные размеры на модели будут представлять собой искомые размеры реального канала, измененные в λ раз.

Расчет же линейных размеров самой модели при наличии составленных таблиц, например, $Q_м = f(\beta)$, не вызывает никаких затруднений.

Аналогично предыдущему рассмотрим также уравнения связи для средней скорости течения в реальных каналах и их абстрактных моделях.

Для реальных каналов средняя скорость течения, как уже известно, выражается формулой Шези, которая при $C = \frac{1}{n} R^{0,2}$ (по Форхгеймеру) имеет вид

$$v = R^{0,7} \frac{\sqrt{i}}{n}.$$

Для абстрактной модели канала, полагая $i = 1$ и $n = 1$, соответственно запишем

$$v_м = R_м^{0,7}.$$

Принимая же во внимание, что $R = R_м \lambda$, получим

$$v = v_м \cdot \lambda^{0,7} \frac{\sqrt{i}}{n}. \tag{315}$$

§ 110. Гидравлические расчеты при проектировании каналов с заданной глубиной наполнения

В настоящем параграфе рассматривается проектирование новых каналов трапецоидального профиля, которые наиболее широко применяются в гидротехнической практике.

Применим для расчета основных типов задач метод абстрактной модели, приняв масштаб моделирования $\lambda = h$.

Уравнения абстрактной модели для расхода ($Q_м$) и скорости ($v_м$) в данном случае будут

$$Q_м = \frac{\omega_м^{1,7}}{\chi_м^{0,7}} = \frac{(\beta+m)^{1,7}}{(\beta+2\sqrt{1+m^2})^{0,7}} = \frac{(\beta+m)^{1,7}}{(\beta+m')^{0,7}} \tag{316}$$

и

$$v_м = \left(\frac{\beta+m}{\beta+2\sqrt{1+m^2}}\right)^{0,7} = \left(\frac{\beta+m}{\beta+m'}\right)^{0,7}, \tag{317}$$

где m — коэфициент откоса, $m' = 2\sqrt{1+m^2}$, а ширина модели $\beta = \frac{b}{h}$.

Пользуясь этими уравнениями, нетрудно для того или иного коэфициента откоса m заранее вычислить и дать готовую таблицу значений $Q_м$ и $v_м$ применительно к различным значениям $\beta = \frac{b}{h}$.

Такие вычисления $Q_м$ и $v_м$ для 12 типов откосов (от вертикальных стенок до тройного заложения) сведены в таблицу[1].

В колонках этой таблицы даны не сами величины $Q_м$ и $v_м$, а соответствующие им логарифмы

[1] См. И. И. Агроскин, Гидравлика каналов. Госэнергоиздат. 1940. Приложение IV, стр. 112—119.

в целях удобства расчетов, которое будет видно из последующего.

Уравнения (313) и (315), дающие связь между реальным каналом и его абстрактной моделью, при $\lambda = h$ имеют вид

$$Q_м = Q \cdot h^{-2,7} \cdot \frac{n}{\sqrt{i}} \tag{318}$$

и

$$v = v_м \cdot h^{0,7} \cdot \frac{\sqrt{i}}{n}. \tag{319}$$

Логарифмируя эти уравнения и обозначая в дальнейшем для краткости:

$$\lg h^{-2,7} = M,$$

$$\lg \frac{n}{\sqrt{i}} = N,$$

получим

$$\lg Q_м = \lg Q + M + N; \tag{320}$$

$$\lg v = \lg v_м + \lg h^{0,7} - N. \tag{321}$$

Для ускорения гидравлических расчетов по уравнениям (320) и (321) значения M и $\lg h^{0,7}$, а также значения $\lg \frac{n}{\sqrt{i}} = N$ для разных уклонов и типов шероховатости сведены в таблицы[1].

Во всех случаях, когда известен принятый масштаб моделирования $\lambda = h$, гидравлические расчеты производятся весьма просто по (320) и (321), как это видно на приводимых конкретных задачах.

Задача 42. Определить ширину канала по дну для пропуска $Q = 6$ *м³/сек* при следующих данных: $m = 1,75$; $i = 0,0006$; $n = 0,025$; $h = 1,2$ *м*.

По уравнению (320) приводим расход канала к расходу его абстрактной модели. Получаем, пользуясь таблицами,

$$\lg Q_м = \lg Q + M + N = 0,778 + 9,786 + 0,009 = 0,573.$$

Такое значение $\lg Q_м = 0,573$ при откосе $m = 1,75$ соответствует (как это видно по таблице)[2] модели шириной по дну $\beta = 3,14$ *м*.

При принятом масштабе моделирования искомая ширина реального канала будет в h раз больше, т. е.

$$b = \beta h = 3,14 \cdot 1,2 = 3,77 \text{ м}.$$

Вычислим попутно и среднюю скорость течения в канале по (321).

Имеем

$$\lg v = \lg v_м + \lg h^{0,7} - N = 9,883 + 0,055 - 0,009 = \bar{1},929,$$

откуда $v = 0,85$ *м/сек*.

Задача 43. Определить уклон i канала, пропускающего $Q = 2,25$ *м³/сек* при $b = 2,42$ *м*, $m = 1$, $n = 0,017$ и $h = 0,88$ *м*.

В расчетных уравнениях уклон учитывается компонентом N, который запишем согласно (320):

$$N = \lg Q_м - M - \lg Q \text{ или } N = \lg Q_м + \lg h^{2,7} - \lg Q.$$

Шириной модели канала в данном случае будет

$$\beta = \frac{b}{h} = \frac{2,42}{0,88} = 2,75$$

и потому, пользуясь таблицами, получим

$$N = 0,453 + 9,850 - 0,352 = 9,951.$$

Найденное значение $N = 9,951$ позволяет по таблице[3] найти уклон для любой шероховатости. В частности для заданного $n = 0,017$ найдем $i = 0,00036$.

Задача 44. Определить ширину канала по дну для пропуска $Q = 16$ *м³/сек* при $i = 0,0005$; $h = 1,8$ *м* и $n = 0,020$ применительно к различным откосам.

Находим

$$\lg Q_м = \lg Q + M + N = 1,204 + 9,311 + 9,951 = 0,466.$$

Такое значение $\lg Q_м = 0,466$ соответствует абстрактным моделям разной ширины в зависимости от коэфициента откоса m. Пользуясь упомянутыми выше таблицами, найдем для каждого откоса ширину модели β и соответственно получим, учитывая масштаб моделирования, реальные значения $b = \beta h$.

Имеем:

Таблица 41

Откос:	$m = 0$	$m = 0,5$	$m = 0,75$	$m = 1$	$m = 1,5$	$m = 1,75$	$m = 2$	$m = 3$
Ширина модели β	3,90	3,30	3,06	2,84	2,45	2,26	2,07	1,35
Ширина канала b	7,02	5,94	5,51	5,11	4,41	4,07	3,73	2,43

Использование метода абстрактной модели приобретает особое значение при необходимости гидравлического расчета ряда поперечных сечений каналов, что обычно и встречается в любом проекте осушения или орошения земель.

В таких случаях рекомендуется выполнять гидравлический расчет для всей серии поперечных сечений по форме табл. 42.

Таблица 42

№ сечений	Исходн. данн.					Табличн.			$\lg Q_м$	Ширина по дну		$\lg v_м$	$\lg h^{0,7}$	$\lg v$	v
	Q	h	i	n	m	$\lg Q$	M	N		модели β	канала b				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

§ 111. Расчет каналов гидравлически наивыгоднейшего профиля

Гидравлически наивыгоднейший профиль, как уже было установлено, характеризуется строго определенным для каждого откоса соотношением между шириной канала по дну и глубиной его наполнения, равным $\beta_{г.н}$ по (305).

Ясно, что при проектировании каналов гидравлически наивыгоднейшего профиля должен быть свободен выбор как b, так и h.

[1] См. И. И. Агроскин, Гидравлика каналов, 1940, приложение II, стр. 105—108 и приложение III, стр. 109—111.

[2] См. там же стр. 115.

[3] То же, стр. 109.

Выше было показано, что каналы гидравлически наивыгоднейшего профиля при заданном откосе приводятся всегда к одной модели. При масштабе моделирования $\lambda = h$ расход такой модели будет по (312)

$$Q'_{м} = \frac{2\sqrt{1+m^2} - m}{2^{0,7}} = f(m).$$

Скорость течения в модели вообще равна

$$v_{м} = R_{м}^{0,7}.$$

Для гидравлически наивыгоднейшего профиля по (306) $R = 0,5h$ и, следовательно, для модели, имеющей $h = 1$ *м*, имеем $R'_{м} = 0,5$ *м* и

$$v'_{м} = 0,5^{0,7} = 0,6156 \text{ м/сек}. \qquad (322)$$

Иначе говоря, мы установили, что средняя скорость течения в абстрактной модели трапецоидального канала гидравлически наивыгоднейшего профиля для всех типов откосов постоянна.

Для расчета гидравлически наивыгоднейших профилей вместо (320) и (321) удобно написать

$$h^{2,7} = Q \cdot \frac{1}{Q'_{м}} \cdot \frac{n}{\sqrt{i}}, \qquad (323)$$

$$v = 0,6156 h^{0,7} \cdot \frac{\sqrt{i}}{n}; \qquad (324)$$

или, в логарифмическом виде,

$$\lg h^{2,7} = \lg Q + \lg \frac{1}{Q'_{м}} + N \qquad (325)$$

и

$$\lg v = \lg\left(0,6156\, h^{0,7}\right) - N. \qquad (326)$$

Для технического удобства вычислений дана отдельная сводная таблица[1] для моделей гидравлически наивыгоднейших, где для разных откосов приведены $\lg \frac{1}{Q'_{м}}$, а также вычислена колонка значений $\lg\left(0,6156\, h^{0,7}\right)^{*}$.

Задача 45. Рассчитать канал гидравлически наивыгоднейшего профиля для пропуска $Q = 25$ *м³/сек* при $i = 0,002$, $m = 1,5$ и $n = 0,0275$.

Находим по (325), пользуясь таблицами,

$$\lg h^{2,7} = \lg Q + \lg \frac{1}{Q'_{м}} + N = 1,398 + 9,789 + 9,887 = 1,074.$$

Далее устанавливаем,* что $\lg h^{2,7} = 1,074$ соответствует величине $h = 2,5$ *м* и, наконец, переходя от модели к реальному каналу, находим ширину канала по дну для откоса $m = 1,5$:

$$b = \beta_{г.н.} \cdot h = 0,606 \cdot 2,5 = 1,52 \text{ м}.$$

Средняя скорость течения определится по (324):

$$\lg v = \lg(0,6156\, h^{0,7}) - N = 0,068 - 9,789 = 0,279,$$

откуда

$$v = 1,90 \text{ м/сек}.$$

[1] См. И. И. Агроскин, Гидравлика каналов, 1940. Приложение V, стр. 120.

* См. там же, приложение II, стр. 105—108.

Задача 46. Рассчитать канал формы полукруга, работающий полным сечением, для пропуска $Q = 4$ *м³/сек* при $i = 0,0016$ и $n = 0,014$. В § 109 было показано, что при масштабе $\lambda = r$ будет одна модель канала с $Q_{м} = 0,966$. На основе уравнения (314) запишем

$$r^{2,7} = \frac{Q}{0,966} \cdot \frac{n}{\sqrt{i}}$$

или

$$\lg r^{2,7} = \lg Q - \lg 0,966 + N = 0,602 - 9,985 + 9,544 = 0,161$$

откуда находим

$$r = 1,15 \text{ м}.$$

Задача 47. Определить, при каком заложении откоса канал гидравлически наивыгоднейшего профиля пропустит $Q = 10$ *м³/сек* с глубиной наполнения $h = 2$*м* при $i = 0,00082$ и $n = 0,020$.

Так как $Q_{м} = f(m)$, то для определения m достаточно найти $Q'_{м}$. Согласно (325) находим:

$$\lg \frac{1}{Q'_{м}} = \lg h^{2,7} - \lg Q - N = 0,813 - 1,000 - 9,844 = 9,969.$$

По таблице[2] устанавливаем, что модель с такими данными соответствует $m = 0,75$.

§ 112. Общие сведения о гидравлическом расчете каналов с учетом заданной скорости

Согласно уравнению (315) средняя скорость течения в каналах определяется геометрическим построением живого сечения и компонентом $\frac{\sqrt{i}}{n}$.

Размеры живого сечения при расчете каналов вполне определяются одним из его основных размеров b или h или определенным их соотношением $\beta_{г.н.} = \frac{b}{h}$ при гидравлически наивыгоднейшем профиле.

При жестко заданных $\frac{\sqrt{i}}{n}$ и h или $\beta_{г.н}$ скорость течения уже по существу предопределена и в приведенных выше задачах получалась как итоговый результат расчета.

Ясно, что не исключена возможность получения в итоге расчета канала скорости, не допустимой для условий его работы, т. е. не удовлетворяющей требованиям § 107.

Средняя скорость течения может оказаться или слишком большой, могущей размыть ложе канала, или, наоборот, слишком малой, не предохраняющей канал от заиления.

В таких случаях выполненный расчет нужно признать неудовлетворительным и произвести его заново, с предварительным, конечно, изменением исходных данных в соответствующую сторону.

[2] См. сноску на стр 155.

В связи с этим необходимо вести гидравлический расчет так, чтобы заранее иметь в поле зрения желательную скорость и исключить возможность получения недопустимой скорости в итоге вычислений.

Из сказанного выше следует, что для расчета канала с заранее заданной скоростью $v = v_1$ необходимо иметь свободным выбор $\frac{\sqrt{i}}{n}$ или h, а в условиях гидравлически наивыгоднейшего профиля — обоих этих членов.

При этом, однако, необходимо отметить, что при тех или иных конкретных условиях существуют некоторые пределы скоростей, которые могут быть достигнуты.

Так, например, возьмем канал с заданным $\frac{\sqrt{i}}{n}$ и рассмотрим, какие предельные скорости вообще могут быть достигнуты за счет маневрирования глубиной h и соответственно последней шириной по дну b.

Как известно, наибольшей пропускной способностью обладает гидравлически наивыгоднейший профиль. Если глубина h будет подобрана так, что соответствующая ей ширина по дну b приведет к соотношению $\frac{b}{h} = \beta_{г.н}$, то скорость при этом будет достигнута максимальная из возможных в этом случае $(v = v')$.

Отступая от гидравлически наивыгоднейшего профиля как в сторону больших глубин за счет сужения ширины по дну, так и в сторону меньших глубин за счет уширения дна, мы при прежнем значении $\frac{\sqrt{i}}{n}$ получим только более низкие скорости $(v < v')$.

Пользуясь случаем, отметим, что получение скорости $v < v'$ возможно при двух вариантах поперечного сечения, из которых одно отличается от гидравлически наивыгоднейшего профиля более сжатым сечением при большей глубине, а второе, наоборот, более растянутым сечением при меньшей глубине.

При заданной глубине h и свободном выборе $\frac{\sqrt{i}}{n}$ также имеется некоторый предел скорости, возможной к получению. В самом деле, увеличивая $\frac{\sqrt{i}}{n}$, мы получим бо́льшую скорость, и заданный расход можно пропускать при $h = \text{const}$ за счет уменьшения b. При некотором значении $\frac{\sqrt{i}}{n}$ скорость достигнет такой величины, что расход Q при $h = \text{const}$ пропускается уже треугольным профилем $(b = 0)$. Очевидно, что создание более высоких скоростей за счет увеличения $\frac{\sqrt{i}}{n}$ уже приведет к нарушению исходного условия $h = \text{const}$.

Таким образом можно говорить о двух гидравлических пределах возможных к получению скоростей:

a) при заданном $\frac{\sqrt{i}}{n}$ это будет скорость гидравлически наивыгоднейшего профиля;

b) при заданном h это будет скорость, при которой расход проходит в треугольном сечении данного откоса.

Задача 48. Установить, возможно ли запроектировать канал для пропуска $Q = 2$ *м³/сек* при $i = 0{,}0002$, $m = 1$ и $n = 0{,}0275$ так, чтобы средняя скорость течения в нем была $v_1 = 0{,}7$ *м/сек*.

Максимальная скорость в данном случае может быть получена при сечении гидравлически наивыгоднейшем, которое и рассчитаем.

Имеем:

$$\lg h^{2,7} = \lg Q + \lg \frac{1}{Q'_м} + N = 0{,}301 + 9{,}949 + 0{,}289 = 0{,}539,$$

откуда

$$h = 1{,}58 \text{ м} \quad \text{и} \quad b = \beta h = 0{,}828 \cdot 1{,}58 = 1{,}31 \text{ м}.$$

Далее

$$\lg v' = \lg (0{,}6156\, h^{0,7}) - N = 9{,}928 - 0{,}289 = \bar{1}{,}639$$

и

$$v' = 0{,}44 \text{ м/сек}.$$

Как видно из найденного значения $v' = 0{,}44$ *м/сек*, получение заданной в условии задачи скорости $v = 0{,}7$ *м/сек* невозможно.

Задача 49. Определить, с какой максимальной скоростью возможно пропустить расход $Q = 3$ *м³/сек* в канале с полуторным откосом при $h = 1$ *м*.

Минимальное живое сечение с $m = 1{,}5$, $h = 1$ *м* будет треугольное с $\omega = 1{,}5$ *м²*.

Следовательно, максимальная скорость в данном случае будет

$$v = \frac{Q}{\omega} = \frac{3}{1{,}5} = 2 \text{ м/сек}.$$

§ 113. Расчет каналов гидравлически наивыгоднейшего профиля с заданной скоростью

Получение канала гидравлически наивыгоднейшего профиля с заданной скоростью $v' = v_1$ возможно при свободном выборе как h, так и $\frac{\sqrt{i}}{n}$.

Решение вопроса по существу сводится к такому сочетанию h и $\frac{\sqrt{i}}{n}$, которое удовлетворяло бы поставленному условию.

Для нахождения расчетных уравнений применительно к поставленным условиям решим совместно уравнения (323) и (324), принимая $v' = v_1$. Из (324) найдем

$$\frac{n}{\sqrt{i}} = \frac{0{,}6156\, h^{0,7}}{v_1} \qquad (327)$$

и, подставив это значение в (323), получим

$$h^{2,7} = Q \cdot \frac{1}{Q'_м} \cdot \frac{0{,}6156\, h^{0,7}}{v_1},$$

откуда

$$h^2 = \frac{0{,}6156 \frac{1}{Q'_м}}{v_1} Q. \qquad (328)$$

Записав эти уравнения в логарифмическом виде:

$$\lg h^2 = \lg\left(0{,}6156 \frac{1}{Q'_м}\right) + \lg Q - \lg v_1 \qquad (329)$$

и

$$N = \lg(0{,}6156\, h^{0,7}) - \lg v_1, \qquad (330)$$

будем пользоваться ими при расчетах, для ускорения которых даны готовые значения $\lg\left(0{,}6156 \frac{1}{Q'_м}\right)$ и $\lg h^2$ в соответствующих таблицах*.

Задача 50. Рассчитать канал гидравлически наивыгоднейшего профиля для пропуска $Q = 2$ $м^3/сек$ при $m = 0{,}5$ и $n = 0{,}0275$ так, чтобы средняя скорость течения была $v_1 = 0{,}8$ $м/сек$.

Пользуясь (329) и таблицами*, имеем

$$\lg h^2 = \lg\left(0{,}6156 \frac{1}{Q'_м}\right) + \lg Q - \lg v_1 = 9{,}760 + 0{,}301 - 9{,}903 = 0{,}158,$$

откуда по соответствующей таблице находим

$$h = 1{,}20 \text{ м}.$$

Ширина канала по дну при $m = 0{,}5$ будет

$$b = \beta_{г.н} \cdot h = 1{,}236 \cdot 1{,}20 = 1{,}48 \text{ м}.$$

Необходимый для канала уклон получим по (330):

$$N = \lg(0{,}6156\, h^{0,7}) - \lg v_1 = 9{,}851 - 9{,}903 = 9{,}948,$$

что при $n = 0{,}0275$ соответствует *

$$i = 0{,}00096.$$

Задача 51. Рассчитать гидравлически наивыгоднейший профиль оросительного канала для пропуска $Q = 2$ $м^3/сек$ при $m = 1$, $n = 0{,}025$ так, чтобы скорость течения отвечала формуле Гриффитс-Лассея (с запасом в 20%) применительно к средним песчано-илистым наносам.

Средняя скорость течения, следовательно, должна быть равна

$$v_1 = 1{,}2\, a' R^{0,5} = 1{,}2 \cdot 0{,}6 \left(\frac{h}{2}\right)^{0,5} = 0{,}51\, h^{0,5},$$

так как при гидравлически наивыгоднейшем профиле $R_{г.н} = \frac{h}{2}$.

Подставив значение $v_1 = 0{,}51\, h^{0,5}$ в уравнение (328), получим

$$h^2 = \frac{\left(0{,}6156 \frac{1}{Q'_м}\right)}{0{,}51\, h^{0,5}} Q$$

или

$$\lg h^{2,5} = \lg\left(0{,}6156 \frac{1}{Q'_м}\right) + \lg Q - \lg 0{,}51 = 9{,}738 + 0{,}301 - 9{,}907 = 0{,}332,$$

откуда

$$h = 1{,}36 \text{ м} \quad \text{и} \quad v_1 = 0{,}51\, h^{0,5} = 0{,}60 \text{ м/сек},$$

ширина по дну, как известно, будет

$$b = \beta_{г.н} \cdot h = 0{,}828 \cdot 1{,}36 = 1{,}13 \text{ м}.$$

Уклон канала найдем по уравнению

$$N = \lg(0{,}6156\, h^{0,7}) - \lg v_1 = 9{,}883 - 0{,}778 = 0{,}105,$$

что, согласно упомянутым выше таблицам при $n = 0{,}025$, соответствует

$$i = 0{,}00038.$$

§ 114. Расчет каналов с заданной скоростью при заданной глубине наполнения

Задача сводится к определению b и $\frac{\sqrt{i}}{n}$ при заданных Q, m, h.

В этом случае необходимая ширина канала по дну определяется просто по уравнению

$$b = \frac{Q}{v_1 h} - mh, \qquad (331)$$

причем отрицательное значение b покажет невозможность выполнения условий задачи.

Значение компонента $\frac{n}{\sqrt{i}}$, обеспечивающее нужную скорость v_1, может быть найдено по абстрактной модели канала, ширина которой в данном случае будет $\beta = \frac{b}{h}$ и для которой по таблицам можно найти ее $\lg v_м$.

На основе уравнения (321) найдем

$$N = \lg v_м + \lg h^{0,7} - \lg v_1, \qquad (332)$$

которое и определит или уклон при известной шероховатости или шероховатость при заданном уклоне.

Задача 52. Рассчитать канал для пропуска $Q = 3{,}25$ $м^3/сек$ при $h = 1{,}20$ $м$; $m = 1{,}25$ и $n = 0{,}0275$, с тем чтобы скорость получилась с запасом на 30% против формулы Кеннеди для крупных песчано-илистых наносов.

Формула Кеннеди для крупных песчано-илистых наносов имеет вид

$$v_{\min} = a h^{0,64} = 0{,}7 \cdot h^{0,64}.$$

При обеспечении 30% запаса в данном случае нужно получить скорость

$$v_1 = 1{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot h^{0,64} = 0{,}91 \cdot h^{0,64} = 1 \text{ м/сек}.$$

Тогда находим по (331)

$$b = \frac{Q}{v_1 h} - mh = \frac{3{,}25}{1 \cdot 1{,}20} - 1{,}25 \cdot 1{,}20 = 1{,}21 \text{ м}.$$

Далее, установив размер модели

$$\beta = \frac{b}{h} = \frac{1{,}21}{1{,}20} \approx 1{,}00,$$

найдем по таблицам, что $\lg v_м = 9{,}810$.

Наконец, по (332) получим

$$N = \lg v_м + \lg h^{0,7} - \lg v_1 = 9{,}810 + 0{,}055 - 0{,}000 = 9{,}865,$$

чему при $n = 0{,}0275$ соответствует [1]

$$i = 0{,}0014.$$

---

* В этой и последующих задачах значения расчетных величин взяты из таблиц в приложениях к книге И. И. Агроскина, Гидравлика каналов, 1940.

[1] См. И. И. Агроскин, Гидравлика каналов, стр. 110.

§ 115. Расчет каналов с заданной скоростью при заданном $\frac{n}{\sqrt{i}}$ и свободном выборе глубины наполнения

При данной постановке задачи неизвестными величинами, подлежащими расчету, являются h и b канала, площадь живого сечения которого известна, поскольку $\omega = \frac{Q}{v_1}$.

Запишем выражение для площади трапеции

$$\frac{Q}{v_1} = bh + mh^2,$$

откуда, зная что $b = \beta h$, получим

$$h^2 = \frac{Q}{v_1(\beta + m)}. \tag{333}$$

В этом уравнении — два неизвестных: глубина наполнения канала (h) и ширина его модели (β).

Второе уравнение для этих же величин получим из (319), подставляя в него значение $v_м$ по (317). Тогда будем иметь

$$h = \frac{\sqrt[0,7]{\frac{n}{\sqrt{i}} v_1}}{\frac{\beta + m}{\beta + 2\sqrt{1+m^2}}}. \tag{334}$$

Решая уравнения (333) и (334) совместно, найдем

$$\frac{\beta + 2\sqrt{1+m^2}}{\sqrt{\beta + m}} = \frac{\sqrt{\frac{Q}{v_1}}}{\sqrt[0,7]{\frac{n}{\sqrt{i}} v_1}}. \tag{335}$$

Последнее уравнение содержит одно неизвестное β и является по отношению к последнему уравнением второй степени и, следовательно, в общем случае должно дать два значения β.

Этого и следовало ожидать, так как выше было уже указано, что заданная скорость в профилях, отступающих от гидравлически наивыгоднейшего профиля, может быть получена при двух вариантах живого сечения.

Решая уравнение (335) и обозначая при этом для краткости

$$\frac{\sqrt{\frac{Q}{v_1}}}{\sqrt[0,7]{\frac{n}{\sqrt{i}} v_1}} = A, \tag{336}$$

получим

$$\beta = 0,5\,A^2 - 2\sqrt{1+m^2} \pm$$
$$\pm A\sqrt{0,25\,A^2 - (2\sqrt{1+m^3} - m)}. \tag{337}$$

Найдя значение β по (337), мы можем получить h по (333) и, наконец, определить ширину канала

$$b = \beta h.$$

Для облегчения техники расчетов можно рекомендовать находить величину A по следующей формуле, полученной логарифмированием (336):

$$0,7 \lg A = 0,35 \lg Q - N - 1,35 \lg v_1 \tag{338}$$

и пользоваться вспомогательной табличкой (табл. 43) значений $2\sqrt{1+m^3}$ и $2\sqrt{1+m^3} - m$.

Таблица 43

m	0	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50	3,00
$m' = 2\sqrt{1+m^2}$	2,000	2,062	2,236	2,500	2,828	3,202	3,606	4,032	4,472	4,924	5,385	6,325
$2\sqrt{1+m^2} - m$	2,000	1,812	1,736	1,750	1,828	1,952	2,106	2,282	2,472	2,674	2,885	3,325

Задача 53. Найти b и h для бетонированного канала при $Q = 3$ $м^3/сек$; $m = 0,75$; $n = 0,014$ и $i = 0,0012$ с условием получения скорости $v_1 = 1,5$ $м/сек$.

Прежде всего определим A по (338). Имеем

$$0,7 \lg A = 0,35 \lg 3 - N - 1,35 \lg 1,5 = 0,323,$$

откуда

$$A = 2,89.$$

Далее получим β по (337):

$$\beta = 0,5 \cdot 2,89^2 - 2,5 \pm 2,89\sqrt{0,25 \cdot 2,89^2 - 1,75} = 1,67 \pm 1,68.$$

Остановимся в данном случае на одном положительном значении $\beta = 3,35$ и определим по (333) глубину наполнения.

Имеем

$$h^2 = \frac{3}{1,5\,(3,35 + 0,75)} = 0,488 \ м^2$$

или

$$h = 0,70 \ м.$$

Зная же масштаб моделирования $\lambda = h = 0,70$ и размер модели $\beta = 3,35$, найдем ширину канала по дну

$$b = \beta h = 3,35 \cdot 0,70 = 2,35 \ м.$$

§ 116. Определение пропускной способности каналов при заданном наполнении

В предыдущих параграфах рассматривались случаи гидравлических расчетов при проектировании новых каналов. В настоящем и следующем параграфах рассматриваются гидравлические расчеты в каналах, для которых уже известны форма и размеры поперечного сечения, а также характер (шероховатость и уклон) ложа канала.

В таких каналах переменной величиной может быть глубина наполнения в зависимости от пропускаемого расхода Q.

Если глубина наполнения задана, то вопрос сводится к определению Q из общего уравнения равномерного движения жидкости в канале

$$Q=\omega C\sqrt{Ri}=\frac{\omega^{1,7}}{\chi^{0,7}}\cdot\frac{\sqrt{i}}{n}.$$

Так как все необходимые данные для нахождения отдельных компонентов этого уравнения известны, то и определение расхода сводится к простой подстановке известных величин в уравнение расхода.

Абстрактное моделирование при этом для русел нестандартной формы вряд ли целесообразно, так как составление таблиц характеристик модели не будет оправдано из-за ограниченности количества отдельных расчетов для нестандартного русла.

При расчетах же сетей каналов трапецоидального профиля (или другой стандартной формы) вполне целесообразно использование изложенных выше принципов моделирования и для данной простой задачи.

В этом случае уравнение (320) переписываем в таком виде:

$$\lg Q=\lg Q_м-M-N,$$

которым и будем пользоваться при расчете пропускной способности.

Задача 54. Определить расходы Q, пропускаемые трапецоидальным каналом при $b=4$ *м*; $m=1,5$; $n=0,025$; $i=0,0009$ для глубин наполнения: $h_1=0,80$ *м*; $h_2=1,25$ *м*; $h_3=2,00$ *м* и $h_4=2,5$ *м*.

Для каждой глубины наполнения канал будет иметь свою абстрактную модель шириной $\beta=\frac{4}{h}$ с присущей ей величиной $\lg Q_м$. Величины $\lg Q_м$ приведены в специальных таблицах*.

Значение $N=\lg\frac{n}{\sqrt{i}}$ будет постоянно, и по упомянутым таблицам* мы имеем $N=9,9208$.

Поэтому, определяя модели каналов и их $\lg Q_м$, выполним все расчеты по форме табл. 44.

Таблица 44

h	M^*	$\beta=\frac{b}{h}$	$\lg Q^*_м$	$\lg Q$	Q *м³/сек*
0,80	0,262	5,00	0,728	0,545	3,51
1,25	9,738	3,20	0,560	0,901	7,96
2,00	9,1872	2,00	0,4009	1,2929	19,63
2,50	8,9256	1,60	0,3338	1,4874	30,72

§ 117. Определение глубины наполнения в каналах при равномерном движении (расчет нормальных глубин)

Глубину наполнения канала h, при которой заданный расход проходит в условиях равномерного режима, называют нормальной глубиной канала.

Расчет нормальных глубин представляет собой задачу, обратную рассмотренной в предыдущем параграфе. Однако решение ее встречает определенные технические затруднения, так как глубина h входит в состав уравнения расхода в сложной функциональной зависимости.

Поэтому для русел нестандартного профиля приходится отыскивать нормальную глубину подбором по уравнению расхода

$$Q=\omega C\sqrt{Ri},$$

придавая ему для удобства такой вид:

$$\frac{Q}{\sqrt{i}}=K=\omega C\sqrt{R}=f(h), \tag{339}$$

где $K=\frac{Q}{\sqrt{i}}$ — так называемая *расходная характеристика канала.*

Часто для решения этой задачи прибегают к графическому построению кривой по точкам, откладывая по оси ординат значения h, а по оси абсцисс соответствующие им $f(h)=\omega C\sqrt{R}$.

По частному значению $f(h)=\frac{Q}{\sqrt{i}}$ на графике находят ординату h, удовлетворяющую уравнению (339) и представляющую, следовательно, искомую глубину наполнения.

Для профилей стандартной формы, в частности для трапецоидальных, расчет нормальных глубин может быть произведен без постепенных приближений, пользуясь принципом абстрактного моделирования.

Однако ранее принятый нами масштаб $\lambda=h$ в данном случае неприемлем, так как величина h является искомой.

Возьмем масштаб моделирования $\lambda=b$, тогда уравнение (313) примет вид

$$Q=Q_м\cdot b^{2,7}\cdot\frac{\sqrt{i}}{n}, \tag{340}$$

где $Q_м$ представляет собой расход абстрактной модели канала, которая в данном случае является фигурой, подобной живому сечению канала, все линейные размеры которой изменены в b раз.

Для трапецоидальных каналов $Q_м$ представляет собой расход трапеции шириной по дну $b_м=1$ *м* и глубиной наполнения $\eta=\frac{h}{b}$ при $i=1$ и $n=1$.

Расход модели в общем виде согласно (316) будет

$$Q_м=\frac{\omega_м^{1,7}}{\chi_м^{0,7}}=\frac{(b_м\eta+m\eta^2)^{1,7}}{\left(b_м+2\eta\sqrt{1+m^2}\right)^{0,7}}$$

или, учитывая, что в данном случае $b_м=1$,

$$Q_м=\frac{(\eta+m\eta^2)^{1,7}}{(1+2\eta\sqrt{1+m^2})^{0,7}}. \tag{341}$$

* См. соответствующие таблицы в приложениях к книге И. И. Агроскина, Гидравлика каналов, 1940.

Теперь перепишем уравнение (340) в логарифмическом виде. Получим

$$\lg Q_м = \lg Q - 2{,}7 \lg b + N.$$

По соображениям технического порядка переменим знаки в этом уравнении и, обозначая

$$\lg \frac{1}{Q_м} = \lg \frac{\left(1+2\eta\sqrt{1+m^2}\right)^{0,7}}{(\eta+m\eta^2)^{1,7}} = \Psi(\eta_0) \qquad (342)$$

и

$$2{,}7 \lg b - N = \Phi, \qquad (343)$$

запишем расчетное уравнение

$$\Phi - \lg Q = \Psi(\eta_0). \qquad (344)$$

Значения $\Psi(\eta_0)$, вычисленные для различных откосов, сведены в особую таблицу*.

Таблица дает глубины η для модели канала и, следовательно, интересующие нас глубины наполнения реального канала будут

$$h = \eta_0 \cdot b.$$

Задача 55. Определить глубины наполнения канала трапецоидального профиля с $b=5$ *м*; $m=0$; $n=0{,}020$; $i=0{,}0015$ при пропуске следующих расходов: $Q_1 = 4{,}5$ *м³/сек*; $Q_2 = 6$ *м³/сек*; $Q_3 = 7{,}2$ *м³/сек* и $Q_4 = 10$ *м³/сек*.

При постановке таких расчетов величины $2{,}7\lg b$ и $N = \lg \frac{n}{\sqrt{i}}$ остаются постоянными независимо от пропускаемого расхода. Этим объясняется наша группировка этих членов под общим символом Φ, величину которого и определим для данной задачи.

Имеем:

$$\Phi = 2{,}7 \lg b - N = 1{,}887 - 9{,}713 = 2{,}174.$$

Далее по (344) найдем для каждого Q значение $\Psi(\eta_0)$, по которому в специальной таблице (в колонке $m=0$) установим глубины модели η_0, а после умножения на b и глубины наполнения канала. Расчет выполняем по форме табл. 45.

Таблица 45

Q *м³/сек*	4,5	6,0	7,2	10,0
$\lg Q$	0,653	0,778	0,857	1,000
$\Psi(\eta_0)$	1,521	1,396	1,331	1,174
η_0	0,141	0,170	0,188	0,240
h	0,70	0,85	0,94	1,20

Задача 56. Определить глубины наполнения канала с $b=4$ *м*; $m=1{,}5$; $n=0{,}025$; $i=0{,}0009$ при $Q_1=3{,}51$ *м³/сек*; $Q_2=7{,}96$ *м³/сек*; $Q_3=19{,}63$ *м³/сек*; $Q_4=30{,}72$ *м³/сек*.

Определяем

$$\Phi = 2{,}7 \lg b - N = 1{,}704$$

и далее ведем расчет по прежней форме (табл. 46).

Таблица 46

Q *м³/сек*	3,51	7,96	19,63	30,72
$\lg Q$	0,545	0,901	1,293	1,487
$\Psi(\eta_0)$	1,159	0,803	0,411	0,217
η_0	0,20	0,312	0,50	0,625
h	0,80	1,25	2,00	2,50

* См. И. И. Агроскин, Гидравлика каналов, 1940. Приложение VI, стр. 121—123.

§ 118. Замечание к методу абстрактного моделирования

Выше при рассмотрении приложения принципов моделирования к расчету каналов мы везде подчеркивали физический смысл процесса моделирования и отдельных величин.

Между тем, если рассмотреть применявшиеся нами выражения с точки зрения размерности основных величин реального канала, нетрудно видеть, что как расходы, так и скорости моделей можно рассматривать в условиях реального канала, как некоторые безразмерные компоненты.

В самом деле рассмотрим, например, величину $Q_м$ по (316). Если $\beta = \frac{b}{h}$ рассматривать как частное от деления двух линейных величин реального канала, то ее можно принять как некоторую безразмерную величину

Тогда видно, что

$$Q_м = \frac{(\beta+m)^{1,7}}{\left(\beta+2\sqrt{1+m^2}\right)^{0,7}} = f(\beta, m)$$

и, следовательно, является величиной безразмерной.

Точно так же можно убедиться, что выражения (317) и (341) также безразмерны.

Поэтому метод абстрактной модели можно бы также назвать и методом безразмерных величин.

§ 119. Влияние аэрации потока на глубину наполнения русла

Установлено, что при скоростях потока больше 4 *м/сек* начинается поглощение потоком воздуха из окружающей среды. Происходит так называемая аэрация потока. Чем больше скорость течения, тем интенсивнее происходит процесс аэрации.

Аэрирование потока пока мало изучено. Эренбергер[1], изучая в лабораторных условиях структуру аэрированных потоков, установил наличие четырех зон по глубине потока. Первая зона — вблизи свободной поверхности, в ней наблюдаются мельчайшие водяные частицы. Ниже идет вторая зона — смесь воды с воздухом. В третьей зоне содержатся лишь отдельные пузырьки воздуха. Наконец, непосредственно у дна протекает слой чистой воды без воздуха. Если степень аэрации велика, то придонного слоя чистой воды может и не быть.

На основании своих наблюдений Эренбергер указывает, что отношение объема воды к смеси воды и воздуха β достигает таких значений:

$$\text{при } i < 0{,}476 \quad \beta = \frac{0{,}40}{R_a^{0,05}\, i^{0,26}},$$

$$\text{при } 0{,}476 < i < 0{,}7 \quad \beta = \frac{0{,}28}{R_a^{0,05}\, i^{0,74}},$$

[1] R. Ehrenberger, Wasserbewegung in Steilen Rinnen. Zeitschrift des österr. Ing. u. Arch. Vereins, 1926, H. 15/16, S. 155 und H. 17/18, S. 175; R. Ehrenberger. Eine neue geschwindigkeitsformel fur künstliche gerinne mit starken Neigungen und Berechnung der Selbstbelüftung des Wassers. Die Wasserwirtschaft; 1930, N 28, S. 573 und N 29, S. 595.

где R_a — гидравлический радиус аэрированного потока.

Проф. Замарин Е. А.[1] указывает, что при скорости от 8 *м/сек* до 20 *м/сек* процент воздуха в воде по объему численно равен скорости течения в метрах.

Вследствие аэрации потока последний как бы набухает и глубина потока поэтому получается больше нормальной.

Ввиду слабой изученности аэрированных потоков пока можно согласиться с предложением инж. Нечипоровича А. А.[2] учитывать аэрацию потока введением в формулы расчета, установленные для обычных потоков, повышенных значений коэфициента шероховатости

$$n_a = an,$$

где n — обычный коэфициент шереховатости по Маннингу;

a — числовой множитель больше единицы, зависящий от уклона.

Сравнительно небольшой экспериментальный материал позволил инж. Нечипоровичу применять следующие значения множителя a:

i	0,1—0,2	0,2—0,4	0,4
a	1,33	1,33—2,00	2,00—3,33

Этим самым расчеты аэрированных потоков сводятся к расчету некоторого фиктивного неаэрированного потока.

ГЛАВА XVI

УСТАНОВИВШЕЕСЯ НЕРАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ПРИЗМАТИЧЕСКИХ РУСЛАХ

Как было установлено выше, установившееся неравномерное движение в призматических руслах характеризуется уравнением (303):

$$\frac{dh}{dL} = i\,\frac{1-\frac{K_0^2}{K^2}}{1-\frac{\alpha Q^2}{g}\,\frac{B}{\omega^3}} = i\,\frac{1-\frac{K_0^2}{K^2}}{1-\mathrm{Fr}},$$

выражающим закон изменения глубин потока по оси движения.

Прежде чем перейти к исследованию этого уравнения, остановимся на анализе движения потоков с энергетической точки зрения.

§ 120. Удельная энергия сечения

Среднее значение потенциальной и кинетической энергии, приходящейся на единицу веса жидкости, протекающей через живое сечение, отнесенное к условной горизонтальной плоскости, принято называть «полная удельная энергия».

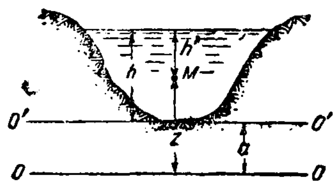
В дальнейшем при выводах мы не будем учитывать атмосферного давления и будем употреблять при этом термин «удельная энергия» с обозначением E.

Удельная энергия потока выражается известным трехчленом уравнения Бернулли:

$E = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha v^2}{2g}$ (здесь p — манометрическое давление).

Для плавно изменяющегося движения, при котором гидродинамическое давление распределяется по гидростатическому закону, имеем (фиг. 156) для любой точки M в живом сечении

$$z + \frac{p}{\gamma} = z + h' = a + h,$$



Фиг. 156

и удельная энергия может быть записана в виде

$$E = a + h + \frac{\alpha v^2}{2g}.$$

При условии отнесения E не к произвольной горизонтальной плоскости $0-0$, а к плоскости $0'-0'$, проходящей через наинизшую точку живого сечения, удельную энергию назовем «удельная энергия сечения» и обозначим ее $Э$.

$$Э = h + \frac{\alpha v^2}{2g} = h + \frac{\alpha Q^2}{2g\omega^2}. \qquad (345)$$

Понятие об удельной энергии сечения было введено впервые проф. Бахметевым в 1912 г. и сыграло большую роль в выяснении физической сущности ряда вопросов неравномерного движения жидкости.

Рассмотрим изменение $Э$ при переходе от сечения к сечению вниз по течению потока, т. е. определим $\frac{dЭ}{dL}$.

[1] Проф. Е. А. Замарин, проф. К. В. Попов и др. Гидротехнические сооружения, т. I.

[2] Гидротехнические сооружения, т. 1, 1934.

По уравнению (345) имеем

$$\frac{dЭ}{dL}=\frac{dh}{dL}+\frac{\alpha}{2g}\cdot\frac{d}{dL}(v^2)=\frac{dh}{dL}-\frac{\alpha Q^2}{g\omega^3}\left(\frac{\partial\omega}{\partial L}+B\frac{dh}{dL}\right),$$

что при учете (299) позволяет записать

$$\frac{dЭ}{dL}=i-\frac{v^2}{C^2R}=i-\frac{Q^2}{K^2}=i\left(1-\frac{K_0^2}{K^2}\right). \qquad (346)$$

Из последнего уравнения видно, что при равномерном движении

$$\frac{dЭ}{dL}=0 \text{ и } Э=\text{const},$$

а при неравномерном движении ($K\neq K_0$) удельная энергия сечения может как убывать, так и увеличиваться вниз по течению в зависимости от величины отношения $\frac{K_0}{K}$.

Физический смысл этого положения заключается в следующем.

При равномерном движении работа силы тяжести на определенном участке затрачивается полностью на преодоление гидравлических сопротивлений. В любом сечении в данном потоке запас удельной энергии сечения остается неизменным.

Если поток движется со средней скоростью меньшей, чем при равномерном режиме, то вся работа сил тяжести уже не потребуется для преодоления пониженных в этом случае гидравлических сопротивлений и потому будет происходить некоторое накопление удельной энергии к нижележащему сечению.

Наоборот, при движении потока со средней скоростью большей, чем в равномерном режиме, на преодоление сопротивлений затратится больше энергии, чем может дать работа сил тяжести на рассматриваемом участке, и удельная энергия нижележащего сечения будет меньше, чем в предыдущем.

В заключение отметим, что для горизонтальных участков каналов ($i=0$) или для участков с обратным уклоном ($i<0$) уравнение (346) дает только отрицательные значения $\frac{dЭ}{dL}$. Иначе говоря, на таких участках удельная энергия сечения только убывает.

Наконец, напомним, что в отличие от удельной энергии сечения $Э$ характер изменений которой мы рассматривали, удельная энергия потока E обязательно уменьшается вдоль і ибо само движение жидкости и происходи ственно, за счет этой энергии.

121. Критическая глубина и кривая удельной энергии сечения

Один и тот же расход Q может протекать в данном сечении с различной скоростью и, следовательно, с различной глубиной в зависимости от гидравлических условий (i, n).

Удельная энергия сечения $Э$ при этом будет изменяться как по своему суммарному значению, так и по характеру своего распределения между потенциальной и кинетической.

При заданной форме русла и некотором постоянном расходе удельная энергия сечения является функцией от глубины потока в рассматриваемом сечении, т. е. $Э=f(h)$.

Рассмотрим более детально изменение удельной энергии сечения в отдельном живом сечении потока в зависимости от глубин h в данном сечении.

При пропуске некоторого постоянного расхода Q через поперечное сечение русла с разными глубинами будет изменяться как потенциальная часть удельной энергии сечения $(Э_п=h)$, так и ее кинетическая часть $\left(Э_{кин}=\frac{\alpha v^2}{2g}=\frac{\alpha Q^2}{2g}\cdot\omega^{-2}\right)$, а равно и удельная энергия сечения в целом.

Легко видеть, что потенциальная часть удельной энергии сечения, выраженная графически как функция глубины, отобразится прямой линией — биссектрисой координатного угла. Кинетическая же часть удельной энергии сечения выразится некоторой кривой второго порядка (фиг. 157).

При этом, если $h\to\infty$, очевидно, что $Э_п\to\infty$, $Э_{кин}\to 0$ и $Э\to\infty$ и, наоборот, если $h\to 0$, то $Э_п\to 0$, $Э_{кин}\to\infty$ и $Э\to\infty$.

В связи с этим, строя при заданных Q и форме поперечного сечения русла график $Э=f(h)$, откладывая глубины h по оси ординат, а значения $Э=h+\frac{\alpha v^2}{2g}$ по оси абсцисс, мы получим некоторую «кривую удельной энергии сечения» с двумя асимптотами: осью абсцисс и биссектрисой координатного угла.

Установим ту глубину, при которой кривая $Э=f(h)$ будет иметь минимум.

Определим первую производную этой функции по ее уравнению (345).

Имеем:

$$\frac{dЭ}{dh}=\frac{d}{dh}\left(h+\frac{\alpha v^2}{2g}\right)=\frac{d}{dh}\left(h+\frac{\alpha Q^2}{2g\omega^2}\right)=1-\frac{\alpha Q^2}{g\omega^3}\frac{d\omega}{dh}$$

или, учитывая, что $\frac{d\omega}{dh}=B$,

$$\frac{dЭ}{dh}=1-\frac{\alpha Q^2}{g}\frac{B}{\omega^3}=1-\text{Fr}.$$

Замечая, что вторая производная рассматриваемой функции положительна, заключаем, что $Э=f(h)$ достигает минимума при некотором значении глубины h, удовлетворяющей условию

$$1-\frac{\alpha Q^2 B}{g\omega^3}=0 \text{ или } \mathrm{Fr}=1. \qquad (347)$$

Значение глубины, при которой удельная энергия сечения достигает минимума, называют «критической» глубиной. Элементы потока при критической глубине будем в дальнейшем обозначать индексом *кр*.

Минимальное значение удельной энергии сечения может быть записано в таком виде:

$$Э_{\min}=h_{кр}+\frac{\alpha v_{кр}^2}{2g}.$$

Уточним несколько полученное значение минимальной удельной энергии сечения.

Из уравнения (347) следует, что когда энергия достигает минимума (т. е. при критической глубине потока), должно удовлетворяться равенство

$$1-\frac{\alpha Q^2}{g}\cdot\frac{B_{кр}}{\omega_{кр}^3}=0 \text{ или } \frac{\alpha v_{кр}^2}{2g}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\omega_{кр}}{B_{кр}}. \qquad (348)$$

Величина $\frac{\omega_{кр}}{B_{кр}}$ представляет собой некоторую среднюю глубину живого сечения или глубину прямоугольника шириной $B_{кр}$ и площадью живого сечения $\omega_{кр}$.

Обозначив $\frac{\omega_{кр}}{B_{кр}}=h_{ср(кр)}$, запишем

$$\frac{\alpha v_{кр}^2}{2g}=\frac{1}{2}h_{ср(кр)}$$

и, следовательно,

$$Э_{\min}=h_{кр}+\frac{1}{2}h_{ср(кр)}.$$

В частном случае прямоугольного живого сечения будем иметь $h=h_{ср}$ и

$$Э_{\min}=1{,}5h_{кр},$$

а для трапецоидальных профилей с заложением откоса $m>0$

$$Э_{\min}<1{,}5h_{кр},$$

так как ясно, что для всякой расширяющейся кверху фигуры $h_{ср}<h$.

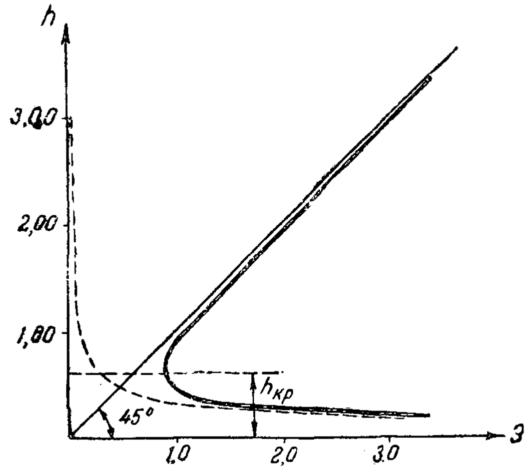
Задача 57. Построить график удельной энергии сечения трапецоидального русла с $b=8$ *м* при $m=1$ для $Q=12$ *м³/сек*.

Вычислим значения $Э$ в условиях поставленной задачи для разных глубин.

Имея $\frac{\alpha Q^2}{2g}=\frac{1{,}1\cdot 12^2}{2\cdot 9{,}81}=8{,}072=A$, вычислим для ряда глубин значения $Э$ (табл. 47).

Таблица 47

Глубины h	0,20	0,40	0,62	0,80	1,00	2,00	3,00
Площади ω	1,64	3,36	5,34	7,04	9,00	20,0	56,00
ω^2	2,6896	11,2896	28,5156	49,5616	81,00	400,0	3136,00
$Э_{кин}=A\cdot\omega^{-2}$	3,00	0,72	0,28	0,16	0,10	0,02	0,003
$Э=h+Э_{кин}$	3,20	1,12	0,90	0,96	1,10	2,02	3,003



Фиг. 157

По полученным данным и построен график (фиг. 157) удельной энергии сечения (на фиг. 157 пунктиром нанесена кривая изменения $Э_{кин}$). Минимум удельной энергии сечения получился при $h=0{,}62$ *м*, которая и является критической глубиной для условий задачи.

Кривая удельной энергии сечения состоит из двух ветвей, сопрягающихся в точке, соответствующей критической глубине. Поток с глубиной $h_{кр}$ именуют находящимся в «критическом состоянии».

Верхняя ветвь кривой соответствует прохождению заданного расхода в рассматриваемом сечении с глубинами больше критической. В этом случае рост удельной энергии сечения определяется увеличением потенциальной энергии при заметном падении кинетической.

Состояние потока, находящегося в таких условиях, т. е. имеющего глубины больше критической, принято называть «спокойным».

В отличие от верхней нижняя ветвь кривой, отвечающая глубинам меньше критической, характеризуется ростом удельной энергии сечения за счет ее кинетической части при уменьшении потенциальной.

Состояние потока с глубинами меньше критической называют «бурным».

Ясно, что степень «бурности» потоков, характеризуемых нижней ветвью кривой, а равно и, наоборот, степень «спокойности» потоков, отражаемых верхней ветвью кривой, различны при разных глубинах по мере удаления от критической глубины.

Поэтому полезно наметить некоторый объективный критерий для характеристики состояния потока.

Таким простым критерием может служить число Фруда

$$\mathrm{Fr}=\frac{\alpha v^2}{g h_{cp}}=\frac{\alpha Q^2}{g}\cdot\frac{B}{\omega^3}=\left(\frac{\omega_{кр}}{\omega}\right)^3\frac{B}{B_{кр}}, \qquad (349)$$

в котором в качестве линейного параметра принято $h_{cp}=\frac{\omega}{B}$.

При критическом состоянии потока $(h=h_{кр})$ согласно (347)

$$\mathrm{Fr}_{кр}=1.$$

При спокойном состоянии потока $\mathrm{Fr}<1$, а при бурном $\mathrm{Fr}>1$. Чем больше отличается глубина потока от $h_{кр}$, тем дальше число Фруда отступает от единицы.

§ 122. Расчет критических глубин

Определение значения критической глубины необходимо не только для оценки состояния потока, но и для выполнения ряда гидравлических расчетов, которые рассматриваются в дальнейшем.

Критическая глубина должна, как известно, удовлетворять уравнению (349), которое можно представить так:

$$\frac{\alpha Q^2}{g}=\frac{\omega^3_{кр}}{B_{кр}} \quad \text{или } \mathrm{Fr}=1. \qquad (350)$$

Поэтому определение критической глубины можно производить по этому уравнению путем постепенных подстановок. Кроме того значение критической глубины можно находить, строя кривую удельной энергии $Э=f(h)$ и устанавливая по масштабу значение ординаты $h_{кр}$ для минимального значения $Э$.

Для расчета критических глубин в трапецоидальных руслах можно предложить довольно простой аналитический способ.

Подставим в (350) значения $\omega_{кр}$ и $B_{кр}$ для трапецоидального профиля

$$\omega_{кр}=bh_{кр}+mh^2_{кр}=h_{кр}(b+mh_{кр}),$$
$$B_{кр}=b+2mh_{кр}$$

и получим

$$\frac{\alpha Q^2}{g}=\frac{h^3_{кр}(b+mh_{кр})^3}{b+2mh_{кр}}. \qquad (351)$$

Введем некоторую безразмерную величину: отношение критической глубины к ширине канала по дну

$$\eta_{кр}=\frac{h_{кр}}{b}$$

и перепишем (351) в виде

$$\frac{\alpha Q^2}{gb^5}=\frac{[\eta_{кр}(1+m\eta_{кр})]^3}{1+2m\eta_{кр}}, \qquad (352)$$

откуда

$$2\lg Q-5\lg b=\lg\frac{[\eta_{кр}(1+m\eta_{кр})]^3}{1+2m\eta_{кр}}-\lg\frac{\alpha}{g}$$

или

$$\lg Q-2{,}5\lg b=0{,}5\left[\lg\frac{\eta^3_{кр}(1+m\eta_{кр})^3}{1+2m\eta_{кр}}-\lg\frac{\alpha}{g}\right].$$

Обозначив

$$0{,}5\left[\lg\frac{\eta^3_{кр}(1+m\eta_{кр})^3}{1+2m\eta_{кр}}-\lg\frac{\alpha}{g}\right]=\Psi(\eta_{кр}), \qquad (353)$$

получим для расчета критических глубин в трапецоидальных руслах уравнения

$$\left.\begin{aligned}\lg Q-2{,}5\lg b&=\Psi(\eta_{кр}),\\ h_{кр}&=b\eta_{кр}.\end{aligned}\right\}^{1} \qquad (354)$$

Значения $\Psi(\eta_{кр})$ при $\alpha=1{,}1$, вычисленные для разных заложений откосов, сведены в специальную таблицу[2].

Задача 58. Определить критическую глубину трапецоидального канала с $b=8$ *м* при $m=1$ для $Q=12$ *м³/сек* (см. задачу 57).

По уравнению (354) находим значение $\Psi(\eta_{кр})$:

$$\Psi(\eta_{кр})=\lg 12-2{,}5\lg 8=1{,}079-2{,}258=-1{,}179.$$

Пользуясь таблицей [2], при $m=1$ устанавливаем, что такое значение $\Psi(\eta_{кр})=-1{,}179$ соответствует величине $\eta_{кр}=0{,}077$, и потому определяем

$$h_{кр}=\eta_{кр}\cdot b=0{,}077\cdot 8=0{,}62 \text{ м}.$$

---

[1] Уравнение может быть записано и в таком виде:

$$\lg q-1{,}5\lg b=\Psi(\eta_{кр}),$$

где

$$q=\frac{Q}{b}.$$

[2] См. И. И. Агроскин, Гидравлика каналов, 1940. Приложение VII стр. 124—126.

Из (353) видно, что для других значений $\alpha \neq 1{,}1$ можно записать

$$\Psi(\eta_{кр})_{\alpha\neq 1,1}=\Psi(\eta_{кр})_{\alpha=1,1}+0{,}5\lg 1{,}1-0{,}5\lg\alpha$$

или

$$\Psi(\eta_{кр})_{\alpha\neq 1,1}=\Psi(\eta_{кр})_{\alpha\neq 1,1}-0{,}021-0{,}5\lg\alpha, \qquad (355)$$

в частности для $\alpha=1$ имеем

$$\Psi(h_{кр})_{\alpha=1}=\Psi(\eta_{кр})_{\alpha=1,1}-0{,}021.$$

Для предыдущего примера имели бы при $\alpha=1$ значение $\Psi(\eta_{кр})=-1{,}179-0{,}021=-1{,}198$, что по таблице привело бы к $\eta_{кр}=0{,}075$ и $\eta_{кр}=0{,}075\cdot 8=0{,}60$ *м*.

Расчетная формула для $h_{кр}$ нами получена приведением уравнения (350) к безразмерной функции. Покажем, что к тем же выводам можно притти и путем метода моделирования, примененного нами выше при расчете каналов.

Построим модель рассматриваемого канала при масштабе $\lambda=b$. Эта модель будет фигура, подобная основному каналу и имеющая ширину по дну, равную единице, и глубину $\frac{h_{кр}}{b}=\eta_{кр}$. При принятом масштабе моделирования имеем (обозначая элементы модели значком „штрих"):

$$\frac{\omega_{кр}}{\omega'_{кр}}=b^2 \quad \text{и} \quad \frac{B_{кр}}{B'_{кр}}=b.$$

Тогда уравнение (351) для модели примет вид

$$\frac{\alpha Q^2_{мод}}{g}=\frac{(\omega'_{кр})^3}{B'_{кр}}=\frac{\omega^3_{кр}\cdot b}{b^6\cdot B_{кр}}=\frac{\omega^3_{кр}}{B_{кр}}\cdot\frac{1}{b^5}=\frac{\alpha Q^2}{g}\cdot\frac{1}{b^5},$$

откуда находим

$$Q_{мод}=\frac{Q}{b^{2,5}} \quad \text{или} \quad \lg Q-2{,}5\lg b=\lg Q_{мод},$$

что отвечает уравнению (354)

Для каналов прямоугольного сечения уравнение (350 будет)

$$\frac{\alpha Q^2}{g}=\frac{b^3h^3_{кр}}{b}=b^2h^3_{кр}$$

и, следовательно, критическая глубина определится весьма просто:

$$h_{кр}=\sqrt[3]{\frac{\alpha q^2}{g}}, \qquad (356)$$

где $q=\frac{Q}{b}$.

Если в формуле (356) принять $\alpha=1{,}1$ и $g=9{,}81$ *м/сек*², то получим

$$h_{кр}=0{,}482\sqrt[3]{q^2} \qquad (357)$$

и, соответственно, при $\alpha=1$

$$h_{кр}=0{,}467\sqrt[3]{q^2}. \qquad (358)$$

Для каналов треугольного профиля с коэфициентом откоса m имеем

$$\omega_{кр}=mh^2_{кр} \text{ и } B_{кр}=2mh_{кр}$$

и уравнение (351) будет иметь вид

$$\frac{\alpha Q^2}{g}=\frac{(mh^2_{кр})^3}{2mh_{кр}}=0{,}5\,m^2h^5_{кр},$$

откуда

$$h_{кр}=\sqrt[5]{\frac{2\alpha}{g}\cdot\frac{Q^2}{m^2}}=\sqrt[5]{\frac{2\alpha}{g}}\cdot\sqrt[5]{\left(\frac{Q}{m}\right)^2} \qquad (359)$$

или, при $\alpha=1{,}1$

$$h_{кр}=0{,}295\sqrt[5]{\left(\frac{Q}{m}\right)^2}, \qquad (360)$$

а при $\alpha=1{,}0$

$$h_{кр}=0{,}29\sqrt[5]{\left(\frac{Q}{m}\right)^2}. \qquad (361)$$

§ 123. Критический уклон

Критическая глубина, как видно из изложенного выше, зависит только от геометрической формы канала и расхода, но не зависит от уклона и состояния ложа русла.

При равномерном движении жидкости в канале устанавливается нормальная глубина, именно, в зависимости от уклона и состояния русла. В каналах определенной формы и характера русла нормальная глубина, с которой проходит заданный расход, может быть получена различной в зависимости от придаваемого уклона.

Очевидно, что при некотором уклоне можно получить нормальную глубину численно равной критической глубине.

Такой уклон, при котором в условиях равномерного режима заданный расход проходит с наполнением, равным критической глубине, называют критическим уклоном ($i_{кр}$).

При критическом уклоне и равномерном движении должны одновременно удовлетворяться два равенства (302) и (350), т. е. имеем

$$Q=\omega_{кр}C_{кр}\sqrt{R_{кр}\,i_{кр}}$$

и

$$\frac{\alpha Q^2}{g}=\frac{\omega^3_{кр}}{B_{кр}}.$$

Решая эти уравнения совместно, получим

$$i_{кр}=\frac{g\chi_{кр}}{\alpha C^2_{кр}B_{кр}}. \qquad (362)$$

Величина критического уклона помогает ориентироваться в некоторых вопросах при гидравлических расчетах.

Значение $i_{кр}$ можно получить или непосредственно по (362) или пользуясь методом абстрактной модели, как это показано ниже:

Задача 59. Определить критический уклон трапецоидального канала при следующих данных: $Q = 6$ *м³/сек*; $b = 3$ *м*; $m = 1{,}25$; $n = 0{,}014$.

Прежде всего найдем критическую глубину по (354). Имеем

$$\Psi(\eta_{кр}) = \lg Q - 2{,}5 \lg b = 0{,}778 - 1{,}193 = -0{,}415,$$

откуда по таблице [1] находим

$$\eta_{кр} = 0{,}23 \text{ и получаем } h_{кр} = \eta_{кр} \cdot b = 0{,}69 \text{ м}.$$

Следовательно, нужно определить уклон равномерного режима при $h = 0{,}69$ *м*. Пользуемся формулой (320) метода абстрактной модели:

$$N = \lg Q_м - \lg Q - M = 0{,}657 - 0{,}778 - 0{,}435 = 9{,}444.$$

По значению $N = 9{,}444$ при $n = 0{,}014$ в таблице[2] находим $i_{кр} = 0{,}00255$.

§ 124. Формы свободной поверхности потока в призматических руслах с прямым уклоном дна ($i > 0$)

Для удобства анализа будем пользоваться уравнением (303)

$$\frac{dh}{dL} = \frac{1 - \left(\frac{K_0}{K}\right)^2}{1 - \mathrm{Fr}},$$

помня, что число Фруда равно единице при критическом состоянии потока, меньше единицы при спокойном состоянии (стремясь к нулю при $h \to \infty$) и больше единицы при бурном состоянии потока.

Отметим, что здесь и в дальнейшем все элементы, относящиеся к условиям равномерного движения, обозначаются с индексом нуль в отличие от однотипных элементов неравномерного движения.

Очевидно, что как числитель, так и знаменатель уравнения (303) являются знакопеременными величинами, проходящими и через нуль.

Равенство числителя нулю отвечает условиям равномерного движения, рассмотренного уже в предыдущих главах. При этом $\frac{dh}{dL} = 0$ и линия свободной поверхности представляет собой прямую, параллельную линии дна водотока.

Исключительный интерес представляет собой случай, когда знаменатель рассматриваемого уравнения стремится к нулю ($\mathrm{Fr} \to 1$). При этом $\frac{dh}{dL} \to \infty$ и свободная поверхность потока скачкообразно повышается. Это замечательное явление, называемое гидравлическим прыжком и происходящее всякий раз при переходе потока из бурного состояния в спокойное, будет детально рассмотрено в специальной главе.

Во всех остальных случаях, когда числитель и знаменатель в (303) не равны нулю, $\frac{dh}{dL}$ равна некоторой положительной или отрицательной величине в зависимости от сочетания знаков числителя и знаменателя. В этих случаях глубина вдоль потока увеличивается или уменьшается плавно и непрерывно.

При постепенном увеличении глубин вдоль потока говорят о наличии кривой подпора, при уменьшении же глубин — о кривой спада.

Таким образом можно выделить как основные две формы кривой свободной поверхности при неравномерном движении жидкости:

1) кривые подпора;
2) кривые спада.

В зависимости от обстановки и условий образования этих основных форм в них можно отметить некоторые дополнительные особенности, позволяющие дать более подробную классификацию.

Рассмотрим поток с определенным расходом Q. В зависимости от величины уклона дна русла этот поток при равномерном движении может находиться в различных состояниях:

1) в спокойном состоянии;
2) в критическом состоянии;
3) в бурном состоянии.

При нарушении равномерности движения (например, возведением в русле потока какихлибо сооружений) свободная поверхность потока будет формироваться по некоторой кривой подпора или спада.

Для характеристики условий образования кривых свободной поверхности наметим в любом потоке с $i > 0$ некоторые зоны, определяемые величинами h_0 и $h_{кр}$.

Для этого на продольном профиле русла (фиг. 158) нанесем две линии параллельно линии дна русла: линию нормальной глубины — N-N и линию критической глубины — K-K.

Тогда можно говорить о трех возможных зонах, где располагается кривая свободной поверхности:

зона a — выше линий как нормальной, так и критической глубин;

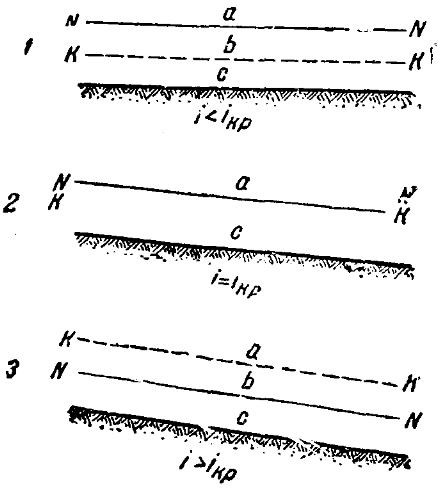
зона b — между линиями нормальной и критической глубин;

зона c — ниже линий как нормальной, так и критической глубин.

Легко видеть, что при $i = i_{кр}$, когда линии NN и KK совмещаются, имеются только две зоны a и c, а в остальных случаях — все три намеченные зоны.

[1] См. сноску [2] на стр. 166.

[2] См. И. И. Агроскин, Гидравлика каналов. 1940, приложение III.

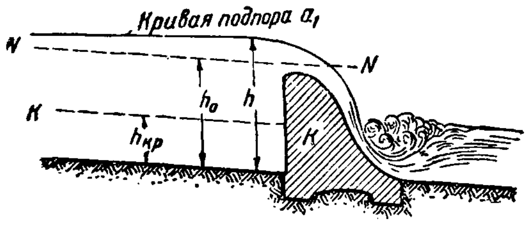


Фиг. 158

Следовательно, для потоков с $i>0$ можно говорить о восьми возможных случаях формирования кривой свободной поверхности, которые и рассмотрим.

I. Поток в спокойном состоянии при равномерном движении ($i<i_{кр}$; $h_0>h_{кр}$).

1. Пусть вследствие возведенной в потоке преграды (плотина) равномерное движение перешло в неравномерное замедленное движение (фиг. 159). При этом глубины и живые сечения



Фиг. 159

вдоль потока станут переменными ($h>h_0$, $\omega>\omega_0$, $K>K_0$). Число Фруда вдоль потока также будет изменяться, все более уменьшаясь по сравнению с единицей.

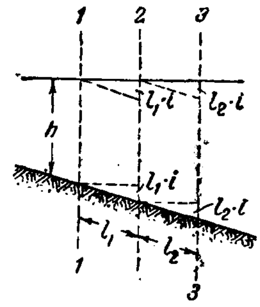
Обращаясь к уравнению (303), приходим к выводу, что глубины вдоль потока возрастают, так как

$$\frac{dh}{dL}=\frac{+\text{числ.}}{+\text{знам.}}>0.$$

Кривая свободной поверхности целиком расположена в зоне a, имеет вогнутую форму и называется кривой подпора типа a_1.

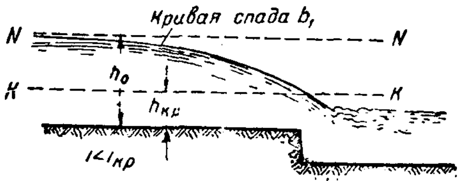
При $h\to\infty$ имеем $K\to\infty$, $\mathrm{Fr}\to 0$ и, следовательно, $\frac{dh}{dL}\to i$. Это значит, что возрастание глубин как раз восполняет падение линии дна водотока или, иначе говоря, что эта кривая подпора в нижней своей части имеет асимптотой горизонтальную линию (фиг. 160).

При $h\to h_0$ имеем $K\to K_0$ и, следовательно, $\frac{dh}{dL}\to 0$, т. е. кривая в начальной своей части асимптотически приближается к линии нормальной глубины — NN. Как видим, созданный сооружением подпор теоретически распространяется бесконечно. При инженерных расчетах определяют длину кривой подпора от сооружения до некоторого сечения с глубиной h_1, достаточно близкой (с практической точки зрения) к нормальной глубине.



Фиг. 160

2. На фиг. 161 показан поток, в котором равномерное движение нарушено наличием перепада и перешло в неравномерное ускоренное. Глубины вдоль потока будут уменьшаться. Можно показать, что и в этом случае кривая свободной по-



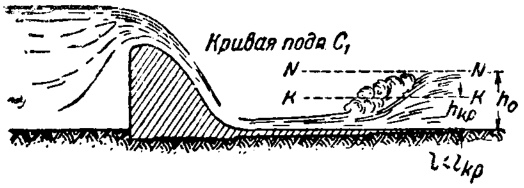
Фиг. 161

верхности вся расположится в пределах одной зоны — b, т. е., что глубина в конце кривой не опустится ниже критической глубины. Это следует из того, что, как нам уже известно, удельная энергия сечения при спокойном состоянии потока убывает с уменьшением глубины, достигая наименьшего значения из возможных, именно при критической глубине.

Такая кривая свободной поверхности, расположенная целиком в зоне b, имеет выпуклую форму и называется кривой спада типа b_1.

Для этой кривой имеем, что при $h\to h_0$ в уравнении (303) $\frac{dh}{dL}\to 0$ и линия нормальной глубины также является для нее асимптотой. Спад также распространяется бесконечно, и высказанные в предыдущем пункте соображения о длине кривой остаются в силе и в данном случае.

3. На фиг. 162 показан участок русла с $i<i_{кр}$, для которого в нормальных условиях равномерного движения свойственно спокойное состояние потока. Поступает же поток в это русло в бурном состоянии в результате предшествовавших



Фиг. 162

условий, например, при переливании через плотину или истечении из-под щита. Скорость, достигнутая потоком к моменту поступления на рассматриваемый участок, не сможет сохраниться и поток будет двигаться неравномерно (замедленно). Глубины в потоке будут возрастать и налицо будет кривая подпора. Кривая начнется в зоне c, и, из анализа изменения удельной энергии сечения, можно установить, что плавное непрерывное развитие кривой должно ограничиться только пределами этой зоны. Переход же потока из бурного состояния (зона c) в спокойное состояние, типичное для данного потока ниже по течению, произойдет скачкообразно так называемым гидравлическим прыжком.

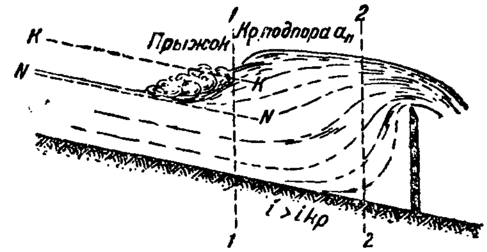
Кривая подпора, расположенная в зоне c, имеет вогнутую форму и называется кривой подпора типа c_I.

II. Поток в бурном состоянии при равномерном движении ($i>i_{кр}$; $h_0<h_{кр}$). Выше мы подробно останавливались на описании отдельных случаев в целях освещения физической сущности явлений. Остальные случаи кривых подпора и спада рассмотрим более кратко по зонам, зная уже, что каждая кривая свободной поверхности развивается непрерывно только в границах своей зоны. При $i>i_{кр}$ имеем:

1. Кривая в зоне a. При этом $h>h_{кр}>h_0$ и потому $K>K_0$ и $Fr<1$. Тогда из уравнения (303) видно, что $\frac{dh}{dL}>0$, т. е. глубины вдоль потока возрастают и налицо кривая подпора, именуемая кривой подпора типа a_{II}. Кривая имеет выпуклую форму и в нижней своей части асимптотически приближается к горизонтальной линии, ибо при $h\to\infty$ величина $\frac{dh}{dL}\to i$. На участке кривой подпора поток — в спокойном состоянии.

Поток переходит из бурного состояния при равномерном движении в спокойное состояние на участке кривой подпора скачкообразно через гидравлический прыжок (фиг. 163).

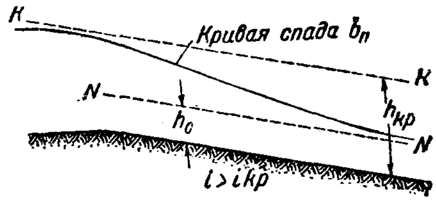
2. Кривая в зоне b. Имеем $h_{кр}>h>h_0$, т. е. глубины потока на участке кривой—больше нормальной, но меньше критической. Тогда $Fr>1$ и $K>K_0$, а уравнение (301) дает $\frac{dh}{dL}<0$. Следовательно, в этом случае глубины вдоль потока



Фиг. 163

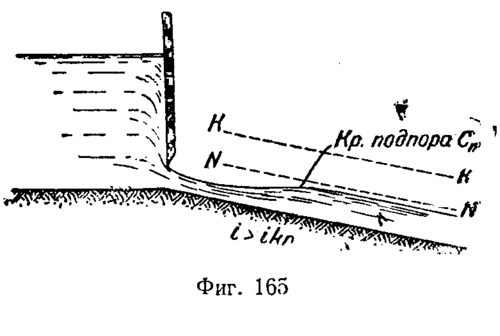
уменьшаются и мы имеем кривую спада типа b_{II} (фиг. 164). Кривая имеет вогнутую форму и при $h\to h_0$ асимптотически приближается к линии нормальной глубины.

3. Кривая в зоне c. Глубины на участке кривой меньше и нормальной и критической глубин. В результате $K<K_0$, $Fr>1$ и по (301) имеем $\frac{dh}{dL}>0$. Следовательно, глубины вдоль потока



Фиг. 164

возрастают и получается кривая подпора типа c_{II} (фиг. 165). Кривая имеет выпуклую форму и вниз по течению имеет асимптотой линию нормальной глубины N-N, так как при $h\to h_0$ по (301) имеем $\frac{dh}{dL}\to 0$.

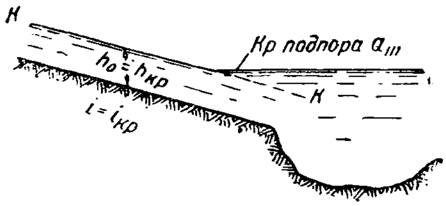


Фиг. 165

III. Поток в критическом состоянии при равномерном движении ($i=i_{кр}$; $h_0=h_{кр}$). В рассматриваемом случае имеются только две зоны a и c и, следовательно, могут быть и два вида кривой свободной поверхности.

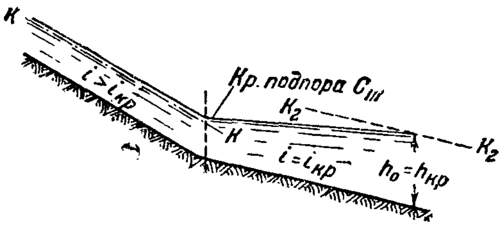
1. Кривая в зоне a. В этой зоне глубины больше как критической, так и нормальной глубины и потому $K>K_0$, а $Fr<1$. Следовательно, согласно (301) имеем $\frac{dh}{dL}>0$, т. е. глубины вдоль

потока увеличиваются. В зоне a в данном случае будет кривая подпора типа a_{III}. Такая кривая образуется в потоке, движущемся равномерно при критической глубине, если на пути потока поставить преграду (фиг. 166).



Фиг. 166

2. Кривая в зоне c. В этой зоне имеем $K < K_0$ и $\mathrm{Fr} > 1$. По уравнению (301) видно, что $\frac{dh}{dL} > 0$, т. е. глубина вдоль потока также возрастает. Кривую свободной поверхности в этом случае называют кривой подпора типа c_{III}. Такая кривая получится в условиях фиг. 167, если уклон отводящего лотка будет равен критическому.



Фиг. 167

Для последних двух кривых имеем: при $h \to h_{кр}$ величина $K \to K_0$ (так как $h_{кр} = h_0$), $\mathrm{Fr} \to 1$ и $\frac{dh}{dL} \to \frac{0}{0}$. Чтобы раскрыть получившуюся неопределенную форму, придадим уравнению (301) новый вид.

Имеем

$$\frac{dh}{dL} = i\,\frac{1 - \left(\frac{K_0}{K}\right)^2}{1 - \frac{\alpha Q^2}{g} \cdot \frac{B}{\omega^3}} = i\,\frac{1 - \left(\frac{K_0}{K}\right)^2}{1 - \frac{\alpha K_0^2 i}{g} \cdot \frac{C^2 RB}{\omega^2 C^2 R \omega}}.$$

Замечая, что $\frac{R}{\omega} = \frac{1}{\chi}$, а $\omega^2 C^2 R = K^2$ и обозначая

$$\frac{\alpha i C^2 B}{g \chi} = j, \tag{363}$$

получим

$$\frac{dh}{dL} = i\,\frac{1 - \left(\frac{K_0}{K}\right)^2}{1 - j\left(\frac{K_0}{K}\right)^2}. \tag{364}$$

Пользуясь известным в математике правилом раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$, запишем

$$\lim \left|\frac{dh}{dL}\right|_{K = K_0} = i\,\frac{f'\left[1 - \left(\frac{K_0}{K}\right)^2\right]}{F'\left[1 - j\left(\frac{K_0}{K}\right)^2\right]}$$

и, найдя первые производные от выражений взятых в квадратные скобки, получим

$$\lim \left|\frac{dh}{dL}\right|_{K \to K_0} = \frac{1}{j}\, i^*.$$

Когда глубина потока стремится к $h_{кр}$, величина $j_{кр}$ стремится к единице, в чем нетрудно убедиться [1], придавая обозначениям в (363) индекс критического состояния и заменяя $i_{кр}$ его значением по (362).

Тогда приходим к заключению, что $\frac{dh}{dL} \to i$, а кривые подпора типа a_{III} и c_{III} стремятся к горизонтальному положению. Кривизна рассматриваемых двух линий свободной поверхности весьма незначительна, и практически можно полагать, что кривые свободной поверхности потока в этих случаях почти горизонтальны.

§ 125. Формы свободной поверхности потока в призматических руслах с обратным или нулевым уклоном ($i < 0$ или $i = 0$)

В рассмотренных выше руслах прямого уклона равномерное движение жидкости осуществляется в тех случаях, когда работа сил тяжести в направлении движения уравновешивается гидравлическими сопротивлениями.

На участках русла с $i < 0$ или $i = 0$ проекция силы тяжести на направление движения или равна нулю (горизонтальные участки) или даже отрицательна (участки с обратным уклоном).

Поэтому ясно, что на участках русла горизонтальных или с обратным уклоном равномерное движение жидкости вообще невозможно. Движение жидкости по таким участкам русла возможно только за счет энергии самого потока, имеющейся в нем к моменту вступления на рассматриваемый участок.

Удельная энергия потока по мере продвижения жидкости будет убывать, затрачиваясь на преодоление всех сопротивлений. Удельная энергия сечения также будет уменьшаться, как это уже было показано в § 121.

Движение жидкости при этом, таким образом, всецело зависит от начальных условий вступле-

* Величина j принята как постоянная.
[1] $j = \mathrm{Fr}$.

ния потока на данный участок. От этих же условий будет зависеть и возможная форма свободной поверхности.

Прежде всего отметим, что вступление потока на участок с $i<0$ или $i=0$ в критическом состоянии физически абсолютно невозможно, так как пр этом состоянии удельная энергия потока уже дошла до минимума и нет источника энергии для преодоления предстоящих впереди сопротивлений.

Поэтому ясно, что поток может вступать на горизонтальный или с обратным уклоном участок только в спокойном или бурном состоянии.

Рассмотрим эти два физически возможных варианта:

1. Поток в спокойном состоянии. Удельная энергия сечения в таком потоке характеризуется верхней ветвью кривой $Э=f(h)$. При этом известно, что удельная энергия сечения в спокойном потоке убывает только при уменьшении глубины по течению. Отсюда легко притти к заключению, что в этом случае на горизонтальном участке, а тем более на участке с обратным уклоном, будет устанавливаться единственно возможная форма движения с уменьшением глубин вдоль потока.

Таким образом устанавливаем, что форма свободной поверхности потока, вступившего на участок с $i<0$ или $i=0$ в спокойном состоянии, будет кривая спада.

2. Поток в бурном состоянии ($h<h_{кр}$). В этом случае выделение энергии для преодоления гидравлических сопротивлений возможно только при росте глубин вдоль потока. Бесспорно, что форма свободной поверхности потока, вступившего на участок с $i<0$ или $i=0$ в бурном состоянии, будет кривая подпора.

Задача 60. Грубо бетонированный прямоугольный канал шириной $b=8$ *м* переходит с $i_1=0{,}001$ на $i_2=0$. В начале горизонтального участка глубина $h=3$ *м*. Определить вид свободной поверхности на обоих участках канала, если $Q=62$ *м*³/сек.

а) Рассчитаем нормальную глубину верхнего участка канала с $i_1=0{,}001$, принимая коэфициент шероховатости для грубой бетонировки $n=0{,}017$.

Имеем по (344)

$$\Psi(\eta_0)=2{,}7\lg b-N-\lg Q=2{,}438-9{,}730-1{,}792=0{,}916.$$

По соответствующей таблице устанавливаем значение $\eta_0=0{,}36$ и находим нормальную глубину

$$h_0=\eta_0\cdot b=0{,}36\cdot 8=2{,}88 \text{ м}.$$

б) Определим критическую глубину, применяя формулу (356):

$$h_{kp}=0{,}482\sqrt[3]{q^2}=0{,}482\sqrt[3]{\left(\frac{62}{8}\right)^2}=1{,}89 \text{ м}.$$

Сравнением заданной глубины $h=3$ *м* (на стыке обоих участков) с найденными h_0 и h_{kp}, легко установить: во-первых, что верхний участок канала находится в подпоре с кривой подпора типа a_I и, во-вторых, что на горизонтальном участке будет кривая спада.

ГЛАВА XVII

РАСЧЕТ КРИВЫХ ПОДПОРА И СПАДА В ПРИЗМАТИЧЕСКИХ РУСЛАХ

§ 126. Общие замечания

Уравнение неравномерного движения (301) дает в диференциальной форме закон изменения глубин потока вдоль оси движения.

Это уравнение

$$\frac{dh}{dL}=\frac{i-\frac{Q^2}{\omega^2C^2R}}{1-\frac{\alpha Q^2}{g}\frac{B}{\omega^3}}$$

после разделения переменных принимает вид

$$dL=\frac{1-\frac{\alpha Q^2}{g}\frac{B}{\omega^3}}{i-\frac{Q^2}{\omega^2C^2R}}dh=F(h)\,dh, \qquad (365)$$

где

$$F(h)=\frac{1-\frac{\alpha Q^2}{g}\frac{B}{\omega^3}}{i-\frac{Q^2}{\omega^2C^2R}}. \qquad (366)$$

В результате интегрирования этого уравнения можно получить расчетные формулы для построения кривых подпора и спада.

Решение поставленного вопроса, по существу, сводится к отысканию такого преобразованного вида выражения (366) для $F(h)$, которое позволило бы технически выполнить интеграцию уравнения (365).

Выражение (365), если его представить в виде явной функции от одной какой-нибудь переменной, получается весьма сложным и точное решение нужного интеграла в общем случае получается или исключительно трудным или даже просто невозможным.

Поэтому историческое развитие рассматриваемого вопроса шло по пути отыскания решений вначале для русел с наиболее простой элементарной формой поперечного сечения. Простота принятой формы позволяла получать решение уравнения (365). Правда и эти решения получались не вполне строгими, так как кроме простоты формы русла исследователям приходилось еще итти на некоторые допущения.

Еще в 1848 г. Дюпюи (Dupuit), а затем Рюльман (Ruhlmann) предложили решение уравнения (365) для вытянутого в ширину (по сравнению с глубиной) прямоугольного русла. В 1860 г. Бресс (Bresse) несколько уточнил это решение для той же формы русла. В 1892 г. Толкмитт (Tolkmitt) дал аналогичное решение также для вытянутого в ширину, но параболического русла. Начиная с 1912 г. (с появления способа проф. Бахметева), можно отметить более продуктивную работу над решением этого вопроса, выразившуюся в появлении ряда новых предложений и способов для расчета кривых подпора и спада. К таким предложениям можно отнести способы: Бахметева (1914), Батикля (Baticle) (1921), Павловского (1924), Агроскина (1940) и ряд других.

Отдельные более ранние способы в дальнейшем оказывались частными случаями позднейших более общих решений. Поэтому изложение рассматриваемого вопроса нами дается не в хронологическом порядке появления того или иного способа, а путем изложения более общих новейших способов с попутным указанием, для каких частных условий предлагался способ более ранний.

Прежде чем перейти к рассмотрению способов решения уравнения (365), остановимся на некоторых замечаниях, позволяющих судить о степени неравномерности потоков или, иначе говоря, о степени отклонения их от равномерного режима.

§ 127. Степень неравномерности потоков

Выше отмечалось, что одним из критериев динамического подобия потоков является безразмерное число Фруда

$$\mathrm{Fr} = \frac{\alpha v^2}{gl},$$

где l — некоторый линейный параметр из числа геометрических характеристик русла.

Примем в дальнейшем в качестве характерного геометрического параметра, применимого для русел любой формы, среднюю глубину потока в изучаемом живом сечении

$$h_{cp} = \frac{\omega}{B}.$$

Тогда число Фруда

$$\mathrm{Fr} = \frac{\alpha v^2}{gh_{cp}}$$

будет представлять собой удвоенное отношение удельной кинетической энергии сечения к удельной его потенциальной энергии.

Число Фруда при равномерном движении остается постоянным для любых живых сечений потока, а при неравномерном движении изменяется вдоль потока.

При этом в условиях подпора число Фруда постепенно уменьшается (следуя по течению), а для спада — увеличивается.

Чтобы получить возможность устанавливать по отдельно взятому живому сечению характер движения потока (равномерный, подпор, спад), не прибегая к сопоставлению между собой смежных сечений, применим следующий прием.

Пусть Fr — число Фруда, фактически присущее рассматриваемому живому сечению, а Fr′ — число Фруда, которое было бы в этом же живом сечении при равномерном движении.

Тогда отношение $\frac{\mathrm{Fr}'}{\mathrm{Fr}}$ может служить объективной характеристикой состояния потока, позволяющей устанавливать степень неравномерности потока. При этом будем иметь:

а) при равномерном движении $\frac{\mathrm{Fr}'}{\mathrm{Fr}} = 1$ и вдоль потока остается постоянным;

б) при замедленном движении (подпор) $\frac{\mathrm{Fr}'}{\mathrm{Fr}} > 1$ и вдоль потока увеличивается;

в) при ускоренном движении (спад) $\frac{\mathrm{Fr}'}{\mathrm{Fr}} < 1$ и вдоль потока уменьшается.

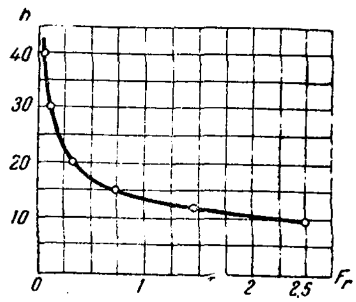
Для всякого призматического русла можно установить характер изменения величин Fr и Fr′ в зависимости от изменения глубины потока.

Величина

$$\mathrm{Fr} = \frac{\alpha v^2}{gh_{cp}} = \frac{\alpha Q^2}{g\omega^3 h_{cp}} = \frac{\alpha Q^2}{gB^2 h^3_{cp}} = \frac{\alpha Q^2}{g}\,\frac{B}{\omega^3}, \tag{367}$$

как это видно из самого уравнения, стремится к бесконечности при $h \to 0$ и к нулю при $h \to \infty$. При этом согласно (347) для критического состояния потока $\mathrm{Fr}_{кр} = 1$.

На фиг. 168 показана кривая $\mathrm{Fr} = \frac{\alpha Q^2}{g}\,\frac{B}{\omega^3}$



Фиг. 168

для прямоугольного русла с $b = 10$ *м* и $Q = 50$ *м³/сек.*

Выражение для Fr′ получим из (367), если вместо фактически имеющейся скорости v подставим скорость равномерного движения жидкости через то же живое сечение.

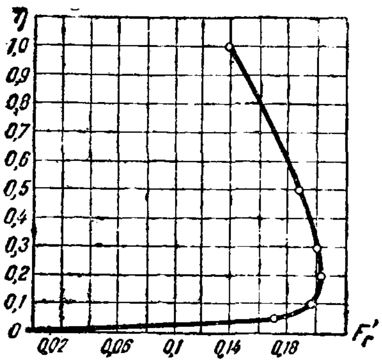
Принимая на основе формулы Шези

$$v = C\sqrt{Ri},$$

где i — уклон дна, получим

$$\mathrm{Fr}' = \frac{\alpha C^2 Ri}{gh_{cp}}. \tag{368}$$

На фиг. 169 показана кривая изменения числа Fr' для прямоугольного русла шириной $b=10$ *м* при $n=0{,}020$ и $i=0{,}001$.



Фиг. 169

Выясним характер изменения числа Fr' в трапецоидальных руслах.

Для прямоугольного русла имеем, приняв $\eta=\frac{h}{b}$ и в общем виде

$$C=\frac{1}{n}R^{y},$$

$$\mathrm{Fr}'=\frac{aiC^2R}{gh_{cp}}=\frac{aib^{2y}}{gn^2}\,\frac{\eta^{2y}}{(1+2\eta)^{1+2y}}.$$

Исследуем полученное выражение на maxima и minima. Найдем первую производную от выражения для Fr'.

Имеем

$$\frac{d\mathrm{Fr}'}{d\eta}=\frac{aib^{2y}}{gn^2}\,\frac{2y\eta^{2y-1}-2\eta^{2y}}{(1+2\eta)^{2+2y}}$$

Вторая производная отрицательна и, следовательно, Fr' достигает максимума при $\frac{d\mathrm{Fr}'}{d\eta}=0$ или, иначе говоря, при $\eta=y$.

Таким образом видно, что Fr' имеет максимум при $h=yb$.

Для трапецоидального русла в общем виде с коэфициентом откоса m, обозначая $m'=2\sqrt{1+m^2}$ и $\eta=\frac{b}{h}$, выражение для Fr' будет

$$\mathrm{Fr}'=\frac{aib^{2y}}{gn^2}\cdot\frac{(\eta+m\eta^2)^{2y}(1+2m\eta)}{(1+m'\eta)^{1+2y}}.$$

Исследование этого уравнения также показывает, что при определенном в каждом случае отношении $\eta=\frac{h}{b}$ число Fr' достигает максимального своего значения.

Опуская вычисления первой производной, укажем лишь, что в данном случае условие maxima числа Fr' принимает такой вид:

$$\eta=\frac{(m'-m+4my)\mp\sqrt{(m'-m+4my)^2-16m'my^2}}{4m'my}.$$

Данные анализа для трапецоидальных русел позволяют привести табл. 48, характеризующую условия, когда Fr' достигает максимума (считая по Форхгеймеру $y=0{,}2$).

Установленное выше характеристическое отношение $\frac{\mathrm{Fr}'}{\mathrm{Fr}}$ может быть записано согласно (367) и (368) в таком простом виде:

$$\frac{\mathrm{Fr}'}{\mathrm{Fr}}=\frac{aC^2Ri\omega^2}{aQ^2}=\left(\frac{Q'}{Q}\right)^2, \tag{369}$$

где Q — расчетный расход потока, фактически проходящий через каждое живое сечение;

Q' — расход, который пропускало бы данное живое сечение, находясь в условиях равномерного режима.

Кроме того отметим, что

$$\frac{\mathrm{Fr}'}{\mathrm{Fr}}=\frac{\frac{a(q')^2}{g}}{\frac{aq^2}{g}}=\left(\frac{h'_{кр}}{h_{кр}}\right)^3, \tag{370}$$

где $h'_{кр}$ и $h_{кр}$ — соответственно критические глубины прямоугольного русла шириной B при расходах Q' и Q.

Таблица 48

Откосы	$m=0$	$m=1$	$m=2$	$m=3$
η_{max}	0,200	0,163	0,132	0,077
$\beta_{max}=\frac{b}{h}$	5,000	6,135	7,576	12,987
Fr'_{max}	$0{,}328\,\frac{aib^{0,4}}{gn^2}$	$0{,}401\,\frac{aib^{0,4}}{gn^2}$	$0{,}393\,\frac{aib^{0,4}}{gn^2}$	$0{,}332\,\frac{aib^{0,4}}{gn^2}$
Fr'_{max}	$0{,}628\,\frac{aih^{0,4}}{gn^2}$	$0{,}829\,\frac{aih^{0,4}}{gn^2}$	$0{,}883\,\frac{aih^{0,4}}{gn^2}$	$0{,}926\,\frac{aih^{0,4}}{gn^2}$

§ 128. Общее решение диференциальных уравнений неравномерного движения в призматических руслах

Общее уравнение неравномерного движения жидкости в призматическом русле любой формы было записано выше в форме (365):

$$dL = \frac{1 - \frac{\alpha Q^2}{g}\frac{B}{\omega^3}}{i - \frac{Q^2}{\omega^2 C^2 R}}\,dh.$$

Умножив и разделив правый член знаменателя этого уравнения на произвольное значение некоторого положительного уклона i', получим

$$i'dL = \frac{1 - \frac{\alpha Q^2}{g}\frac{B}{\omega^3}}{\frac{i}{i'} - \left(\frac{Q}{Q'}\right)^2}\,dh. \qquad (371)$$

Условимся выбирать произвольное значение i', введенное нами в уравнении, так:

при прямом уклоне русла $i' = i$,

при обратном уклоне русла $i' = |i|$,

при нулевом уклоне русла $i' = i'$, т. е. любому произвольно избранному положительному уклону.

Тогда с учетом выражений (367) и (369) получим вместо (365) такие уравнения:

а) для $i > 0$

$$idL = \frac{1 - \mathrm{Fr}}{1 - \frac{\mathrm{Fr}}{\mathrm{Fr}'}}\,dh = \left(1 - \frac{1 - \mathrm{Fr}'}{1 - \frac{\mathrm{Fr}'}{\mathrm{Fr}}}\right)dh; \qquad (372)$$

б) для $i < 0$

$$|i|\,dL = \frac{1 - \mathrm{Fr}}{-1 - \frac{\mathrm{Fr}}{\mathrm{Fr}'}}\,dh = \left(-1 + \frac{1 + \mathrm{Fr}'}{1 + \frac{\mathrm{Fr}'}{\mathrm{Fr}}}\right)dh; \qquad (373)$$

в) для $i = 0$

$$i'dL = \frac{1 - \mathrm{Fr}}{-\frac{\mathrm{Fr}}{\mathrm{Fr}'}}\,dh = \left(\mathrm{Fr}' - \frac{\mathrm{Fr}'}{\mathrm{Fr}}\right)dh. \qquad (374)$$

Для общности последующих выводов введем в эти уравнения новую переменную, обозначив

$$\frac{\mathrm{Fr}'}{\mathrm{Fr}} = z^n,$$

т. е. полагая

$$z = \sqrt[n]{\frac{\mathrm{Fr}'}{\mathrm{Fr}}}. \qquad (375)$$

Интегрирование уравнений (372), (373), (374) будет возможно, если принять на участке интеграции

$$dh = a\,dz,$$

где a, равное отношению диференциалов $\frac{dh}{dz}$, может быть определено из отношения конечных разностей так:

$$a = \frac{dh}{dz} \approx \frac{h_1 - h_2}{z_1 - z_2} = \frac{\Delta h}{\Delta z}. \qquad (376)$$

Переходя к интегрированию полученных диференциальных уравнений, отметим, что значение Fr' изменяется обычно плавно и медленно. Поэтому, деля пределы интегрирования на некоторые интервалы, будем считать значение Fr' постоянным для данного интервала и равным среднему его значению.

На основе приведенных соображений перепишем уравнение (371) в таком виде:

а) для $i > 0$

$$\frac{idL}{a} = \left[dz - (1 - \mathrm{Fr}')\frac{dz}{1 - z^n}\right]; \qquad (377)$$

б) для $i < 0$

$$\frac{|i|\,dL}{a} = \left[-dz + (1 + \mathrm{Fr}')\frac{dz}{1 + z^n}\right]; \qquad (378)$$

в) для $i = 0$

$$\frac{i'dL}{a} = \mathrm{Fr}'dz - z^n dz. \qquad (379)$$

Не предрешая пока вопроса о том, какой показатель степени следует принять у переменной z в соответствии с уравнением (375), выполним интегрирование уравнений (377)—(379) в общем виде.

Тогда получим для определения расстояния l между двумя живыми сечениями потока, отличающимися своими характеристическими отношениями $\frac{\mathrm{Fr}'}{\mathrm{Fr}}$ или избранными переменными z, следующие формулы:

1. Для $i > 0$

$$l = \frac{a}{i}\left\{z_2 - z_1 - (1 - \mathrm{Fr}')\,[\Phi(z_2) - \Phi(z_1)]\right\}, \qquad (380)$$

где обозначено

$$\Phi(z) = \int \frac{dz}{1 - z^n} + C. \qquad (381)$$

2. Для $i < 0$

$$l = \frac{a}{|i|}\left\{-(z_2 - z_1) + (1 + \mathrm{Fr}')\,[F(z_2) - F(z_1)]\right\}, \qquad (382)$$

где

$$F(z) = \int \frac{dz}{1 + z^n} + C. \qquad (383)$$

3. Для $i = 0$

$$l = \frac{a}{i'}\left\{\mathrm{Fr}'(z_2 - z_1) - [f(z_2) - f(z_1)]\right\}, \qquad (384)$$

где

$$f(z) = \int z^n dz + C. \qquad (385)$$

Для придания полученным уравнениям определенности необходимо установить положения, на основе которых должны быть приняты величина переменной z и показатель степени при ней.

Обращаясь к уравнению (375), замечаем, что в нем только величина $\frac{\mathrm{Fr}'}{\mathrm{Fr}}$ определяется физическими условиями потока. Величины же z и n по отдельности являются произвольными.

Поэтому, вообще говоря, можно установить два пути решения вопроса.

а) Задаваться значениями z, а показатель степени n определять из уравнения (375). При этом, очевидно, в различных случаях будут получаться разные показатели степени n, что при табулировании выражений (381), (383) и (385) приведет к необходимости составления серии таблиц для разных значений n.

б) Задаваться постоянным значением показателя степени n, а величины переменной z получать из уравнения (375). При этом значения интегралов (381), (383) и (385) можно будет свести только в три таблицы.

В зависимости от варианта решения уравнения (375) рассмотрим различные способы расчета кривых спада и подпора.

§ 129. Способ Бахметева

Примем в уравнении (375)

$$z=\frac{h}{h_0}=\eta,$$

где h — глубина потока в рассматриваемом живом сечении;

h_0 — нормальная глубина, при которой заданный расход проходит в рассматриваемом призматическом русле при равномерном движении на участке с положительным уклоном i'.

При выборе значения i' будем придерживаться сделанных уже выше указаний, а именно:

при $i>0$ . . . . . . $i'=i$
при $i<0$ . . . . . . $i'=|i|$
при $i=0$ . . . . . . $i'=i'$,

т. е. равен любому положительному уклону. Далее имеем

$$h_0 dz=dh$$

и согласно (376)

$$a=\frac{dh}{dz}=h_0.$$

Если в уравнения (380), (382) и (384) подставить вместо a величину h_0 и вместо z переменную η, то получим уравнения, данные впервые проф. Б. А. Бахметевым[1].

[1] Изложение способа в редакции его автора см. Б. А. Бахметев, Гидравлика открытых русел, М., 1934.

Проф. Бахметев показал, что для русел правильной формы имеет место такая зависимость:

$$\left(\frac{Q_1}{Q_2}\right)^2=\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^x, \tag{386}$$

где Q_1 — расход при равномерном движении потока глубиной h_1;

Q_2 — расход при равномерном движении потока в том же русле при глубине h_2;

x — некоторая постоянная величина для данной формы поперечного сечения русла и данной шероховатости его.

Соотношение (386) не имеет строгого обоснования, но фактически с достаточной для практического использования точностью подтверждается. Величину x проф. Бахметев называет гидравлическим показателем русла.

На основе положения проф. Бахметева имеем

$$\left(\frac{h}{h_0}\right)^x=\left(\frac{Q'}{Q}\right)^2=\frac{\mathrm{Fr}'}{\mathrm{Fr}}=z^n$$

и, следовательно, при $z=\eta$ показатель степени в уравнении (375) будет равен гидравлическому показателю русла ($n=x$) и может быть принят постоянным для всего призматического русла в целом.

Так как по смыслу самого определения каждое русло характеризуется своим гидравлическим показателем, то очевидна практическая необходимость иметь вычисленными значения интегралов (381), (383) и (385) при различных численных значениях показателя степени при переменной[2].

Задача 61. Определить гидравлический показатель русла для трапецоидального канала с $b=10$ *м*, $m=1{,}5$ для участка между глубинами $h_1=3$ *м* и $h_2=4$ *м*.

Логарифмируя соотношение Бахметева (386), имеем

$$x=2\frac{\lg Q_1-\lg Q_2}{\lg h_1-\lg h_2}. \tag{387}$$

В целях ускорения подсчетов, за счет использования табличных данных, придадим последнему уравнению другой вид. Из теории абстрактной модели канала известно, что

$$\lg Q=\lg Q_м-M-N,$$

и потому вместо (387) запишем

$$x=2\frac{(\lg Q'_м-\lg Q''_м)-(M_1-M_2)}{\lg h_1-\lg h_2}. \tag{388}$$

Моделируя канал, при заданных глубинах будем иметь модели шириной:

при $h_1=3$ *м* $\quad \beta_1=\frac{b}{h}=\frac{10}{3}=3{,}33;$

при $h_2=4$ *м* $\quad \beta_2=\frac{b}{h_2}=\frac{10}{4}=2{,}50.$

[2] Таблицы значений интегралов см. акад. Н. Н. Павловский, Гидравлический справочник. 1937, стр. 813, или Б. А. Бахметев, Гидравлика открытых русел. 1934.

Пользуясь табличными данными моделей получим по (388)

$$x = 2\frac{(0{,}574 - 0{,}474) - (8{,}712 - 8{,}374)}{0{,}477 - 0{,}602} = 3{,}8.$$

Такой же результат получится и по (387), но при этом придется вычислять ω, χ, R и C при глубинах h_1 и h_2 для определения Q_1 и Q_2.

Нетрудно установить, что гидравлический показатель для того же русла, но вычисленный через две другие глубины, получит уже только приблизительно прежнее значение.

Так для русла в рассмотренном выше примере возьмем другую пару глубин $h_1 = 2{,}5$ *м* и $h_2 = 2{,}0$ (модели теперь будут с $\beta_1 = 4$ *м* и $\beta_2 = 5$ *м*) и снова вычислим x по 388). Получим

$$x = 2\frac{(0{,}642 - 0{,}728) - (8{,}926 - 9{,}187)}{0{,}398 - 0{,}301} = 3{,}6.$$

Этим примером мы хотели подчеркнуть, что „показательный закон" Бахметева не может рассматриваться как точное соотношение.

Задача 62. Трапецоидальный канал с $b = 20$ *м*, $m = 1{,}25$, $n = 0{,}020$, $i = 0{,}001$ пропускает расход $Q = 60$ *м³/сек*. На канале поставлен щит, вызвавший подъем горизонта воды на 0,55 *м* по сравнению с нормальным его положением.

Определить тип кривой свободной поверхности в канале и рассчитать эту кривую по способу Бахметева.

Прежде всего установим нормальную и критическую глубину для канала. Нормальную глубину находим по (344):

$$\Psi(\eta_0) = 2{,}7 \lg b - N - \lg Q = 3{,}513 - 9{,}801 - 1{,}778 = 1{,}934,$$

$$\eta_0 = 0{,}072 \text{ и } h_0 = \eta_0 b = 1{,}45 \text{ м}.$$

Критическую глубину находим по (354):

$$\Psi(\eta_{кр}) = \lg Q - 2{,}5 \lg b = 1{,}778 - 3{,}253 = -1{,}475,$$

$$\eta_{кр} = 0{,}049 \text{ и } h_{кр} = \eta_{кр} b = 0{,}98 \text{ м}.$$

Поток в нормальных условиях находится в спо состоянии ($h_0 > h_{кр}$). Глубина воды у щита $H = h_0 + 0{,}55 = 2{,}0$ *м* и, следовательно, кривая подпора расположится в зоне *a* в виде непрерывной кривой. Интегрирование уравнений возможно на всем протяжении.

За конец кривой практически примем, условно, сечение, где глубина в результате подпора отличается от нормальной, скажем, на 0,05 *м*. Тогда предстоит рассчитать кривую между глубинами 1,50 *м* и 2,00 *м*.

Для пользования способом Бахметева необходимо определить гидравлический показатель русла x.

Моделируя канал при глубинах $h_1 = 1{,}50$ и $h_2 = 2{,}0$, получим модели шириной:

$$\text{при } h_1 = 1{,}50 \text{ м} \qquad \beta_1 = \frac{20}{1{,}5} = 13{,}33;$$

$$\text{при } h_2 = 2{,}00 \text{ м} \qquad \beta_2 = \frac{20}{2{,}0} = 10{,}00.$$

Пользуясь табличными данными для абстрактных моделей, найдем по (388) значение гидравлического показателя русла:

$$x = 2\frac{(\lg Q'_м - \lg Q''_м) - (M_1 - M_2)}{\lg h_1 - \lg h_2} =$$

$$= 2\frac{(1{,}126 - 1{,}003) - (9{,}525 - 9{,}187)}{0{,}176 - 0{,}301} = 3{,}47 \approx 3{,}5$$

и, следовательно, при дальнейших расчетах будем пользоваться таблицами значений интегралов при $x = 3{,}5$.

Кривую подпора рассчитаем по участкам с изменением глубин, скажем, через 0,1, для чего прежде всего вычислим средние значения Fr′ на отдельных участках.

Придадим выражению (368) следующий вид, применяемый Бахметевым:

$$\mathrm{Fr}' = \frac{\alpha C^2 Ri}{g h_{ср}} = \frac{\alpha C^2 RiB}{g\omega} = \frac{\alpha i C^2 B}{g\chi}. \qquad (389)^1$$

Вычисление средних значений Fr′ по (389) приводится в табл. 49.

Таблица 49

№ сечения	h	$h_{ср}$	$B_{ср}$	$\omega_{ср}$	$\chi_{ср}$	$R_{ср}$	$C^2_{ср} = \frac{1}{n^2}R^{0,4}_{ср}$	$\frac{C_{ср}^2 B_{ср}}{\chi_{ср}}$	$\mathrm{Fr}'_{ср}$	$1 - \mathrm{Fr}'_{ср}$	Примечание
1	2,00										
		1,95	24,88	43,76	26,24	1,667	3 067,5	2 909	0,326	0,674	$\frac{\alpha i}{g} = \frac{1{,}1 \cdot 0{,}001}{9{,}81} = 0{,}00011213$
2	1,90										
		1,85	24,62	41,27	25,92	1,592	3 012,5	2 861	0,321	0,679	
3	1,80										
		1,75	24,38	38,83	25,60	1,517	2 955,0	2 814	0,316	0,684	
4	1,70										
		1,65	24,12	36,40	25,28	1,440	2 892,5	2 760	0,309	0,691	
5	1,60										
		1,55	23,88	34,01	24,96	1,363	2 837,5	2 615	0,293	0,707	
6	1,50										

[1] В уравнениях Бахметева принято обозначение $j = \frac{\alpha i C^2 B}{g\chi}$.

Далее пользуемся уравнением (380), которое при расчете по способу Бахметева примет вид:

$$l=\frac{h_0}{i}\left\{\eta_2-\eta_1-(1-\mathrm{Fr}')\left[\Phi(\eta_2)-\Phi(\eta_1)\right]\right\}.$$

Вычисление расстояний l по участкам кривой подпора по уравнению (380) выполняют в табл. 50, определяя значения $\Phi(\eta)=\int\frac{d\eta}{1-\eta^x}+C$ из таблиц[1].

Таблица 50

№ сечений	$\eta=\frac{h}{h_0}$	$\Delta\eta$	$\Phi(\eta)$	$\Delta\Phi(\eta)$	$(1-\mathrm{Fr}'_{cp})\Delta\Phi(\eta)$	[3] — [6]	l	Примечание
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1,379		0,209					$\frac{h_0}{i_0}=\frac{1,45}{0,001}=1\,450$
		0,069		— 0,039	—0,0263	0,0953	138	
2	1,310		0,248					
		0,069		— 0,052	—0,0353	0,1043	151	
3	1,241		0,300					
		0,069		— 0,074	—0,0506	0,1196	173	
4	1,172		0,374					
		0,069		— 0,126	—0,0871	0,1561	226	
5	1,103		0,500					
		0,069		— 0,293	—0,2072	0,2762	400	
6	1,034		0,793					
							$\Sigma l=1\,088$ м	

Определяя всю длину подпора сразу между крайними сечениями, получим

$$L=\frac{h_0}{i}\left\{\eta_1-\eta_6-(1-\mathrm{Fr}'_{cp})\left[\Phi(\eta_1)-\Phi(\eta_6)\right]\right\}=1\,450\,[1,379-1,034-(1-0,31)(0,209-0,793)]=1\,084\ м.$$

Зная длины участков l и глубины в концах участков, можно построить всю кривую подпора от щита вверх против течения.

Задача 63. В бетонированный горизонтальный участок трапецоидального канала поступает из-под щита расход $Q=4\ м^3/сек$ с глубиной $h_c=0,20$ м. Канал заканчивается перепадом, у которого устанавливается $h_{кр}=0,45$ м. Определить расстояние от перепада до щита и построить кривую свободной поверхности, если кривая свободной поверхности на участке непрерывна.

Канал имеет

$$b=4\ м,\quad m=0,5,\quad n=0,014.$$

При расчете для горизонтальных участков Бахметев вводит в уравнения критический уклон $i_{кр}$ вместо произвольного уклона i', принятого нами в уравнении (371).

В условиях задачи это будет уклон, при котором расход $Q=4\ м^3/сек$ пройдет глубиной $h_0=h_{кр}=0,45$ м при равномерном движении. Применяя уравнение (320), находим

$$N=\lg Q_м-\lg Q-M=0,921-0,602-0,937=9,382$$

и, следовательно, при $n=0,014$ $i_{кр}=0,00337$.

Поток вытекает из-под щита в бурном состоянии и на горизонтальном участке будет кривая подпора от глубины $h_c=0,20$ до $h_{кр}=0,45$ м. Кривую подпора рассчитаем по участкам с глубинами через 0,05 м.

Определим Fr' для крайних сечений по уравнению (389), как это показано в табл. 51.

Таблица 51

h	B	ω	χ	R	C^2	$\frac{C^2B}{\chi}$	Fr'	Примечание
0,20	4,20	0,820	4,447	0,184	2 592	2 448	0,924	$\frac{\alpha i_к}{g}=0,000378$
0,45	4,45	1,901	5,006	0,380	3 464	3 079	1,163	

Примем среднее значение Fr' между крайними сечениями

$$\mathrm{Fr}'_{cp}=\frac{0,924+1,163}{2}=1,044$$

для всех участков кривой.

Тогда, предварительно определив гидравлический показатель русла $x=3,32$, найдем по (384) длины участков по схеме табл. 52.

Задача 64. В начало переходного участка канала с обратным уклоном $i=-0,025$ и $b=10$ м; $m=1$; $n=0,017$ поступает расход $Q=50\ м^3/сек$ при глубине $h=3,5$ м. Рассчитать кривую свободной поверхности до изменения глубин на 0,6 м.

Определим по (354) критическую глубину:

$$\Psi(\eta_{кр})=\lg Q-2,5\lg b=1,699-2,500=-0,801,$$

$$\eta_{кр}=0,135\ \text{и}\ h_{кр}=\eta_{кр}b=1,35\ м.$$

[1] См. сноску[3] на стр. 176.

Таблица 52

№ сечений	h	$z=\frac{h}{\lvert h_0\rvert}$	Δz	$\mathrm{Fr}'_{cp}\Delta z$	$f(z)$	$\Delta f(z)$	[5] — [7]	l	Примечание
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,45	1,00			0,229				1. $\frac{h_{кр}}{i_{кр}}=\frac{0,45}{0,00337}=133,53$
			0,11	0,115		0,092	0,023	3,1	2. Значение $f(z)$ получены интерполяцией из таблиц Бахметева с $x=3,25$ и $x=3,50$
2	0,40	0,89			0,137				
			0,11	0,115		0,060	0,055	7,3	
3	0,35	0,78			0,077				
			0,11	0,115		0,037	0,078	10,4	
4	0,30	0,67			0,040				
			0,11	0,115		0,022	0,093	12,4	
5	0,25	0,56			0,018				
			0,11	0,115		0,009	0,106	14,2	
6	0,20	0,45			0,007				
								$\Sigma l=47,4$ м	

Длина всей кривой, полученная сразу по крайним сечениям, будет

$$L=\frac{h_{кр}}{i_{кр}}\left\{\mathrm{Fr}'_{cp}(z_2-z_1)-[f(z_2)-f(z_1)]\right\}=133,53\,[1,044(1,00-0,45)-(0,229-0,007)]=47 \text{ м}.$$

Замечая, что $H=3,5>h_{кр}$ заключаем, что поток вступает на обратный уклон в спокойном состоянии и, следовательно, пойдет на спад.

При пользовании уравнением (382) для обратного уклона необходимо знать величину $|h_0|$ — глубину данного потока при его равномерном движении в обратном направлении. Эту глубину получим по (344), принимая уклон как $|i|=0,025$:

$$\Psi(\eta_0)=2,7\ \lg b-N-\lg Q=2,700-9,032-1,699=1,969,$$

$$\eta_0=0,070 \text{ и } |h_0|=\eta_0 b=0,70 \text{ м}.$$

Далее, задаваясь значениями глубин меньше 3,5 м (спад), скажем через 0,2 м, произведем расчет вспомогательных величин Fr_{cp} (табл. 53) и, наконец, по (382) получим длины отдельных участков кривой, предварительно определив гидравлический показатель x. В данном случае $x\approx3,5$. Данные подсчетов сведены в табл. 54.

Таблица 53

№ сечений	h	h_{cp}	B_{cp}	ω_{cp}	χ_{cp}	R_{cp}	C^2_{cp}	$\frac{C^2_{cp}B_{cp}}{\chi_{cp}}$	Fr'_{cp}	$1+\mathrm{Fr}'_{cp}$	Примечание
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	3,50										$\frac{\alpha\lvert i\rvert}{g}=\frac{1,1\cdot0,025}{9,81}=0,002803$
		3,40	16,80	45,56	19,62	2,32	4 844	4 148	11,63	12,63	
2	3,30										
		3,20	16,40	42,24	19,05	2,22	4 761	4 099	11,49	12,49	
3	3,10										
		3,00	16,00	39,00	18,48	2,11	4 664	4 038	11,32	12,32	
4	2,90										

Таблица 54

№ сечений	h	z	$-\Delta z$	$F(z)$	$\Delta F(z)$	$(1+\mathrm{Fr}'_{cp})\Delta F(z)$	[4] + [7]	l	Примечание
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3,50	5,0000		1,139					$\frac{h_0}{\lvert i\rvert}=\frac{0,700}{0,025}=28$
			0,286		— 0,001	— 0,013	0,273	7,64	
2	3,30	4,7141		1,138					
			0,286		— 0,001	— 0,013	0,273	7,64	
3	3,10	4,4284		1,137					
			0,286		— 0,001	— 0,013	0,273	7,64	
4	2,90	4,1427		1,136					
								$\Sigma l=22,92$ м	

Поверхность жидкости на участке почти горизонтальна.

Способ, предложенный Бахметевым, явился обобщением так называемых старых способов, разработанных еще раньше для частных случаев.

Наиболее раннее решение Дюпюи-Рюльмана было дано для широкого прямоугольного русла. Авторы этого способа рассматривали такое широкое (по сравнению с глубиной) русло, для которого можно было пренебречь ролью вертикальных стенок в выражении смоченного периметра, т. е. полагали $\chi=B+2h\approx B$.

Для такого русла:

$$R=\frac{\omega}{\chi}\approx\frac{Bh}{B}\approx h;\quad K^2=\omega^2C^2R=B^2C^2h^3;\quad K^2_0\approx B^2C^2_0h^3_0;$$

$$\left(\frac{K}{K_0}\right)^2=\left(\frac{C}{C_0}\right)^2\cdot\frac{h^3}{h^3_0}.$$

Допуская далее, что C слабо изменяется вдоль потока, и потому полагая $C=C_0$, принималось, что $\left(\frac{K}{K_0}\right)^2=\left(\frac{h}{h_0}\right)^3$.

Наконец, считали, что Fr' настолько мало, что в уравнении (353) можно принять $\mathrm{Fr}'=0$, а это значит, что в уравнении пренебрегают изменением скоростного напора (живой силы) вдоль потока.

В дальнейшем Бресс уточнил способ Дюпюи-Рюльмана тем, что учитывал изменение живой силы вдоль потока, принимал $\mathrm{Fr}'\neq 0$ и оставлял его в уравнении.

Русло Брессом также принималось широким прямоугольным.

Позднее Толкмитт принял параболическую форму русла вместо прямоугольной. Также полагая параболу сильно вытянутой, т. е. принимая $\chi\approx B$, Толкмитт получил для такого параболического русла при $C_0=C$ соотношение $\left(\frac{K}{K_0}\right)^2$ равным уже не кубу отношения глубин, а четвертой степени этих глубин.

Естественным дальнейшим шагом было предложение Бахметева считать отношение $\left(\frac{K}{K_0}\right)^2$ равным отношению глубин не в третьей (Рюльман, Бресс) или четвертой степени (Толкмитт), а в некоторой степени x, различной для различных форм русла.

Таким образом Бахметев дал решение для общего случая и решения его предшественников оказываются частными случаями.

Если в уравнении Бахметева положить $x=3$ и $\mathrm{Fr}'=j=0$, то получится решение Дюпюи-Рюльмана. Приняв $x=3$ и оставляя Fr' в уравнении, имеем решение Бресса. Точно так же, полагая $x=4$, имеем решение Толкмитта.

§ 130. Способ акад. Павловского (1924 г.)

Неудобство способа Бахметева заключается, как уже отмечалось, в том, что в результате принятия переменной

$$z=\frac{h}{h_0}=\eta$$

общее уравнение (375) решается для русел различной формы при различных показателях степени n.

Как следствие для прикладных расчетов потребовалась серия таблиц для различных гидравлических показателей. При этом очень часто при расчетах получается дробное значение показателя степени, для которого не имеется готовых таблиц интегралов, и тогда приходится прибегать к межтабличной интерполяции.

Это несомненное неудобство может быть исправлено, если при решении уравнения (375) произвольно задаваться постоянным значением показателя степени n, а z находить как следствие уравнения (375) при заданном n.

Правда, при этом отношение между диференциалами h и z уже не будет равно постоянной величине, как при способе Бахметева, где $\frac{dh}{dz}=h_0$, а заменяется на каждом участке интегрирования средним значением $\frac{\Delta h}{\Delta z}=a$. Однако это обстоятельство практически не вносит в расчеты погрешностей и влияет на итоговые данные не больше, чем оперирование в способе Бахметева постоянным значением гидравлического показателя русла, являющегося по существу также величиной изменяющейся.

Академик Павловский впервые и предложил применить при решении уравнения (375) постоянный показатель степени $n=2$.

Тогда переменная z по Павловскому при учете (369) будет

$$z=\sqrt{\frac{\mathrm{Fr}'}{\mathrm{Fr}}}=\frac{Q'}{Q}. \tag{390}$$

Расчетными уравнениями для кривых подпора и спада по способу Павловского будут общие уравнения (380), (382) и (384) при $z=\frac{Q'}{Q}$ и значениях интегралов с показателями степени $n=2$.

Значения интегралов при расчетах по способу Павловского можно брать из таблиц Бахметева[1] для $x=2$.

Для вычисления переменной z при расчетах неравномерного движения по способу Павловского необходимо знать величины расходов, соответствующих заданным глубинам в живых сечениях, рассматривая эти сечения в условиях равномерного режима.

Эти вычисления для трапецоидальных русел легко выполняются, пользуясь таблицами абстрактной модели.

Для призматических русел любой формы необходимо построить по нескольким точкам график $Q=f(h)$ по уравнению равномерного движения $Q=\omega C\sqrt{Ri}$ и получать по графику значения расходов для расчетных глубин.

Задача 65. Рассчитать кривую подпора по способу Павловского по данным задачи 62. Прежде всего вычисляем необходимые для расчета величины z и Fr' по схеме, приведенной в табл. 55.

Далее, пользуясь таблицей интегралов к способу Бахметева при $x=2$, проводим расчет, как это показано в табл. 56.

Задача 66. Решить задачу 63 способом Павловского. Прежде всего вычисляем значения z, как это сделано в табл. 57.

Величину Fr'_{cp} возьмем из задачи 63 с переводом ее на произвольный уклон $i=0{,}01$ вместо $i_{кр}=0{,}00337$.

Тогда получим

$$\mathrm{Fr}'_{cp}=1{,}044\frac{0{,}01}{0{,}00337}=3{,}128$$

и выполняем по уравнению (384) основные расчеты, приведенные в табл. 58.

[1] См. сноску на стр. 176.

Таблица 55

№ сечений	h	$\beta=\frac{b}{h}$	$\lg Q_м$	M	$\lg Q'$	Q'	$z=\frac{Q'}{Q}$	B	ω	$v=\frac{Q}{\omega}$	$h_{cp}=\frac{\omega}{B}$	Fr'_{cp}	$1-Fr'_{cp}$	Примечание
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	2,00	10,00	1,003	9,187	2,015	103,5	1,725	25,00	45,00	2,30	1,80	0,329	0,674	$Q=60 м^3/сек$; $\frac{1}{Q}=0{,}0166$
2	1,90	10,53	1,025	247	1,977	94,8	1,580	24,75	42,50	2,23	1,72	0,324	0,679	$N=\lg\frac{n}{\sqrt{i}}=9{,}801$
3	1,80	11,11	1,047	311	1,935	86,1	1,435	24,50	40,05	2,15	1,63	0,318	0,686	$b=20$ м; $m=1{,}25$
4	1,70	11,76	1,071	378	1,892	78,0	1,300	24,25	37,60	2,07	1,55	0,310	0,693	$\lg Q'=\lg Q_м-M-N$
5	1,60	12,50	1,098	449	1,848	70,5	1,175	24,00	35,20	2,00	1,47	0,305	0,698	$a_{cp}=\frac{h_1-h_6}{z_1-z_6}=0{,}741$
6	1,50	13,33	1,125	9,525	1,799	63,0	1,050	23,75	32,80	1,92	1,38	0,299		$Fr'=0{,}112\frac{v^2}{h_{cp}}$

Таблица 56

№ сечений	h	z	Δz	$\Phi(z)$	$\Delta\Phi(z)$	$(1-Fr'_{cp})\ \Delta\Phi(z)$	[4] — [7]	$\frac{a}{i}$	l	Примечание
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	2,00	1,725	0,145	0,663	−0,084	−0,057	0,202	690	139	
2	1,90	1,580	0,145	0,747	−0,114	−0,077	0,222	690	153	
3	1,80	1,435	0,135	0,861	−0,157	−0,108	0,243	740	180	
4	1,70	1,300	0,125	1,018	−0,242	−0,168	0,293	800	234	
5	1,60	1,175	0,125	1,260	−0,597	−0,417	0,542	800	434	
6	1,50	1,050		1,857					$\Sigma l=1\,140$ м	

Длина кривой подпора, полученная сразу по крайним сечениям, будет:

$$L_{1-6}=\frac{a_{cp}}{i}\left\{z_6-z_1-(1-Fr_{cp})[\Phi(z_6)-\Phi(z_1)]\right\}=1\,112 \text{ м}.$$

Таблица 57

№ сечений	h	$\beta=\frac{b}{h}$	$\lg Q_м$	M	$\lg Q'$	Q'	$z=\frac{Q'}{Q}=\frac{Q'}{4}$	Примечание
1	2	3	4	5	6	7	8	
1	0,45	8,89	0,921	0,936	0,839	6,90	1,72	$b=4$ м; $m=0{,}5$; $n=0{,}014$; $Q=4$ м³/сек
2	0,40	10,00	0,975	1,074	0,755	5,69	1,42	Произвольный уклон, $i'=0{,}01$
3	0,35	11,43	1,035	1,231	0,658	4,56	1,14	Тогда
4	0,30	13,33	1,088	1,412	0,530	3,39	0,85	$N=\lg\frac{n}{\sqrt{i}}=9{,}146$
5	0,25	16,00	1,187	1,626	0,415	2,60	0,65	$Fr'_{cp}=\frac{1{,}044\cdot 0{,}01}{0{,}00337}=3{,}128$
6	0,20	20,00	1,287	1,887	0,254	1,80	0,45	

Таблица 58

№ сечений	h	z	Δz	$Fr'_{cp}\cdot\Delta z$	$f(z)$	$\Delta f(z)$	[5] — [7]	$\frac{a}{i'}$	l
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,45	1,72	0,30	0,938	1,696	+0,742	0,196	16,67	3,3
2	0,40	1,42	0,28	0,875	0,954	+0,467	0,414	17,85	7,4
3	0,35	1,14	0,29	0,907	0,493	+0,288	0,619	17,24	10,7
4	0,30	0,85	0,20	0,626	0,205	+0,113	0,513	25,00	12,8
5	0,25	0,65	0,20	0,626	0,092	+0,062	0,564	25,00	14,1
6	0,20	0,45			0,030				$\Sigma l=48{,}3$ м

Длина кривой, полученная по данным крайних сечений, будет

$$L_{1-6}=\frac{a}{i'}\left\{Fr'_{cp}(z_1-z_6)-[f(z_1)-f(z_6)]\right\}=45{,}4 \text{ м}.$$

§ 131. Расчеты кривых подпора и спада при произвольных показателях степени в уравнении

На основе соображений, изложенных при выводе общих уравнений (380), (382) и (384), а также при рассмотрении способа Павловского, можно для расчета кривых подпора и спада в призматических руслах применять уравнения с произвольными постоянными значениями показателя степени n.

Для удобства вычислений, очевидно, целесообразно брать значения n в виде целых чисел и при том таких, для которых имеются вычисленные таблицы интегралов вида (381), (383) и (385).

К таким целым числам (кроме $n=2$, уже примененного в способе Павловского) можно отнести $n=1$, $n=3$, $n=4$, $n=5$.

При этом значения переменной z примут согласно (375) следующие значения:

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= \frac{\mathrm{Fr}'}{\mathrm{Fr}} = \left(\frac{Q'}{Q}\right)^2, \\ z_3 &= \sqrt[3]{\frac{\mathrm{Fr}'}{\mathrm{Fr}}} = \frac{h'_{кр}}{h_{кр}} = \sqrt[3]{z_1}, \\ z_4 &= \sqrt[4]{\frac{\mathrm{Fr}'}{\mathrm{Fr}}} = \sqrt{\frac{Q'}{Q}} = \sqrt[4]{z_1} \end{aligned}\right\} \tag{391}$$

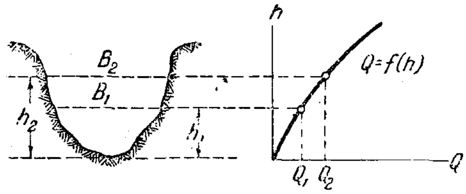
и. т. д.

В последних выражениях индекс у переменной z показывает значение показателя степени, при котором решается уравнение (375).

Сравнительные подсчеты показывают, что результаты расчетов получаются точнее при более высоких показателях степени.

Рассмотрим схему расчета для призматического русла любой формы.

Пусть задано призматическое русло с профилем поперечного сечения, показанным на фиг. 170,



Фиг. 170

и с установившимся расходом Q. Пусть в этом русле равномерный режим нарушен тем или иным постоянно действующим фактором (плотина, перепад и т. п.) и требуется рассчитать кривую свободной поверхности.

Тогда необходимо построить график $Q'=f(h)$ по гидрометрическим данным (для естественных русел) или по уравнению равномерного движения $Q'=\omega C\sqrt{Ri}$, задаваясь разными значениями h.

Имея такой график, расчет кривой спада или подпора следует вести по схеме табл. 59, определяя по графику значения Q'.

Таблица 59

№ сечений	h	B	ω	$\frac{\alpha}{g}\,\frac{B}{\omega^3}$	$(Q')^2$	$1-\mathrm{Fr}'=1-[5]\cdot[6]$	$z_1=\frac{1}{Q^2}\cdot[6]$	Δz	$\Phi(z)$	$\Delta\Phi(z)$	$[7]\cdot[11]$	$[9]-[12]$	$a_1=\frac{\Delta h}{\Delta z}$	l	Примечание
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Эта схема дана для $i>0$, при расчете с переменной z_1. Значения интегралов переменной z_1 в таблицах не приведены, так как особых затруднений не вызывает их непосредственное определение.

В самом деле, при переменной z_1, как это следует из (381), (383) и (385), имеем

$$\Phi(z_1)=\int\frac{dz}{1-z}+C=-\ln(1-z)+C=$$
$$=-\ln(z-1)+C,$$
$$F(z_1)=\int\frac{dz}{1+z}=\ln(1+z)+C,$$
$$f(z_1)=\int z\,dz=0{,}5\,z^2+C.$$

При расчете с более высокими степенями переменной схема расчета может быть оставлена такой же. Переменная z_n определится по уравнениям (375), а значения интегралов из таблиц Бахметева при $x=n$.

Для призматических русел трапецоидального профиля техника расчетов может быть еще более упрощена, как это будет показано в последующих параграфах.

§ 132. Замечания для призматических трапецоидальных русел

Для русел правильной формы, пользуясь числами Фруда (Fr и Fr'), можно получить ряд существенных выводов и обобщений.

Для трапецоидального профиля шириной b по дну при коэфициенте откоса m имеем:

$$\omega=h(b+mh); \quad B=b+2mh; \quad h_{cp}=\frac{h(b+mh)}{b+2mh};$$

$$\chi=b+2\sqrt{1+m^2}h, \quad B^2h^3{}_{cp}=\frac{h^3(b+mh)^3}{b+2mh}.$$

Обозначим

$$\eta=\frac{h}{b}; \qquad \beta=\frac{b}{h} \quad \text{и} \quad m'=2\sqrt{1+m^2}.$$

Отсюда можно простыми преобразованиями получить

$$B=b(1+2m\eta) \text{ или } B=h(\beta+2m),$$

$$h_{cp}=b\frac{\eta+m\eta^2}{1+2m\eta} \quad \text{или} \quad h_{cp}=h\frac{\beta+m}{\beta+2m},$$

$$\frac{1}{B^2h^3{}_{cp}}=b^{-5}\frac{1+2m\eta}{(\eta+m\eta^2)^3}=b^{-5}\cdot f_1(\eta) \text{ при заданном } m$$

или

$$\frac{1}{B^2h^3{}_{cp}}=h^{-5}\cdot\frac{\beta+2m}{(\beta+m)^3}=h^{-5}\cdot f_1(\beta) \text{ при заданном } m.$$

Тогда по уравнению (367) запишем:

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{Fr}&=\frac{\alpha Q^2}{gb^5}\cdot\frac{1+2m\eta}{(\eta+m\eta^2)^3}=\frac{\alpha Q^2}{gb^5}\cdot f_1(\eta)^*\\ &\text{и}\\ \mathrm{Fr}&=\frac{\alpha Q^2}{gh^5}\cdot\frac{\beta+2m}{(\beta+m)^3}=\frac{\alpha Q^2}{gh^5}\cdot f_1(\beta).\end{aligned}\right\}(392)$$

Величина Fr превращается в Fr', если $Q=Q'$, т. е. удовлетворяет уравнению равномерного движения жидкости: $Q'=\omega C\sqrt{Ri}$.

Поэтому заменим в формулах величину Q' на $\omega C\sqrt{Ri}$ (полагая $C=\frac{1}{n}R^{0,2}$).

Получим

$$(Q')^2=\frac{i}{n^2}\cdot\frac{\omega^{3,4}}{\chi^{1,4}}=\frac{i(bh+mh^2)^{3,4}}{n^2(b+m'h)^{1,4}}$$

и, пользуясь теми же переменными η и β, найдем из (392):

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{Fr}'&=\frac{\alpha ib^{0,4}}{gn^2}\cdot\frac{(\eta+m\eta^2)^{0,4}(1+2m\eta)}{(1+m'\eta)^{1,4}}=\frac{\alpha ib^{0,4}}{gn^2}\cdot f_2(\eta)^*\\ &\text{и}\\ \mathrm{Fr}'&=\frac{\alpha ih^{0,4}}{gn^2}\cdot\frac{(\beta+m)^{0,4}(\beta+2m)}{(\beta+m')^{1,4}}=\frac{\alpha ih^{0,4}}{gn^2}\cdot f_2(\beta).\end{aligned}\right\}(393)$$

Тогда можно записать по (392) и (393):

$$\frac{\mathrm{Fr}}{\mathrm{Fr}'}=\frac{Q^2n^2}{ib^{5,4}}\cdot\frac{f_1(\eta)}{f_2(\eta)}=\frac{Q^2n^2}{ib^{5,4}}\cdot\theta(\eta), \tag{394}$$

где обозначено

$$\theta(\eta)=\frac{f_1(\eta)}{f_2(\eta)}=\frac{(1+m'\eta)^{1,4}}{(\eta+m\eta^2)^{3,4}} \tag{395*}$$

или в другом виде,

$$\frac{\mathrm{Fr}'}{\mathrm{Fr}}=\frac{ih^{5,4}}{Q^2n^2}\cdot\frac{f_2(\beta)}{f_1(\beta)}=\frac{ih^{5,4}}{Q^2n^2}\theta(\beta), \tag{396}$$

где в свою очередь обозначено

$$\theta(\beta)=\frac{f_2(\beta)}{f_1(\beta)}=\frac{(\beta+m)^{3,4}}{(\beta+m')^{1,4}}.$$

Мы привели ряд формул, дающих возможность вычислять Fr и Fr' как через величину b, так и через h потому, что, пользуясь этими выражениями, можно легко установить ряд известных уравнений.

1. Выше было показано, что при критическом состоянии потока

$$\mathrm{Fr}_{кр}=1.$$

Тогда вместо (392) получаем

$$\mathrm{Fr}_{кр}=\frac{\alpha Q^2}{gb^5}f_1(\eta_{кр})=1 \text{ или } \sqrt{\frac{g}{\alpha}}\frac{b^{2,5}}{Q}=\sqrt{f_1(\eta)_{кр}}, \tag{397}$$

откуда как следствие получается уравнение (354) для расчета критических глубин.

В частности для прямоугольного русла ($m=0$) имеем $f_1(\eta)=\frac{1}{\eta^3}=\frac{b^3}{h^3}$, что приводит к

$$\mathrm{Fr}_{кр}=\frac{\alpha Q^2}{gb^5}\cdot\frac{b^3}{h^3{}_{кр}}=\frac{\alpha Q^2}{gb^2h^3{}_{кр}}=1$$

или

$$h_{кр}=\sqrt[3]{\frac{\alpha q^2}{g}},$$

т. е. к общеизвестному уравнению (356).

* Таблицы значений $f_1(h)$, а также $f_2(h)$, $\theta(h)$, вычисленные для разных коэфициентов откосов m, будут изданы отдельным выпуском.

Выдержки из этих таблиц для ознакомления с их пользованием даны в конце курса. *Издательство.*

2. При равномерном движении $Fr = Fr'$. Тогда имеем $\frac{Fr}{Fr'} = 1$ или по (394):

$$\frac{Fr}{Fr'} = \frac{Q^2n^2}{ib^{5,4}}\theta(\eta_0) = 1, \text{ т. е. } \frac{b^{2,7}\sqrt{i}}{Qn} = \sqrt{\theta(\eta_0)}. \quad (398)$$

Отсюда как следствие получается уравнение (343) для расчета нормальных глубин.

3. Напишем условие равномерного движения $\frac{Fr'}{Fr} = 1$ в другом виде по (396):

$$\frac{Fr'}{Fr} = \frac{ih^{5,4}}{Q^2n^2}\theta(\beta) = 1 \quad \text{или} \quad \frac{Qn}{h^{2,7}\sqrt{i}} = \sqrt{\theta(\beta)},$$

откуда так же как следствие получаются уравнения расчета каналов, выведенные в гл. XV по принципу моделирования.

4. Уравнение критического состояния $Fr = 1$ в форме

$$Fr_{кр} = \frac{\alpha Q^2}{gh_{кр}^5} f_1(\beta_{кр}) = 1 \quad \text{или} \quad \frac{gh^5_{кр}}{\alpha Q^2} = f_1(\beta_{кр})$$

позволяет определить такую ширину канала при заданном h, для которой состояние потока будет критическим.

В частности для треугольного русла имеем $\beta = \frac{b}{h} = 0$; $\quad f_1(\beta) = \frac{2}{m^2}$ и потому

$$Fr_{кр} = \frac{\alpha Q^2}{gh^5_{кр}} \cdot \frac{2}{m^2} = 1$$

или

$$h_{кр} = \sqrt[5]{\frac{2\alpha}{g}}\sqrt[5]{\left(\frac{Q}{m}\right)^2},$$

что и было установлено уравнением (359).

§ 133. Расчеты кривых подпора и спада в призматических трапецоидальных руслах

Согласно уравнению (398) имеем, что при $\eta = \eta_0$

$$\frac{ib^{5,4}}{Q^2n^2} = \theta(\eta_0)$$

и поэтому

$$\frac{Fr'}{Fr} = \frac{ib^{5,4}}{Q^2n^2}\,\frac{1}{\theta(\eta)} = \frac{\theta(\eta_0)}{\theta(\eta)}.$$

Кроме того из сопоставления (395) и (342) видно, что

$$\lg\theta(\eta) = 2\,\Psi(\eta),$$

где $\Psi(\eta)$ — сведенные в таблицы[1] величины для расчета нормальных глубин.

Тогда для определения переменной z к общим уравнениям (380), (382) и (384) можно пользоваться простыми формулами:

$$\left.\begin{aligned} z_n &= \sqrt[n]{\frac{\theta(\eta_0)}{\theta(\eta)}} \\ &\text{или} \\ \lg z_n &= \frac{2}{n}\left[\Psi(\eta_0) - \Psi(\eta)\right], \end{aligned}\right\} \quad (399)$$

где n — произвольно избранный показатель степени в расчетных уравнениях.

При наличии таблиц[1] значений $\theta(\eta)$ и $\Psi(\eta)$ техника расчета кривых подпора и спада в трапецоидальных руслах значительно сокращается.

Задача 67. Рассчитать кривую свободной поверхности в трапецоидальном канале с $b = 20$ *м*, $m = 1{,}25$, $n = 0{,}020$, $i = 0{,}001$ и $Q = 60$ *м³/сек*, если подпертая глубина у щита составляет 2,0 *м* (см. задачу 62).

Воспользуемся для расчета формулой (380).

1. Выполним расчет при показателе степени $n = 1$. Для нормальной глубины $h_0 = 1{,}45$ имеем $\eta_0 = \frac{h_0}{b} = \frac{1{,}45}{20} = 0{,}0725$ и соответственно $\Psi(\eta_0) = 1{,}936$. Тогда на основании (399) переменные z можно вычислять по формуле

$$\lg z_1 = 2\Psi(\eta_0) - 2\Psi(\eta) = 3{,}872 - 2\Psi(\eta).$$

Величины Fr' согласно (393) определятся формулой

$$Fr' = \frac{\alpha i b^{0,4}}{gn^2} f_2(\eta) = 0{,}929 f_2(\eta).$$

Расчет выполняется по схеме табл. 60.

2. Проведем расчет при показателе степени $n = 3$. Величины переменных z_3 в соответствии с (399) определятся формулой

$$\lg z_3 = \frac{2}{3}\Psi(\eta_0) - \frac{2}{3}\Psi(\eta) = 1{,}2907 - \frac{2}{3}\Psi(\eta),$$

а $\Phi(z_3)$ выпишем из таблицы Бахметева[2] при $x = 3$.

Вычисления приведены в табл. 61.

Задача 68. Рассчитать кривую подпора на горизонтальном участке по данным задачи 63.

В задаче 63 расчет проводился применительно к значению $i_{кр} = 0{,}00337$. Так как вводимый в расчетные уравнения уклон может быть выбран произвольно, то в данном случае будем рассматривать критический уклон как произвольно выбранный.

Тогда имеем при $i' = 0{,}00337$: нормальная глубина $h_0 = 0{,}45$ и $\eta_0 = \frac{h_0}{b} = \frac{0{,}45}{4} = 0{,}112$, чему по таблицам[3] соответствует $\theta(\eta_0) = 1\,919$.

Проведем расчет при переменной z_1, которая согласно (399) будет равна

$$z_1 = \frac{\theta(\eta_0)}{\theta(\eta)} = \frac{1\,919}{\theta(\eta)}.$$

Поскольку уклон i' оставлен такой же, как и в задаче 63, значение Fr' не изменяется. Поэтому расчет проведем при $Fr'_{cp} = 1{,}044$.

Расчет выполнен в табл. 62 по уравнениям (384) и (385):

$$l = \frac{a_1}{i'}\left[Fr'_{cp}(z_{n+1} - z_n) - 0{,}5\left(z^2_{n+1} - z^2_n\right)\right].$$

В табл. 63 приведен расчет той же кривой подпора при переменной z_3 по уравнению

$$l = \frac{a_3}{i'}\left[Fr'_{cp}(z_{n+1} - z_n) - 0{,}25\left(z^4_{n+1} - z^4_n\right)\right].$$

---

[1] См. сноску на стр. 164.

[2] См. сноску на стр. 178.

[3] См. выдержки из таблиц в конце курса.

Таблица 60

№ сечений	h	$\eta=\frac{h}{b}$	$2\Psi(\eta)$	$\lg z_1 = 3{,}872-2\Psi(\eta)$	z	Δz	$\Phi(z) = -\ln(z-1)$	$\Delta\Phi(z)$	$f_2(\eta)$	$1-\mathrm{Fr}'=1-0{,}929 f_2(\eta)$	[9]·[11]	[7] — [12]	$\frac{a}{i}$	l	Примечание
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	2,00	0,100	3,394	0,478	3,006	0,494	—0,6961	—0,2827	0,353	0,675	—0,1908	0,6848	202,4	139	$b=20$ *м*, $h_0=1{,}45$ *м*
2	1,90	0,095	3,472	400	2 512	0,423	—0,4134	—0,3281	348	680	—0,2231	6461	236,4	153	$2\Psi(\eta_0)=3{,}872$
3	1,80	0,090	3,552	320	2,089	0,367	—0,0853	—0,4110	342	685	—0,2815	6485	272,4	177	$\frac{\alpha i b^{0,4}}{g n^2}=0{,}929$
4	1,70	0,085	3,636	236	1,722	0,329	+0,3257	—0,6083	336	690	—0,4197	0,7487	304,0	228	$\mathrm{Fr}'=0{,}929 f_2(\eta)$
5	1,60	0,080	3,728	144	1,393	0,261	+0,9340	—1,0910	330	0,696	—0,7593	1,0203	383,1	391	$i=0{,}001$
6	1,50	0,075	3,818	0,054	1,132		+2,0250		0,323						$a=\frac{\Delta h}{\Delta z}$
														$\Sigma l=1\,088$ *м*	

Длина кривой, определенная сразу по крайним сечениям, будет

$$L_{1-6}=\frac{a}{i}\left\{\Delta z-(1-\mathrm{Fr}')\,\Delta\Phi(z)\right\}=\frac{0{,}500}{1{,}874\cdot 0{,}001}(1{,}874+0{,}686\cdot 2{,}721)=998\ м.$$

Таблица 61

№ сечений	h	$\eta=\frac{b}{h}$	$\frac{2}{3}\Psi(\eta)$	$\lg z_3 = 1{,}2907-\frac{2}{3}\Psi(\eta)$	z	Δz	$\Phi(z)$	$\Delta\Phi(z)$	$f_2(\eta)$	$1-\mathrm{Fr}'$	[9]·[11]	[7]—[12]	$\frac{a}{i}$	l	Примечание
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	2,00	0,100	1,131	0,160	1,442	0,084	0,282	—0,047	0,353	0,675	—0,032	0,116	1 190	138	$b=20$, $h_0=1{,}45$
2	1,90	0,095	1,157	0,134	1,358	0,080	0,329	—0,064	0,348	680	—0,044	0,124	1 250	155	$\frac{2}{3}\Psi(\eta_0)=1{,}2907$
3	1,80	0,090	1,184	0,1067	1,278	0,080	0,393	—0,090	342	685	—0,062	0,142	1 250	177	$\frac{\alpha i b^{0,4}}{g n^2}=0{,}929$
4	1,70	0,085	1,212	0,0787	1,198	0,081	0,483	—0,151	336	690	—0,104	0,185	1 235	228	$\mathrm{Fr}'=0{,}929 f_2(\eta)$
5	1,60	0,080	1,2427	0,0480	1,117	0,074	0,634	—0,325	330	0,696	—0,226	0,300	1 333	400	$i=0{,}001$
6	1,50	0,075	1,2727	0,0180	1,048		0,959		0,323						$a=\frac{\Delta h}{\Delta z}$
														$\Sigma l=1\,098$ *м*	

Длина кривой, определенная сразу по крайним сечениям, будет

$$L_{1-6}=\frac{a}{i}\left\{\Delta z-(1-\mathrm{Fr}')\,\Delta\Phi(z)\right\}=\frac{0{,}500}{0{,}394\cdot 0{,}001}(0{,}394+0{,}686\cdot 0{,}677)=1\,088\ м.$$

Таблица 62

№ сечений	h	$\eta=\frac{h}{b}$	$\theta(\eta)$	$z=\frac{\theta(\eta_0)}{\theta(\eta)}=\frac{1\,919}{\theta(\eta)}$	Δz	$\mathrm{Fr}'_{ср}$	$\Delta z\,\mathrm{Fr}'_{ср}$	$0{,}5(z^2_{i+1}-z^2_i)$	[8] — [9]	$\frac{a}{i'}$	l	Примечание
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	0,45	0,1125	1 919	1,000	0,320	$\mathrm{Fr}'_{ср}=1{,}044$	0,3341	0,2688	0,0653	46,36	3,0	$b=4$ *м*, $m=0{,}5$,
2	0,40	0,1000	2 823	0,680	0,248		0,2589	0,1379	0,1210	59,82	7,2	$n=0{,}014$
3	0,35	0,0875	4 438	0,432	0,196		0,2046	0,0655	0,1391	75,70	10,5	$i'=0{,}00337$, $Q=4$ *м³/сек*
4	0.30	0,0750	8 124	0,236	0,095		0,0992	0,0179	0,0813	156,2	12,7	$\theta(\eta_0)=\theta(0{,}112)=1\,919$
5	0,25	0,0625	13 588	0,141	0,073		0,0762	0,0076	0,0686	203,2	13,9	$\frac{\alpha Q^2}{g b^5}=0{,}00175$
6	0,20	0,0500	28 286	0,068								
											$\Sigma l=47{,}3$ *м*	

Таблица 63

№ сечений	h	$\eta=\frac{b}{h}$	$\theta(\eta)$	$\frac{\theta(\eta_0)}{\theta(\eta)}$	$z=\sqrt[3]{\frac{\theta(\eta_0)}{\theta(\eta)}}$	Δz	Fr'_{cp}	$\Delta z\,\mathrm{Fr}'_{cp}$	$0{,}25\left[z^4_{n+1}-z^4_n\right]$	[9]—[10]	$\frac{a}{i'}$	l	Примечание
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0,45	0,1125	1 919	1,000	1,000	0,120	$\mathrm{Fr}'_{cp}=1{,}044$	0,1253	0,1001	0,0252	123,6	3,1	
2	0,40	0,1000	2 823	0,680	0,880	0,124		0,1295	0,0684	0,0611	119,7	7,3	
3	0,35	0,0875	4 438	0,432	0,756	0,138		0,1441	0,0451	0,0990	107,5	10,6	
4	0,30	0,0750	8 124	0,236	0,618	0,098		0,1023	0,0172	0,0851	151,3	12,9	
5	0,25	0,0625	13 588	0,141	0,520	0,112		0,1169	0,0120	0,1049	132,5	13,9	
6	0,20	0,0500	28 286	0,068	0,408								
												$\sum l=47{,}8$ м	

§ 134. Метод суммирования

Рассмотренные выше различные способы расчета кривых свободной поверхности при неравномерном движении жидкости в призматических руслах являются приближенными, поскольку в целях интегрирования диференциальных уравнений в каждом способе принимались отдельные допущения.

Приближенное же решение может быть также получено, решая диференциальные уравнения методом суммирования или, иначе говоря, путем определения интеграла функции по общеизвестным способам Симпсона, Гаусса, по правилу трапеций и т. д.

Как известно, способ суммирования может дать сколько угодно высокую точность при условии отыскания интеграла функции в узких границах переменной.

Если определять величину интеграла, скажем $\int\limits_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx$, как площадь трапеции высотой $\Delta x = x_2 - x_1$ и с основаниями $F(x_2)$ и $F(x_1)$, то ошибка (ε), полученная при этом, определяется формулой акад. Маркова:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta x^3}{12}F''(\zeta),$$

где $F''(\zeta)$ — вторая производная подинтегральной функции при некотором среднем значении переменной $x_{cp}=\zeta$.

Возможность получения необходимой точности и оценки получающейся ошибки является, несомненно, положительным свойством метода суммирования.

Однако в связи с тем, что при обычном виде диференциальных уравнений приходится производить слишком много вычислений для получения численных значений подинтегральной функции, метод суммирования не находит применения даже в тех случаях, когда требуется построить всю кривую свободной поверхности, т. е. даже при малых интервалах переменной.

Между тем для русел правильной формы можно придать диференциальным уравнениям достаточно простой вид, при котором способ суммирования по затрате времени может конкурировать с остальными способами, давая при этом более высокую точность.

Рассмотрим применение способа суммирования для трапецоидальных русел.

Возьмем для этого уравнение (371)

$$i'\,dL = \frac{1-\frac{\alpha Q^2}{g}\frac{B}{\omega^3}}{\frac{i}{i'}-\left(\frac{Q}{Q'}\right)^2}\,dh$$

(где i' — произвольно выбранный положительный уклон, относительно которого берутся отношения $\frac{\mathrm{Fr}'}{\mathrm{Fr}}$) и запишем его в таком виде:

$$dL = \frac{\mathrm{Fr}-1}{i'\frac{\mathrm{Fr}}{\mathrm{Fr}'}-i}\,dh.$$

Подставляя в последнее выражение значения Fr по (392) и $\frac{\mathrm{Fr}}{\mathrm{Fr}'}$ из (393), получим

$$dL = \frac{\alpha b^{0,4}}{g\,n^3}\cdot\frac{f_1(\eta)-\frac{g\,b^5}{\alpha Q^2}}{\theta(\eta)-\frac{i\,b^{0,4}}{Q^2 n^2}}\,dh, \qquad (400)$$

где по предыдущему $\eta = \frac{h}{b}$,

$$f_1(\eta) = \frac{1+2m\eta}{(\eta + m\eta^2)^3} \quad \text{и} \quad \theta(\eta) = \frac{(1+m'\eta)^{1,4}}{(\eta + m\eta^2)^{3,4}}.$$

Далее отметим, что согласно (397)

$$\frac{gb^5}{\alpha Q^2} = f_1(\eta_{кр}),$$

а по (398)

$$\frac{ib^{5,4}}{Q^2n^2} = \theta(\eta_0).$$

Тогда с учетом сделанных обозначений и имея $dh = b \cdot d\eta$, получим вместо (400) такое уравнение:

$$dL = \frac{\alpha b^{1,4}}{g\,n^2} \cdot \frac{f_1(\eta) - f_1(\eta_{кр})}{\theta(\eta) - \theta(\eta_0)}\,d\eta. \tag{401}$$

Входящие в последнее уравнение величины типа $f_1(\eta)$ и $\theta(\eta)$, для разных откосов могут быть сведены в таблицы[1] и, следовательно, при расчетах не потребуют вычислений. Величины же $f_1(\eta_{кр})$ и $\theta(\eta_0)$ для всей кривой свободной поверхности имеют постоянные значения и также могут быть взяты из той же таблицы как частные значения при $\eta = \eta_{кр} = \frac{h_{кр}}{b}$ и $\eta = \eta_0 = \frac{h_0}{b}$.

Интегрируя уравнение (401) методом суммирования по способу трапеций, получаем

$$l = A\,[\varphi(\eta_1) + \varphi(\eta_2)], \tag{402}$$

где обозначено

$$A = \frac{\alpha\,b^{1,4}}{2\,g\,n^2}\,\Delta\eta, \tag{403}$$

$$\varphi(\eta) = \frac{f_1(\eta) - f_1(\eta)_{кр}}{\theta(\eta) - \theta(\eta_0)}. \tag{403'}$$

При этом следует отметить, что из всех членов уравнения только $\theta(\eta_0)$ зависит от уклона, оставаясь положительной для $i > 0$, отрицательной для $i < 0$ и равной нулю при $i = 0$.

Поэтому расчетное уравнение (402) справедливо для любых уклонов. При этом

для $i > 0$

$$\varphi(\eta) = \frac{f_1(\eta) - f_1(\eta_{кр})}{\theta(\eta) - \theta(\eta_0)};$$

для $i < 0$

$$\varphi(\eta) = \frac{f_1(\eta) - f_1(\eta_{кр})}{\theta(\eta) + \theta(\eta_0)},$$

причем h_0 находится для движения жидкости при уклоне $|i|$;

для $i = 0$

$$\varphi(\eta) = \frac{f_1(\eta) - f_1(\eta_{кр})}{\theta(\eta)}.$$

Для расчетов кривых спада и подпора в трапецоидальных руслах по отдельным участкам рассмотренный способ как по простоте расчета, так и по свой точности заслуживает внимания[2].

Задача 69. Рассчитать кривую подпора в канале с расходом $Q = 10\,м^3/сек$ при следующих данных: $m = 1$; $n = 0{,}025$; $i = 0{,}0008$; $b = 8$ *м*, если глубина у подпорного сооружения $H = 1{,}50$ *м*.

Определим нормальную и критическую глубины:

1) $\Psi(\eta_0) = 2{,}7\lg b - N - \lg Q = 2{,}438 - 9{,}946 - 1{,}000 = 1{,}492$; $\eta_0 = 0{,}133$ и $h_0 = \eta_0 b = 1{,}064$ *м* (по таблице[3] имеем $\theta(\eta_0) = 976{,}8$);

2) $\Psi(\eta_{кр}) = \lg Q - 2{,}5\lg b = 1{,}000 - 2{,}258 = -1{,}258$; $\eta_{кр} = 0{,}068$ и $h_{кр} = \eta_{кр} \cdot b = 0{,}54$ *м* (по таблице[3] имеем $f_1(\eta_{кр}) = 2{,}990$).

Далее получаем по уравнению (403) величину

$$A = \frac{\alpha\,b^{1,4}}{2g\,n^2}\Delta\eta = 1{,}646\ \Delta\eta$$

и выполняем расчет в табл. 64 применительно к уравнению (402).

Таблица 64

№ сечений	η	$f_1(\eta) - f_1(\eta_{кр})$	$\theta(\eta) - \theta(\eta_0)$	$\varphi(\eta) = \frac{[3]}{[4]}$	$\frac{\sum^{n+1}\varphi(\eta)}{n}$	l	h	Примечание
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0,1875	−2865,3	−676,7	4,234			1,50	$\eta_{кр} = 0{,}068$
					8,742	108		
2	0,180	−2848,1	−631,8	4,508			1,44	$f_1(\eta_{кр}) = 2\,990$
					9,573	158		
3	0,170	−2819,7	−556,7	5,065			1,36	$\eta_0 = 0{,}133$
					11,124	183		$\theta(\eta_0) = 976{,}8$
4	0,160	−2783,5	−459,4	6,059			1,28	$A = 1\,646 \cdot \Delta\eta$
					14,322	236		
5	0,150	−2736,7	−331,2	8,263			1,20	$\eta_1 = \frac{h_1}{b} = \frac{1{,}5}{8} = 0{,}1875$
					25,045	412		
6	0,140	−2675,1	−159,4	16,782			1,12	
						$\Sigma l = 1\,097$ *м*		

[1] См. сноску* на стр. 183.

[2] Подробный анализ этого способа и сравнение его с другими см. И. И. Агроскин, Гидравлика каналов, Госэнергоиздат, 1940.

[3] См. выдержки из таблиц в конце курса.

Задача 70. Рассчитать кривую свободной поверхности потока с $Q = 24$ *м³/сек* в трапецоидальном русле с $b = 8$ *м*; $m = 1$; $n = 0{,}014$ и $i = 0$, если глубина в начале горизонтального участка $h_1 = 1{,}44$ *м* и непрерывная кривая свободной поверхности кончается перепадом.

Определим критическую глубину:

$$\Psi(\eta_{кр}) = \lg Q - 2{,}5 \lg b = 1{,}380 - 2{,}258 = -0{,}877,$$

$$\eta_{кр} = 0{,}1204 \text{ и } h_{кр} = \eta_{кр} \cdot b = 0{,}96 \text{ м}.$$

Поток, следовательно, вступает на горизонтальный участок в спокойном состоянии ($1{,}44 > 0{,}96$). На участке поэтому будет кривая спада от глубины $h_1 = 1{,}44$ *м* до глубины $h_{кр} = 0{,}96$ *м* на перепаде.

Выполним расчет по уравнению (402) по форме табл. (65), располагая необходимые константы в графе „примечание".

Таблица 65.

№ сечений	$\eta = \frac{h}{b}$	$f_1(\eta) - f_1(\eta_{кр})$	$\theta(\eta)$	$\varphi(\eta) = \frac{[3]}{[4]}$	$\sum_{n}^{n+1} \varphi(\eta)$	l	h	Примечание
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0,120	0,000		0,0000			0,96	$\eta_{кр} = 0{,}1204$
2	0,130	−110	1053	−0,1043	−0,1043	5,5	1,04	$f_1(\eta_{кр}) = 507$
3	0,140	−192	817	−0,2354	−0,3397	17,9	1,12	$A = 5261 \cdot \Delta\eta = -52{,}61$
4	0,150	−254	646	−0,3936	−0,6290	33,1	1,20	
5	0,160	−301	517	−0,5815	−0,9751	51,3	1,28	
6	0,170	−337	420	−0,8023	−1,3838	72,8	1,36	
7	0,180	−365	345	−1,0590	−1,8613	97,9	1,44	
						$\Sigma l = 278{,}5$ *м*		

Задача 71. Запроектировать бетонный ($n = 0{,}017$) быстроток трапецоидального профиля ($m = 1$) с постоянной шириной $b = 3$ *м*, состоящий из двух участков разного уклона так, чтобы скорость к концу быстротока не превышала 10 *м/сек*. Общее падение, преодолеваемое быстротоком $Z = 9$ *м*; $Q = 24$ *м³/сек*.

Быстротоками называются водотоки с уклоном больше критического. В гидротехнической практике быстротоки применяются в качестве водосбросных сооружений.

Благодаря наличию уклона $i > i_{кр}$ поток вступит на быстроток с глубиной $h_{кр}$ и по быстротоку пойдет на спад, стремясь в пределе к нормальной глубине. Кривая спада достигнет на быстротоке нормальной глубины только в том случае, если длина быстротока окажется достаточной для установления равномерного режима.

В противном случае в пределах быстротока до конца будет кривая спада и глубина в конце его будет больше нормальной.

Переходя к решению поставленной задачи, примем, в целях создания более плавных сопряжений, уклон первого участка меньше, чем на втором.

Прежде всего установим уклон второго участка так, чтобы в случае достижения на нем равномерного режима скорость течения равнялась $v_{\max} \leqslant 10$ *м/сек*.

Для этого вычислим глубину равномерного режима h_{02} при скорости $v = 10$ *м/сек*.

$$\text{Имеем} \quad \omega = \frac{Q}{v} = \frac{24}{10} = 2{,}4 \text{ м}^2, \tag{404}$$

$$\omega = (b + mh_{02})\, h_{02} = (3{,}0 + 1 \cdot h_{02})\, h_{02}. \tag{405}$$

Приравнивая уравнения (404) и (405), получим квадратное уравнение

$$h_{02}^2 + 3\, h_{02} - 2{,}4 = 0,$$

откуда $h_{02} = 0{,}66$ *м*.

Далее определим уклон, при котором будет обеспечена такая глубина.

При модели канала

$$\beta = \frac{b}{h_{02}} = \frac{3{,}0}{0{,}66} = 4{,}55$$

находим

$$N = \lg v_0 + \lg h_{02}^{0,7} - \lg v_{max} = 9{,}9135 + 9{,}8737 - 1{,}0 = 8{,}7872.$$

Для $N = 8{,}7872$ по таблице[1] получаем $i_2 = 0{,}0788$.

Уклон первого участка примем $i_1 = \frac{i_2}{2} = 0{,}0394$.

В целях получения одинаковой длины участков положим на первый участок падение $Z_1 = \frac{1}{3} Z = 3$ *м* и на второй $Z_2 = \frac{2}{3} Z = 6$ *м*.

Тогда длина первого участка

$$l_1 = \frac{Z_1}{i_1} = \frac{3}{0{,}0394} = 76{,}2 \text{ м} \approx 76{,}0 \text{ м}$$

и длина второго участка

$$l_2 = \frac{Z_2}{i_2} = \frac{6}{0{,}0788} = 76{,}2 \approx 76{,}0 \text{ м}.$$

Установив уклоны участков, определим критическую глубину на быстротоке

$$\Psi(\eta_{кр}) = \lg \frac{Q}{b} - 1{,}5 \lg b = \lg 8{,}0 - 1{,}5 \lg 3 = +0{,}187,$$

$$\eta_{кр} = 0{,}5325 \quad \text{и} \quad h_{кр} = 0{,}5325 \cdot 3 \approx 1{,}60 \text{ м}.$$

С этой глубины начнется кривая спада на быстротоке.

Переходя к построению кривой спада на первом участке, предварительно определим глубину равномерного режима на этом участке:

$$\Psi(\eta_{01}) = \lg b^{2,7} - N - \lg Q = 1{,}2882 - 8{,}9330 - 1{,}3802 = +0{,}975,$$

$$\eta_{01} = 0{,}2657 \quad \text{и} \quad h_{01} = 0{,}2657 \cdot 3 = 0{,}797 \approx 0{,}8 \text{ м}.$$

[1] См. И. И. Агроскин, Гидравлика каналов 1940, стр. 111.

Для построения кривой спада воспользуемся уравнением (402).

Подсчеты кривой спада на первом участке от глубины $h_{кр}=1{,}60$ сведены в табл. 66, из которой видно, что к концу первого участка поток придет с глубиной $h=0{,}885$ *м*.

Таблица 66

№ точек	η	$f_1(\eta)-a_1$	$\theta(\eta)-a_2$	$\varphi(\eta)$	$\sum_n^{n+1}\varphi(\eta)$	l	$h_м$	Примечание
1	0,532	0	—	0			1,600	$a_1=f_1(\eta_{кр})\approx 3{,}8$
2	0,450	3,01	75,52	0,0402	0,0402	3,00	1,350	$a_2=\theta(\eta_0)\approx 89{,}0$
3	0,400	6,45	68,29	0,0945	0,1347	6,12	1,200	$A=\frac{ab^{1,4}}{2gn^3}\Delta\eta=907\Delta\eta$
4	0,350	12,31	55,48	0,2220	0,3165	14,35	1,050	
5	0,300	23,17	31,07	0,7440	0,9660	43,80	0,900	
6	0,295	24,72	27,37	0,9030	1,6470	7,45	0,885	
						$\sum l\approx 76$ *м*		

Расчет второго участка произведем от глубины $h=0{,}885$ *м*, на которой закончилась кривая спада на первом участке. Для расчета второго участка $a_1=3{,}80$ и $A=907\,\Delta\eta$ сохраняют свои значения.

Результаты расчета кривой спада на втором участке сведены в табл. 67.

Таблица 67

№ точек	η	$f_1(\eta)-a_1$	$\theta(\eta)-a_2$	$\varphi(\eta)$	$\sum_n^{n+1}\varphi(\eta)$	l	$h_м$	Примечание
1	0,295	24,72	110,70	0,223			0,885	$a_2=\theta\left(\frac{0{,}66}{3{,}00}\right)=172{,}3$
2	0,260	39,43	76,14	0,518	0,741	23,50	0,780	
3	0,235	56,33	35,35	1,590	2,108	47,90	0,705	
						$\sum l=71{,}4$ *м*		

Интерполяцией устанавливаем, что в конце второго участка, т. е. на длине $l_2=76$ *м*, будет глубина $h=0{,}70$ *м*.

Следовательно, скорость на быстротоке в конце второго участка

$$v=\frac{Q}{\omega}=\frac{24}{(3+1\cdot 0{,}7)\,0{,}7}=9{,}27\ м/сек,$$

что не превышает поставленного в условии ограничения $v_{max}\leqslant 10$ *м/сек*.

Для полного расчета быстротока необходимо еще установить условия сопряжения потока, поступающего с быстротока, с потоком в нижнем бьефе, куда поступает сбрасываемый расход. Методы такого расчета рассматриваются ниже.

ГЛАВА XVIII

УСТАНОВИВШЕЕСЯ НЕРАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В НЕПРИЗМАТИЧЕСКИХ РУСЛАХ

§ 135. Непризматическое русло в общем виде

Уравнение неравномерного движения жидкости в непризматическом русле было дано в § 104 в виде (304)

$$\frac{dh}{dL}=\frac{i-\frac{Q_2}{K^2}\left(1-\frac{\alpha C^2R}{g\omega}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial L}\right)}{1-\frac{\alpha Q^2B}{g\omega^3}}.$$

Интегрирование этого уравнения, более сложного, чем уравнения для призматических русел, представляет серьезные трудности для общего случая и в технически рациональном виде в настоящее время не выполнено.

В связи с этими трудностями при технических расчетах прибегают к решению вопроса путем постепенных приближений для конечных разностей.

Так как уравнение (304) получено на основе уравнения Бернулли, то и при расчетах за основу берут уравнение не в виде (304), а в виде уравнения Бернулли, составленного для двух сечений потока, отстоящих друг от друга на малом, но конечном расстоянии ΔL.

Применительно к фиг. 153 § 103 запишем

$$h_1+i\Delta L+\frac{\alpha v_1^2}{2g}=h_2+\frac{\alpha v_2^2}{2g}+\Delta h_{тр},\qquad(406)$$

где ΔL — малое конечное расстояние между сечениями;

$\Delta h_{тр}$ — потери напора на преодоление сопротивлений по длине ΔL.

Согласно уравнению (298) и высказанных в § 103 допущений будем и в данном случае полагать

$$\Delta h_{тр}=\frac{v_{ср}^2\cdot\Delta L}{C_{ср}^2\cdot R_{ср}}.\qquad(407)$$

Тогда, обозначая

$E_1 = h_1 + i\cdot\Delta L + \frac{\alpha v_1^2}{2g}$ — удельная энергия потока,

$Э_2 = h_2 + \frac{\alpha v_2^2}{2g}$ — удельная энергия сечения,

напишем

$$E_1 = Э_2 + \Delta h_{тр}. \qquad (408)$$

Способ решения задач при непризматических руслах по уравнению (408) получил название способа Хестеда (Husted)[1].

Из самого вывода уравнения (408) ясно, что для получения практически приемлемых по точности результатов расстояния ΔL должны быть невелики.

Пользование самим уравнением производится следующим образом. Пусть имеется непризматическое русло, в котором проходит установившийся расход Q; характер ложа русла, а равно и его уклон известны. Известна также начальная отметка кривой свободной поверхности и глубина h_1 в начальном сечении, а нужно установить глубину h_2 в сечении, отстоящем на ΔL от первого.

Тогда для вычисления $E_1 = h_1 + \frac{\alpha v_1^2}{2g} + i\cdot\Delta L$ данные имеются налицо. Задаваясь далее в первом приближении глубиной h_2 во втором сечении, определяют для второго сечения $Э_2 = h_2 + \frac{\alpha v_2^2}{2g}$. Наконец, вычисляют величину $\Delta h_{тр}$ по значениям $v_{ср}$, $R_{ср}$ и $C_{ср}$ — средним между обоими сечениями.

Подстановка найденных величин в уравнение (408) покажет, насколько правильно была взята величина h_2. При неравенстве обоих частей уравнения берется новое значение h_2 и т. д., пока путем постепенных приближений не будет найдено такое значение глубины во втором сечении, которое удовлетворяет уравнению (408).

Задача 72. Определить глубину в сечении, отстоящем на расстоянии $\Delta L = 20$ *м* от начального сечения в расходящемся прямоугольном канале при следующих данных: $Q = 10$ *м*^{3}/*сек*; $b_1 = 5$ *м*; $h_1 = 1$ *м*; $n = 0{,}020$; $i = 0{,}001$; $b_2 = 7$ *м*; $\alpha = 1{,}1$. В канале кривая подпора.

1. Находим для начального первого сечения

$$E_1 = h_1 + \frac{\alpha v_1^2}{2g} + i\cdot\Delta L = 1 + \frac{1{,}1}{19{,}62}\left(\frac{10}{5}\right)^2 + 0{,}001\cdot 20 = 1{,}244 \text{ м}.$$

2. Допустим, что во втором сечении глубина $h_2 = 1{,}1$ *м*, и определим

$$Э_2 = h_2 + \frac{\alpha v_2^2}{2g} = 1{,}1 + 0{,}056\left(\frac{10}{7{,}7}\right)^2 = 1{,}194 \text{ м}.$$

3. Определим средние между обоими сечениями величины v, R, C и по ним — потери напора на участке.

Имеем: $v_1 = \frac{Q}{\omega_1} = \frac{10}{5} = 2$ *м/сек*; $v_2 = \frac{10}{7{,}7} = 1{,}30$ *м/сек*

$$\text{и } v_{ср} = \frac{2 + 1{,}30}{2} = 1{,}65 \text{ м/сек};$$

$$R_1 = \frac{\omega_1}{\chi_1} = \frac{5}{7} = 0{,}71 \text{ м}; \quad R_2 = \frac{7{,}7}{9{,}2} = 0{,}84 \text{ м}$$

$$\text{и } R_{ср} = \frac{0{,}71 + 0{,}84}{2} = 0{,}77 \text{ м};$$

$$C_1 = \frac{1}{n} R_1^{0,2} = 46{,}7 \text{ м}^{0,5}/\text{сек}; \quad C_2 = \frac{1}{n} R_2^{0,2} = 48{,}3 \text{ м}^{0,5}/\text{сек}$$

$$\text{и } C_{ср} = \frac{46{,}7 + 48{,}3}{2} = 47{,}5 \text{ м}^{0,5}/\text{сек};$$

$$\Delta h_{тр} = \frac{v_{ср}^2\cdot\Delta L}{C_{ср}^2\cdot R_{ср}} = \frac{1{,}65^2\cdot 20}{47{,}5^2\cdot 0{,}77} = 0{,}031.$$

Тогда

$$Э_2 + \Delta h_{тр} = 1{,}194 + 0{,}031 = 1{,}255 \text{ м}.$$

4. Применительно к уравнению (408) устанавливаем, что

$$1{,}244 \neq 1{,}255,$$

и следовательно, нужно повторить такой же расчет, взяв другое значение h_2.

Возьмем, например, $h_2 = 1{,}12$ *м* и снова найдем

$$Э_2 = 1{,}12 + 0{,}056\,\frac{10^2}{7{,}84^2} = 1{,}211 \text{ м};$$

$v_2 = 1{,}28$ *м/сек*; $R_2 = 0{,}85$ *м* и $C_2 = 48{,}4$ *м*^{0,5}/*сек*;
$v_{ср} = 1{,}64$ *м/сек*; $R_{ср} = 0{,}78$ *м* и $C_{ср} = 47{,}5$;

$$\Delta h_{тр} = \frac{1{,}64^2\cdot 20}{47{,}5^2\cdot 0{,}78} = 0{,}031 \quad \text{и} \quad Э_2 + \Delta h_{тр} = 1{,}211 + 0{,}031 = 1{,}243 \text{ м}.$$

Как видим, полученное значение $Э_2 + \Delta h_{тр} = 1{,}243$ *м* практически почти совпадает с величиной $E_1 = 1{,}244$ *м* и потому можно считать глубину $h_2 = 1{,}12$ *м*.

Рассмотренный способ Хестеда хотя и громоздок, но дает возможность путем приближений решать вопросы, связанные с движением жидкости в непризматическом русле в общем виде.

§ 136. Уравнения движения жидкости в непризматических руслах с постоянной глубиной

Для частных случаев движения жидкости в непризматическом русле уравнение (304) может быть решено достаточно просто.

Рассмотрим частный случай, когда движение жидкости происходит в непризматическом русле с постоянной вдоль потока глубиной ($h = \text{const}$ или $\frac{dh}{dL} = 0$).

Уравнение (304) для такого частного случая примет вид

$$i - \frac{Q^2}{K^2}\left(1 - \frac{\alpha C^2 R}{g\omega}\cdot\frac{d\omega}{dL}\right) = 0$$

или

$$\frac{d\omega}{dL} = \frac{g\omega^3}{\alpha Q^2}\left(\frac{Q^2}{K^2} - i\right) \qquad (409)$$

(В этих уравнениях принято $\frac{\partial\omega}{\partial L} = \frac{d\omega}{dL}$, так как при $h = \text{const}$ ω зависит только от L).

---

[1] Этот способ был предложен американскими инженерами Hinds'ом в 1920 г. и Husted'ом в 1924 г. Уравнение (408) было дано Хестедом в таком виде: $\Delta L = \frac{\Delta Э}{i - i_{тр}}$.

Далее имеем:

$$\frac{g\omega^3}{\alpha Q^2}=\frac{gh_{cp}\cdot B}{\alpha v^2}=\frac{B}{\mathrm{Fr}};$$

$\frac{Q^2 i'}{K^2 i'}=i'\frac{\mathrm{Fr}}{\mathrm{Fr}'}$ (здесь i' — любой положительный уклон, для которого берется Fr') и вместо (409) получаем

$$\frac{d\omega}{dL}=\frac{Bi'}{\mathrm{Fr}}\left(\frac{\mathrm{Fr}}{\mathrm{Fr}'}-\frac{i}{i'}\right). \tag{410}$$

Принимая при прямых уклонах $i'=i$, при обратных $i'=|i|$ и для нулевых $i'=i'$, получим: для $i>0$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\omega}{dL}=\frac{Bi}{\mathrm{Fr}}\left(\frac{\mathrm{Fr}}{\mathrm{Fr}'}-1\right)=\frac{Bi}{\mathrm{Fr}'}\left(1-\frac{\mathrm{Fr}'}{\mathrm{Fr}}\right);\\
&\qquad\text{для } i<0\\
&\frac{d\omega}{dL}=\frac{B'|i|}{\mathrm{Fr}}\left(\frac{\mathrm{Fr}}{\mathrm{Fr}'}+1\right)=\frac{B'|i|}{\mathrm{Fr}'}\left(1+\frac{\mathrm{Fr}'}{\mathrm{Fr}}\right)\\
&\qquad\text{и для } i=0\\
&\frac{d\omega}{dL}=\frac{Bi'}{\mathrm{Fr}'}.
\end{aligned}\right\} \tag{411}$$

Рассматривая эти уравнения и вспоминая, что $\frac{\mathrm{Fr}'}{\mathrm{Fr}}$ — величина всегда положительная, равная единице при равномерном режиме и отличающаяся от единицы при глубинах, не равных нормальной, приходим к следующим выводам:

а) при $i>0$ для поддержания в русле постоянной глубины h русло должно вниз по течению сужаться $\left(\frac{d\omega}{dL}<0\right)$, если $h>h_0$, и расширяться $\left(\frac{d\omega}{dL}>0\right)$, если $h<h_0$;

б) при $i<0$ или $i=0$ для поддержания в русле постоянной глубины h русло должно только расширяться $\left(\frac{d\omega}{dL}>0\right)$.

Разделяя переменные в уравнениях (411), найдем соответственно:

для $i>0$

$$dL=\frac{\mathrm{Fr}'}{Bi}\cdot\frac{d\omega}{1-\frac{\mathrm{Fr}'}{\mathrm{Fr}}};$$

для $i<0$

$$dL=\frac{\mathrm{Fr}'}{B|i|}\cdot\frac{d\omega}{1+\frac{\mathrm{Fr}'}{\mathrm{Fr}}};$$

для $i=0$

$$dL=\frac{\mathrm{Fr}'}{Bi'}.$$

Интегрирование этих уравнений может быть произведено только приближенно при следующих допущениях:

а) если считать величину $\frac{\mathrm{Fr}'}{Bi}$ постоянной и равной ее среднему значению в границах интегрирования;

б) если принять, что

$$d\omega=a\cdot d\,\frac{\mathrm{Fr}'}{\mathrm{Fr}},\quad \text{где } a=\frac{\Delta\omega}{\Delta\frac{\mathrm{Fr}'}{\mathrm{Fr}}}.$$

При этих условиях можно, например, для $i>0$ написать, обозначив $\frac{\mathrm{Fr}'}{\mathrm{Fr}}=z$:

$$dL=\left(\frac{\mathrm{Fr}'\cdot a}{B\cdot i}\right)_{cp}\cdot\frac{dz}{1-z}. \tag{412}$$

Если вместо переменной z ввести в уравнение (412) переменную $\tau=\sqrt[x]{z}$ и принять $d\omega=a'd\tau$, то вместо (412) получим

$$dL=\frac{\mathrm{Fr}'\cdot a'}{B\cdot i}\cdot\frac{d\tau}{1-\tau^x}=\frac{\alpha C^2 a'}{g\chi}\cdot\frac{d\tau}{1-\tau^x}, \tag{413}$$ [1]

так как

$$\frac{\mathrm{Fr}'}{Bi}=\frac{\alpha v^2}{g\,h_{cp}\,Bi}=\frac{\alpha C^2 Ri}{g\omega i}=\frac{\alpha C^2}{g\chi}.$$

Уравнения (412) или (413) после сделанных допущений могут быть решены интегрированием. Решение, конечно, будет приближенным в связи со сделанными допущениями.

Для русел с правильной формой поперечного сечения решение поставленного вопроса может быть проведено более строго.

Рассмотрим такое решение для непризматических трапецоидальных русел, наиболее интересных для гидротехнической практики.

В интересах последующих прикладных задач введем в расчеты ширину трапеции по средней ее линии, которую в отличие от ширины по дну b будем обозначать b'.

Пользуясь средней шириной трапеции, можно записать:

$$\omega=b'\cdot h;\quad B=b'+mh;\quad \chi=b'+m''h$$

$$(\text{где } m''=2\sqrt{1+m^2}-m),$$

$$C^2R=\frac{1}{n}\left(\frac{\omega}{\chi}\right)^{1,4}=\frac{1}{n}\left(\frac{b'h}{b'+m''h}\right)^{1,4};\quad \frac{B}{\omega^3}=\frac{b'+mh}{(b'h)^3}.$$

Далее установим значение $\frac{d\omega}{dL}$. Рассматривая относительное изменение площади живого сечения в непризматическом русле в зависимости только от изменения L, т. е. полагая остальные

[1] В этом виде уравнение дается М. Д. Чертоусовым в его работе: „Специальный курс гидравлики", 1937 г.

факторы, влияющие на площадь, постоянными, установим, что для трапецоидального русла

$$\frac{d\omega}{dL}=h\frac{db'}{dL}.$$

Наконец, подставляя полученные выражения в уравнение (409), получим после простых преобразований

$$\frac{db'}{dL}=\frac{gn^2}{\alpha}\cdot\frac{(b'+m''h)^{1,4}}{h^{1,4}(b')^{0,4}}-\frac{gi}{\alpha Q^2}(b')^3h^3+$$

$$+\left[\frac{g}{\alpha Q^2}(b')^3h^2-\frac{b'}{h}\right]\frac{dh}{dL}. \qquad (414)$$

Это уравнение содержит два диференциальных соотношения $\frac{db'}{dL}$ и $\frac{dh}{dL}$. Первое из них отражает изменение размеров русла вдоль потока, а второе — изменение формы свободной поверхности вдоль потока.

Из уравнения видно, что если известен характер непризматичности русла $\left(\frac{db'}{dL}\right)$, то может быть определена кривая свободной поверхности и, наоборот, для получения заранее заданного вида свободной поверхности русло должно формироваться по длине так, как $\frac{db'}{dL}$ определяется уравнением (414).

Ввиду сложности уравнения (414) решение его для общего случая не представляется возможным. Однако для частных случаев, как раз и представляющих большой практический интерес, решение этого уравнения вполне удобно.

Для частного случая с $h=\text{const}$ имеем $\frac{dh}{dL}=0$ и общее уравнение получает такой вид: для $i\neq 0$

$$\frac{db'}{dL}=\frac{gn^2}{\alpha h^{1,4}}\cdot\frac{(b'+m''h)^{1,4}}{(b')^{0,4}}-\frac{\pm ig(b')^3h^2}{\alpha Q^2}; \qquad (415)$$

для $i=0$

$$\frac{db'}{dL}=\frac{gn^2}{\alpha h^{1,4}}\cdot\frac{(b'+m''h)^{1,4}}{(b')^{0,4}}. \qquad (416)$$

Принимая во внимание, что $h=\text{const}$, обозначим

$$\left.\begin{aligned} &m''h=(2\sqrt{1+m^2}-m)\,h=c,\\ &\frac{b'}{c}=x,\\ &db'=cdx. \end{aligned}\right\} \qquad (417)$$

Тогда уравнения (415) можно преобразовать так:

$$\frac{cdx}{dL}=\frac{gn^2}{\alpha h^{1,4}}\cdot\frac{(cx+c)^{1,4}}{(cx)^{0,4}}-\frac{\pm igc^3h^2}{\alpha Q^2}x^3;$$

$$\frac{dx}{dL}=\frac{gn^2}{\alpha h^{1,4}}\cdot\frac{(x+1)^{1,4}}{x^{0,4}}-\frac{\pm gc^2h^2}{\alpha K_0^2}x^3\left(\text{где } K_0^2=\frac{Q^2}{|i|}\right);$$

$$\frac{dx}{dL}=\frac{g}{\alpha}\left(\frac{hc}{K_0}\right)^2\left[\frac{(K_0n)^2}{c^2h^{3,4}}\cdot\frac{(x+1)^{1,4}}{x^{0,4}}\mp x^3\right].$$

Выражения, содержащие постоянные величины, обозначим:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\alpha}{g}\left(\frac{K_0}{ch}\right)^2=A\\ &\left(\frac{K_0}{ch}\right)^2\frac{n^2}{h^{1,4}}=a \end{aligned}\right\} \qquad (418)$$

и, разделяя переменные, получим для уклонов $i\neq 0$

$$dL=A\frac{x^{0,4}}{a(x+1)^{1,4}\mp x^{3,4}}dx. \qquad (419)$$

В знаменателе последнего уравнения знак минус относится к $i>0$, а знак плюс к уклонам $i<0$.

Для уклона $i=0$ получим из (416)

$$\frac{cdx}{dL}=\frac{gn^2}{\alpha h^{1,4}}\cdot\frac{(cx+c)^{1,4}}{c^{0,4}x^{0,4}}$$

или, разделяя переменные,

$$dL=\frac{\alpha h^{1,4}}{gn^2}\cdot\frac{x^{0,4}}{(x+1)^{1,4}}dx. \qquad (420)$$

Отметим, что последнее уравнение не зависит от Q.

Уравнения (419) и (420) дают нам правило изменения средней ширины трапецоидального русла по длине потока в целях установления в нем постоянной заданной глубины.

§ 137. Интегрирование уравнения движения жидкости в трапецоидальном непризматическом русле с постоянной глубиной при $i\neq 0$.

Уравнение (419) получено без условных допущений и потому точность его решения будет зависеть только от техники интегрирования, которую и рассмотрим в двух вариантах.

Первый вариант. Рассмотрим неопределенный интеграл функции уравнения (419), т. е.

$$\int\frac{x^{0,4}}{a(x+1)^{1,4}\mp x^{3,4}}dx.$$

Чтобы освободиться от дробных степеней, введем новую переменную

$$z=\sqrt[5]{\frac{1+x}{x}}.$$

Тогда имеем

$$x=(z^5-1)^{-1} \text{ и } dx=-5\frac{z^4}{(z^5-1)^2}dz$$

и, следовательно,

$$\int\frac{x^{0,4}dx}{a\,(x+1)^{1,4}\mp x^{3,4}}=-5\int\frac{z^4(z^5-1)}{az^7(z^5-1)^2\mp 1}\,dz.$$

Обозначив для краткости $1-z^5=y$, запишем подинтегральную дробь в другом виде:

$$\frac{z^4\,(1-z^5)}{\pm 1-az^7\,(1-z^5)^2}=\frac{z^4y}{\pm 1-az^7y^2}$$

и, произведя деление, получим следующий ряд:

$$\pm z^4y+az^{11}y^3\pm a^2z^{18}y^5+a^3z^{25}y^7\pm\ldots+$$
$$+a^{n-1}z^{7n-3}y^{2n-1}. \qquad (421)$$

Установим условия сходимости этого ряда. Для этого находим

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{a^nz^{7n+4}y^{2n+1}}{a^{n-1}z^{7n-3}y^{2n-1}}=az^7y^2$$

и заключаем, что для сходимости ряда необходимо иметь $az^7y^2<1$.

Заменяя y его значением $1-z^5$, получаем условие сходимости:

$$a<\left|\frac{x^{3,4}}{(1+x)^{1,4}}\right|. \qquad (422)$$

Для ориентировки при расчетах приводим по (422) справочную табл. 68.

Подставляя теперь в ряд (421) вместо y его значение $1-z^5$ и интегрируя, получим:

$$\int\frac{x^{0,4}dx}{a(1+x)^{1,4}\mp x^{3,4}}=-5\left[\pm\left(\frac{z^5}{5}-\frac{z^{10}}{10}\right)+\right.$$
$$+a\left(\frac{z^{12}}{12}-\frac{3}{17}z^{17}+\frac{3}{22}z^{22}-\frac{1}{27}z^{27}\right)\pm$$
$$\pm a^2\left(\frac{z^{19}}{19}-\frac{5}{24}z^{24}+\frac{10}{29}z^{29}-\frac{10}{34}z^{34}+\frac{5}{39}z^{39}-\right.$$
$$\left.-\frac{z^{44}}{44}\right)+a^3\left(\frac{z^{26}}{26}-\frac{7}{31}z^{31}+\frac{21}{36}z^{36}-\frac{35}{41}z^{41}+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{35}{46}z^{46}-\frac{21}{51}z^{51}+\frac{7}{56}z^{56}-\frac{z^{61}}{61}\right)\right]+\ldots\ldots+$$
$$+5a^{n-1}\int z^{7n-3}(1-z^5)^{2n-1}dz+C.$$

Ряд сходится интенсивно и поэтому достаточно ограничиться немногими членами. Ограничиваясь первыми тремя членами, обозначим величины в круглых скобках, взятые с обратным знаком, соответственно $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_3(x)$ и приближенно получим:

$$\int\frac{x^{0,4}dx}{a(1+x)^{1,4}-x^{3,4}}=5[f_1(x)+af_2(x)+a^2f_3(x)],$$

а

$$\int\frac{x^{0,4}dx}{a(1+x)^{1,4}+x^{3,4}}=-5[f_1(x)-af_2(x)+a^2f_3(x)].$$

Возвращаясь к уравнению (419) и решая его на основе изложенного, получим расчетные уравнения:

1. Для $i>0$ $\qquad l=5A[\Phi(x_2)-\Phi(x_1)], \qquad (423)$

где

$$A=\frac{\alpha}{g}\left(\frac{K_0}{ch}\right)^2,$$
$$\Phi(x)=f_1(x)+a\cdot f_2(x)+a^2\cdot f_3(x),$$
$$a=\left(\frac{K_0}{ch}\right)^2\frac{n^2}{h^{1,4}};$$

2. Для $i<0$ $\qquad l=5A\,[\Phi'(x_1)-\Phi'(x_2)], \qquad (424)$

где $\qquad \Phi'(x)=f_1(x)-af_2(x)+a^2f_3(x)$

при тех же значениях A и a.

Величины $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_3(x)$ даны в таблице[1].

Задача 73. Для сброса $Q=13{,}2$ *м³/сек* строится канал (быстроток), начальная ширина которого $b_1=4$ *м*. Рассчитать форму канала (в плане), чтобы глубина по всей его длине оставалась постоянной $h=1$ *м* при $m=0{,}75$; $n=0{,}017$ и $i=0{,}1$. Расчет довести до $b_n=1{,}00$ *м*.

Прежде всего установим нормальную глубину потока в начальном сечении при $b_1=4$ *м*. Имеем:

$\Psi(\eta_0)=2{,}7\,\lg b-\lg Q-N=1{,}625-1{,}121-8{,}730=1{,}775.$

При $m=0{,}75$ имеем $\eta_0=0{,}092$ и $h_0=\eta_0 b=0{,}37$ *м*.

Следовательно, имеем $h>h_0$ и русло вниз по течению должно сужаться.

Далее определяем постоянные величины, необходимые для расчета по уравнению (423).

Находим:

$$c=(2\sqrt{1+m^2}-m)h=1{,}75,$$
$$K_0=\frac{Q}{\sqrt{i}}=\frac{13{,}2}{\sqrt{0{,}1}}=41{,}74,$$
$$a=\left(\frac{K_0}{c\cdot h}\right)^2\frac{n^2}{h^{1,4}}=0{,}164,$$
$$5A=5\,\frac{\alpha}{g}\left(\frac{K_0}{c\cdot h}\right)^2=318{,}6,$$
$$b_1'=b_1+mh=4+0{,}75\cdot 1=4{,}75 \text{ м},$$
$$x_1=\frac{b'_1}{c}=\frac{4{,}75}{1{,}75}=2{,}72.$$

Таблица 68

x	0,1	0,2	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	4,0	5,0	6,0
$a<$	0,00034	0,0032	0,053	0,091	0,141	0,205	0,284	0,378	1,10	2,26	3,9	6,0	11,7	19,4	29,0

[1] См. И. И. Агроскин. Гидравлика каналов, 1940, приложение IX, стр. 141-145.

Таблица 69

№ сечений	x	$f_1(x)$	$a \cdot f_2(x)$	$a^2 f_3(x)$	$\Phi(x)$	$\Delta\Phi(x)$	l	b	$v=\dfrac{W}{x}$	Примечание
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	2,72	−0,0865	−0,0008	0,0000	−0,0873	+0,0047	1,50	4,00	2,77	$c=1,75$
2	2,36	0820	0006	0,0000	0826	+0,0069	2,20	3,38	3,20	$a=0,164$
3	2,02	0755	−0,0002	0,0000	0757	+0,0120	3,82	2,78	3,73	$5A=318,6$
4	1,68	0646	+0,0008	+0,0001	0637	+0,0239	7,61	2,19	4,49	$W=\dfrac{Q}{c \cdot h}=7,542$
5	1,34	0443	0039	+0,0006	−0,0398	+0,0626	19,94	1,60	5,63	
6	1,00	0,0000	+0,0177	+0,0051	+0,0228			1,00	7,54	
							$\Sigma l=35,07$			

Отметив, что условия сходимости ряда при $a=0,164$ обеспечиваются для всех значений $x>0,8$, выполняем расчет по схеме табл. 69.

Как видно из схемы, расчет ведем, задаваясь значениями x, начиная от x_1 через определенные интервалы (целесообразно задаваться четными значениями x во избежание интерполяций в таблице). Ширина канала b, соответствующая принятым значениям x, определяется потом по формуле

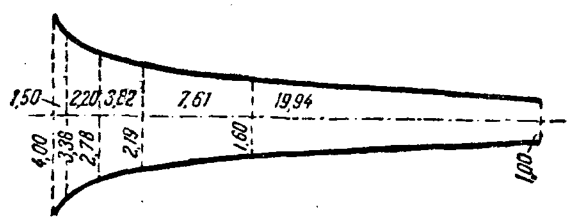
$$b=cx-mh.$$

Скорость потока v в расчетных сечениях получается по формуле

$$v=\frac{\frac{Q}{c \cdot h}}{x}=\frac{W}{x}, \text{ где } W=\frac{Q}{c \cdot h}=\text{const}.$$

Полученные в результате расчета величины l и b позволяют построить канал в плане, как это сделано для рассмотренного примера на фиг. 171.

Задача 74. Рассчитать переходный участок канала, намечаемый с обратным уклоном $i=-0,012$, для пропуска $Q=5,6$ *м³/сек* с постоянной глубиной $h=1$ *м*, если $m=1$; $n=0,017$; начальная ширина $b_1=1,74$ *м*, а ширина в конце $b_n=3,57$ *м*.



Фиг. 171

При обратном уклоне русло должно расширяться, что предусмотрено уже в условии примера. Расчет выполним применительно к уравнению (424) по предлагаемой схеме, определяя необходимые константы в примечании (табл. 70).

Задача 75. Определить длину расширяющейся воронки с обратным уклоном, сопрягающей сечение канала с $b_1=3,1$ *м* с сечением, где $b_2=8$ *м* при следующих данных: $Q=15$ *м³/сек*; $i=-0,01$; $n=0,02$; $h=1,2$ *м*; $m=0,5$.

Пользуемся уравнением (424)

$$l=5A[\Phi'(x_1)-\Phi'(x_2)]$$

Таблица 70

№ сечений	x	$_1(x)$	$a \cdot f_2(x)$	$a^2 f_3(x)$	$\Phi'(x)$	$\Delta\Phi'(x)$	l	b	$v=\dfrac{W}{x}$	Примечание
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1,50	−0,0556	+0,0027	+0,0005	−0,0578	0,0044	1,93	1,74	2,04	$c=(2\sqrt{1+m^2}-m)h=1,828$
2	1,60	0609	0017	4	622	0039	1,71	1,92	1,91	$K_0=\dfrac{Q}{\sqrt{\lvert i \rvert}}=\dfrac{5.6}{\sqrt{0.012}}=51,13$
3	1,70	0654	0009	2	661	0033	1,45	2,11	1,80	
4	1,80	0691	0004	1	694	0028	1,23	2,29	1,70	$a=\left(\dfrac{K_0}{c \cdot h}\right)^3 \dfrac{n^2}{h^{1,4}}=0,225$
5	1,90	0723	+0,0000	1	722	0025	1,09	2,47	1,61	$5A=\dfrac{5a}{g}\left(\dfrac{K_0}{c \cdot h}\right)^2=438,1$
6	2,00	0750	−0,0002	1	747	0050	2,19	2,66	1,53	
7	2,26	0804	0007	0	797	0033	1,45	3,13	1,36	$W=\dfrac{Q}{c \cdot h}=3,063$
8	2,50	−0,0840	−0,0010	0,0000	−0,0830			3,57	1,23	$x_1=1,50;\quad x_n=2,50$
							$\Sigma l=11,15$			

и для этого находим

$$c=(2\sqrt{1+m^2}-m)h=1{,}736\cdot 1{,}2=2{,}083;$$

$$x_1=\frac{b_1+mh}{c}=1{,}78;\quad x_2=\frac{b_2+mh}{c}=4{,}13;$$

$$5A=\frac{5\alpha}{g}\left(\frac{K_0}{c\cdot h}\right)^2=2\,016;\quad a=\left(\frac{K_0}{c\cdot h}\right)^2\frac{n^2}{h^{1,4}}=1{,}116.$$

Замечая (табл. 68), что условие сходимости ряда соблюдается для всех $x>1{,}5$, определяем:

$$\Phi'(x_1)=f_1(x_1)-a\cdot f_2(x_1)+a^2f_3(x_1)=-0{,}06765,$$
$$\Phi'(x_2)=f_1(x_2)-a\cdot f_2(x_2)+a^2f_3(x_2)=-0{,}08811$$

и находим

$$l=5A[\Phi'(x_1)-\Phi'(x_2)]=2\,016\,(-0{,}06765+0{,}08811)=$$
$$=41{,}25\ \text{м}.$$

Второй вариант. Кроме рассмотренного приема интегрирование уравнения (419) может быть выполнено и методом суммирования. Этот вариант решения, как будет показано ниже, дает вполне удовлетворительные по точности результаты и является полезным в особенности в тех случаях, когда условие сходимости (422) не соблюдается.

Запишем уравнение (419) в следующем виде:

$$dl=A\frac{dx}{a\dfrac{(x+1)^{1,4}}{x^{0,4}}\mp x^3}. \tag{425}$$

Обозначим

$$\frac{(x+1)^{1,4}}{x^{0,4}}=\varphi(x)\quad\text{и}\quad a\cdot\varphi(x)\mp x^3=F(x). \tag{426}$$

Решение уравнения (425) при этих обозначениях будет

$$l=A\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{F(x)}.$$

Находим значение интеграла приближенно по правилу трапеции

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{F(x)}\approx\left[\frac{1}{F(x_1)}+\frac{1}{F(x_2)}\right]\frac{\Delta x}{2}$$

и тогда получаем для $l\neq 0$

$$l=\frac{A\cdot\Delta x}{2}\left[\frac{1}{F(x_1)}+\frac{1}{F(x_2)}\right]$$

или, обозначая

$$A\frac{\Delta x}{2}=\frac{\alpha}{2g}\left(\frac{K_0}{c\cdot h}\right)^2\cdot\Delta x=A', \tag{427}$$

окончательно:

$$l=\frac{A'}{F(x_1)}+\frac{A'}{F(x_2)}. \tag{428}$$

Как показывает исследование этого уравнения[1], значение интеграла как площади трапеции получается с достаточным приближением. При этом нужно помнить, что сгущение сечений при расчетах (а это лишь детальнее вырисовывает контуры сооружения) резко повышает точность результатов. Крайняя же простота схемы вычислений не требует большой затраты времени на сгущение сечений в случае необходимости.

Величины $\varphi(x)=\dfrac{(1+x)^{1,4}}{x^{0,4}}$ и x^3 вычислены для разных значений x и сведены в таблицу[2].

Задача 76. Рассчитать способом суммирования задачу 73. Учитывая приближенность способа, расчет проведем с большим числом сечений (табл. 71). При этом

Таблица 71

№ сечений	x	$\varphi(x)$	$a\varphi(x)$	x^3	$F(x)$	$\dfrac{A'}{F(x)}$	l	b	$v=\dfrac{W}{x}$	Примечание	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
1	2,72	4,2164	0,691	20,124	−19,433	0,59		4,00	2,77		$c=1{,}75$
2	2,36	3,8701	635	13,144	−12,509	0,92 (0,43)	1,51	3,38	3,20		$a=0{,}164$
	2,19	3,7079	608	10,503	−9,895	0,55	2,24			$\Delta x=-0{,}36$	$A'=-63{,}7\dfrac{0{,}36}{2}=-11{,}466$
3	2,02	3,5470	582	8,242	−7,660	0,71		2,78	3,73		
	1,85	3,3877	556	6,332	−5,776	0,94				$\Delta x=-0{,}18$	$A'=-63{,}7\dfrac{0{,}18}{2}=-5{,}733$
4	1,68	3,2305	530	4,742	−4,212	1,29 (0,83)	3,88	2,19	4,49	$\Delta x=-0{,}17$	$A'=-63{,}7\dfrac{0{,}17}{2}=-5{,}414$
	1,57	3,1300	513	3,870	−3,357	1,04					
	1,46	3,0309	497	3,112	−2,615	1,34 (1,46)	7,69			$\Delta x=-0{,}11$	$A'=-63{,}7\dfrac{0{,}11}{2}=-3{,}504$
5	1,34	2,9246	480	2,406	−1,926	1,98 (1,81)		1,60	5,63		$W=\dfrac{Q}{c\cdot h}=7{,}542$
	1,23	2,8292	464	1,861	−1,397	2,51					
	1,12	2,7363	449	1,405	−0,956	3,67 (4,00)	21,24				
6	1,00	2,6390	0,433	1,000	−0,567	6,74		1,00	7,54		
							$\sum l=36{,}56$				

[1] См. И. И. Агроскин, Гидравлика каналов, Госэнергоиздат, 1940.
[2] См. И. И. Агроскин, Гидравлика каналов, 1940, приложение XI, стр. 149.

с изменением Δx изменяется и величина A'. Уклон $i>0$ и поэтому принимаем $F(x)=a\varphi(x)-x^3$.

Задача 77. Рассчитать способом суммирования задачу 74. Так как в этом примере Δx невелико (0,10), проведем расчет без сгущения сечений (табл. 72). Уклон в этом примере — обратный $i<0$ и потому считаем $F(x)=a\varphi(x)+x^3$.

Таблица 72

№ сечений	x	$\varphi(x)$	$a\varphi(x)$	x^3	$F(x)$	$\frac{A'}{F(x)}$	l	b	$v=\frac{W}{x}$	Примечание
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1,50	3,0667	0,693	3,375	4,068	1,08	1,99	1,74	2,04	$c=1,828$
2	1,60	1574	714	4,096	4,810	0,91	1,69	1,92	1,91	$a=0,226$
3	1,70	2490	734	4,913	5,647	0,78	1,45	2,11	1,80	при $\Delta x=0,10$ $A'=4,381$
4	1,80	3414	755	5,832	6,587	0,67	1,24	2,29	1,70	$\Delta x=0,26$ $A'=11,391$
5	1,90	4344	776	6,859	7,635	0,57	1,07	2,47	1,61	$\Delta x=0,24$ $A'=10,514$
6	2,00	5282	797	8,000	8,797	0,50 (1,29)	2,21	2,66	1,53	$W=\frac{Q}{c\cdot h}=3,063$
7	2,26	7745	853	11,543	12,396	0,92 (0,85)	1,49	3,13	1,36	
8	2,50	4,0042	0,905	15,625	16,530	0,64		3,57	1,23	
							$\Sigma l=11,14$ м			

§ 138. Интегрирование уравнения движения жидкости в непризматических трапецоидальных руслах с постоянной глубиной при $i=0$

В § 136 было установлено диференциальное уравнение (420) движения жидкости с постоянной глубиной при $i=0$:

$$dL=\frac{\alpha h^{1,4}}{gn^2}\cdot\frac{x^{0,4}}{(x+1)^{1,4}}dx.$$

Переходя к интегрированию этого уравнения, применим обычную подстановку для диференциальных биномов:

$$1+x=xz^5;\; dx=-5\frac{z^4}{(z^5-1)^2}dz.$$

При этой подстановке, и обозначая для краткости

$$\frac{\alpha h^{1,4}}{gn^2}=A_0,$$

перепишем диференциальное уравнение в таком виде:

$$dL=-5A_0\frac{dz}{z^3(z^5-1)}=-5A_0\frac{dz}{z^3(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)}. \tag{429}$$

Разлагая далее на простейшие дроби и интегрируя, получаем точное решение:

$$L=A_0\Big\{-\frac{5}{2z^2}-\ln(z-1)+\frac{1+\sqrt{5}}{4}\ln[2z^2+(1-\sqrt{5})z+2]+\frac{1-\sqrt{5}}{4}\ln[2z^2+(1+\sqrt{5})z+2]-\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\operatorname{arctg}\frac{4z+(1-\sqrt{5})}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\operatorname{arctg}\frac{4z+(1+\sqrt{5})}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\Big\}+C. \tag{430}$$

Если все выражение в фигурных скобках кратко обозначить $\Phi_0(x)$ и интегрирование произвести от сечения русла с x_1 до сечения с x_2, мы получим необходимое расчетное уравнение для расстояния между двумя сечениями русла:

$$\left.\begin{aligned} l&=A_0[\Phi_0(x_2)-\Phi_0(x_1)],\\ \text{где}\quad A_0&=\frac{\alpha h^{1,4}}{gn^2}.\end{aligned}\right\} \tag{431}$$

Значения $\Phi_0(x)$, вычисленные до пятого десятичного знака, даны в таблице[1].

Ввиду некоторой громоздкости выражения $\Phi_0(x)$ по (430) значения $\Phi_0(x)$ для табулирования определялись другим приемом.

Подинтегральную дробь $\frac{1}{z^3(z^5-1)}$ можно представить в таком виде:

$$\frac{1}{z^8-z^3}=z^{-8}+z^{-13}+z^{-18}+z^{-23}+\ldots+z^{-8-5(n-1)} \tag{432}$$

Для этого ряда имеем:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{z^{-8-5n}}{z^{-8-5n+5}}=z^{-5}=\frac{x}{1+x}<1$$

и, следовательно, ряд (432) сходится при любых значениях x.

Подставляя (432) в (429) и интегрируя, получим

$$L=A_0\left[\frac{5}{7z^7}+\frac{5}{12z^{12}}+\frac{5}{17z^{17}}+\ldots+\frac{5}{(2+5n)z^{2+5n}}\right]+C.$$

[1] См. И. И. Агроскин, Гидравлика каналов 1940, приложение XII, стр. 150—152.

Выражение в квадратных скобках и служило для получения значений $\Phi_0(x)$. В зависимости от величины x бралось такое число членов ряда, чтобы получить $\Phi_0(x)$ с точностью до пятого десятичного знака.

Задача 78. Рассчитать переходный участок с горизонтальным дном для пропуска $Q = 8$ *м³/сек* с постоянной глубиной $h = 1{,}2$ *м* при следующих данных: $m = 0{,}5$; $n = 0{,}03$; $b_1 = 0{,}94$ *м* до ширины $b_n = 2{,}80$ *м*.

Расчет производим по уравнению (431), пользуясь таблицей[1] значений $\Phi_0(x)$.

Вычисления располагаем по схеме табл. 73, в примечаниях к которой записываем необходимые константы.

Задача 79. Какую шероховатость придать рассмотренному выше каналу, чтобы горизонтальная переходная часть уложилась в $l = 20$ *м*.

По уравнению (431) имеем

$$20 = A_0[\Phi_0(1{,}63) - \Phi_0(0{,}74)] = A_0[0{,}6134 - 0{,}2935] = \\ = 0{,}3198\ A_0$$

или $A_0 = 62{,}53$;

далее
$$A_0 = \frac{ah^{1,4}}{gn^2} = \frac{0{,}112 \cdot 1{,}291}{n^3} = 62{,}53,$$

откуда находим

$$n = 0{,}048 \approx 0{,}05.$$

Таблица 73

№ сечений	x	$\Phi_0(x)$	$\Delta\Phi_0(x)$	l	b	$v = \frac{W}{x}$	Примечание
1	0,74	0,29352			0,941	4,32	$c = 2{,}0832$
			0,06394	10,27			$A_0 = 160{,}65$
2	0,90	35746			1,275	3,56	$x_1 = 0{,}74$
			0,06095	9,79			$x_n = 1{,}63$
3	1,06	41841			1,608	3,02	$W = \frac{Q}{c \cdot h} = 3{,}20$
			0,05814	9,34			
4	1,22	47655			1,942	2,62	
			0,05527	8,88			
5	1,38	53182			2,275	2,32	
			0,05290	8,50			
6	1,54	58472			2,608	2,08	
			0,02863	4,60			
7	1,63	0,61335			2,80	1,96	
				$\Sigma l = 51{,}38$			

ГЛАВА XIX
ПОСТРОЕНИЕ КРИВЫХ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ЕСТЕСТВЕННЫХ РУСЛАХ

§ 139. Общие сведения о характере движения потока в естественных руслах

Естественные русла (равнинные и горные реки, ручьи и пр.) отличаются от каналов формой поперечных сечений, которые вообще весьма неправильны, резкой изменяемостью уклона дна и извилистостью в плане в результате образования излучин или меандр. Продольный профиль водной поверхности непрерывно меняется. Резкие изменения гидравлических элементов реки по длине, вызванные указанными факторами, наличием плесов и перекатов, изменяемостью шероховатости по длине и глубине потока, придают последнему, даже в условиях бытового режима, неравномерный характер.

В редких случаях можно говорить о равномерном характере движения на отдельных участках реки.

При возведении плотин, водозаборных шпор, выправительных и прочих сооружений в руслах рек, а также при расчистках русел в целях судоходства резко изменяется естественный режим речных водотоков. Водоподъемные плотины, например, создают подпор в реке, который в некоторых случаях распространяется вверх по течению на десятки километров от плотины.

В связи с этим возникает необходимость знать, как будет изменен режим реки после возведения сооружения в ее русле, т. е. каковы будут глубины, зона возможного затопления в связи с подъемом горизонтов в реке и т. д. Задача таким образом сводится к построению кривых подпора свободной поверхности в реке.

При проведении значительных расчисток русел на отдельных участках реки увеличивается пропускная способность сечения потока и в связи с этим изменяется уклон свободной поверхности реки. Возникает необходимость знать, каково будет изменение этого уклона, и задача таким образом сводится также к построению кривой свободной поверхности в реке (кривой спада).

Вопросам построения кривых свободных поверхностей в естественных руслах уделялось много внимания как в заграничной литературе, так и особенно за последние годы у нас в связи с широким развертыванием гидротехнического строительства.

§ 140. Применение общих методов расчета кривых спада и подпора к естественным руслам

При расчете кривых свободной поверхности потока в естественных руслах необходимо разбить изучаемый водоток на ряд отдельных расчетных участков.

Разбивка на отдельные участки имеет целью свести общий расчет по всему протяжению реки, отличающейся, как правило, неоднородностью гидравлических характеристик на своем пути, к ряду частных расчетов на участках с более или менее однотипными условиями течения в пределах участка.

Поэтому при разбивке на участки следует придерживаться следующих указаний.

[1] См. Н. И. Агроскин, Гидравлика каналов, 1940, стр. 151.

Если имеются наблюденные естественные профили свободной поверхности реки, то надо стремиться к выделению участков с однообразным естественным уклоном потока и более или менее однообразным живым сечением.

Если наблюденных профилей нет и тем самым один из критериев, а именно однообразие уклона свободной поверхности, не может быть использован, необходимо стремиться сохранить в пределах участка более или менее постоянным форму живого сечения или же добиваться того, чтобы в пределах участка сохранялось плавно изменяющимся живое сечение без резких переходов от одной формы сечения к другой.

Кроме этого следует стремиться, чтобы в пределах участка был примерно однородный коэфициент шероховатости и постоянный расход Q. Если в реку впадают притоки, то в этих местах выбирают граничные сечения участка.

Длина участка зависит от характера реки и может быть самой разнообразной. Назначение коротких участков вызывает большие затраты времени на расчеты, не увеличивая в большинстве случаев их точности.

Длина участка при построении кривых подпора реки Свирь, Нева, Волхов, Днепр колебалась в самых широких пределах от десятков метров (для порожистой части Днепра) до нескольких километров. Средняя длина участков получалась от 400—2 000 *м*[1].

Длина участка обычно измеряется по геометрической оси потока, иногда по стрежню реки, т. е. по линии наибольших глубин.

При правильной разбивке в зависимости от конкретных условий каждый выделенный расчетный участок может быть отнесен к следующим категориям:

а) Призматическое на всем участке русло произвольной, но постоянной для всего участка формы. В этом случае расчет свободной поверхности может быть полностью произведен методом, изложенным в § 131.

При этом кривую $Q=f(H)$ весьма желательно иметь построенной на основе непосредственных гидрометрических измерений.

б) Русло в пределах участка не является призматическим, но плавно изменяющимся. При таком случае расчет свободной поверхности на участке производится методом постепенных приближений, изложенным в § 135.

В обоих случаях расчет следующего участка начинается с глубины, полученной при расчете в конце предыдущего участка.

§ 141. Специфические методы расчета кривых свободной поверхности в естественных водотоках

Кроме общих методов расчета кривых спада и подпора имеется много отдельных предложений для расчета кривых свободной поверхности специально для естественных водотоков.

В равнинных реках изменение скоростного напора незначительно. Невелики также и местные потери. Основными потерями напора являются путевые потери по длине.

Поэтому при расчетах неравномерного движения в спокойных естественных водотоках принимают за основу уравнение Шези, которое запишем в такой форме:

$$\Delta z = \frac{Q^2}{C^2_{cp}\,\omega^2_{cp}\,R_{cp}}\,L, \qquad (433)$$

где Δz — падение свободной поверхности на участке длиной L, а C_{cp}, ω_{cp}, и R_{cp} — соответствующие средние значения компонентов уравнения Шези.

Из формулы Шези вытекает, что для одного и того же участка водотока

$$\frac{\Delta z}{\Delta z_0} = \frac{Q^2}{Q_0^2}$$

или

$$\Delta z = \frac{Q^2}{Q_0^2}\,\Delta z_0, \qquad (434)$$

где Δz_0 — падение свободной поверхности при бытовом режиме водотока и соответствующем этому расходе Q_0, а Δz — падение свободной поверхности на том же участке при расчетном расходе Q (при подпоре).

Рассмотрим применение формул (433) или (434) к расчету кривой свободной поверхности.

Способ инж. Мастицкого (1932). Способ Мастицкого является развитием предложения американского инженера Гримма (1928)[2].

По этому способу предлагается такая техника построения кривой подпора по формуле (434).

Заданы расчетный расход Q_p и отметка подпора z_1 в исходном сечении. Строят кривые расхода $Q_{01}=f(z_0)$ по каждому сечению выбранных участков для условий свободного бытового режима реки на основе гидрометрических данных.

По кривой расхода исходного сечения определяют Q_{01}, соответственно отметке z_1. Затем по этому расходу находят по кривой расхода второго сечения данного участка отметку z_0. Раз-

---

[1] А. Н. Рахманов. О построении кривых свободной поверхности для естественных водотоков, 1930.

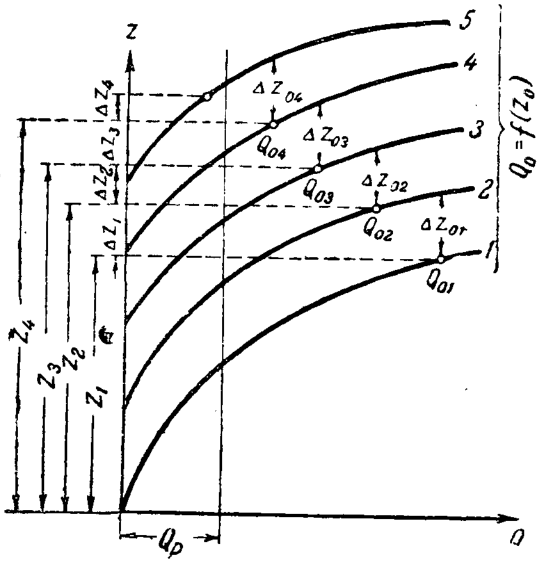
[2] C. J. Grimm, Backwater Slopes Above Dams. Eng. N. R, № 23, 1928.

Н. В. Мастицкий, Графический способ построения кривой подпора, „Гидротехническое строительство" № 2—3 1932.

ность отметок $z_0 - z_1 = \Delta z_{01}$ дает падение свободной поверхности потока в естественных условиях.

Зная таким образом Q_p, Q_{01} и Δz_{01}, находят Δz_1 по формуле (434). Приняв далее отметку $z_2 = z_1 + \Delta z_1$ за исходную подпорную отметку, находят таким же путем падение на втором участке Δz_2 и т. д.

Если построить совмещенный график расхода (фиг. 172), что собственно и сделал инж. Мастицкий, то ход расчета будет такой.



Фиг. 172

Зная отметку подпора z_1, находят по кривой 1 расход Q_{01}. Переходя по нормали на кривую 2, а от нее на ось ординат находят, z_{01}, а также $\Delta z_{01} = z_{01} - z_1$. Затем вычисляют по формуле (434) Δz_1. Прибавив Δz_1 к z_1, получают отметку подпора во втором сечении z_2. По этой отметке находят Q_{02}. Переходя на кривую 3, а затем на ось ординат, находят z_{02}, и по формуле (434) Δz_2 и т. д.

Кривая подпора закончится, когда Q_{0n} будет равен заданному расходу Q_p. В этом случае $\Delta z_n = \Delta z_{0n}$, т. е. уклон свободной поверхности при подпоре на данном участке равен уклону свободной поверхности в реке без подпора на этом участке при заданном расходе Q_p.

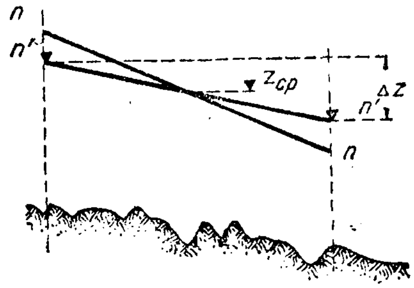
Способ проф. А. Рахманова (1934)[1]. Напишем уравнение (433) в таком виде:

$$\frac{\Delta z}{Q^2} = \frac{L}{C^2_{cp}\,\omega^2_{cp}\,R_{cp}} = \frac{L}{K^2_{cp}}. \qquad (435)$$

[1] Проф. А. Н. Рахманов. О построении кривых свободной поверхности для естественных водотоков (гл. IV книги М. Д. Чертоусова, Инженерная гидравлика 1934 г.) и Гидротехническое строительство № 10, 1934.

Если принять, что на данном расчетном участке $\frac{L}{K^2_{cp}}$ является функцией средней отметки горизонта — z_{cp} и не зависит от уклона свободной поверхности, т. е., что K_{cp} имеет практически одинаковое значение при положении свободной поверхности $n - n$ и $n' - n'$ (фиг. 173) (это условие акад. Н. П. Павловский называет постулатом инвариантности величины $\left.\frac{L}{K^2}\right)$, то тогда

$$\frac{\Delta z}{Q^2} = f(z_{cp}). \qquad (436)$$



Фиг. 173

Допустим, что имеем ряд гидрометрических данных, по которым можем построить кривые

$$\frac{\Delta z}{Q^2} = f(z_{cp})$$

для каждого из расчетных участков. С помощью этих кривых можно построить кривую свободной поверхности таким образом.

Известна отметка горизонта воды в исходном сечении на конце участка z_2; задаваясь отметкой в сечении в начале участка z_1, имеем

$$z_{cp} = \frac{1}{2}(z_1 + z_2).$$

Поэтому z_{cp} найдем по кривой $\frac{\Delta z}{Q^2} = f(z_{cp})$ для данного участка $\frac{\Delta z}{Q^2}$. Умножая это значение на Q^2, получим Δz. Если полученное Δz практически равно $z_1 - z_2$, то z_1, которым мы задались, будет искомой отметкой. В противном случае задаемся новым значением z_1 и т. д.

Кривые $\frac{\Delta z}{Q^2} = f(z)$ можно построить по данным наблюденных продольных профилей при расходах Q_1, Q_2, Q_3 и т. д. или кривых расходов $Q = f(z)$ для всех расчетных сечений реки. В обоих случаях это построение делается таким образом. Определяем по z_1 и z_2 соответствующее расходу Q падение свободной поверхности $\Delta z = z_1 - z_2$ и z_{cp}.

Зная ряд значений Q, Δz и z_{cp}, легко построить график

$$\frac{\Delta z}{Q^2} = f(z_{cp}).$$

Таким образом для построения графика функции $\frac{\Delta z}{Q^2}$ необходимы гидрометрические данные или в форме наблюденных продольных профилей для ряда значений Q или в форме кривых расходов для всех расчетных сечений. Обычно трудно рассчитывать на наличие данных наблюдений для построения кривых расхода в каждом сечении. В таком случае приходится строить кривые в ряде промежуточных сечений путем интерполяции между двумя кривыми расхода опорных гидрометрических станций, имеющихся на реке.

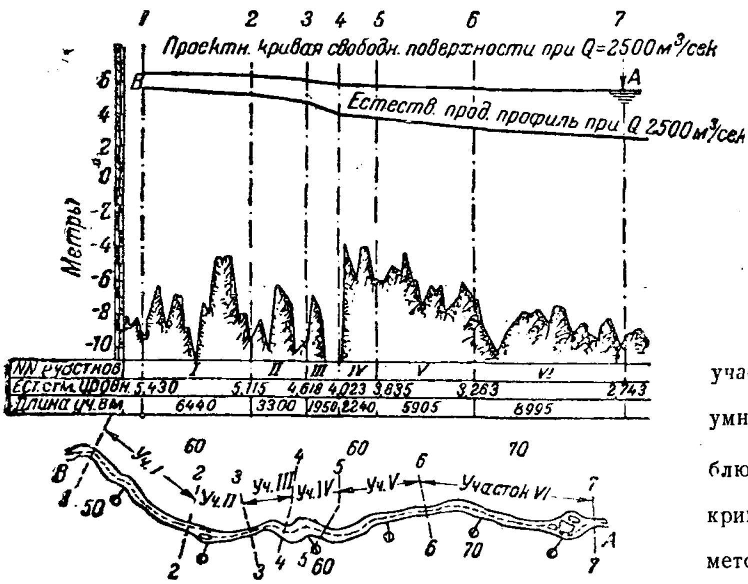
Если проектируемая кривая свободной поверхности имеет отметки, превышающие наблюденные в данной реке, то в этом случае прибегают к экстрополяции графика $\frac{\Delta z}{Q^3}$ до нужных отметок.

Хотя в основе способа проф. Рахманова и лежит уравнение Шези, однако поскольку графики $\frac{\Delta z}{Q^2}=f(z_{cp})$ строятся по данным гидрометрических наблюдений, то тем самым при построении кривой свободной поверхности косвенно учитываются и указанные выше дополнительные потери напора.

Задача 80. Построить[1] кривую свободной поверхности в реке между точками A и B при расходе $Q=2\,500$ *м³/сек*. Даны: план и продольный профиль реки, естественный продольный профиль свободной поверхности при расходе $Q=2\,500$ *м³/сек*, отметка подпертого уровня воды в реке в точке B $z_B^*=5{,}50$ *м*.

Строим кривую подпора по методу проф. Рахманова, разбивая реку между точками B и A на шесть расчетных участков (фиг. 174).

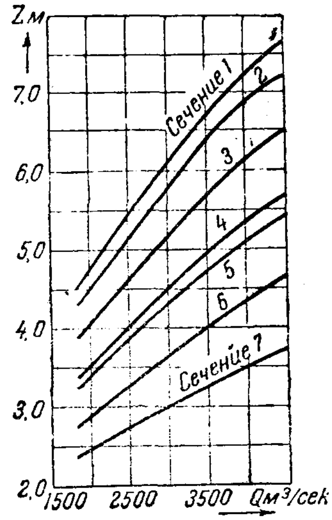
[1] Проф. А. Н. Рахманов, О построении кривых свободной поверхности для естественных водотоков. Гл. IV книги М. Д. Черноусова Инженерная гидравлика, 1943, а также специальный курс гидравлики 1937 г.



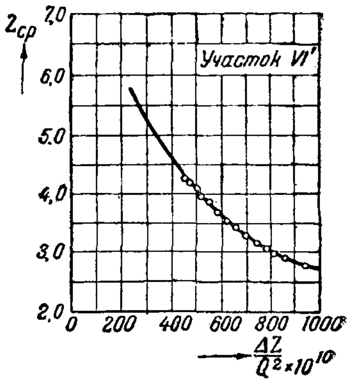
Фиг 174.

Предположим, что в нашем распоряжении помимо вышеуказанных материалов имеются также кривые расхода $Q=f(z)$, установленные гидрометрическим путем для всех семи сечений (фиг. 175). Строим по этим кривым графики $\frac{\Delta z}{Q^2}=f(z_{cp})$.

Результаты подсчетов по определению значений функции $\frac{\Delta z}{Q^2}$ для шестого участка приведены в табл. 74. На фиг. 176 показана кривая $\frac{\Delta z}{Q^2}=f(z_{cp})$, построенная для этого



Фиг. 175



Фиг. 176

Таблица 74

Q м³/сек	z_2 м	z_1 м	z_{cp} м	Δz м	$\frac{\Delta z}{Q^2}$ 10^{10} сек²/м⁵
2 200	3,045	2,585	2,815	0,460	950
2 400	3,190	2,690	2,940	0,500	868
2 600	3,335	2,795	3,065	0,540	799
2 800	3,490	2,900	3,195	0,590	753
3 000	3,635	3,005	3,320	0,630	700
3 200	3,780	3,105	3,442	0,675	660
3 400	3,930	3,210	3,570	0,720	623
3 600	4,075	3,315	3,695	0,760	587
3 800	4,220	3 415	3,867	0.805	557
4 000	4,360	3,510	3,935	0,850	531
4 200	4,495	3,600	4,047	0,895	507
4 400	4,605	3,680	4,142	0,925	478
4 500	4,655	3,720	4,187	0,935	462

участка. Величины $\frac{\Delta z}{Q^2}$, откладываемые по оси абсцисс, умножены на 10^{10}.

Так как подпорные отметки обычно лежат выше наблюденных на рассматриваемых участках, то построенную кривую $\frac{\Delta z}{Q^3}=f(z_{cp})$ продолжаем до интересующих нас отметок (графическая экстраполяция).

Таким же образом строятся кривые для всех остальных расчетных участков.

Имея для каждого участка кривую $\frac{\Delta z}{Q^2}=f(z_{cp})$, переходим к построению кривой свободной поверхности.

Зная отметку уровня воды в конце шестого участка $z_2=5{,}50$ *м*, задаемся произвольно значением средней отметки уровня $z_{cp}=5{,}58$. Находим по кривой для этого значения отметки соответствующее значение функции $\frac{\Delta z}{Q^2}$. Получим $\frac{\Delta z}{Q^2}\cdot 10^{10}=257$.

Определим падение свободной поверхности на протяжении шестого участка:

$$\Delta z=\frac{\Delta z}{Q^2}Q^2=257\cdot 10^{-10}\cdot 2\,500^2=0{,}161 \text{ м}.$$

Отметка уровня воды в начале участка:

$$z_1=z_2+\Delta z=5{,}50+0{,}161=5{,}661 \text{ м}.$$

Тогда

$$z_{cp}=\frac{1}{2}\left(z_1+z_2\right)=\frac{1}{2}(5{,}661+5{,}500)=5{,}5805.$$

Это значение средней отметки весьма хорошо совпадает с тем значением ее, которое мы задали ($z_{cp}=5{,}58$). Следовательно, можно считать что отметка уровня воды в начале участка найдена правильно. Если бы мы получили отметку z_{cp}, не совпадающую практически с заданной, необходимо было бы задаться новым значением z_{cp}, повторив ход вычисления, пока не получили бы z_{cp}, равное заданному.

Определив таким образом отметку в начале шестого участка (или, что то же, в конце пятого участка), можно перейти к следующему участку.

Таблица 75

№ участка	z м	z_{cp} м	$\frac{\Delta z}{Q^2}$ 10^{10} сек²/м⁵	Δz м	z м
VI	5,500	5,580	257	0,161	5,661
V	5,661	5,737	245	0,153	5,814
IV	5,814	5,848	110	0,069	5,883
III	5,883	6,016	425	0,266	6,149
II	6,149	6,340	498	0,311	6,460
I	6,460	6,549	286	0,179	6,639

Результаты всех этих подсчетов сведены в табл. 75 и по ним построена проектная кривая свободной поверхности на фиг. 181.

Способ акад. Павловского. Построение кривой свободной поверхности по способу Рахманова, как и по способам Хестеда и др., сводится в основном к определению Δz методом подбора. Акад. Н. Н. Павловский предложил (1935) способ построения кривых подпора без подбора[1].

Акад. Павловский исходит из уравнения

$$\frac{\Delta z}{Q^2}=\frac{L}{K^2}=F,$$

где $F=\frac{L}{K^2}$ называют модулем сопротивления русла, причем, исходя из указанного выше постулата инвариантности,

$$F=f(z_{cp}).$$

Так как

$$z_{cp}=\frac{z_1+z_2}{2},$$

а

$$z_1-z_2=\Delta z,$$

то

$$z_{cp}=z_2+\frac{\Delta z}{2}.$$

Тогда

$$F=f\left(z_2+\frac{\Delta z}{2}\right).$$

Разлагая в ряд Тейлора, получим

$$F=f(z_2)+\frac{\Delta z}{2}f'(z_2)+\frac{(\Delta z)^2}{8}f''(z_2)+\ldots$$

При сравнительно небольших величинах Δz можно ограничиться лишь двумя первыми членами правой части последнего уравнения. Тогда

$$F=f(z_2)+\frac{\Delta z}{2}f'(z_2)$$

и можно записать

$$\frac{\Delta z}{Q^2}\approx f(z_2)+\frac{\Delta z}{2}f'(z_2).$$

Отсюда

$$\Delta z=\frac{2f(z_2)}{\frac{2}{Q^2}-f'(z_2)}. \qquad (437)$$

Имея кривые $\frac{\Delta z}{Q^2}=F=f(z_2)$ или кривые $F=f(z_{cp})$, можно определить $f(z_2)$ и $f'(z_2)$ следующим образом.

Функция $f(z_2)$ берется из графика по заданному значению z_2.

Производная $f'(z_2)$ может быть найдена по формуле

$$f'(z_2)=\frac{f(z_2+\delta)-f(z_2-\delta)}{2\delta}, \qquad (438)$$

где δ — небольшое приращение данной отметки z_2. Функции $f(z_2+\delta)$ и $f(z_2-\delta)$ берутся по той же кривой по $z_2+\delta$ и $z_2-\delta$.

Если для рассматриваемого водотока необходимо построить несколько кривых свободных поверхностей, то для определения $f'(z_2)$ можно построить кривую $f'(z_2)$ при различных z_2. Определив указанным способом $f(z_2)$ и $f'(z')$, находим по формуле (437) Δz и отметку $z_1=z_2+\Delta z$.

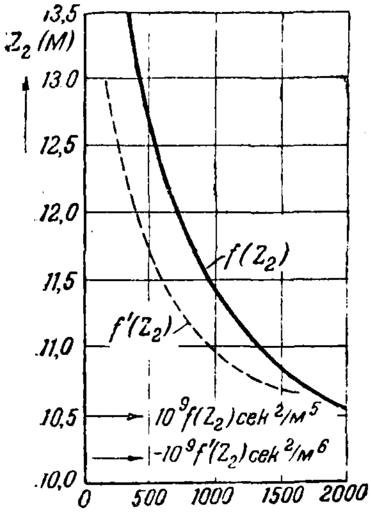
Таким же способом определяем Δz на других участках водотока.

Задача 81. Построить кривую свободной поверхности в реке при следующих данных: расход $Q=650$ м³/сек., отметка подпертого уровня в реке в некоторой точке $A=10{,}90$ м. Для построения кривой подпора располагаем

[1] Акад. Н. Н. Павловский, Гидравлический справочник, 1937, стр. 571—643. (Мы излагаем только графоаналитический способ акад. Павловского. В указанной работе можно ознакомиться с графическим способом).

планом и продольным профилем реки и кривыми $Q=f(z)$ для каждого граничного створа расчетного участка, построенными на основе гидрометрических данных.

Строим кривую подпора по методу акад. Павловского. На основе кривых $Q=f(z)$ строим для каждого расчетного участка графики $F=f(z_2)$, которые тождественны с графиками $\frac{\Delta z}{Q^2}=f(z_{cp})$. На фиг. 177 показан график



Фиг. 177

$F=f(z_2)$ для одного из расчетных участков, где значения величины F, откладываемые на оси абсцисс, умножены на 10^9.

Вычисляем падение Δz на этом участке по зависимости (437)

$$\Delta z=\frac{2f(z_2)}{\frac{2}{Q^2}-f'(z_2)}.$$

Функцию $f(z_2)$ (умноженную на 10^9) определяем из графика при ординате $z_2=10{,}90$

$f(z_2)\,10^9=1\,450$ *сек²/м⁵*.

Для определения $f'(z_2)$ построим график по зависимости (438) (фиг. 184). График обычно строится в том случае, когда строят кривые свободных поверхностей при нескольких расходах. В противном случае $f'(z_2)$ определяют непосредственно по зависимости (438). Данные для построения графика сводим в табл. 76.

Таблица 76

z_2 *м*	δ *м*	$z_2\mp\delta$ *м*	$10^9 f(z_2\mp\delta)$ *сек²/м⁵*	$10^9 f(z_2+\delta) - 10^9 f(z_2-\delta)$ *сек²/м⁵*	2δ	$-10^9 f'(z_2)$
10,70	0,10	10,60	1 895	— 320	0,20	1600
		10,80	1 575			
10,90	0,10	11,00	1 345	— 230	0,20	1150
11,10	0,10	11,20	1 165	— 180	0,20	900
11,30	0,10	11,40	1 015	— 150	0,20	750
11,50	0,10	11,60	895	— 120	0,20	600
11,80	0,20	12,00	695	— 200	0,20	500
12,20	0,20	12,40	545	— 150	0,20	375
12,60	0,20	12,80	445	— 100	0,20	250
13,00	0,20	13,20	375	— 70	0,20	175

Находим по графику $f'(z_2)$ значение $-10^9 f'(z_2)=$ $=1\,150$ *сек²/м⁶*, после чего имеем

$$\Delta z=\frac{2\cdot 1\,450}{\frac{2}{650^2}\,10^9-1\,150}=0{,}4950 \text{ м}.$$

Отметка в начале рассматриваемого участка

$$z_1=z_2+\Delta z=10{,}90+0{,}495=11{,}395 \text{ м}.$$

Аналогичным образом находятся отметки на концах всех расчетных участков реки, по которым строят кривую свободной поверхности.

Способ Н. М. Бернадского. Н. М. Бернадский[1], рассматривая условия равновесия элементарного отсека жидкости, находящегося под действием силы тяжести и силы, определяемой наличием гидравлических сопротивлений, получает в итоге такое выражение:

$$\frac{Q^2}{J}=K\frac{h^{4/3}\omega^2}{n_1^2}, \qquad (439)$$

где J — уклон свободной поверхности;

$$K=1-2\,\frac{h_v}{h};$$

h_v — скоростной напор;

h — средняя глубина потока;

ω — площадь живого сечения;

n_1 — коэфициент шероховатости.

При выводе уравнения (439) Бернадский принял $R=h$ и в дальнейшем принимает $K=1$.

Множитель инерции можно выразить еще и так:

$$K=1-\frac{2v^2}{2gh}=1-\mathrm{Fr}.$$

Поэтому его можно принять равным единице только для спокойных потоков в условиях подпора, если $\mathrm{Fr}\to 0$.

При принятых значениях $h=R$ и $K=1$ уравнение (439) обращается в обычное уравнение Шези, в котором C выражено по формуле Маннинга.

В дальнейшем Бернадский следующим образом интегрирует уравнение (439).

Так как

$$J=\frac{dz}{dx},$$

то

$$\frac{Q^2}{L}dx=\frac{h^{4/3}\omega^2}{L\,n_1^2}dz,$$

где L — длина расчетного участка реки.

Тогда

$$\int_{x}^{x+L}\frac{Q^2}{L}dx=\int_{z}^{z+\Delta z}\frac{h^{4/3}\omega^2}{Ln_1^2}dz.$$

Левая часть этого уравнения

$$\int_{x}^{x+L}\frac{Q^2}{L}dx=Q_{x+L}\,Q_x=Q_{cp}^2,$$

где Q_{cp} — средняя величина расхода в пределах данного расчетного участка.

Если на данном участке отсутствуют при-

[1] Н. М. Бернадский, Речная гидравлика, ее теория и методология. 1933.

токи, то $Q_{cp}=Q$. Для интеграла правой части Бернадский получает такое выражение[1]:

$$\int\limits_{z}^{z+\Delta z}\frac{h^{4/3}\omega^2}{Ln_1}\,dz=\Phi(z+\Delta z)-\Phi(z), \tag{440}$$

тогда

$$Q^2=\Phi(z+\Delta z)-\Phi(z) \tag{441}$$

или

$$\frac{Q^2}{\Delta z}=\frac{\Phi(z+\Delta z)-\Phi(z)}{\Delta z}=\frac{\partial\Phi(z)}{\partial z}.$$

По аналогии с уравнением (436)

$$\frac{Q^2}{\Delta z}=F(z_{cp}).$$

В таком случае

$$\frac{\partial\Phi(z)}{\partial z}=F(z_{cp})$$

и

$$\Phi(z)=\int F(z_{cp})+C. \tag{442}$$

Кривую, определяемую уравнением (442), Бернадский называет опорной кривой.

Зависимость (442) показывает, что кривая $\frac{Q^2}{\Delta z}=f(z_{cp})$ является графиком производной от опорной кривой.

Опорная кривая, как и кривая $\frac{Q^2}{\Delta z}=f(z_{cp})$, не зависит от величины подпора на данном участке, т. е. сохраняет постоянство очертания как в естественном, так и подпертом режиме.

Инж. Бернадский использует опорные кривые для построения кривых свободной поверхности в потоке.

Опорные кривые можно построить или интегрируя графически кривую $\frac{Q^2}{\Delta z}$, или следующим образом.

Располагая гидрометрическими данными для данного участка реки, отмечаем ряд наблюденных уровней, соответствующие им расходы Q_1, Q_2, Q_3,..., Q_n и падения горизонтов на этом участке Δz_1, Δz_2, Δz_3,..., Δz_n. Уровни следует выбирать такие, чтобы низовой конец вышележащего уровня находился на высоте верхового конца нижележащего. Отложим Δz_1, Δz_2, Δz_3,..., Δz_n на оси ординат (ось отметок z_{cp}) так, чтобы они дали непрерывную цепь отрезков, прилегающих друг к другу своими концами, на оси абсцисс отложим соответствующий ряд отрезков Q_1^2, Q_2^2, Q_2^2,..., Q_2^2, тогда получим опорную кривую $\Phi(z_{cp})$ (фиг. 178) для данного участка водотока.

В самом деле, разность абсцисс точек B и A равна Q^2, а из уравнения (441) следует, что

$$Q^2=\Phi(z+\Delta z)-\Phi(z),$$

или

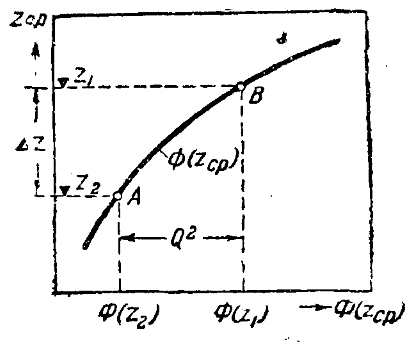
$$Q^2=\Phi(z_2)-\Phi(z_1).$$

Значит абсцисса точки A есть $\Phi(z_2)$, а точки B есть $\Phi(z_1)$. Построенная кривая удовлетворяет уравнению (441) и является опорной кривой, удовлетворяя одновременно уравнению (442).

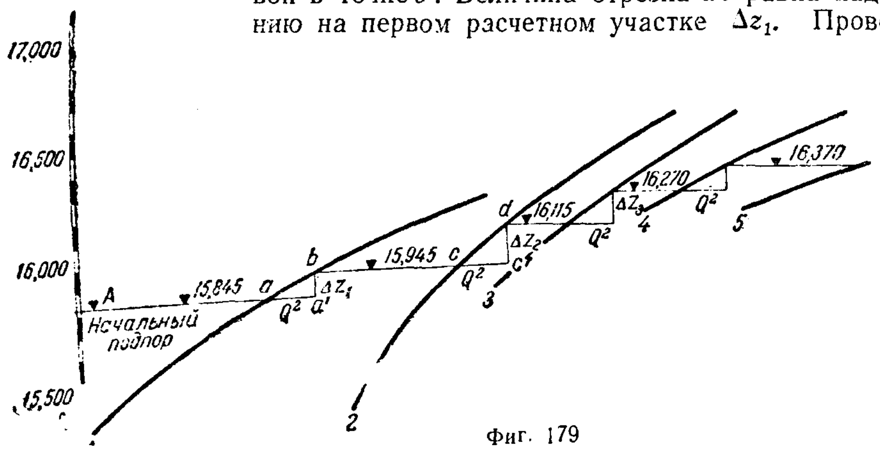
Уравнение опорной кривой (442) содержит произвольную постоянную C. Поэтому положение начальной точки A по отношению к оси ординат может быть произвольным.

Построение кривой свободной поверхности с помощью опорных кривых осуществляется следующим образом.

Разделяем реку на ряд отдельных расчетных участков, придерживаясь изложенных ранее указаний; построим для каждого участка опорную кривую и совместим их на одном чертеже (фиг. 179). Пусть начальная подпорная отметка при заданном расходе Q будет A. Проведем из точки A горизонтальную прямую до пересечения с опорной кривой *1* в точке a, отложим из точки a горизонтальный отрезок, равный в масштабе Q^2, из конца этого отрезка проведем вертикальную прямую до пересечения с этой опорной кривой в точке b. Величина отрезка $a'b$ равна падению на первом расчетном участке Δz_1. Прово-



Фиг. 178



Фиг. 179

[1] Мы опускаем доказательство (440), которое излагает в названной работе Бернадский.

дим из точки b горизонтальную прямую до пересечения с опорной кривой 2 в точке c. Откладывая из точки c горизонтальный отрезок, равный Q^2 на данном участке, а из конца этого отрезка вертикальную прямую до пересечения с опорной кривой 2 в точке d, получим Δz_2. Продолжая построение, получим Δz_3, Δz_4 и т. д.

Как видим, построение кривой свободной поверхности при наличии опорных кривых осуществляется просто, без подбора.

ГЛАВА XX

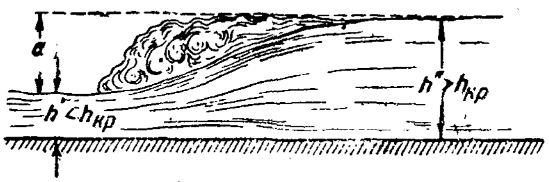
ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ ПРЫЖОК

§ 142. Возникновение прыжка и его структура

При исследовании диференциального уравнения неравномерного движения было установлено, что при $\mathrm{Fr}=1$ глубина $h=h_{кр}$ и функция $h=f(L)$ претерпевает разрыв непрерывности $\left(\frac{dh}{dL}=\infty\right)$, т. е. касательная к кривой свободной поверхности перпендикулярна к оси потока.

Это явление, характеризуемое внезапным резким увеличением глубины потока с резким переходом от больших скоростей течения к меньшим, называют гидравлическим прыжком. Впервые это название было дано Бидоном (Bidone) еще в 1820 г.

Прыжок есть локальное (местное) устойчивое во времени явление, промежуточная форма движения при переходе бурного потока в спокойный, форма, соответствующая, как указывал еще Беланже (Belanger), переходу течения через критическую глубину (фиг. 180).



Фиг. 180

Внешне прыжок напоминает собой остановившуюся волну. Если поток внезапно перекрыть преградой (фиг. 181), то перед ней станет резко повышаться уровень, образуя как бы поддерживаемую преградой волну.

Фиг. 181

Возрастая у преграды, эта волна будет распространяться вверх по течению с убывающей скоростью и высотой. В спокойном потоке волна будет постепенно затухать и сойдет на-нет в тот момент, когда через преграду будет переливаться расход, равный расходу прегражденного потока. В бурном потоке эта волна остановится и примет форму прыжка. Поэтому Базен (Bazin) предложил рассматривать прыжок как остановившуюся волну перемещения.

Особый интерес в явлении прыжка представляет кинематическая сторона явления, т. е. вопросы структуры прыжка.

Специальные наблюдения за прыжком, особенно в лотках со стеклянными стенками, в частности кинематографические съемки этого явления, показывают, что в структуре прыжка ясно выражены две зоны: зона поступательного потока в форме растекающейся (расширяющейся в вертикальной плоскости) струи и поверхностная зона, поддерживаемая этой струей, внешне похожая на водяной валец с большим насыщением воздухом (фиг. 180).

Структура поверхностной зоны, как и в целом всего прыжка, приковывает внимание многих исследователей. Одни утверждают, что это есть валец, вращающийся над растекающейся струей по закону вращения твердого тела (Козени)[1], другие, что движение в этой зоне протекает по замкнутой траектории (Ребок)[2], третьи, что в ней осуществляется петлеобразное незамкнутое движение (Грицук, Милович[3]) или движение с переменной массой (Маккавеев[4], Нeнько[5]) и т. д.

Вообще вопрос о структуре поверхностной зоны не имел бы особого практического интереса, если бы с ней не связывался вопрос о потере энергии в прыжке.

Растекающаяся зона прыжка есть особая форма поступательного потока. Эта зона, как и вообще растекание потока мало изучены. Однако можно сказать, что она отличается от плавно изменяющегося потока тем, что угол растекания линий тока в ней значительно больше нуля,

---

[1] J. Kozeny, „Sind Wasserwalzen-Energievernichter?" Die Wasserwirtschaft № 11, 1932.

[2] Jh. Rehbock, Die Wasserwalzen als Regler des Energiinhalts des Wasserlaufes, 1925.

[3] А. В. Грицук, Механизм и теория прыжка потока жидкости, 1932.

[4] В. М. Маккавеев, Теория гидродинамических процессов с большим гашением энергии. Труды Второго всесоюзного гидрологического съезда 1928 г.

[5] Я. Т. Ненько, О движении жидкостей с переменной вдоль потока массой, 1938.

кривизна струй (линий тока) весьма значительна и вследствие этого распределение давления в ней по глубине отлично от гидростатического.

Поверхностная зона прыжка, в которой частицы воды находятся в непрерывном движении, не участвует в поступательном передвижении потока. Наличие воздуха в ней нарушает условия непрерывности потока.

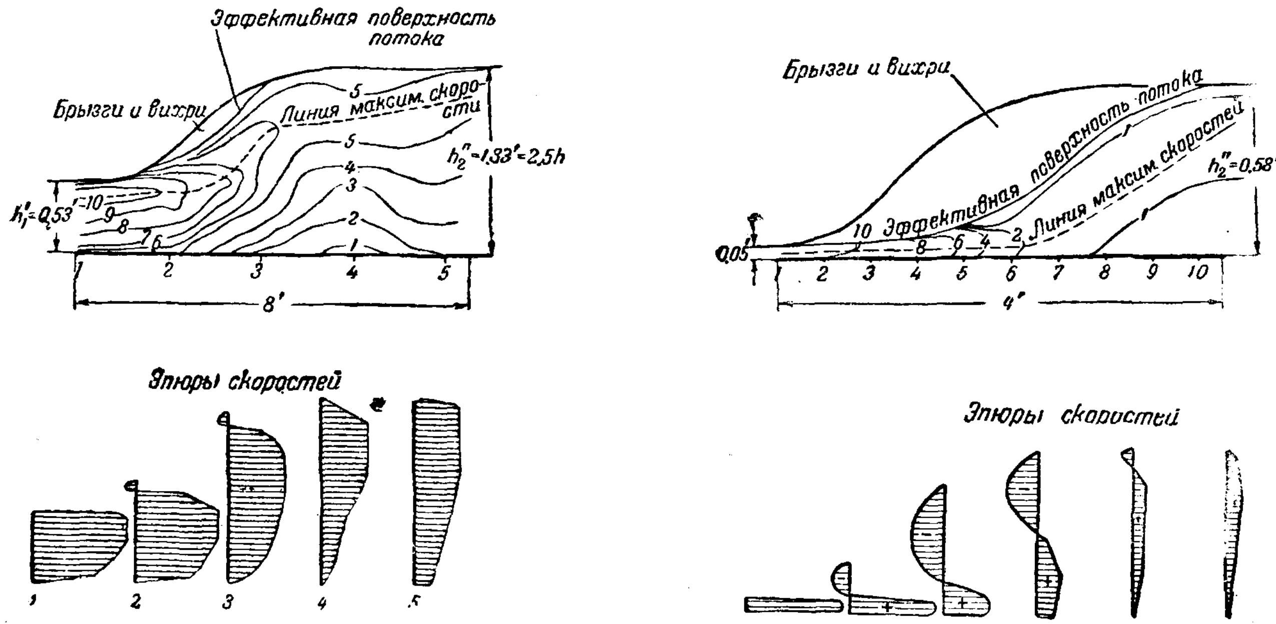
Однако движение частиц воды в поверхностной зоне не изолировано от растекающейся поступательной зоны. Оно собственно и происходит под действием растекающейся струи и силы тяжести. Растекающаяся струя «увлекает» за собой частицы воды из поверхностной зоны, тем самым в последней происходит замена одних частиц другими.

Движение в поверхностной зоне прыжка, происходящее под действием указанных факторов, сложно по своей форме и не укладывается в простую схему. Наблюдения за плавающими телами (эмульсионные шарики, кусочки парафина, щепки дерева), попадающими в поверхностную зону, показывают, что в этой зоне происходит самое разнообразное движение. В верхних слоях зоны может быть движение, обратное общему направлению потока, и в таком случае плавающая щепка, оказавшаяся в конце прыжка, может быть перенесена этим движением в начало его. Иногда эта щепка пройдет замкнутый путь и может снова оказаться на конце прыжка. Попав в начало прыжка, щепка может некоторый промежуток времени совершать на месте колебательное движение вместе с пульсирующей водой, в то время как в другой момент она вместе с частицами воды может быть увлечена растекающейся струей и вынесена вовсе из зоны прыжка вниз по течению потока.

На фиг. 182 показаны продольные сечения гидравлических прыжков, на которых нанесены линии одинаковых скоростей. Они ясно показывают наличие двух зон движения в прыжке. Если по данным проведенных исследований построить эпюры распределения скоростей по вертикали в прыжке, то они будут иметь вид, показанный на фиг. 182. Как показывают эти эпюры, на поверхности прыжка направление движения противоположно общему поступательному движению потока, о чем и упоминалось выше.

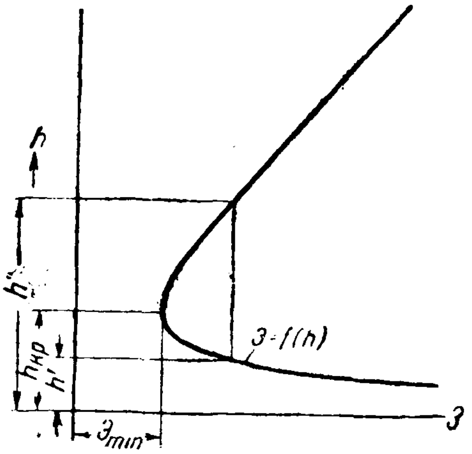
Размеры зон прыжка и форма движения в них зависят от размеров самого прыжка, формы русла, шероховатости и уклона дна этого русла. Гидравлический прыжок сохраняет свою структуру и свойства постоянными в смысле некоторого среднего значения в течение определенного промежутка времени. Вне этих средних значений прыжок находится в состоянии непрерывной пульсации как по своему местоположению в русле, так и по своим горизонтальным и вертикальным размерам.

В чем сущность явления, принимающего форму гидравлического прыжка? Почему переход от бурного потока к спокойному совершается в форме прыжка? Попытаемся подойти к ответу на эти вопросы, анализируя сущность явления с энергетической точки зрения. Прежде всего установим, мыслимо ли беспрыжковое сопряжение бурного потока со спокойным в форме постепенного, плавного перехода от глубин меньше критических к глубинам больше критических.



Фиг. 182

Обратимся к кривой удельной энергии потока (фиг. 183), рассматривая движение в русле с нулевым уклоном[1] и допуская, что в прыжке не происходит потерь энергии. Тогда удельная энергия перед прыжком и за прыжком должна быть



Фиг. 183

одной и той же. По кривой видно, что переход от меньшей глубины к большей связан с переходом через критическую глубину. При этом удельная энергия должна сначала уменьшиться от исходной величины до минимума (когда глубина достигает критической), а затем увеличиться от минимума до прежнего ее значения.

Такое изменение удельной энергии в заданном потоке физически невозможно. Вообще можно представить движение с рассеиванием энергии до минимума, например, движение перед спадом. Но совершенно нельзя представить движения с минимумом удельной энергии в руслах с нулевым уклоном или уклоном, который не равен критическому, и тем более движения с возрастанием удельной энергии потока.

Таким образом постепенный переход в потоке от глубин меньше критических к глубинам больше критических в форме плавной кривой свободной поверхности физически невозможен. Единственно возможной формой движения на границе перехода бурного потока в спокойный является гидравлический прыжок.

Для упрощения рассуждений мы приняли, что в прыжке не происходит потерь энергии. В действительности, движение в прыжке, как и всякое движение, сопряжено с затратой энергии. Однако сохраняемая в потоке энергия должна быть больше минимальной удельной энергии.

§ 143. Виды гидравлического прыжка

В практике гидротехнического строительства часто приходится решать вопросы сопряжения бурного потока со спокойным, например, при переливе воды через плотину, при истечении изпод щита, при изменении уклона дна канала с $i > i_{кр}$ на уклон $i < i_{кр}$.

Во всех этих случаях сопряжение совершается в форме прыжка.

Бурный поток обладает большой кинетической энергией, которая разрушающе действует на русла. Предохранение последних от разрушения требует во многих случаях специального укрепления.

Наоборот, спокойный поток с его малыми скоростями в большинстве не требует такого укрепления. Поэтому в гидротехнической практике стремятся во всех случаях, где это представляется возможным, придать потоку спокойный характер.

То, что переход от бурного потока к спокойному происходит внезапно, в форме прыжка, дает возможность значительно сократить длину переходного участка, на котором совершалось бы преобразование бурного потока в спокойный, и тем самым уменьшить размеры сооружений или специальных укреплений русла. Так гидротехника положительно использует такое явление природы как гидравлический прыжок. Отсюда понятен тот интерес к прыжку, который проявлялся на протяжении последнего столетия со стороны ученых и самых широких кругов инженеров гидротехников[2].

В зависимости от того, в каких условиях возникает прыжок, он принимает различные виды. Различают следующие виды прыжка:

1. Совершенный прыжок, или, как его иногда называют, чистый прыжок. Это прыжок, возникающий в русле однообразного сечения и уклона с обычной шероховатостью (фиг. 180) и имеющий высоту $a > h'$. В структуре совершенного прыжка ясно выражены растекающаяся и поверхностная зоны.

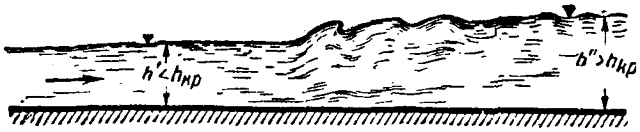
2. Прыжок-волна. Так называется гидравлический прыжок сравнительно небольшой высоты, принимающий форму ряда постепенно затухающих волн (фиг. 184). В этом прыжке нет поверхностной зоны.

3. Подпертый прыжок, который возникает в водобойных колодцах, перед водобойными стенками и вообще перед преградами, стесняющими живое сечение потока. Для него характерно стеснение прыжка по длине и изменение направления придонного слоя потока (фиг. 185).

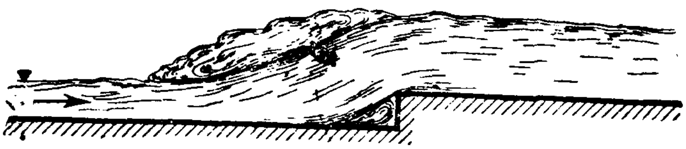
---

[1] В этом случае понятие удельной энергии сечения совпадает с понятием удельной энергии потока.

[2] Гидравлическим прыжком в той или иной степени занимались: Bidone, Belanger, Bress, Bazin, Boussinesq, Boileau, Baumgarten, Unvin, Gibson, Rehbock, Ferriday, Riegel, Bass, Koch, Бахметев, Павловский, Мацман, Маккавеев, Грицук, Милович, Великанов, Kozeny, Ladin, Schoklitsch, Гравин, Агутин, Есьман, Safranez, Einwachter, Pietrkowski, Smetana, Stevens, Lauffer, Knapp, Чертоусов, Сухомел, Шаумян, Ненько и ряд других ученых и инженеров.

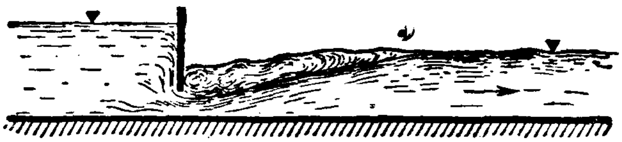


Фиг. 184



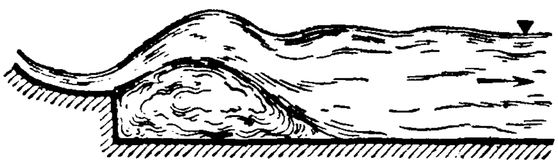
Фиг. 185

4. Подтопленный прыжок, возникающий при истечении из-под щита под уровень. Размеры такого прыжка и форма его зависят от степени затопления отверстия. Для подтопленного прыжка характерно наличие более развитой в вертикальном направлении поверхностной зоны (фиг. 186).



Фиг. 186

5. Поверхностный прыжок. Он может образоваться при сходе струи с плотин, имеющих специальный уступ, при затопленных перепадах. Для него характерно иное распределение скорости по сечению, чем в совершенном прыжке, и наличие, так называемого, донного вальца (фиг. 187).



Фиг. 187

В настоящей главе рассматриваются более подробно совершенный прыжок и прыжок волна. Поверхностный прыжок будет рассмотрен ниже при изучении сопряжения струи, переливающейся через водослив, с нижним бьефом, подтопленный — при изучении истечения из-под щита и подпертый — при расчете водобойных колодцев и перепадов.

§ 144. Совершенный прыжок

При дальнейшем изучении гидравлического прыжка будем считать началом прыжка такое сечение перед прыжком, в котором при бурном состоянии потока еще сохраняется эпюра распределения скоростей, присущая плавно изменяющемуся движению. Концом прыжка будем считать сечение потока в спокойном состоянии, в котором растекающаяся струя приобретает распределение скоростей, мало изменяющееся дальше по длине потока за прыжком. Расстояние между этими двумя сечениями будем называть длиной прыжка $l_{пр}$.

Глубину в сечении перед прыжком обозначим h', в сечении за прыжком h'' и будем называть их взаимными или сопряженными глубинами.

Разность между глубинами потока $h'—h''=a$ в упомянутых выше сечениях за прыжком и перед прыжком называют высотой прыжка.

Изучая прыжок, мы преследуем цель выяснить и установить условия его возникновения, размеры прыжка — высоту и длину его, местоположение прыжка в потоке и величину потерь энергии в прыжке. Для выяснения этих вопросов необходимо установить связь между сопряженными глубинами.

Еще в 1820 г. Бидон (Bidone)[1], а в 1828 г. Беланже (Belanger)[2], пытались установить эту связь путем применения уравнения Бернулли, т. е. теоремы о живых силах, пренебрегая потерями энергии (живой силы) в прыжке, а именно из уравнения

$$h'+\frac{v_1^2}{2g}=h''+\frac{v_2^2}{2g},$$

где h' и v_1 — глубина и скорость перед прыжком; h'' и v_2 — глубина и скорость за прыжком.

Отсюда высота прыжка

$$a=h''-h'=\frac{v_1^2-v_2^2}{2g}.$$

Если рассматривать прыжок на единице ширины в прямоугольном русле, для которого $v_1h'=v_2h''=q$, то из уравнения получим

$$h''=\frac{1}{2}\frac{v_1^2}{2g}+\sqrt{\frac{v_1^2}{2g}\left(\frac{1}{4}\frac{v_1^2}{2g}+h'\right)}.$$

При этом высота прыжка будет равна

$$a=0{,}5\frac{v_1^2}{2g}-h'+\sqrt{\frac{v_1^2}{2g}\left(0{,}25\frac{v_1^2}{2g}+h'\right)}.$$

Полученное таким путем уравнение Беланже не устанавливало той связи между сопряженными глубинами, которая в действительности наблюдается в прыжке, так как при выводе не были учтены потери энергии в прыжке. Сам Беланже, вычисляя высоту прыжка a, получал значения, превышающие данные опытов Бидона в отдельных случаях на 14%, что и побудило его искать более точного решения вопроса.

В 40-х годах прошлого столетия Беланже предложил вывод уравнения прыжка на основе теоремы об изменении количества движения. К

[1] Memmoires de l'Académie des Sciences de Turin, 1820.
[2] J. M. Belanger, Essai sur la solution numérique de quelques problémes rélatifs au mouvement permanent des eaux courantes, 1828.

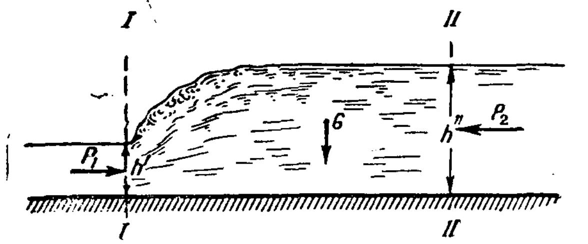
Тому же периоду относится и решение Бресса (Bresse)[1], данное им на основе той же теоремы.

Применение уравнения Бернулли не дает возможности определить гидравлические элементы прыжка, пока не известны потери живой силы в прыжке.

Применение же теоремы об изменении количества движения дает возможность положительно решить эту задачу. При применении теоремы о количестве движения потери в прыжке можно рассматривать как результат проявления сил внутреннего трения между частицами воды в прыжке. Внутренние силы трения, как силы взаимодействия между частицами жидкости, войдут в проекцию импульса суммы всех действующих сил парами, равными по величине и противоположными по знаку, и не будут сохранены в окончательном уравнении прыжка. В последнее войдут только силы, действующие на внешних границах объема.

Применение теоремы об изменении количества движения привело к уравнениям прыжка, которые, как показали затем все последующие исследования, хорошо согласуются с опытными данными.

Выведем уравнение прыжка на основе теоремы о количестве движения. Будем рассматривать прыжок в призматическом русле (фиг. 188), ог-



Фиг. 188

раничив его сечениями *I-I* и *II-II* в начале и в конце прыжка. Из теоремы о количестве движения вытекает, что проекция приращения количества движения в единицу времени на какое-либо направление равна проекции импульса действующих сил на то же направление. Будем проектировать приращение количества движения и импульс сил на направление движения потока в выбранном русле.

Приращение количества движения в единицу времени при переходе потока от сечения *I-I* к сечению *II-II* будет

$$\frac{\gamma}{g}\alpha_0 v_2^2\omega_2 - \frac{\gamma}{g}\alpha_0 v_1^2\omega_1 = \frac{\gamma}{g}\alpha_0 Q(v_2 - v_1)$$

и полностью спроектируется на направление движения.

Здесь ω_1 и ω_2 — площади живых сечений;
v_1 и v_2 — средние скорости в этих сечениях;
α_0 — отношение действительного количества движения к количеству движения, вычисленному по средней скорости в сечении потока.

Численное значение для α_0 на основании вычислений Буссинеска можно принять $\alpha_0 = 1{,}023$.

Силами, вызывающими изменение количества движения, будут: силы давления P_1 и P_2 в сечениях потока, вес G объема жидкости, заключенного между сечениями, и силы трения $P_{тр}$ на внешней границе объема.

Проекция импульса сил внутреннего трения между частицами воды выделенного объема принимается в данном случае равной нулю. Проекция импульса сил веса — практически малая величина и ею можно пренебречь, что равносильно рассмотрению прыжка в потоке, уклон дна которого $i = 0$. Следовательно, проекции импульса сил в единицу времени на направление движения будут $P_1 - P_2 - P_{тр}$, а уравнение приращения количества движения принимает такой вид:

$$\frac{\gamma}{g}\alpha_0 Q(v_2 - v_1) = P_1 - P_2 - P_{тр}.$$

Беланже, а также и Бресс, считали далее возможным пренебречь силами трения, так как они сравнительно малы на небольшой длине прыжка. При таких условиях уравнение прыжка примет такой вид:

$$\frac{\gamma}{g}\alpha_0 Q(v_2 - v_1) = P_1 - P_2. \qquad (443)$$

Учитывая, что сечения до и после прыжка взяты в условиях плавно изменяющегося движения, можно принять распределение давления в сечениях по гидростатическому закону, т. е. полагать

$$P_1 = \gamma h'_{цm}\omega_1 \quad \text{и} \quad P_2 = \gamma h''_{цm}\omega_2,$$

где $h'_{цm}$ и $h''_{цm}$ — глубины погружения центров тяжести рассматриваемых сечений.

Тогда уравнение (443) можно переписать в виде

$$\frac{\alpha_0 Q^2}{g\omega_1} + h'_{цm}\omega_1 = \frac{\alpha_0 Q^2}{g\omega_2} + h''_{цm}\omega_2. \qquad (444)$$

Опыты Бахметева, Гибсона (Gibson), Сафранеца (Safranez), Эйнвахтера (Einwachter) и др. показывают, что действительные размеры совершенного прыжка очень близки к вычисляемым по формуле Беланже-Бресса и что, следовательно, влияние сил внешнего трения на размеры прыжка в руслах с обычной шероховатостью действительно незначительно.

[1] M. Bresse, „Cours de mécanique appliquée", p. II Hydraulique, 1860.

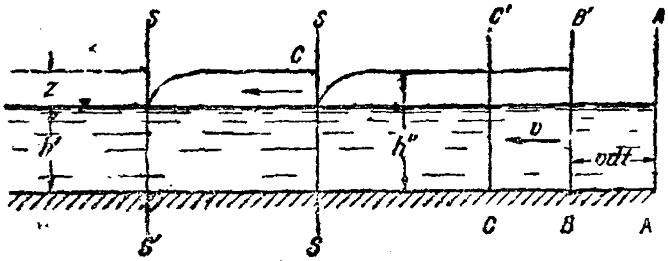
Поэтому в дальнейшем будем считать уравнение Беланже-Бресса (444) уравнением гидравлического прыжка.

§ 145. Совершенный прыжок как остановившаяся волна перемещения

Мы указывали выше, что еще Базен предложил рассматривать прыжок, как остановившуюся волну перемещения. Выведем уравнение совершенного прыжка, подходя к нему с этой точки зрения.

Предположим, что волна, вызванная внезапной преградой потока, распространяется вверх по течению со скоростью c. Если эта скорость больше скорости потока v, волна будет распространяться вверх, если она меньше, волна будет сноситься потоком вниз по течению и, если $c = v$, волна остановится. Определим прежде всего скорость распространения волны c, воспользовавшись для этого предложенным Сен-Венаном[1] способом.

Пусть в призматическом русле с неподвижной в нем жидкостью перемещается водонепроницаемая преграда с равномерной скоростью v. Перед преградой образуется волна, которая будет двигаться со скоростью c. Рассмотрим перемещение преграды из положения A-A' в положение B-B' за время dt (фиг. 189). Путь, который пройдет пре-



Фиг. 189

града, будет vdt. За это же время волна пройдет путь cdt. Приводя преграду в движение мы выведем жидкость из состояния покоя в состояние движения в виде волны. Применим для нахождения c теорему об изменении количества движения. Масса, приведенная в движение перемещением преграды, будет $\frac{\gamma}{g}\omega_1 vdt$. Этой массе сообщена в форме передвигающейся волны скорость c. Тогда количество движения волны будет $\frac{\gamma}{g}\omega_1 vdt \cdot c$.

Нам уже известно, что изменение количества движения потока жидкости по какому-либо направлению равновелико гидродинамическому давлению в том же направлении, т. е. разности давления в сечениях ω_1 и ω_2 до и после повышения уровня. Импульс этого давления будет равен

$$\gamma(\omega_2 h''_{цт} - \omega_1 h'_{цт})dt .$$

Тогда получим

$$\frac{\gamma}{g}\omega_1 vdt \cdot c = \gamma(\omega_2 h''_{цт} - \omega_1 h'_{цт})dt ,$$

откуда скорость распространения волны

$$c = g\,\frac{\omega_2 h''_{цт} - \omega_1 h'_{цт}}{\omega_1 v} . \qquad (445)$$

[1] B. de Saint-Venant, „Comptes rendus des Séances de L'Akademie des Sciences, Paris, 1878.

Определим теперь, пользуясь уравнением неразрывности потока, скорость v. Пусть преграда из положения B-B' перейдет в положение C-C'. Тогда конец волны переместится из точки S в S'. Объем жидкости $B'BCC'$, вытесняемый преградой, равен приращению объема волны

$$\omega_2 vdt = (\omega_2 - \omega_1)\,cdt ,$$

откуда $v = c\,\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2}$. Подставляя значение v в уравнение (445), получим уравнение скорости распространения волны в призматических руслах:

$$c^2 = g\,\frac{\omega_2(\omega_2 h''_{цт} - \omega_1 h'_{цт})}{\omega_1(\omega_2 - \omega_1)} . \qquad (446)$$

Предположим теперь, что волна перемещения возникла в движущемся потоке. Выше мы указывали, что если скорость потока v будет равна скорости перемещения волны c, то волна остановится, приняв форму прыжка.

При $c = v$ уравнение (446) принимает такой вид:

$$v^2 = g\,\frac{\omega_2(\omega_2 h''_{цт} - \omega_1 h'_{цт})}{\omega_1(\omega_2 - \omega_1)}$$

или

$$v^2\omega_1^2(\omega_2 - \omega_1) = g\omega_2\omega_1(\omega_2 h''_{цт} - \omega_1 h'_{цт}) ,$$

откуда, заменяя $v^2\omega_1^2 = Q^2$, получим

$$\frac{Q^2}{g\omega_1} + \omega_1 h'_{цт} = \frac{Q^2}{g\omega_2} + \omega_2 h''_{цт} . \qquad (447)$$

Последнее уравнение отличается от уравнения Беланже-Бресса отсутствием коэфициента α_0, так как мы исходили из средней скорости. Таким образом кроме внешнего сходства между остановившейся волной и прыжком налицо полная идентичность между гидравлическими элементами.

§ 146. Прыжковая функция и ее график

Полученное выше уравнение Беланже-Бресса

$$\frac{\alpha_0 Q^2}{g\omega_1} + \omega_1 h'_{цт} = \frac{\alpha_0 Q^2}{g\omega_2} + \omega_2 h''_{цт}$$

в обеих своих частях является функцией глубины.

Обозначим для краткости выражение

$$\frac{\alpha_0 Q^2}{g\omega} + \omega h_{цт} = \Pi(h) \qquad (448)$$

и назовем такой двучлен «прыжковой функцией».

Тогда уравнение гидравлического прыжка можно символически представить так:

$$\Pi(h') = \Pi(h''),$$

т. е. как равенство прыжковых функций в сечениях до и после прыжка.

Из уравнения прыжковой функции видно, что при данной форме русла и при $Q = \mathrm{const}$

$$\Pi(h) \to \infty, \text{ если } h \to 0,$$
$$\Pi(h) \to \infty, \text{ если } h \to \infty .$$

В таком случае прыжковая функция должна иметь минимальное значение при какой-то глубине.

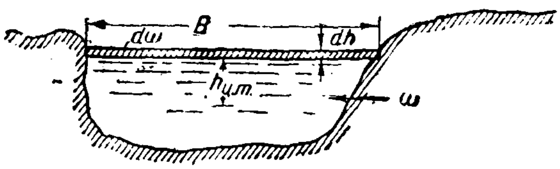
Определим эту глубину, приравняв нулю производную от $\Pi(h)$ по h. Тогда

$$\frac{d\Pi(h)}{dh} = -\frac{\alpha_0 Q^2}{g\omega^2}\frac{d\omega}{dh} + \frac{d(\omega h_{цт})}{dh} = 0\,. \qquad (449)$$

Нам известно, что $\frac{d\omega}{dh} = B$. Величина же $\frac{d(\omega h_{цт})}{dh}$ представляет собой производную по h от статического момента. Из фиг. 190 следует, что

$$d(\omega h_{цт}) = \omega(h_{цт} + dh) + B\frac{(dh)^2}{2} - h_{цт}\omega =$$
$$= \omega dh + B\frac{(dh)^2}{2},$$

где $\omega(h_{цт} + dh) + B\frac{(dh)^2}{2}$ — статический момент относительно оси, совпадающей с новой свободной поверхностью воды в русле.



Фиг. 190

Величиной $B\frac{(dh)^2}{2}$ можно пренебречь как бесконечно малой второго порядка.

Тогда $d(\omega h_{цт}) = \omega dh$ или $\frac{d(\omega h_{цт})}{dh} = \omega$.

После этого уравнение (449) принимает вид

$$\omega - \frac{\alpha_0 Q^2}{g\omega^2}B = \omega\left(1 - \frac{\alpha_0 Q^2}{g\omega^3}B\right) = 0$$

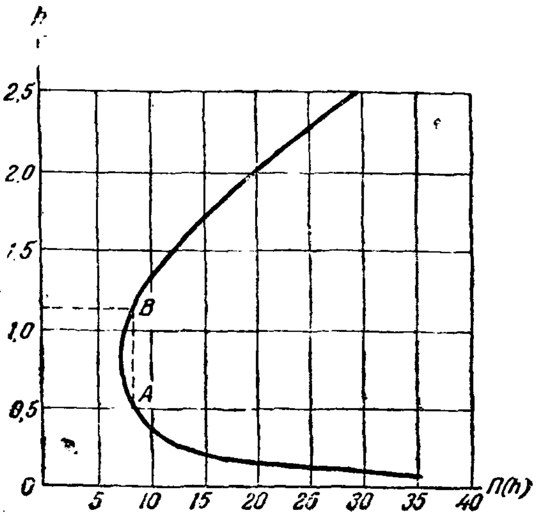
или

$$\frac{\alpha_0 Q^2}{g} = \frac{\omega^3}{B}\,. \qquad (450)$$

Если положить $\alpha_0 = \alpha$, поскольку численно они близки, то легко видеть, что уравнение (450) совпадает с условием критического состояния потока. Отсюда устанавливаем, что прыжковая функция $\Pi(h)$ имеет минимальное значение при $h = h_{кр}$.

На фиг. 191 построена кривая $\Pi(h)$ при данной форме русла и $Q = \text{const}$. По кривой видно, что одному значению функции $\Pi(h)$ соответствует два значения h. При этом одно значение $h < h_{кр}$, а другое $h > h_{кр}$. Глубина $h' < h_{кр}$ будет глубиной перед прыжком, а $h'' > h_{кр}$ глубиной за прыжком.

Глубины h' и h'' называют взаимными или сопряженными глубинами, причем они связаны между собой таким образом, что чем меньше h', тем больше сопряженная ей h''.



Фиг. 191

Из графика также видно, что в данном русле при заданном расходе возможно неограниченное число сопряженных глубин, тем самым широки пределы, в которых может возникать прыжок в данном русле. Но каждой заданной глубине h' перед прыжком соответствует только одна ей сопряженная глубина h'' за прыжком и наоборот. Когда же прыжковая функция имеет минимальное значение, т. е. при критическом состоянии потока, $h' = h_{кр} = h''$ и возникновение прыжка невозможно.

Задача 82. Построить кривую прыжковой функции $\Pi(h)$ для канала трапецоидального сечения. Дано: $Q = 16$ *м³/сек*, $b = 7$ *м*, $m = 1{,}5$.

Будем строить кривую по формуле

$$\Pi(h) = \frac{\alpha Q^2}{g\omega} + \omega h_{цт},$$

где в данном случае

$$h_{цт} = \frac{h}{6}\,\frac{3b + 2mh}{b + mh}\,.$$

Задаемся рядом значений h и вычисляем последовательно ω, $h_{цт}$ и $\Pi(h)$.

Пусть, например, $h = 2{,}0$ *м*.

Тогда

$$\omega = (7 + 1{,}5\cdot 2)\cdot 2 = 20 \text{ м}^2,$$

$$h_{цт} = \frac{2}{6}\,\frac{3\cdot 7 + 2\cdot 1{,}5\cdot 2}{7 + 1{,}5\cdot 2} = 0{,}90 \text{ м},$$

$$\Pi(h) = \frac{1{,}1\cdot 16^2}{9{,}81\cdot 20} + 0{,}90\cdot 20 = 19{,}44.$$

Аналогично вычисляем необходимые данные и для других глубин.

Результаты этих вычислений сведены в табл. 77, по данным которой построена кривая $\Pi(h)$ (фиг. 191).

Таблица 77

h	ω	$h_{цт}$	$\omega h_{цт}$	$\frac{\alpha Q^2}{g\omega}$	$П(h)$
0,2	1,46	0,098	0,144	19,0	19,14
0,5	3,87	0,242	0,936	7,42	8,36
0,75	5,44	0,357	1,94	5,28	7,22
1,0	8,5	0,470	4,0	3,38	7,38
1,5	13,87	0,690	9,56	2,07	11,63
2,0	20,0	0 900	18,0	1,436	19,44
2,5	26,9	1,105	29,8	1,068	30,87

§ 147. Определение сопряженных глубин прыжка в призматическом русле

Уравнение Беланже-Бресса дает возможность определить сопряженные глубины прыжка и высоту прыжка. Обычно одна из сопряженных глубин известна и требуется определить вторую ей взаимную. Неизвестная сопряженная глубина находится или подбором из уравнения (444) или по построенному графику прыжковой функции для данного русла по заданному расходу Q (фиг. 191).

Указанные способы определения сопряженных глубин требуют хотя и простых, но громоздких вычислений. Для облегчения вычислений при определении сопряженных глубин в трапецоидальных руслах пользуются вспомогательными графиками Рахманова[1], Чертоусова[2] или Агроскина[3].

К построению графика Агроскина подходим следующим образом. Напишем уравнение прыжковой функции для трапецоидального русла в таком виде:

$$П(h)=\frac{\alpha_0 Q^2}{g(b+mh)h}+\frac{h^3}{6}(3b+2mh).$$

Обозначим $m\frac{h}{b}=z$, тогда

$$\frac{П(h)m^3}{b^3}=\frac{\alpha_0 Q^2 m^3}{gb^5}\cdot\frac{1}{(1+z)z}+\frac{z^2(3+2z)}{6}=f(z).\quad(451)$$

Графически уравнение (451) будет представлено семейством кривых, отличающихся параметром:

$$\frac{\alpha_0 Q^2 m^3}{gb^5}=\frac{\alpha_0}{g}q^2\left(\frac{m}{b}\right)^3.\quad(452)$$

Кривые эти показаны на графике[4], где по оси абсцисс отложены z, а по оси ординат $f(z)$. Из графика видно, что одному значению $f(z)$ соответствуют два сопряженных значения z, из которых одно будет z' и второе z''. Для удобства кривые помечены численным значением кубического корня из параметра $\frac{\alpha q^2}{g}\left(\frac{m}{b}\right)^3$. Определение сопряженных глубин при помощи этого графика сводится к следующему.

а) вычисляется параметр $\sqrt[3]{\frac{\alpha q^2}{g}\left(\frac{m}{b}\right)^3}=\frac{m}{b}h_{кр}{}^*$;

б) если известна глубина h' и требуется найти h'', то определяется $z'=\frac{m}{b}h'$;

в) находится точка пересечения ординаты при абсциссе z' с кривой найденного параметра [ордината этой точки будет $f(z')=f(z'')$];

г) переходя к парной точке кривой на другой его ветви находится по оси абсцисс z'';

д) найдя z'', вычисляется вторая сопряженная глубина

$$h''=z''\frac{b}{m}.$$

Задача 83. Определить сопряженную глубину h'', если глубина перед прыжком $h'=0{,}50$ *м*. Остальные данные предыдущей задачи.

1. Определяем h'' по кривой прыжковой функции. Для этого по заданной глубине $h'=0{,}50$ *м* находим точку A на кривой $П(h)$ (фиг. 191). Из точки A проводим прямую, параллельную оси ординат, и находим точку пересечения этой прямой с кривой $П(h)$ в точке B. Ордината этой точки и будет искомая сопряженная глубина $h''=1{,}13$ *м*.

2. Определим теперь h'' по способу Агроскина. Для этого найдем для $q=\frac{16}{7}=2{,}29$ значение $h_{кр}=0{,}81$ *м* и определим параметр

$$\frac{m}{b}h_{кр}=\frac{1{,}5}{7}\cdot 0{,}81=0{,}17.$$

Далее находим величину

$$z'=\frac{m}{b}h'=\frac{1{,}5}{7}\cdot 0{,}50=0{,}107$$

и обращаемся к графику[4]. По полученному $z'=0{,}107$ находим сопряженную с ней величину $z''=0{,}24$.

Тогда получим

$$h''=\frac{b}{m}z''=\frac{7}{1{,}5}0{,}24=1{,}12 \text{ м}.$$

[1] А. Н. Рахманов, Графики критических и взаимных глубин для трапецоидальных русел, 1929. Известия Научно-мелиорационного института, вып. XVIII.
[2] М. Д. Чертоусов, Инженерная гидравлика, 1934.
[3] И. И. Агроскин, Гидравлика каналов, 1940.
[4] См. график в конце курса (фиг. 349).

* $h_{кр}$ здесь определяется для прямоугольника шириной, равной ширине по дну рассматриваемой трапеции.

§ 148. Определение сопряженных глубин прыжка в прямоугольном русле

Определение сопряженных глубин гидравлического прыжка в русле прямоугольного сечения можно значительно упростить.

Для прямоугольного русла

$$\omega = bh \text{ и } h_{цт} = 0{,}5\ h$$

и потому уравнение (444) после простых преобразований получает вид

$$\frac{\alpha_0 q^2}{gh'} + \frac{(h')^2}{2} = \frac{\alpha_0 q^2}{gh''} + \frac{(h'')^2}{2},$$

откуда

$$\frac{2\alpha_0 q^2}{g} = h''h'(h'' + h') \qquad (453)^1$$

или

$$h'(h'')^2 + (h')^2 h'' - \frac{2\alpha_0 q^2}{g} = 0.$$

Решая последнее квадратное уравнение относительно h'' или h', получим

$$\left.\begin{aligned} h'' &= 0{,}5h'\left[\sqrt{1 + \frac{8\alpha_0 q^2}{g(h')^3}} - 1\right], \\ h' &= 0{,}5h''\left[\sqrt{1 + \frac{8\alpha_0 q^2}{g(h'')^3}} - 1\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (454)$$

Если учесть, что $\frac{\alpha_0 q^2}{g} = h_{кр}^3$, можно уравнение (454) записать в форме

$$h'' = 0{,}5h'\left[\sqrt{1 + 8\left(\frac{h_{кр}}{h'}\right)^3} - 1\right]. \qquad (455)$$

Уравнению (454) можно придать и другой вид

$$h'' = 0{,}5h'[\sqrt{1 + 8\,\mathrm{Fr}'} - 1], \qquad (456)$$

где введено число Фруда

$$\mathrm{Fr} = \frac{\alpha v^2}{gh} = \frac{\alpha q^2}{gh^3}.$$

Отметим, что из уравнения (456) также видно, что когда $\mathrm{Fr} = 1$ (т. е. при критическом состоянии потока), имеем $h'' = h'$ и возникновение прыжка невозможно.

Любое из приведенных выше уравнений (454), (455), (456) может служить для определения сопряженных глубин прыжка в прямоугольном русле.

[1] Из этой формулы можно определить расход

$$q = \sqrt{\frac{g}{2\alpha_0} h'h''(h'' + h')}.$$

На основании этого акад. Н. Н. Павловский считает возможным воспользоваться гидравлическим прыжком как измерителем расхода—водомером. См. его статью „Гидравлический прыжок как водомер". Известия Научно-исследовательского института гидротехники № 1, 1931.

Уравнению (455) можно придать простой для практических приложений вид. Обозначим

$$\frac{h'}{h_{кр}} = \eta'_{кр} \text{ и } \frac{h''}{h_{кр}} = \eta''_{кр},$$

тогда

$$\eta''_{кр} = 0{,}5\eta'_{кр}\left[\sqrt{1 + \frac{8}{(\eta'_{кр})^3}} - 1\right] = f(\eta'_{кр}).$$

Значения $\eta_{кр}$ в данном случае могут изменяться от нуля до единицы. Поэтому легко составить таблицу[1] взаимных значений $\eta''_{кр}$ и $\eta'_{кр}$. Нахождение h'' сводится к следующему: зная h' и $h_{кр}$, вычисляем $\eta'_{кр}$, для полученного $\eta'_{кр}$ находим по таблице $\eta''_{кр}$, а затем вычисляем $h'' = \eta''_{кр} h_{кр}$.

Задача 84. Определить сопряженную глубину h'' прыжка, возникающего в прямоугольном русле, если глубина перед прыжком $h' = 0{,}70$ *м*. Расход $Q = 36$ *м³/сек*, ширина канала $b = 10$ *м*.

Определим глубину h'' по формуле (455).

Имеем

$$q = \frac{Q}{b} = \frac{36}{10} = 3{,}6 \text{ м}^3/\text{сек},$$

критическая глубина

$$h_{кр} = \sqrt[3]{\frac{\alpha q^2}{g}} = \sqrt[3]{\frac{1{,}1 \cdot 3{,}6^2}{9{,}81}} = 1{,}13 \text{ м}.$$

Тогда

$$h'' = \frac{0{,}70}{2}\left[\sqrt{1 + 8\left(\frac{1{,}13}{0{,}70}\right)^3} - 1\right] = 1{,}71 \text{ м}.$$

Определим h'', пользуясь упомянутой таблицей. Находим

$$\eta'_{кр} = \frac{h'}{h_{кр}} = \frac{0{,}70}{1{,}13} = 0{,}62.$$

Этому значению $\eta'_{кр} = 0{,}62$ по таблице взаимосоответствует $\eta''_{кр} = 1{,}513$ и, следовательно,

$$h'' = \eta''_{кр} h_{кр} = 1{,}513 \cdot 1{,}13 = 1{,}71 \text{ м}.$$

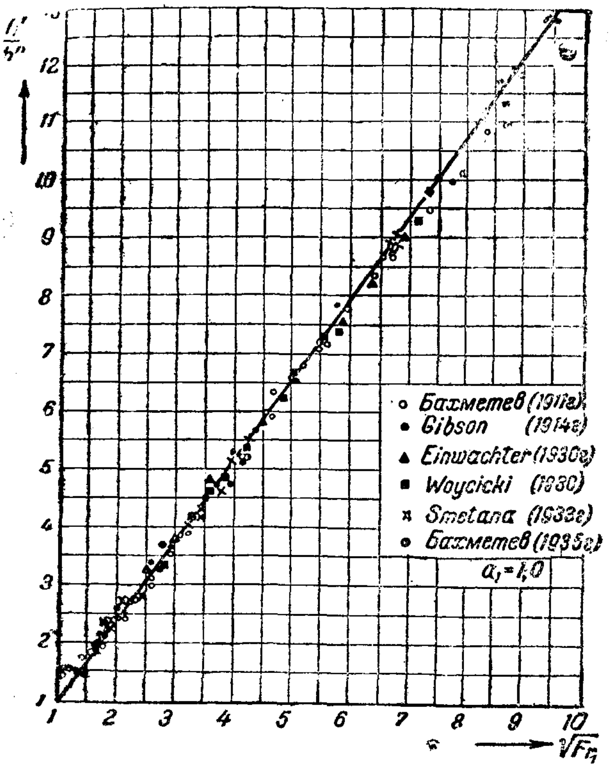
§ 149. Опытные исследования совершенного прыжка

Совершенный гидравлический прыжок довольно детально изучен рядом исследователей в гидравлических лабораториях, где легко воспроизводить гидравлический прыжок желаемого вида, например, при истечении из-под щита в лотках.

Из числа таких исследований можно упомянуть работы Бидона (1818), Базена (1856)[2], Бахметева (1911 и 1935)[3], Сафранец (1927)[4], Сметана (1935) и ряд других.

[1] И. И. Агроскин, Гидравлика каналов, 1940. стр 153.
[2] Darcy et Bazin, Expérimentale Hydraulique.
[3] Б. А. Бахметев, О неравномерном движении жидкости в открытом русле, а также B. A. Bakmeteff and A. E. Matzke, „The Hydraulic Jump in Terms of Dynamic Similarity. Proceedings of Am. Soc. C. E. Vol. 101, 1936.
[4] K. Safranez, Wechselsprung und Energivernichtung des Wassers" и „Untersuchungen über den Wechselsprung", Der Bauingenieur, 1927, H. 49 и 1929, H. 37 и H. 38.

Результаты непосредственных замеров при опытах величин h' и h'' нанесены в виде точек на фиг. 192. Этот график построен для удобства



Фиг. 192

в виде зависимости отношения замеренных взаимных глубин $\frac{h''}{h'}$ от корня квадратного из числа Фруда:

$$\frac{h''}{h'}=f(\sqrt{\mathrm{Fr}}).$$

На этом же графике нанесена теоретическая кривая $\frac{h''}{h'}=f(\sqrt{\mathrm{Fr}})$, построенная по уравнению (456), при $\alpha_0=1$.

По графику видно, что опытные точки близко расположились около теоретической кривой. Это дает возможность утверждать, что уравнение прыжка, полученное на основе закона количества движения, хорошо согласуется с опытными данными.

Приведенная кривая построена по уравнению (456) при $\alpha_0=1$, что позволяет рекомендовать при определении сопряженных глубин принимать $\alpha_0=1$[1].

Обращаясь к опытным данным, показанным в виде отдельных точек, видим, что при $\mathrm{Fr}<3$ они значительно отклоняются от теоретической кривой. Бахметев, Эйнвахтер и др. на основании этого приходят к выводу, что к прыжку в потоке, для которого $\mathrm{Fr}<3$, не применимо уравнение (444) или, что то же, уравнение (454). Действительно, в таком случае прыжок принимает форму волны, а сопряженные глубины прыжка-волны, как увидим ниже, находятся в иной зависимости, чем сопряженные глубины совершенного прыжка.

§ 150. Прыжок-волна

Исследования Бахметева, Сметана, Эйнвахтера и др.[2] показывают, что когда соотношение сопряженных глубин прыжка

$$\frac{h''}{h'}<2,$$

прыжок принимает форму ряда постепенно затухающих волн. В таком прыжке нет ярко выраженной поверхностной зоны. По своей внешней форме он напоминает остановившиеся волны, вызванные в спокойной воде. Отсюда такой прыжок и получил наименование прыжка-волны. Обращаясь к уравнению (456) и принимая во внимание приведенное отношение сопряженных глубин, устанавливаем, что прыжок-волна возникает в бурных потоках, для которых $\mathrm{Fr}<3$. Таким образом, если известны гидравлические элементы бурного потока, всегда можно установить, произойдет ли переход этого потока в спокойный в форме совершенного прыжка или в форме прыжка-волны.

Попытаемся составить уравнение для прыжка-волны. Проследим за ходом образования прыжка-волны в потоке прямоугольного русла. Будем рассматривать прыжок как остановившуюся волну перемещения. Скорость движения волны в прямоугольном русле можно получить из уравнения (446), подставив в него $\omega=bh$ и $h_{цт}=\frac{h}{2}$.

Тогда

$$c^2=g\frac{h''}{h'}\frac{0,5\left[(h'')^2-(h')^2\right]}{h''-h'}=g\frac{h''}{2h'}(h''+h').$$

Подставляя значение $h'=h''-a$, где a — высота волны, получим

$$c^2=g\frac{h''}{2}\cdot\frac{2h''-a}{h''-a}$$

или

$$c=\sqrt{gh''\left(1+\frac{a}{2(h''-a)}\right)}=\sqrt{gh''}\cdot\sqrt{1+\frac{a}{2(h''-a)}}.$$

[1] К таким же выводам приходит проф. А. Н. Ахутин на основании лабораторных опытов, проведенных ВИА РККА (см. А. Н. Ахутин, Специальный курс гидравлики, стр. 107, 1935.).

[2] См. сноски на предыдущей странице.

Разложим второй множитель по биному Ньютона, ограничиваясь двумя первыми членами ряда:

$$\sqrt{1+\frac{a}{2(h''-a)}}=1+\frac{a}{4(h''-a)}+\dots,$$

тогда

$$c=\sqrt{gh''}\left[1+\frac{a}{4(h''-a)}\right]. \qquad (457)$$

Это будет скорость движения волны или скорость перемещения вверх по течению прыжка, двигающегося в форме волны.

Если принять a близким к нулю, то получим скорость распространения волны малой высоты:

$$c=\sqrt{gh''}. \qquad (458)$$

Эта формула отличается от известной формулы Лагранжа $c=\sqrt{gh}$ различным значением h. В формуле Лагранжа h — глубина в бассейне, в котором вызвана волна, в формуле (458) — превышение гребня волны над дном канала.

Если скорость поступательного потока и скорость распространения волны будут равны $v=c$, то волна остановится, образуя прыжок-волну. Высоту прыжка-волны найдем следующим образом.

Скорость потока $v_1=\frac{q}{h'}$; скорость волны перемещения $c=\sqrt{gh''}$.

Значит

$$\frac{q}{h'}=\sqrt{gh''},$$

откуда

$$\frac{h''}{h'}=\frac{q^2}{g(h')^3}=\mathrm{Fr}_1$$

или

$$h''-h'=h'(\mathrm{Fr}_1-1)$$

и окончательно

$$a=h'(\mathrm{Fr}_1-1). \qquad (459)$$

Здесь a — высота прыжка-волны, т. е. превышение гребня волны над глубиной h' перед волной[1].

Формула (459) может служить для приближенного определения в прямоугольном русле высоты прыжка-волны, т. е. прыжка в потоках, для которых $\mathrm{Fr}<3$.

[1] Доцент Г. Т. Дмитриев, пользуясь данными Буссинеска, получил для высоты волны такую зависимость: $a=h'(1{,}085\ \mathrm{Fr}_1-1)$. Г. Т. Дмитриев, О длине гидравлического прыжка. Журнал „Водный транспорт“ № 7, 1937.

Прыжок-волна мало изучен. Его структура отлична от структуры совершенного прыжка, потери энергии в нем меньше потерь энергии в совершенном прыжке.

Этой последней особенностью прыжка волны объясняется, почему Беланже, который первый попытался установить связь между сопряженными глубинами, базируясь на опытах Бидона над прыжками малой высоты, считал возможным пренебречь потерями в прыжке.

Задача 85. Определить высоту прыжка, возникающего при сопряжении струи, вытекающей из-под щита, с нижним бьефом. Дано: расход на единицу ширины потока $q=1{,}75$ *м³/сек*. Глубина струи $h'=0{,}50$ *м*.

Определим число Фруда

$$\mathrm{Fr}_1=\frac{v_1^2}{gh'}=\frac{q^2}{g(h')^3}=\frac{1{,}75^2}{9{,}81\cdot 0{,}50^3}=2{,}5;$$

так как $\mathrm{Fr}<3$, то сопряжение произойдет в форме прыжка-волны.

Тогда высота прыжка-волны будет

$$a=h'(\mathrm{Fr}_1-1)=0{,}50\,(2{,}5-1)=0{,}75,$$

сопряженная глубина после прыжка в данном случае будет

$$h''=h'+a=0{,}50+0{,}75=1{,}25\ \text{м}.$$

§ 151. Длина прыжка

Знание длины прыжка приобретает важное практическое значение. От длины прыжка зависят габариты водобойных частей гидротехнических сооружений и размеры крепления русел в зоне перехода бурного потока в спокойный. Однако до сих пор, несмотря на то большое внимание, которое уделялось этому вопросу, не удалось найти удовлетворительного теоретического решения его. Поэтому расчеты длины прыжка пока основаны на зависимостях, установленных экспериментальным путем.

Прежде чем говорить об имеющихся попытках теоретического решения вопроса и об экспериментальных работах в этой области, необходимо уточнить само понятие о длине прыжка.

До сих пор не установлено единого представления о том, что понимать под длиной прыжка и, следовательно, как определять эту длину. В ряде случаев длину прыжка связывают с длиной поверхностного «вальца», принимая длину горизонтальной проекции последнего за длину прыжка. Такой метод чреват ошибками.

Во-первых, установление длины «вальца» (поверхностной зоны прыжка) представляет определенные трудности, так как последний, как указано выше, меняет свои размеры, находясь в непрерывной пульсации. При определении длины «вальца» явление фиксируется таким, каким оно представляется исследователю в своем внешнем проявлении, отсюда не исключено влияние субъективных моментов в исследовании.

Во-вторых, граница прыжка как переходной формы движения не совпадает с нижней границей «вальца». Обычно растекающаяся зона прыжка приобретает характер плавно изменяющегося движения за пределами видимого «вальца». Непосредственно за «вальцом» поток может иметь избыток кинетической энергии, который приводит к усиленной турбулентности движения ниже «вальца». В тех случаях, когда по размерам «вальца» назначают зону крепления, за зоной крепления могут оказаться скорости большие, чем в плавно-изменяющемся потоке за прыжком.

Проф. Бахметев принимает за длину прыжка расстояние от сечения у прыжка до сечения с наибольшей глубиной h'' за прыжком, считая что в последнем завершается полностью трансформация энергии. Такой метод более приближает к установлению истинной длины прыжка.

Еще более правильным было бы определять длину прыжка как расстояние между двумя сечениями с плавно изменяющимся движением, из которых первое должно быть взято в бурном потоке непосредственно перед прыжком, второе в спокойном потоке за прыжком. Определение этого расстояния по внешним признакам невозможно. Его можно установить только на основе закона изменения скоростей в растекающейся зоне прыжка, для установления которого необходимы объективные исследования кинематической стороны явления прыжка.

С этой точки зрения на приводимые ниже значения для длины прыжка, даваемые различными исследователями, надо смотреть как на приближенные.

Учитывая сделанные замечания, перейдем к рассмотрению длины совершенного прыжка.

Первая попытка определить теоретически длину прыжка принадлежит инж. Мацману (1928)[1]. Мацман предполагал, что поверхностная зона прыжка представляет собой „валец", в котором движение подчиняется закону площадей, т. е. уравнению

$$ur = \text{const},$$

где u — скорость в данной точке;

r — расстояние от центра вальца до данной точки.

Исходя из такого представления структуры поверхностной зоны прыжка и отождествляя длину прыжка с длиной вальца, Мацман получил следующее значение для длины прыжка:

$$l_{np} = \frac{(h''+h')(h''-h')}{2h'}, \qquad (460)$$

где l_{np} — длина прыжка;

h'' и h' — сопряженные глубины.

По представлению инж. Мацмана движение в поверхностной зоне прыжка совершается по замкнутым траекториям с наибольшей скоростью в центре вальца и наименьшей на его периферии. Так как в действительности такой картины в „вальце" прыжка не может быть, то формула и дает весьма значительное расхождение с опытными данными.

[1] Инж. Б. А. Мацман, Гидравлический расчет нижнего бьефа сооружений, „Вестник ирригации" № 2, 1928.

В 1938 г. инж. Мацман[2] видоизменил свою формулу использовав для внесения корректива в нее опытные данные Эйнвахтера, Сафранец, Бахметева, Пьетрковского. Формула (460) приобрела такой вид:

$$l_{np} = \left(\frac{5{,}4\,h'}{h''} - 0{,}06\right)\left[\left(\frac{h''}{h'}\right)^2 - 1\right]h'.$$

Инж. Маккавеев (1928)[3], пытаясь также подойти теоретически к определению длины прыжка, дает для последней такую зависимость:

$$l_{np} = A\,\frac{[(h'')^2 + h'h'' - 2(h')^2]\,(h''-h')}{h'(h''+h')},$$

где A — постоянный эмпирический коэфициент.

Пользуясь опытными данными Сафранец и Эйнвахтера, проф. Чертоусов[4] показал, что коэфициент A не имеет постоянного значения и пределы колебания его достигают до 100%.

Инж. Аравин (1935)[5] попытался подойти к определению длины прыжка с энергетической точки зрения, пользуясь для учета потерь энергии в „вальце" функцией диссипации (рассеяния). Упрощенная его формула имеет такой вид:

$$l_{np} = \frac{0{,}33\,N}{h^3_{кр}}\,\frac{(h''-h')^3}{h''}\,(h')^2, \qquad (461)$$

где $h_{кр}$ — критическая глубина;

N — численный коэфициент, который на основе экспериментальных данных, полученных инж. Аравиным, определяется таким образом:

$$N = 0{,}54\left(\frac{h''}{h_{кр}}\right)^{4{,}35} + 75.$$

Формулу (461) можно переписать таким образом:

$$l_{np} = 1{,}32\,\frac{N}{\mathrm{Fr}_1}\,h_{mp},$$

где Fr_1 — число Фруда, вычисляемое по глубине h';

h_{mp} — потери энергии в прыжке.

Из этой формулы видно, что чем больше будет Fr (для бурного потока $\mathrm{Fr} > 1$), тем меньше будет длина прыжка. В действительности, как это и подтверждается опытами Сафранец, должна существовать противоположная зависимость между l_{np} и Fr_1.

Из других попыток определения длины прыжка теоретическим путем можно указать на решение Липатова[6] и Шаумяна[7].

Формулы инж. Маккавеева и всех остальных названных авторов включают коэфициенты, определяемые опытным путем. Тем самым точность их не может стоять выше точности формул, построенных непосредственно на основе экспериментальных данных так называемых эмпирических формул.

Весьма тщательные лабораторные опыты по определению длины прыжка были проведены инж. Сафранец. Указывая на трудность определения конца прыжка, Сафранец положил в основу определения длины прыжка длину вальца, граница которого устанавливалась с помощью пипетки с красящим веществом.

[2] Инж. Б. А. Мацман, Длина прыжка по данным лабораторных опытов, „Гидротехническое строительство" № 3, 1938.

[3] Инж. В. М. Маккавеев. Теория гидродинамических процессов с большим гашением энергии. Труды Второго всесоюзного гидрологического съезда, т. 3, 1928.

[4] М. Д. Чертоусов. Инженерная гидравлика, стр. 323.

[5] Инж. В. И. Аравин. Определение длины гидравлического прыжка. Известия НИИГ, т. XV, 1935.

[6] К. Г. Липатов, Длина гидравлического прыжка. Труды ВНИИГ и М, т. XII.

[7] В. А. Шаумян, Определение длины гидравлического прыжка. Журнал „Гидротехническое строительство" № 4, 1940. См. также „Гидротехническое строительство" № 3, 1938.

В результате обработки экспериментальных данных им предложена в 1927 г. и уточнена в 1933 г. на основании опытов Эйнвахтера и Пьетрковского[1] следующая формула:

$$l_{пр}=5{,}9h'\sqrt{\mathrm{Fr}_1}, \tag{462}$$

где $l_{пр}$ — длина прыжка;

h' — сопряженная глубина перед прыжком;

Fr_1 — число Фруда, вычисленное по глубине h'.

В случае если глубина за прыжком h'' известна, Сафранец предлагает вычислять длину прыжка по такой формуле:

$$l_{пр}=4{,}33h''. \tag{463}$$

Акад. Н. Н. Павловский[2] на основе обработки опытных данных Сафранец, Эйнвахтера, Пьетрковского предложил для определения длины прыжка такую зависимость:

$$l_{пр}=2{,}5(1{,}9h''-h'). \tag{464}$$

Эта формула, как показали опыты инж. Шаумян[3], дает значения $l_{пр}$, близкие к наблюдаемым в лабораторных условиях.

Проф. Чертоусов в результате суммарного анализа тех же опытных данных предложил следующую формулу для определения длины прыжка:

$$l_{пр}=10{,}3h'(\lambda-1)^{0{,}81},$$

где

$$\lambda=\sqrt{\left(\frac{h_{кр}}{h'}\right)^3}.$$

Легко видеть, что $\lambda=\sqrt{\mathrm{Fr}_1}$, и потому можно записать

$$l_{пр}=10{,}3h'(\sqrt{\mathrm{Fr}_1}-1)^{0{,}81}. \tag{465}$$

Инж. В. А. Шаумян в результате многочисленных опытов, проведенных им во ВНИИГ и М, предложил для определения длины прыжка формулу

$$l_{пр}=3{,}6h''\left(1-\frac{h'}{h''}\right)\left(1+\frac{h'}{h''}\right)^2. \tag{466}$$

Кроме перечисленных формул за последние годы предложен ряд новых: Knapp[4], Smetana, Woycicki, Einwachter, Pietrkowski, А. И. Иванченко и др.

На фиг. 193 показаны зависимости длины прыжка l от Fr_1, построенных по различным формулам. При этом по оси ординат отложены отношение длины прыжка к его высоте, а по оси абсцисс $\sqrt{\mathrm{Fr}_1}$. По графику видно, насколько различны эти зависимости. Причиной этому является, очевидно, не только различная степень точности опытов и соответствия формул тем опытам, на основе которых они построены, но и неизбежное влияние субъективных моментов при опытном определении длины прыжка, о котором указывалось выше.

Из всех приведенных и названных формул наибольшего внимания заслуживают формулы Чертоусова, Павловского, Сафранец и Шаумяна. В дальнейшем мы будем пользоваться как равноценными любой из этих формул.

Все сказанное о длине прыжка относится к совершенному прыжку, возникающему в прямоугольном русле с горизонтальным уклоном дна. Так как длина прыжка обычно невелика и влияние на нее уклона незначительно, то приведенные формулы могут быть применимы в руслах с уклоном $i\neq 0$.

Если для определения длины совершенного прыжка предложен ряд формул и проведены многочисленные исследования, то данные о длине прыжка других видов, в том числе и прыжка-волны, очень скудны или вовсе отсутствуют. Поэтому на приводимые ниже зависимости надо смотреть, как на попытку приблизительного определения длины несовершенного прыжка.

Немногочисленные опыты по изучению длины прыжка-волны были проведены доц. Г. Дмитриевым[5] в гидравлической лаборатории Инженерно-строительного института им. В. В. Куйбышева (1934) при исследовании размыва от пропуска воды под мостами малых отверстий и по трубам типовых форм в железнодорожных насыпях. Конец прыжка определялся им по концу размыва русла.

В результате исследований Г. Дмитриев приходит к выводу, что для длины прыжка-волны применима формула такого вида:

$$l_{пр}=10{,}6a, \tag{467}$$

где a — высота передней волны.

Формула эта хорошо согласуется с опытами. Если в формуле (467) выразить a с помощью уравнения (459), то получим такое выражение:

$$l_{пр}=10{,}6\,h'(\mathrm{Fr}_1-1). \tag{467'}$$

Как показали наши исследования, при изучении прыжка в руслах переменного сечения для определения длины прыжка наиболее правильным будет применение метода, при котором исходным является закон изменения скорости по длине растекающейся зоны прыжка.

Исходя из этого, мы получили для длины прыжка в непризматическом русле такую зависимость:

$$l_{пр}=\frac{4q}{v_2},$$

где q — единичный расход, отнесенный к сечению перед прыжком, при ширине потока b_1, а v_2 — скорость спокойного потока за прыжком при ширине потока b_2.

---

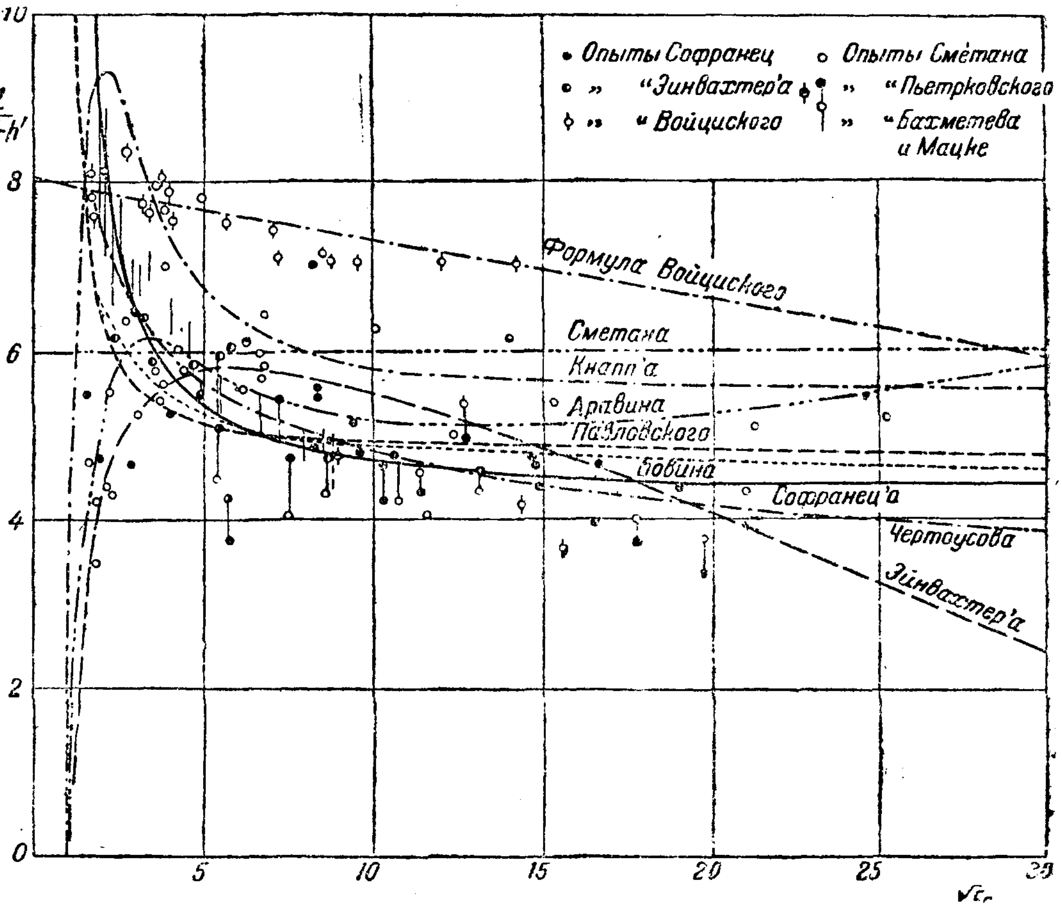
[1] J. Pietrkowsky, „Beitrag zur Kenntnis des Wechselsprungs", Die Wasserwirtschaft, 1932, № 25—26.

[2] Б. Н. Павловский. Гидравлический справочник.

[3] Инж. Шаумян, Определение длины гидравлического прыжка. Журнал «Гидротехническое строительство» № 4, 1940.

[4] F. Knapp, Study of Stilting — Basin. Design Discussion, Proceedings of the American Society of Civ. Eng., 1933, Vol. 59, № 4.

[5] Г. Т. Дмитриев, О длине гидравлического прыжка. „Водный транспорт" № 7, 1937.

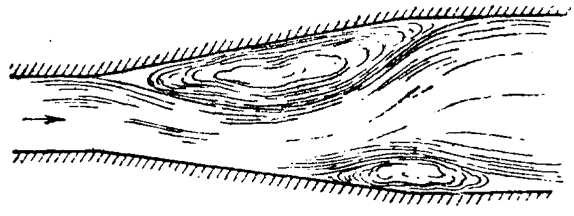


Фиг. 193

§ 152. Прыжок в руслах переменного сечения

До сих пор мы рассматривали прыжок, возникающий в руслах призматической формы постоянного сечения. В гидротехнической практике приходится встречаться с сопряжением бурного потока со спокойным в руслах переменного сечения, например, в быстротоках с расширяющейся выходной частью или в постепенно сужающихся лотках.

Прежде чем приступить к выводу уравнения прыжка, укажем, что прыжок в расширяющемся русле будет устойчив в изложенном выше понятии только в том случае, если глубина перед прыжком будет одинакова по всей ширине расширяющегося русла. Лабораторные исследования над растеканием бурного потока[1] показывают, что прыжок может занимать нормальное к оси потока положение только в руслах, угол расходимости которых $\theta < 13°$. При $\theta > 13°$ прыжок принимает дугообразную в плане форму, в этом случае прыжковое сопряжение может перейти в



Фиг. 194

сбойное течение (фиг. 194), течение с боковым ударом струи в борта сооружения.

Дальнейшие выводы применимы к расширяющимся руслам с указанным значением $\theta < 13°$.

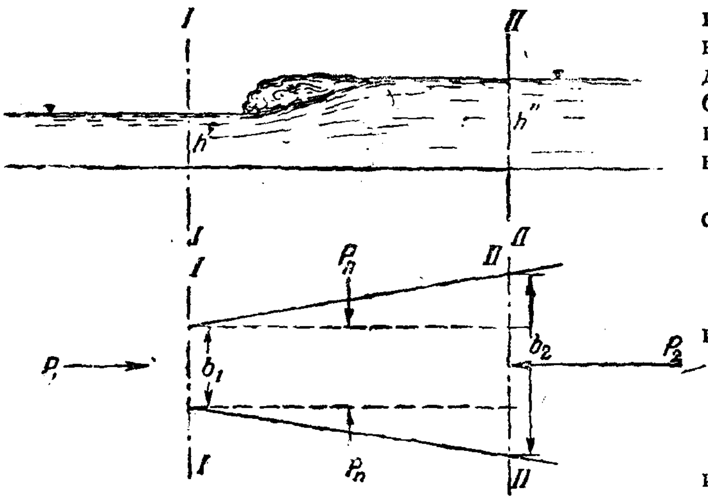
Рассмотрим прыжок, показанный на фиг. 195, ограничив зону, охваченную прыжком, сечениями *I-I* и *II-II*.

Напишем общее уравнение прыжка (443) применительно к рассматриваемому случаю в таком виде:

$$\alpha_0 \frac{\gamma}{g} Q (v_{II} - v_I) = \Sigma P_x, \tag{468}$$

где v_I и v_{II} — скорости в сечении *I-I* и *II-II*; ΣP_x — сумма проекций на направление движения импульса всех действующих сил, вызывающих изменение количества движения при возникновении прыжка.

[1] Ф. И. Пикалов, О форме сопряжения быстротока с нижним бьефом. Труды Института гидротехники и мелиорации, т. XII, 1935.



Фиг. 195

Будем учитывать только внешние силы давления, развиваемые на поверхностях выделенного объема жидкости. Уклон дна канала принимаем равным нулю.

Полагая распределение давления в рассматриваемых сечениях потока по законам гидростатики, имеем суммарное давление в сечении *I-I*

$$P_1 = p_1 \omega_1 = \gamma h'_{цт} \omega_1$$

и в сечении *II-II*

$$P_2 = p_{II} \omega_{II} = \gamma h''_{цт} \omega_{II}.$$

Импульсы этих сил полностью спроектируются на направление движения, сохраняя знаки.

Давление по контурам *I-II*, совпадающим с боковыми стенками русла, определим следующим образом.

Из фиг. 195 видно, что глубина по этому контуру меняется от h' до h'', причем сразу за сечением *I-I* она изменяется резко, переходя через $h_{кр}$, а затем по какой-то кривой.

Точный учет давления по этим контурам требует знания кривой свободной поверхности прыжка. Для упрощения будем считать, что глубина по этим контурам равна глубине h''[1].

Проекция суммарного давления по обоим названным контурам будет равна

$$\gamma h''_{цт} \omega_n,$$

где ω_n — проекция площадей контура *I-II* и *I-II* на плоскость, перпендикулярную направлению движения. Другие составляющие давления по боковым контурам, например, в случае трапецоидального сечения канала спроектируются в нуль.

Подставляя выражения для проекции импульса сил давления в уравнение (468), получим

$$\alpha_0 \frac{\gamma Q}{g}(v_{II} - v_I) = \gamma h'_{цт} \omega_1 - \gamma h''_{цт} \omega_{II} + \gamma h''_{цт} \omega_n$$

или

$$\frac{\alpha_0}{g} \frac{Q^2}{\omega_{II}} + h''_{цт}(\omega_{II} - \omega_n) = \frac{\alpha_0}{g} \frac{Q^2}{\omega_1} + h'_{цт} \omega_1.$$

Это уравнение при $\omega_n = 0$ превращается в известное уже нам уравнение совершенного прыжка в призматических руслах постоянного сечения.

В случае прямоугольного русла переменного сечения

$$\omega_1 = b_1 h'; \quad \omega_{II} = b_2 h''; \quad \omega_n = (b_2 - b_1) h'',$$

$$\frac{Q}{b_1} = q_1; \quad \frac{Q}{b_2} = q_2; \quad h'_{цт} = \frac{h'}{2}; \quad h''_{цт} = \frac{h''}{2}$$

и уравнение примет такой вид:

$$\frac{2\alpha_0 q_1 q_2}{gh''} + (h'')^2 = \frac{2\alpha_0 q_1^2}{gh'} + (h')^2. \qquad (469)$$

Уравнение (469) можно переписать следующим образом:

$$\frac{2\alpha_0 q_1^2}{gh''} \frac{b_1}{b_2} + (h'')^2 = \frac{2\alpha_0 q_1^2}{gh'} + (h')^2. \qquad (470)$$

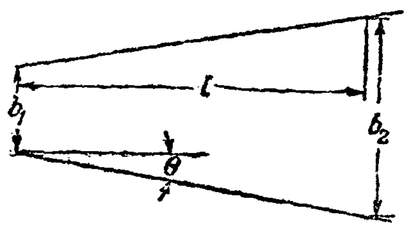
Для определения сопряженной глубины h'' (или h') надо знать ширину b_2 (или b_1, если определяется h' по известной глубине h''). Выбор ширины b_2 не является произвольным, а зависит от длины прыжка, т. е. расстояния между сечениями *I-I* и *II-II*.

Определение длины прыжка рассмотрено подробно в § 151, в котором в частности приведена формула (462), на основе которой примем округленно

$$l_{пр} = 6 h' \sqrt{\mathrm{Fr}_1}.$$

Пользуясь для упрощения расчета этой формулой, имеем (фиг. 196)

$$b_2 = b_1 + 2 l \operatorname{tg} \theta = b_1 + 12 \operatorname{tg} \theta \cdot h' \sqrt{\mathrm{Fr}_1}. \qquad (471)$$



Фиг. 196

---

[1] Доц. М. З. Абрамов, принимая кривую свободной поверхности в прыжке за параболу, в результате получает уравнение такого вида для прямоугольного русла:

$$2\,\mathrm{Fr}_1 = \left\{\beta\eta^2 - 1 - (\beta - 1)\left[1 + 2\frac{\eta - 1}{1 + m} + \frac{(\eta - 1)^2}{1 + 2m}\right]\right\} \frac{\beta\eta}{\beta\eta - 1},$$

где $\beta = \frac{b_2}{b_1}$, $\eta = \frac{h''}{h'}$, а m — показатель в уравнении параболы, который определяется опытным путем. См. его работу „Определение сопряженных глубин при гидравлическом прыжке в пространственных условиях". „Известия НИИГ" № 26, 1940.

На основе этого уравнение (470) перепишется так:

$$\frac{2\alpha_0 q_1^2}{gh''}\,\frac{b_1}{b_1+12\,\mathrm{tg}\,\theta\cdot h'\sqrt{\mathrm{Fr}_1}}+(h'')^2=\frac{2\alpha_0 q_1^2}{gh'}+(h')^2. \qquad (472)$$

Из этого уравнения находим подбором h'', которое и можно принять за вторую сопряженную глубину прыжка в прямоугольном русле переменного сечения.

Уравнение (470) применимо также в случае сопряжения бурного потока со спокойным при внезапном расширении русла[1].

Лабораторные опыты показывают, что уравнение (470) дает в этом случае[2] практически удовлетворительные результаты при $\frac{b_2}{b_1}\leqslant 4$. При $\frac{b_2}{b_1}>4$ растекающаяся в горизонтальной плоскости струя не заполнит в пределах прыжка отводящего канала и часть объема жидкости в сечении *II-II* не будет участвовать в переносе количества движения.

Задача 86. Определить сопряженную глубину прыжка, возникающего в русле прямоугольной формы, но переменного сечения по длине, при таких данных: глубина перед прыжком $h'=0{,}40$ *м*; ширина канала в этом сечении $b_1=3$ *м*; расход $Q=7{,}25$ *м³/сек*. Угол расширения $\theta=5°$; уклон дна $i=0$.

Для определения глубины h'' воспользуемся формулой (472). Определим предварительно число Фруда

$$\mathrm{Fr}_1=\frac{v_1^2}{gh'}=\frac{Q^2}{gb_1^2(h')^3}=\frac{7{,}25^2}{9{,}81\cdot 3^2\cdot 0{,}4^3}=9{,}28.$$

Тогда

$$b_2=b_1+12\,\mathrm{tg}\,5^0\cdot 0{,}4\sqrt{9{,}28}=4{,}28\ \textit{м}.$$

Обращаясь к уравнению (472), находим подбором h'', которое оказалось равным

$$h''=1{,}79\ \textit{м}.$$

§ 153. Потери энергии в прыжке

Анализируя прыжок как форму движения, вызываемую переходом бурного потока в спокойный, мы указывали, что этот переход сопряжен с затратой энергии потока.

Установив количественные зависимости между элементами прыжка, главным образом между глубинами перед прыжком и за прыжком, можно, применяя уравнение Бернулли, найти количественное выражение потерь энергии в прыжке.

Проще всего это сделать, рассматривая совершенный прыжок, возникающий в прямоугольном русле.

Рассмотрим прыжок, для которого получено уравнение (454), т. е. прыжок в канале с уклоном дна $i=0$. Из уравнения удельной энергии относительно плоскости, совпадающей с дном канала, для тех же двух сечений *I-I* и *II-II* получим

$$h_{тр}=\left(h'+\frac{\alpha v_1^2}{2g}\right)-\left(h''+\frac{\alpha v_2^2}{2g}\right),$$

где $h_{тр}$ — потери энергии в потоке на пути движения его от сечения *I-I* до сечения *II-II*.

Выразив v_1 и v_2 через h' и h'', получим

$$h_{тр}=\frac{\alpha q^2}{2g}\cdot\left(\frac{1}{(h')^2}-\frac{1}{(h'')^2}\right)-(h''-h').$$

Из уравнения (453) видно, что

$$\frac{\alpha q^2}{2g}=\frac{1}{4}h''h'(h''+h'),$$

тогда

$$h_{тр}=\frac{1}{4}h''h'(h''+h')\left(\frac{1}{(h')^2}-\frac{1}{(h'')^2}\right)-(h''-h').$$

После простых преобразований получим формулу Бресса[3]

$$h_{тр}=\frac{(h''-h')^3}{4h''h'}. \qquad (473)$$

Этой формулой и определяется величина потерь энергии в совершенном прыжке.

При расходе потока Q *м³/сек* энергия, теряемая потоком в прыжке в одну секунду, будет равна

$$Э=\gamma Q h_{тр}.$$

Энергия, теряемая в прыжке, в десятки раз больше той, которую поток затратил бы при поступательном движении в бурном или спокойном состоянии на участке длиной, равной длине прыжка. По опытным данным проф. Ахутина[4] потери энергии в прыжке достигают 64—67% от общей энергии в потоке перед прыжком. На фиг. 197 показана кривая зависимости потерь энергии в прыжке (в процентах от полного содержания энергии в потоке перед прыжком) от числа Fr_1. Кривая построена по формулам (473) и (456).

Вопрос о природе потерь в прыжке занимал и занимает многих исследователей.

Буало (Boileau) отождествлял потери энергии в прыжке с потерями на удар, определяемыми по формуле Борда:

$$h_{тр}=\frac{(v_1-v_2)^3}{2g}$$

или

$$h_{тр}=\frac{(h''+h')(h''-h')^2}{4h'h''}. \qquad (474)$$

---

[1] Ф. Пикалов, О сбойном течении в гидротехнических сооружениях. Сборник САНИИРИ № 3, 1939.

[2] Этот случай и имел фактически в виду доц. Абрамов, предлагая приведенную в предыдущей сноске формулу для определения сопряженных глубин.

[3] M. Bresse, „Cours de mécanique appliquée, p. II, Hydraulique, 1860.

[4] А. Н. Ахутин, Специальный курс гидравлики, 1935.

Сравним потери, вычисляемые по формулам (473) и (474):

$$\frac{(h''-h')^3}{(h''+h')(h''-h')^2}=\frac{h''-h'}{h''+h'}.$$

Из этого отношения видно, что действительные потери энергии в прыжке меньше, чем потери на удар, вычисляемые по формуле Борда.

Следует подчеркнуть, что до сих пор нет четко сформулированного положения, устанавливающего истинную природу потерь в прыжке. Это объясняется тем, что ряд исследователей пытаются объяснить причину потерь проявлением одного какого-либо фактора: удара, трения, вращения вальца, обмена массы в вальце и т. п., противопоставляя один фактор другому, и в частности трение, вызываемое турбулентностью потока в зоне прыжка, удару и т. д.

Ф. Энгельс говорит, что трение и удар отличаются друг от друга только по степени: «Трение можно рассматривать как ряд маленьких ударов, происходящих друг за другом и друг подле друга, удар можно рассматривать как концентрированное в одном месте и на один момент трение. Трение — это хронический удар, удар — это острое трение»[1].

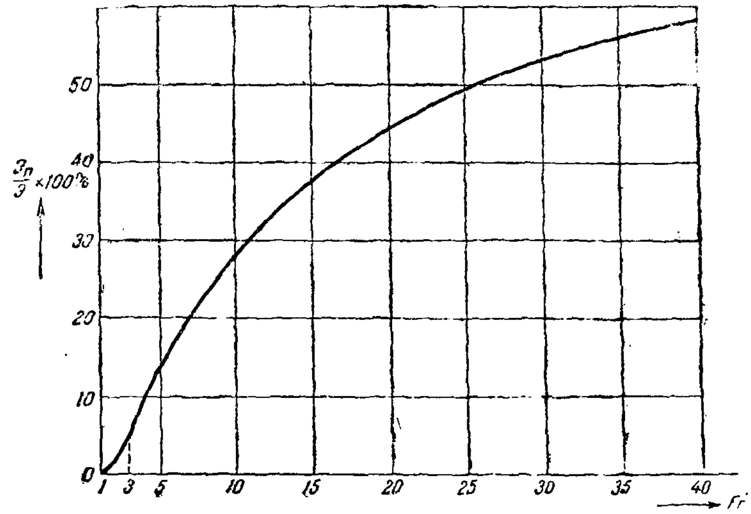
Трение и удар вызывают исчезновение кинетической энергии, т. е. живой силы.

Кинетическая энергия в прыжке исчезает не полностью, а частично. При этом исчезновение протекает в форме превращения некоторой доли кинетической энергии в потенциальную энергию и потери на трение и удар. Кинетическая энергия, исчезающая на трение и удар, невозвратима, «процесс», как говорит Ф. Энгельс, необратим непосредственным образом». Вот почему это исчезновение кинетической энергии мы называем потерей энергии.

Если кинетическая энергия, теряемая в прыжке, является действительно потерянной для данного потока, то какую форму принимает эта потерянная энергия? На это можно ответить словами Ф. Энгельса «Движение превратилось в качественно отличные формы движения — в теплоту, в электричество — в форму молекулярного движения».

«В каждом случае трения, говорит Энгельс в другом месте, кинетическая энергия исчезает, возрождаясь снова не в виде потенциальной энергии в смысле динамики, а как молекулярное движение в специфической форме теплоты»[2].

Таким образом мы приходим к выводу, что гашение энергии в прыжке есть результат про-



Фиг. 197

явления и трения и удара отдельных частиц воды и трения частиц воды о стенки русла при том движении (структуре), которое присуще потоку.

Таков истинно научный взгляд на природу потери энергии в прыжке.

Задача 87. Установить характер сопряжения потока в прямоугольном канале шириной $b=10$ *м* при изменении уклона дна с $i_1=0{,}05$ на $i_2=0{,}00078$, если $Q=20$ *м³/сек*, а коэфициент шероховатости $n=0{,}014$.

Прежде всего определим состояние потока до и после перелома уклона. Для этого определим критическую и нормальные глубины на обоих участках канала.

Критическая глубина не зависит от уклона дна канала и на всем протяжении при одинаковой ширине его будет иметь постоянное значение согласно уравнению (354).

В данном случае имеем

$$\Psi(\eta_k)=\lg q-1{,}5\lg b=\lg\frac{20}{10}-1{,}5\lg 10=-1{,}199$$

и по таблице[3] соответственно находим $\eta_k=0{,}0765$.

Тогда значение критической глубины будет

$$h_{кр}=\eta_{кр}b=0{,}0765\cdot 10=0{,}76\ \textit{м}.$$

Далее определяем нормальные глубины на обоих участках канала по уравнению (344).

Имеем для верхнего участка

$$\Psi(\eta_{01})=(\lg\ b^{2,7}-\lg Q)-N_1=1{,}399-8{,}797=2{,}602$$

и соответственно для нижнего

$$\Psi(\eta_{02})=(\lg b^{2,7}-\lg Q)-N_2=1{,}399-9{,}700=1{,}699.$$

По таблице[4] находим для найденных значений $\Psi(\eta_0)$ соответствующие им величины

$$\eta_{01}=0{,}030 \text{ и } \eta_{02}=0{,}11$$

и определяем нормальные глубины

$$h_{01}=\eta_{01}\cdot b=0{,}030\cdot 10=0{,}30\ \textit{м},$$
$$h_{02}=\eta_{02}\cdot b=0{,}11\cdot 10=1{,}10\ \textit{м}.$$

---

[1] Ф. Энгельс, Диалектика природы, 1932, стр. 158.
[2] Ф. Энгельс, Диалектика природы, 1932, стр. 158.
[3] См. И. И. Агроскин, Гидравлика каналов. 1940, стр. 124.
[4] См. там же, стр. 121.

Так как нормальные глубины получились для первого участка меньше критической глубины, а для второго — больше критической глубины, то приходим к заключению, что состояние потока в канале — бурное до перелома уклона и спокойное после перелома.

Переход потока из бурного в спокойное состояние может произойти только в форме гидравлического прыжка. Следовательно, характер сопряжения потока нами выяснен и остается лишь уточнить вид и местоположение прыжка.

Вообще при рассматриваемой схеме движения потока возможен один из нижеследующих трех случаев.

а) Переход потока из бурного состояния в спокойное может произойти как раз в месте перелома уклона дна канала. Такой случай будет, если нормальные глубины обоих участков канала являются друг для друга сопряженными, т. е. взаимно удовлетворяют уравнения (444) и (454).

б) Вышеупомянутый переход произойдет на втором участке канала ниже места перелома уклона его дна. Такой случай будет, если глубина h''_{01}, сопряженная с нормальной глубиной h_{01}, окажется больше глубины потока h_{02} на втором участке.

В таких случаях говорят о сопряжении потока с отогнанным прыжком.

При этом нормальный режим на первом участке не будет нарушен и глубина h_{01} сохранится до места перелома уклонов. Поток вступит на второй участок в бурном состоянии. На втором участке благодаря уменьшению уклона скорость течения начнет уменьшаться, а глубины возрастать. Свободная поверхность потока образует кривую подпора типа C_1, которая распространится от перелома уклонов (глубины — h_{01}) до того места, где глубина достигнет значения h'_{02}, сопряженной с нормальной глубиной второго участка.

В этом месте и произойдет переход потока из бурного состояния в спокойное прыжком от глубины h'_{02} к нормальной глубине h_{02}.

Расстояние, на которое прыжок будет отогнан вниз от места перелома уклонов, легко вычислить как длину кривой подпора между глубинами h_{01} и h'_{02}.

в) Наконец, возможно сопряжение потока на первом участке, не доходя до места перелома уклонов. Такое сопряжение с надвинутым прыжком произойдет в том случае, если $h_{02} > h''_{01}$.

При таком случае глубина потока где-то на верхнем участке скачкообразно изменится с h_{01} на h''_{01}, после чего поток уже в спокойном состоянии продолжит свое движение до конца первого участка, образуя кривую подпора с глубины h''_{01} до глубины h_{02} в месте перелома уклонов. Ниже перелома на втором участке будет ненарушенное равномерное движение при глубине h_{02}.

Расстояние прыжка от места перелома уклонов определяется как длина кривой подпора между глубинами h''_{01} и h_{02}.

Возвращаясь к анализу сопряжения в условиях рассматриваемой задачи, определим значение глубины h''_{01} сопряженной с глубиной h_{01}.

Для этого находим

$$\eta'_{кр} = \frac{h_{01}}{h_{кр}} = \frac{0{,}30}{0{,}76} = 0{,}395$$

и, пользуясь соответствующей таблицей[1], устанавливаем

$$\eta_к'' = 2{,}061$$

и, следовательно,

$$h''_{01} = \eta''_{кр} h_{кр} = 2{,}061 \cdot 0{,}76 = 1{,}57 \text{ м}.$$

Сравнивая найденную сопряженную глубину $h''_{01} = 1{,}57$ *м* с нормальной глубиной второго участка $h_{02} = 1{,}1$ м, приходим к заключению, что в рассматриваемом случае имеет место сопряжение с отогнанным прыжком ($h''_{01} > h_{02}$).

Прыжок произойдет на втором участке там, где глубина кривой подпора достигнет величины, сопряженной с h_{02}.

Для определения этой сопряженной глубины находим

$$\eta''_{кр} = \frac{h_{02}}{h_{кр}} = \frac{1{,}1}{0{,}76} = 1{,}499$$

и, пользуясь таблицей[1], устанавливаем

$$\eta'_{кр} = 0{,}655 \text{ и } h'_{02} = 0{,}655 \cdot 0{,}76 = 0{,}50 \text{ м}.$$

Таким образом заключаем, что на втором участке будет сначала кривая подпора на длине, необходимой для непрерывного роста глубин от 0,30 до 0,50 *м*. Затем произойдет прыжок с глубины 0,50 до глубины 1,1 *м* и далее поток будет в спокойном состоянии продолжать движение с этой глубиной.

ГЛАВА XXI

ВОДОСЛИВЫ

§ 154. Классификация водосливов

Если поток жидкости со свободной поверхностью преградить какой-либо стенкой, то жидкость, уровень которой перед преградой повысится, начнет переливаться через верхнее ребро этой стенки (порог, гребень) по всей его ширине или, при наличии специального выреза определенного размера, через порог такого выреза.

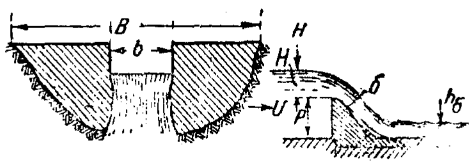
Сооружение в той его части, где жидкость переливается через гребень, носит название — водослив.

Характерными параметрами водослива являются (фиг. 198):

ширина водослива b, измеряемая по длине ребра (гребня), через которое переливается жидкость;

напор водослива H, представляющий собой наибольшее превышение горизонта жидкости перед водосливом над его гребнем;

толщина гребня δ и его форма (профиль).



Фиг. 198

[1] См. сноску на стр. 212.

В основу классификации водосливов положим форму порога (профиль водослива), в зависимости от которой различают:

1. Водослив с широким порогом, толщина стенки которого такова, что переливающаяся жидкость на самом пороге приобретает характер параллельно-струйного течения (фиг. 199).

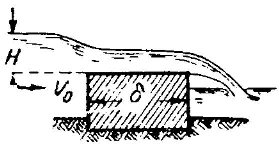
Опытные наблюдения показывают, что такое движение наступает, если толщина стенки больше двух-трех напоров.

2. Водослив с острым ребром (или с тонкой стенкой), при котором струя жидкости, прикоснувшись к ребру порога, переливается через порог, не «смачивая» его (фиг. 200).

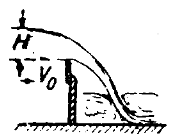
3. Водослив практического профиля, характерный, в большинстве случаев, плавным профилем оголовка гребня и низовой гранью, осуществляемой часто по профилю свободно падающей струи (фиг. 201).

Каждая из намеченных групп водосливов в свою очередь может быть подразделена по некоторым общим для всех групп признакам.

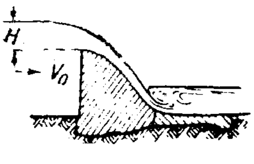
а) По расположению порога в плане: прямые водосливы, расположенные нормально к оси потока (фиг. 202); косые (фиг. 203); боковые, располагаемые параллельно оси потока (фиг. 204); ломаные (фиг. 205) и криволинейные (фиг. 206).



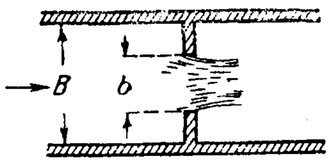
Фиг. 199



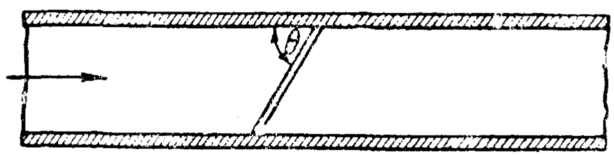
Фиг. 200



Фиг. 201

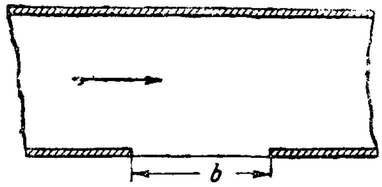


Фиг. 202

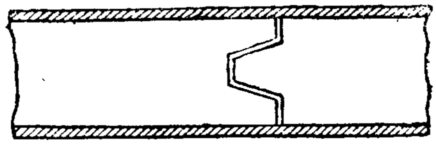


Фиг. 203

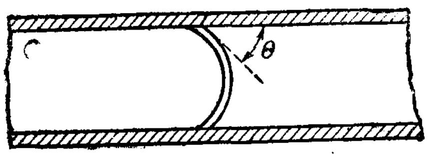
б) По условиям подхода потока к водосливу: водосливы без бокового сжатия, если ширина водослива равна ширине канала, благодаря чему отсутствует сжатие струи сбоку (фиг. 207); во-



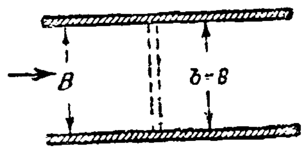
Фиг. 204



Фиг. 205



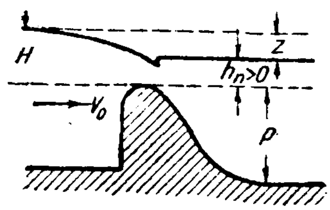
Фиг. 206



Фиг. 207

досливы с боковым сжатием, если ширина водослива меньше ширины канала, благодаря чему струя, вступающая на ребро водослива, претерпевает боковое сжатие (фиг. 202).

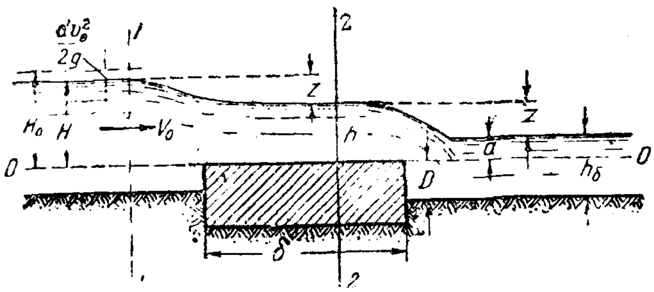
в) По типу сопряжения ниспадающей струи с нижним бьефом: водосливы незатопленные, в которых уровень нижнего бьефа не влияет на расход водослива (фиг. 199, 200, 201); водосливы затопленные, в которых уровень нижнего бьефа оказывает снижающее влияние на расход, протекающий через водослив (фиг. 208).



Фиг. 208

§ 155. Прямоугольный водослив с широким порогом без бокового сжатия

Рассмотрим движение через водослив с горизонтальным порогом (фиг. 209) при длине порога, равной ширине канала (водослив без бокового сжатия).



Фиг. 209

Возьмем два сечения: *1-1* перед водосливом, где еще не заметно снижение горизонта, и *2-2* на пороге водослива, где движение снова приняло параллельно-струйный характер. Так как движение в обоих этих сечениях плавно-изменяющееся, то давление в них распределяется по гидростатическому закону.

Составим для обоих сечений уравнение Бернулли, приняв за плоскость сравнения плоскость *0-0'*, совпадающую с поверхностью порога.

Тогда

$$H+\frac{\alpha v_0^2}{2g}+\frac{p_0}{\gamma}=h+\frac{\alpha v^2}{2g}+\frac{p_0}{\gamma}+h_{mp},$$

где v_0 — средняя скорость перед водосливом (скорость подхода);

h — глубина на пороге водослива;

h_{mp} — потери энергии потока, затрачиваемые на преодоление сопротивлений при вступлении потока на порог и на самом пороге.

Считая

$$h_{mp}=\Sigma\zeta\frac{v^2}{2g},$$

где $\Sigma\zeta$ — коэфициенты указанных сопротивлений, получим

$$H_0-h=\frac{v^2}{2g}(\alpha+\Sigma\zeta),$$

откуда

$$v=\frac{1}{\sqrt{\alpha+\Sigma\zeta}}\sqrt{2g(H_0-h)}$$

или

$$v=\varphi\sqrt{2g(H_0-h)}, \qquad (475)$$

где $\varphi=\sqrt{\frac{1}{\alpha+\Sigma\zeta}}$ — так называемый коэфициент скорости;

$H_0=H+\frac{\alpha v_0^2}{2g}$ — напор, исправленный на скорость подхода потока.

В связи с этим расход водослива будет

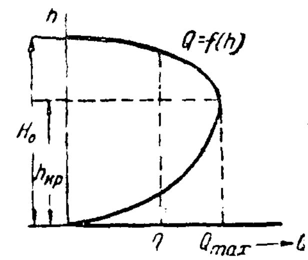
$$Q=vbh=\varphi bh\sqrt{2g(H_0-h)}, \qquad (476)$$

где b — ширина водослива.

Коэфициент скорости, входящий в формулу (476), как показывают опыты, зависит от формы переднего ребра порога и от шероховатости порога.

Численные значения φ приведены в табл. 78. Из формулы (476) видно, что для определения Q необходимо знать кроме величины b и H_0, которые обычно известны, также и глубину воды h на пороге водослива. Возникает вопрос, как определить глубину h на пороге, чтобы воспользоваться формулой (476) для вычисления расхода водослива.

Для выяснения поставленного вопроса установим прежде всего, как будет изменяться расход Q при изменении глубины на пороге h при $b=\text{const}$, $H_0=\text{const}$ и $\varphi=\text{const}$.



Фиг. 210

Из формулы (476) видно, что $Q=0$ при двух значениях глубины на пороге: $h=H_0$ и $h=0$. На фиг. 210 показана графическая зависимость $Q=f(h)$, построенная по формуле (476) при h, изменяющемся от $h=0$ до $h=H_0$.

Из графика видно, что каждому значению Q отвечают два значения h и только при значении $Q=Q_{max}$ ему отвечает одно h.

В действительности на пороге незатопленного водослива при данном расходе $Q=Q_{max}$ и других неизменных условиях устанавливается только одна глубина.

Значит, на пороге должна устанавливаться такая глубина, при которой пройдет максимально возможный расход, так как одно значение для глубины h получается только при Q_{max}.

Для того чтобы придать общий характер высказанным соображениям, напишем такое выражение для скорости на пороге водослива[1]

$$v=\sqrt{2g(H_0-h-h_{mp})},$$

которое получается из приведенного выше уравнения Вернули и идентично уравнению (475).

Тогда расход

$$Q=bh\sqrt{2g(H_0-h-h_{mp})}.$$

[1] Ф. Пикалов. К теории водослива с широким порогом. Вестник гидротехники и мелиорации, № 4, 1940 г.

Приравняем нулю первую производную от Q по h

$$\frac{dQ}{dh}=b\sqrt{2g}\left[\sqrt{H_0-h-h_{mp}}-\frac{h}{2\sqrt{H_0-h-h_{mp}}}\right]=0$$

и решим полученное уравнение относительно h. Имеем

$$\sqrt{H_0-h-h_{mp}}-\frac{h}{2\sqrt{H_0-h-h_{mp}}}=0,$$

откуда

$$2(H_0-h-h_{mp})=h$$

или

$$h=\frac{2}{3}(H_0-h_{mp}). \qquad (477)$$

Видоизменим это уравнение, подставив в него

$$h_{mp}=\Sigma\zeta\frac{v^2}{2g}.$$

Тогда

$$h=\frac{2}{3}H_0-\frac{\Sigma\zeta}{3}\cdot\frac{v^2}{g}$$

или

$$\frac{2}{3}\frac{H_0}{h}-\frac{\Sigma\zeta}{3}\frac{v^2}{gh}=1.$$

Обозначая в дальнейшем

$$\frac{h}{H_0}=k$$

и учитывая, что

$$\frac{v^2}{gh}=\mathrm{Fr}\ \text{(число Фруда), а}\ \Sigma\zeta=\frac{1}{\varphi^2}-1,$$

получим

$$\mathrm{Fr}=\frac{\varphi^2}{1-\varphi^2}\left(\frac{2}{k}-3\right). \qquad (478)$$

Уравнение (475) также можно свести к числу Фруда, а именно

$$\frac{v^2}{gh}=\mathrm{Fr}=\left(\frac{1}{k}-1\right)2\varphi^2. \qquad (479)$$

Приравнивая уравнения (478) и (479), имеем

$$\frac{\varphi^2}{1-\varphi^2}\left(\frac{2}{k}-3\right)=\left(\frac{1}{k}-1\right)2\varphi^2,$$

откуда путем простого преобразования получаем

$$k=\frac{2\varphi^2}{1+2\varphi^2}. \qquad (480)$$

Глубина на пороге водослива, следовательно, будет

$$h=\frac{2\varphi^2}{1+2\varphi^2}H_0. \qquad (481)$$

Подставляя k, определяемое уравнением (480), в уравнение (479), получаем

$$\mathrm{Fr}=\left(\frac{1+2\varphi^2}{2\varphi^2}-1\right)2\varphi^2=1. \qquad (482)$$

Отсюда, зная, что число Фруда равно единице при критическом состоянии потока, приходим к выводу, что глубина на пороге незатопленного водослива, определяемая уравнением (481), должна быть критической.

Беланже[1] (1845), исходя из изложенного нами принципа, но пренебрегая потерями энергии, получил

$$h=\frac{2}{3}H_0.$$

Действительно, если в уравнении (480) принять $\varphi=1$, то $k=\frac{2}{3}$.

Бахметев (1912)[2], исходя из принципа минимума удельной энергии, пришел к выводу, что на пороге водослива устанавливается критическая глубина, т. е. принял $\mathrm{Fr}=1$, и в результате получил ту же зависимость (480).

Значительно раньше (1877 г.) Буссинеск[3], рассматривая явление в конце водослива как остановившуюся волну перемещения, т. е. по существу принимая, что на водосливе будет движение, удовлетворяющее условию $\mathrm{Fr}=1$, получил также приведенную зависимость (480).

Таким образом очевидно, что принципы, из которых исходили Беланже, Буссинеск и Бахметев, несмотря на то, что они по-разному сформулированы, приводят к одному и тому же положению — на пороге водослива устанавливается критическая глубина, т. е. такое движение, для которого $\mathrm{Fr}=1$.

Из изложенного ясно, что противопоставление принципов Беланже и Буссинеска-Бахметева, которое проводится обычно в курсах гидравлики, не имеет основания.

Установив значение для h, вернемся к уравнению (476) и придадим ему более удобный для расчетов вид. Подставим в это уравнение

$$h=kH_0.$$

Тогда

$$Q=\varphi b\,kH_0\sqrt{2g(H_0-kH_0)}=\varphi k\sqrt{1-k}\,b\sqrt{2g}\,H_0^{3/2}.$$

Введем обозначение

$$m=\varphi k\sqrt{1-k}, \qquad (483)$$

называя m коэфициентом расхода водослива.

Тогда

$$Q=mb\sqrt{2g}\,H_0^{\frac{3}{2}}. \qquad (484)$$

Это и будет расчетная формула для незатопленного прямоугольного водослива с широким порогом.

Уравнению (484) часто придают такой вид:

$$Q=MbH_0^{3/2}, \qquad (485)$$

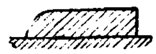
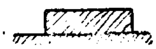
где

$$M=m\sqrt{2g}.$$

[1] L'école royale des ponts et chaussées Session 1845—1846 Note sur l'Hydraulique, M. Bélanger, p. 33.

[2] Б. А. Бахметев, Гидравлика, 1934.

[3] Boussinesq, Essai sur la théorie des euax courantes. Mémoires presentés par divers savants à l'Academie des Sciences de l'institute de Franse, т. XXIII, 1877. См. также В. Вислоцкий, О неудовлетворительности гидравлических формул, принятых ныне для расчета отверстий малых мостиков и соображения о замене этих формул другими, ближе выражающими действительность. Журнал Министерства путей сообщения, книги 3, 4 и 5, 1901 г.

№	Характеристика порога водослива	φ	k	m	$M = m\sqrt{2g}$ (в метрах)	Форма
1	При отсутствии потерь . .	1	2/3	0,385	1,70	Абстрактный случай
2	При хорошо округленной форме входной части водослива и весьма плавном подходе	0,95	0,645	0,365	1,62	
3	Порог с закругленным входным ребром	0,92	0,630	0,35	1,55	
4	Притупленный входной угол	0,88	0,610	0,335	1,48	
5	Порог без закругления входного ребра	0,85	0,590	0,32	1,42	
6	Порог без закругления входного ребра и при неблагоприятных гидравлических условиях (неровный шероховатый вход)	0,80	0,560	0,295	1,33	

Имея в виду уравнение (480), можно записать

$$m = \frac{2\varphi^2}{1+2\varphi^2}\sqrt{\frac{\varphi^2}{1+2\varphi^2}}, \tag{486}$$

откуда видно, что при $\varphi = 1$

$$m = \frac{2}{3\sqrt{3}} = 0{,}385.$$

Так как $\varphi = 1$ отвечает случаю отсутствия потерь, то $m = 0{,}385$ будет максимальным коэфициентом расхода водослива с широким порогом.

Из формул (480) и (486) следует, что

$$m = k\sqrt{0{,}5k}. \tag{487}$$

Как видим φ, m и k находятся в определенной зависимости друг от друга. Численные значения этих величин в зависимости от формы входного ребра порога[1] приведены в табл. 78.

Приведенные в этой таблице значения φ получены опытным путем из наблюдений над движением жидкости через водосливы с широким порогом в лабораторных и производственных условиях, k и m определены по формулам (480) и (487).

[1] Влияние формы входного ребра порога на коэфициент расхода m освещается в следующих экспериментальных работах:

а) H. Bazin, „Expériences nouvelle sur lécoulement en devèrsoir». Annales des Ponts et Chaussées, 1896, т. XII;

б) J. Woodburn, «Tests of Broad-Crested Weirs», Proceedings of American Society of Civil Engineers, Vol. 56, № 7, 1931.

Коэфициент скорости φ зависит не только от формы входного ребра порога, но и от ширины этого порога, степени шероховатости его, от соотношения между напором H и высотой порога p и от других факторов. Поэтому на приведенные значения для φ надо смотреть как на ориентировочные, требующие уточнения на основании тщательных и систематических экспериментов[2].

В последние годы было много попыток установить глубину h на пороге, применяя закон количества движения, подобно тому как это делал Буссинеск еще в 1877 г. Из таких работ можно назвать Шварца[3] (1934), Айвазьяна[4] (1935), Скиба[5] (1936), Дульнева[6] (1937) и Чертоусова[7]. Однако нельзя признать эти попытки успешными. Сторонники этого метода вынуждены делать ряд допущений, например, считать, что по верхней грани порога давление распределяется по гидростатическому закону, тем самым получают одинаковое выражение для сил при незакругленном и закругленном входе на порог; принимать в уравнении $\varphi = 1$, что противоречит опыту, или, наконец, принимать глубину на пороге равной $h_{кр}$, в то время как все решение направлено к тому, чтобы определить эту глубину на пороге.

[2] Акад. Н. Н. Павловский, Гидравлический справочник, 1937.

[3] Инж. А. И. Шварц, О движении потока через водослив с широким порогом. Известия НИИГ, т. I, 1931.

[4] Инж. В. Г. Айвазьян, О расчете водослива с широким порогом, Журнал «Гидротехническое строительство», № 10, 1935.

[5] Доц. М. М. Скиба, Теория движения жидкости через водослив с широким порогом. Известия Юж. НИИГиМ, вып. 3—4, 1935.

[6] Инж. В. Б. Дульнев, О движении воды через водослив с широким порогом. Журнал «Гидротехническое строительство» № 9, 1937.

[7] Проф. М. Д. Чертоусов, К вопросу об истечении через водослив с широким порогом. Журнал «Гидротехническое строительство» № 1[illegible], 1938.

Установив, что на пороге незатопленного водослива с широким порогом устанавливается глубина

$$h_{кр} = kH_0,$$

легко наметить критерии для решения вопроса о влиянии нижнего бьефа на работу водослива.

Применительно к фиг. 209 ясно, что

а) до тех пор пока бытовая глубина нижнего бьефа не достигает уровня критической глубины, т. е. пока

$$p + h_{кр} \geqslant h_б,$$

состояние нижнего бьефа не влияет на истечение жидкости через водослив и последний будет незатопленным;

б) при

$$p + h_{кр} < h_б$$

бытовой горизонт нижнего бьефа распространится и на порог водослива, который, следовательно, будет затопленным.

В первом случае, когда водослив не затоплен, расчетным уравнением будет формула (484)

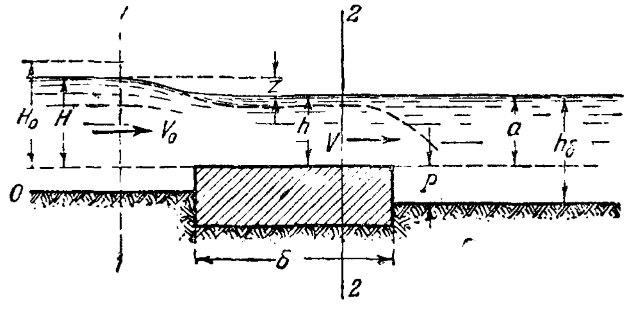
$$Q = mb\sqrt{2g}\,H_0^{3/2}.$$

При затопленном же водосливе (фиг. 211) на пороге вместо $h_{кр}$ будет некоторая большая глубина

$$h = h_б - p$$

и расчетное уравнение примет вид

$$Q = \varphi bh\sqrt{2g(H_0 - h)}. \qquad (488)$$



Фиг. 211

Коэфициенты m и φ для этих формул берутся из табл. 78.

Задача 88. Определить расход прямоугольного водослива с широким порогом, если напор перед водосливом $H = 2$ *м*, скорость воды в канале перед водосливом $v_0 = 0{,}80$ *м/сек*, высота порога $p = 0{,}8$ *м*, глубина за порогом водослива $h_б = 1{,}8$ *м*, ширина водослива $b = 3$ *м*. Ребро порога не округленное ($\varphi = 0{,}85$).

Прежде всего выясним, будет ли водослив по характеру сопряжения с нижним бьефом затопленным или незатопленным.

Находим:

$$k = \frac{2\varphi^2}{1+2\varphi^2} = \frac{2\cdot 0{,}85^2}{1+2\cdot 0{,}85^2} = 0{,}59,$$

$$H_0 = H + \frac{v_0^2}{2g} = 2 + \frac{0{,}8^2}{19{,}62} = 2{,}03 \text{ м},$$

$$h_{кр} = kH_0 = 0{,}59\cdot 2{,}03 = 1{,}20 \text{ м},$$

замечая, что $p + h_{кр} = 0{,}8 + 1{,}2 = 2$ *м* $> h_б = 1{,}8$ *м*, заключаем, что водослив будет не затоплен и поэтому принимаем для расчета формулу (484) с коэфициентом расхода m по (487) и находим

$$Q = mb\sqrt{2g}\,H_0^{3/2} = 0{,}32\cdot 3\cdot 4{,}43\cdot 2{,}03^{3/2} = 12{,}4 \text{ м}^3/\text{сек}.$$

Задача 89. Определить напор H_0 перед водосливом, если расход водослива $Q = 8$ *м³/сек*, ширина водослива $b = 2{,}4$ *м*, высота порога $p = 1$ *м*, глубина за порогом $h_б = 1{,}75$ *м*. Ребро водослива имеет плавно округленную форму.

Выясним, будет ли водослив затоплен или не затоплен. Так как H_0 не известно, то глубину на пороге найдем из уравнения критической глубины (356):

$$h_{кр} = \sqrt[3]{\frac{\alpha q^2}{g}} = \sqrt[3]{\frac{1{,}1\cdot 8^2}{9{,}81\cdot 2{,}4^2}} = 1{,}08 \text{ м}.$$

Горизонт же воды нижнего бьефа расположен над порогом на величину

$$h_б - p = 1{,}75 - 1 = 0{,}75 \text{ м}$$

и, следовательно, не мешает истечению жидкости.

Отсюда приходим к заключению, что водослив не затоплен.

Тогда, принимая по условиям входа[1] $\varphi = 0{,}95$ и $M = 1{,}62$, определяем H_0 по (485):

$$H_0 = \left(\frac{Q}{Mb}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{8}{1{,}62\cdot 2{,}4}\right)^{\frac{2}{3}} = 1{,}67 \text{ м}.$$

Задача 90. Определить расход водослива с широким порогом без закругленного ребра, если

$$H = 2{,}40 \text{ м}; \quad v_0 = 0{,}8 \text{ м/сек}; \quad b = 3 \text{ м}; \quad p = 0{,}5; \quad h_б = 2{,}20 \text{ м}.$$

Принимаем[1] $\varphi = 0{,}85$; $k = 0{,}59$ и определяем

$$H_0 = H + \frac{v^2}{2g} = 2{,}40 + \frac{0{,}8^2}{19{,}62} = 2{,}43; \quad h_{кр} = kH_0 = $$
$$= 0{,}59\cdot 2{,}43 = 1{,}43 \text{ м}; \quad p + h_{кр} = 0{,}5 + 1{,}43 =$$
$$= 1{,}93 < h_б = 2{,}20 \text{ м},$$

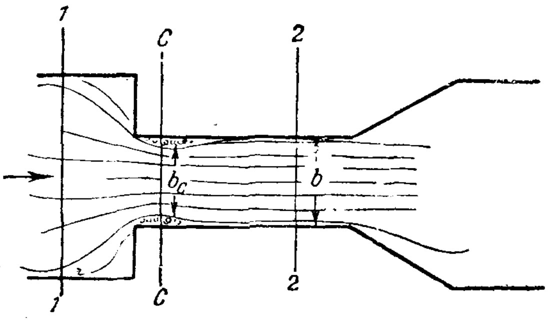
значит водослив — затопленный и на пороге будет глубина $h = h_б - p = 2{,}20 - 0{,}50 = 1{,}70$ *м*. Расход водослива определится по (488):

$$Q = \varphi bh\sqrt{2g(H_0 - h)} = 0{,}85\cdot 3\cdot 1{,}7\sqrt{2g\cdot 0{,}73} = 16{,}5 \text{ м}^3/\text{сек}.$$

§ 156. Водослив с широким порогом с боковым сжатием

Если ширина водослива меньше ширины подводящего канала, то поток при вступлении на порог водослива претерпевает сжатие не только по дну, в результате наличия порога, но и с бо-

[1] См. табл. 78.



Фиг. 212

ков. Сжавшись у входа, струя стремится расшириться и заполнить все сечение (фиг. 212).

Опыты показывают, что на расстоянии двух, трех напоров от начала порога (входа на водослив) наблюдается параллельно струйное движение. Исходя из этого, водослив, на пороге которого устанавливается такое движение, и называется водосливом с широким порогом.

Сжатие и следующее затем расширение струи вызывают дополнительные потери энергии в потоке, переливающемся через водослив. Подтверждается и наблюдениями, что у водосливов, у которых струя при вступлении на порог претерпевает дополнительное сжатие с боков, имеют меньшую пропускную способность (при прочих равных условиях), чем водосливы без бокового сжатия.

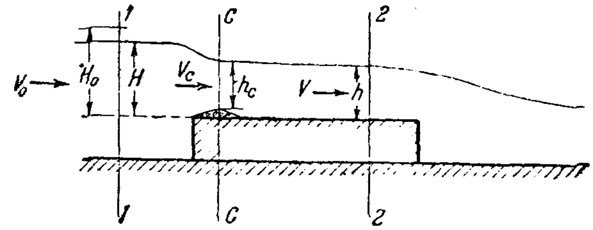
Обычно уменьшение пропускной способности водослива с боковым сжатием объясняют уменьшением в результате сжатия струи, рабочей ширины водослива. На основании этого в формулы (484) и (488) вместо фактической ширины водослива вводят ширину сжатой струи b_c, определяемой по формуле Френсиса-Кригера:

$$b_c = b - 0{,}2\zeta H_0, \tag{489}$$

где ζ — коэфициент, зависящий от формы очертания входа.

В действительности, как указывалось выше, сжатие струи наблюдается только при вступлении потока на порог водослива, в сечении же с глубиной h, для которого получены формулы (484) и (488), рабочая ширина водослива равна его геометрической ширине.

Формула Френсиса была предложена ее автором для учета бокового сжатия на водосливах с острым ребром. Применение ее для этого случая, как увидим ниже, имеет физический смысл. Распространение же ее на водосливы с широким порогом в указанной форме не имеет этого смысла и потому влияние сжатия струи при водосливе с широким порогом нужно установить особо.



Фиг. 213

Применяя уравнение Бернулли, получим (фиг. 213)

$$H_0 - h = \frac{\alpha v^2}{2g} + h_{mp}, \tag{490}$$

где h_{nom} — потери напора на пути движения от сечения *1-1* до сечения *2-2*.

Эти потери будут складываться:

1) из потерь на вход, т. е. на пути от сечения *1-1* до сжатого сечения *с-с*, которые зависят от формы входного ребра и очертания (формы) направляющих стенок;

2) из потерь на пути от сечения *с-с* до сечения *2-2*, возникающих в результате расширения струи после сжатия.

Разделим потери на вход на две части: на потери, которые были бы при данном очертании порога при отсутствии бокового сжатия, но при скорости вступления на порог, равной скорости v_c в сжатом сечении, и на потери, вызываемые боковым сжатием потока.

Тогда

$$h_{вх} = \zeta'_{вх}\frac{\alpha v_c^2}{2g} + \zeta''_{вх}\frac{\alpha v_c^2}{2g}.$$

Потери на пути от сечения *с-с* до сечения *2-2* по своей природе близки к потерям на удар, вычисляемым по формуле Борда.

Не усложняя формулы, примем[1]

$$h_{c-2} = \alpha\frac{(v_c - v)^2}{2g},$$

где v — скорость в сечении *2-2* на пороге водослива.

В таком случае

$$h_{mp} = \zeta'_{вх}\frac{\alpha v_c^2}{2g} + \zeta''_{вх}\frac{\alpha v_c^2}{2g} + \alpha\frac{(v_c - v)^2}{2g}. \tag{491}$$

С некоторым приближением можно принять

$$v_c = v\frac{b}{b_c} = \frac{v}{\varepsilon},$$

где $\varepsilon = \frac{b_c}{b}$ назовем коэфициентом бокового сжатия.

[1] Принимая потери h_{c-2} равным потерям на удар по формуле Борда, мы преувеличиваем несколько эти потери.

Форма входа	Коэфициент сжатия	Порог без закругленного входного ребра			Порог с закругленным входным ребром			Порог на одном уровне с дном канала		
	ε	φ'	k'	m'	φ'	k'	m'	φ'	k'	m'
Прямоугольная . . .	0,80	0,76	0,535	0,278	0,83	0,580	0,310	0,94	0,640	0,360
Прямолинейная и заостренная	0,86	0,78	0,550	0,285	0,86	0,600	0,330	0,95	0,645	0,365
Криволинейная . . .	0,92	0,80	0,560	0,300	0,88	0,610	0,335	0,96	0,650	0,370
Без бокового сжатия	1,00	0,85	0,590	0,320	0,92	0,630	0,350	1,00	2/3	0,385

Далее подставим в формулу (490) значение $h_{пот}$ по (491) и, заменяя v_c на $\frac{v}{\varepsilon}$, получим

$$v=\frac{1}{\sqrt{\alpha\left[1+\frac{\zeta'_{вх}}{\varepsilon^2}+\frac{\zeta''_{вх}}{\varepsilon^2}+\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)^2\right]}}\sqrt{2g(H_0-h)}.$$

Здесь коэфициент скорости потока на водосливе с широким порогом с учетом бокового сжатия обозначим

$$\varphi'=\frac{1}{\sqrt{\alpha\left[1+\frac{\zeta'_{вх}}{\varepsilon^2}+\frac{\zeta''_{вх}}{\varepsilon^2}+\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)^2\right]}}.$$

Тогда $v=\varphi'\sqrt{2g(H_0-h)}$.

Для вычисления φ' необходимо знать величины $\zeta'_{вх}$, $\zeta''_{вх}$ и ε, к определению которых можно подойти следующим образом:

а) выразим $\zeta'_{вх}$ через коэфициент скорости φ, соответствующий данному выше определению, а именно

$$\zeta'_{вх}=\frac{1}{\varphi^2}-1;$$

б) примем[1]

$$\zeta''_{вх}=0{,}06;$$

в) для определения ε воспользуемся видоизмененной формулой Френсиса-Кригера[2]

$$\varepsilon=1-0{,}2\zeta,$$

имея в виду, что в большинстве случаев практики $H_0 \leqslant b$.

В табл. 79 приведены значения φ' для случаев, наиболее часто встречающихся в практике, вычисленные на основе изложенных соображений.

[1] В действительности $\zeta''_{вх}$ будет иметь меньшее значение, если иметь в виду, что при истечении из отверстий в тонкой стенке $\zeta''_{вх}=0{,}04 \div 0{,}05$.

[2] Акад. Н. Н. Павловский, Гидравлический справочник, 1937. Заметим, что использование формулы Френсиса-Кригера в указанном смысле ничего общего не имеет с применением ее для замены b на b_c в формулах расхода (484) и (488).

В этой же таблице приведены значения

$$k'=\frac{2(\varphi')^2}{1+2(\varphi')^2}$$

и

$$m'=k'\sqrt{0{,}5k'}.$$

На значения величин, приведенных в табл. 79, следует смотреть как на приближенные, подлежащие дальнейшему уточнению на основе специальных экспериментальных исследований.

Заметим, что, несмотря на принятие для $\zeta'_{вх}$ и ε максимального значения, коэфициент скорости φ' имеет большее значение, чем то, которое этот коэфициент приобретает при замене в формуле расхода b на b_c по Френсису.

Опыты А. Офицерова[3] показывают, что применение формулы Френсиса-Кригера для замены ширины b на b_c в формуле расхода водослива, приводит к излишним запасам в размерах сооружения.

Таким образом приходим к выводу, что расчеты водосливов с широким порогом при наличии бокового сжатия можно производить на основе тех же уравнений, что и для водосливов без бокового сжатия с той лишь разницей, что вместо обычного коэфициента φ при этом следует брать коэфициент φ'.

Задача 91. Определить ширину водослива с широким порогом для пропуска расхода $Q=9\ м^3/сек$ при $H=1{,}85$ м. Скорость подхода $v_0=0{,}90$ м/сек, высота порога $p=0{,}6$ м, глубина за порогом $h_б=1{,}40$ м. Водослив с боковым сжатием. Вход водослива имеет прямоугольную форму. Ребро порога не округленное.

Прежде всего выясним, не будет ли водослив затопленным.

Для данного водослива имеем по табл. 79 $\varphi'=0{,}76$ и $k'=0{,}535$.

Тогда находим

$$H_0=H+\frac{v_0^2}{2g}=1{,}85+\frac{0{,}9^2}{19{,}62}=1{,}89\ м$$

и определяем

$$h_{кр}=k'H_0=0{,}535\cdot 1{,}89=1{,}01\ м.$$

[3] Инж. А. С. Офицеров, Быки и пропускная способность водослива. „Гидротехническое строительство" № 4, 1940.

Далее, замечая, что

$$h_{кр}+p=1{,}01+0{,}60=1{,}61\ м>h_б=1{,}40\ м,$$

заключаем, что водослив не затоплен.

Тогда, устанавливая по табл. 79, что коэфициент расхода водослива будет $m'=0{,}278$ или $M=1{,}23$, определим ширину водослива по (485):

$$b=\frac{Q}{MH_0^{3/2}}=\frac{9}{1{,}23\cdot1{,}89^{3/2}}=2{,}8\ м.$$

Задача 92. На трапецоидальном канале шириной по дну $b=8\ м$, с откосом $m=1$ устроен водослив с широким порогом прямоугольного сечения. Определить ширину этого водослива, если он должен пропустить расход $Q=25\ м^3/сек$ при $H=2{,}6\ м$; $p=0{,}70\ м$; $h_б=2{,}40\ м$. Вход водослива очерчен по кривой, порог округлен.

Найдем скорость течения в канале

$$v_0=\frac{Q}{\omega_0}=\frac{Q}{[b+m(H+p)]\ (H+p)}=0{,}67\ м/сек.$$

Тогда

$$H_0=H+\frac{v_0^2}{2g}=2{,}60+\frac{0{,}67^2}{19{,}62}=2{,}62\ м.$$

Выясним условия затопления, принимая согласно табл. 79 $\varphi'=0{,}86$ и $k'=0{,}60$.

Имеем

$$k'H_0=0{,}60\cdot2{,}62=1{,}57\ м,$$

тогда как глубина на пороге водослива

$$h=h_б-p=2{,}40-0{,}70=1{,}70\ м.$$

Следовательно, водослив затоплен и потому определяем b из зависимости (488):

$$b=\frac{Q}{\varphi' h\sqrt{2g(H_0-h)}}=\frac{25}{0{,}86\cdot1{,}70\cdot4{,}43\sqrt{2{,}62-1{,}70}}\approx4{,}2\ м.$$

§ 157. Водосливы с широким порогом не прямоугольного сечения

Кроме прямоугольных чаще всего встречаются водосливы трапецоидального и круглого сечения.

Очевидно, что в основу теории движения потока через водосливы любого сечения можно (с такой же строгостью, как это было сделано выше для прямоугольных водосливов) положить принцип максимума расхода.

Поэтому для водослива любой призматической формы можно записать уравнения:

а) для незатопленного водослива

$$Q=\varphi\omega_{кр}\sqrt{2g(H_0-h_{кр})}\ ; \qquad (492)$$

б) для затопленного водослива

$$Q=\varphi\omega\sqrt{2g(H_0-h)}. \qquad (493)$$

При этом $\omega_{кр}$ и $h_{кр}$ должны определяться из общего уравнения критического состояния потока (350), а именно:

$$\frac{\alpha Q^2}{g}=\frac{\omega_{кр}^3}{B_{кр}}.$$

§ 158. Применение теории водослива с широким порогом к расчету гидротехнических сооружений

Теория водослива с широким порогом находит применение при расчете отверстий плотин, входной части водосбросных сооружений, шлюзов регуляторов ирригационной сети, открытых отверстий и безнапорных труб, служащих для пропуска весенних или ливневых вод через насыпи железных или шоссейных дорог, каналов и пр.

Часто отверстия плотин, шлюзов регуляторов, мостовые отверстия и безнапорные трубы не имеют порога, возвышающегося над дном подводящего канала.

Образование напора H перед этими отверстиями вызывается стеснением поперечного сечения потока устоями или быками. Движение через такие отверстия с гидравлической точки зрения подобно движению через водослив с широким порогом.

Задача 93. Определить ширину отверстия плотины, работающего как водослив с широким порогом при следующих данных:

$Q=96{,}5\ м^3/сек$; отметка порога водослива 1,2 $м$; отметка подпертого горизонта 5,0 $м$; отметка дна порога 0,00 $м$; бытовая глубина за отверстием $h_б=2\ м$[1]; скорость в верхнем бьефе перед отверстием $v_0=0{,}5\ м/сек$; входное ребро порога не округлено; вход очерчен по кривой.

Принимая для заданного очертания входа и ребра порога $\varphi'=0{,}80$ и $k'=0{,}56$, выясним, будет ли водослив затоплен.

Если бы водослив был не затоплен, то на пороге установилась бы глубина $h_{кр}=k'H_0$.

Тогда, определяя напор над порогом

$$H=5-1{,}2=3{,}8\ м$$

и пренебрегая в данном случае скоростным напором, получим глубину воды на пороге

$$h_{кр}=kH_0=0{,}56\cdot3{,}8=2{,}13\ м.$$

Превышение горизонта воды со стороны нижнего бьефа над порогом составляет

$$h_б-p=2-1{,}2=0{,}8\ м.$$

Так как $h_{кр}>(h_б-p)$, то водослив не затоплен и потому ширину b определим по уравнению (485), при коэфициенте расхода $m'=0{,}295$, согласно табл. 78 или $M=1{,}33$. Тогда имеем

$$b=\frac{Q}{MH_0^{3/2}}=\frac{96{,}5}{1{,}33\cdot3{,}8^{3/2}}=10\ м.$$

Задача 94. Определить отметку подпертого горизонта перед регулятором, если дано: $Q=40\ м^3/сек$, $b=10\ м$, высота порога со стороны верхнего бьефа $p=0$, со стороны нижнего бьефа $p_1=0{,}80\ м$; глубина за регулятором $h_б=2{,}5\ м$. Регулятор с боковым сжатием, вход очерчен по кривой. Скорость перед регулятором $v_0=0{,}8\ м/сек$.

Для выяснения затопленности водослива найдем

$$h_{кр}=\sqrt[3]{\frac{\alpha q^2}{g}}=\sqrt[3]{\frac{1}{9{,}81}\,4^2}=1{,}18\ м$$

и сравним ее с величиной

$$h_б-p_1=2{,}50-0{,}80=1{,}70\ м,$$

[1] Бытовая глубина в нижнем бьефе определяется обычно по кривой $Q=f(h)$ на основе гидрометрических данных, а при отсутствии таких данных вычисляется на основе формулы Шези.

так как $h_{кр}$ оказалось меньше ($h_б - p_1$), то водослив будет затоплен и на его пороге установится глубина $h = 1{,}70$ *м*.

Поэтому определяем H_0 по формуле (488), принимая по условиям входа $\varphi' = 0{,}96$.

Имеем

$$H_0 = \frac{Q^2}{\varphi^2 2gb^2h^2} + h = \frac{40^2}{0{,}96^2 \cdot 19{,}62 \cdot 10^2 \cdot 1{,}70^2} + 1{,}70 = 2{,}05 \text{ м}$$

и, следовательно,

$$H = H_0 - \frac{v_0^2}{2g} = 2{,}05 - \frac{0{,}80^2}{19{,}62} = 2{,}02 \text{ м}.$$

При расчете отверстий малых мостов и безнапорных труб можно также исходить из изложенной выше теории водослива с широким порогом, пользуясь уравнениями (485) и (488) и другими вытекающими из этой теории зависимостями.

Так как мы не вводим в формулу коэфициента бокового сжатия, то, основываясь на данных акад. Павловского[1], принимаем значения φ, указанные в табл. 80 и применительно к которым вычислены коэфициенты расхода m по (486) и величины k по (480).

Таблица 80

№	Описание	φ	m	k
1	Для мостов с конусами и труб (независимо от их очертания) с расходящимися откосн. крыльями	0,85	0,32	0,59
2	Для мостов без конусов и труб (независимо от их очертания) без расходящихся откосных крыльев, а также для труб, срезанных в плоскости откоса насыпи	0,75	0,27	0,53
3	Для труб с выпущенными из тела насыпи концами, а также для арочных мостов с затопленными пятами	0,70	0,25	0,50

В табл. 81 также приведены данные для расчетных коэфициентов φ, m и k, предложенные инж. Соколовским на основании опытов его и инж. Протодьяконова[2].

Приведенные в обеих таблицах значения расчетных коэфициентов требуют дальнейшего уточнения на основе специальных экспериментальных исследований, прежде всего в натуральных условиях.

Ход расчета отверстий мостиков и безнапорных труб аналогичен рассмотренному выше для отверстий плотин, как это видно из приводимых задач.

Задача 95. На реке с расходом $Q = 30$ *м³/сек* при бытовой глубине $h_б = 1$ *м* намечается построить мостик. Определить отверстие мостика, если перед ним возможно допустить подъем воды на $z = 1{,}5$ *м*, а подход воды к мостику намечено сделать весьма плавным (мост с конусами). Скорость подхода мала.

Принимаем по условиям входа $\varphi' = 0{,}85$. Тогда

$$h = k'H = 0{,}59(h_б + z) = 0{,}59 \cdot 2{,}5 = 1{,}47 \text{ м}.$$

Водослив не затоплен, так как $h > h_б$, и потому находим ширину отверстия по (485) при

$$m' = 0{,}32 \text{ или } M = m'\sqrt{2g} = 1{,}42.$$

Имеем

$$b = \frac{Q}{M(h_б + z)^{3/2}} = \frac{30}{1{,}42 \cdot 2{,}5^{3/2}} = 5{,}4 \text{ м}.$$

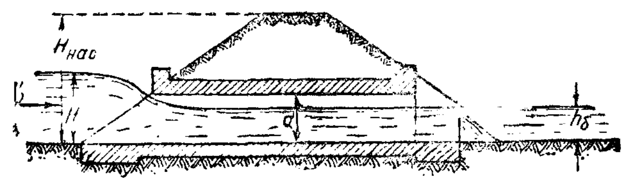
Скорость потока под мостиком будет

$$v = \frac{Q}{bh} = \frac{30}{5{,}4 \cdot 1{,}47} \approx 3{,}8 \text{ м/сек}.$$

Таблица 81

№	Тип оголовка	φ	m	k
1	Оголовок отсутствует, труба срезана в плоскости откоса	0,82	0,31	0,60
2	Оголовок прямой, выступающий из тела насыпи с закругленными краями	0,81	0,31	0,60
3	Оголовок отсутствует, отверстие ограничено вертикальными открылками, расположенными перпендикулярно к оси отверстиями и конусами насыпи, закрывающими низ открылков (мостовое отверстие с конусами)	0,84	0,33	0,62
4	То же, что и выше, но без конусов	0,81	0,33	0,62
5	Оголовок, расходящийся под углом 45° к оси отверстия на всю глубину потока или срезанный в плоскости откоса насыпи	0,89	0,30	0,65

Задача 96. Труба под насыпью железной дороги должна пропустить расход $Q = 4$ *м³/сек*. Труба круглого сечения $d = 1{,}5$ *м*. Глубина за трубой $h_б = 1{,}2$ *м*. Определить глубину воды (напор) перед трубой (фиг. 214). Скорость перед трубой $v_0 = 0{,}6$ *м/сек*. Труба срезана в плоскости откоса насыпи ($\varphi = 0{,}75$).



Фиг. 214

Для определения характера водослива воспользуемся зависимостью

$$\frac{Q^2}{g} = \frac{\omega_{кр}^3}{B_{кр}}.$$

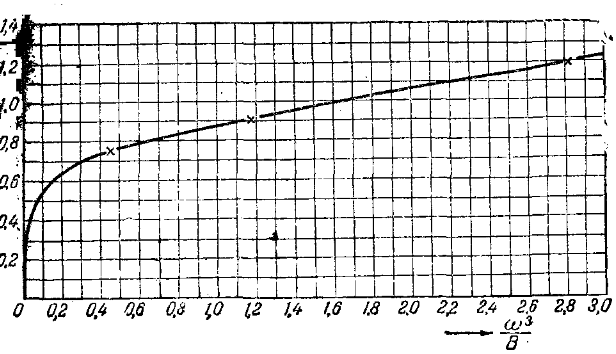
Лучше всего для определения $h_{кр}$ по этой зависимости построить график, данные для которого сводим в табл. 82.

[1] Акад. Н. Н. Павловский, Гидравлический справочник, 1937.
[2] Инж. М. М. Протодьяконов, Протекание воды в малых мостах и трубах, 1933.

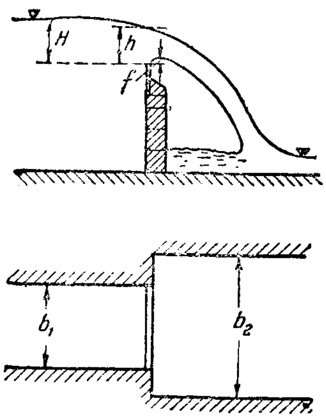
Таблица 82

h	ω	B	ω^3	$\frac{\omega^3}{B}$	Примечание
0,30	0,224	1,199	0,0112	0,009	$\omega=\frac{1}{2}r^2\left(\frac{\pi\alpha}{180}-\sin\alpha\right)$
0,60	0,620	1,469	0,238	0,162	$B=2r\sin\alpha$
0,75	0,882	1,50	0,686	0,458	$\frac{Q^2}{g}=\frac{16}{9,81}=1,64$
0,90	1,20	1,469	1,728	1,171	
1,20	1,50	1,99	3,375	2,819	

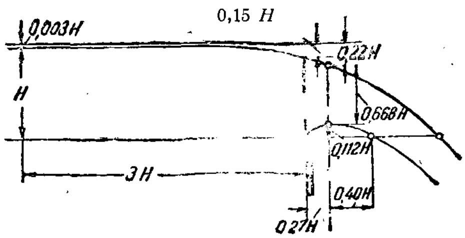
По построенной кривой находим $h_{кр}=1$ *м* (фиг. 215). Так как $h_{кр}<h_б$, то водослив затоплен и потому определяем H_0 из формулы (493).



Фиг. 215



Фиг. 216



Фиг. 217

Имеем

$$H_0=h_б+\frac{Q^2}{\varphi^2 2g\omega^2}=1,2+\frac{4^2}{0,75^2\cdot 19,62\cdot 1,50^2}=1,84 \text{ м}$$

и

$$H=H_0-\frac{v_0}{2g}=1,84-\frac{0,66^2}{19,62}=1,82 \text{ м}.$$

§ 159. Прямоугольный водослив с острым ребром

Водосливы с острым ребром различают без бокового и с боковым сжатием струи, по тому же признаку, какой был применен для водосливов с широким порогом.

Наиболее полно изучены водосливы без бокового сжатия. Первые опыты над ними были проведены Дюбуа[1] (1779), Бидоном[2] (1824). Много численные опыты проведены Понселе и Лебро[3] (1832), Кастели и Д'Обюиссоном[4] (1840), Буало[5] (1845), Фрэнсисом[6] (1852) и особенно Базеном[7] (1898).

Из позднейших опытов многочисленными и тщательными были опыты Ребока[8] (1929).

Струя, переливающаяся через водослив, как это впервые отметил Буало, может принимать различные формы. Базен предложил различать следующие типы струй.

а) Свободная струя. Если в пространство между струей и стенкой свободно проникает воздух и давление под струей равно атмосферному, то струя, переливающаяся через водослив (фиг. 216), носит наименование свободной. Размеры струи, зафиксированные Базеном по данным опытов над водосливами с высотой порога от 0,35 до 1,13 *м*, показаны на фиг. 217. На фигуре видно, что при переливе через ребро водослива горизонт воды пред водосливом понижается таким образом, что на расстояени $3H$ от ребра это понижение составляет 0,003 H, а у самого ребра 0,15 H. Нижняя струя также имеют кривизну, возникающую в результате изменения направления струи. Наибольшего подъема нижняя струя достигает на расстоянии 0,27 H от внутренней грани стенки и составляет 0,112 H. В сечении наибольшего подъема нижней струи толщина струи составляет 0,68 H. В результате подъема нижней струи стенка толщиной, меньшей 0,67 H, не влияет на форму струи, поэтому водосливы, толщина стенок которых $\delta<$ 0,67 H, относятся к водосливам с острым ребром.

Базен, измеряя скорости и давления в различных точках сечения струи с наибольшим подъемом, установил, что распределение давления и скоростей в струе отвечает теореме Бернулли.

Водослив прямоугольного сечения без бокового сжатия со свободной струей будем в дальнейшем называть совершенным водосливом.

---

[1] Du Buat, «Principes d'hydraulique et d'hydrodynamique», Paris, 1779.

[2] Bidone, «Memorie», Torino, 1824.

[3] Poncelet et Lebros, «Expériences hydrauliques», Paris, 1882, 1851.

[4] D'Aubuisson de Voisins, «Traité d'Hydraulique», Paris, 1840.

[5] Boileau, «Traité de la mésure des eaux courantes», Paris, 1854.

[6] J. B. Francis, «Lowell Hydraulic Experiments», Boston, 1855.

[7] Bazin, «Expériences nouvelles sur l'écoulement par déversoir», Paris, 1898.

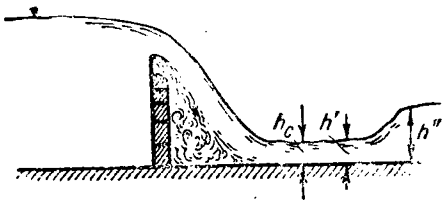
[8] Rehbock, «Zeitschrift d. Ver. deutscher Ingen», 1929.

б) **Струя, отжатая к стенке.** Если в пространство между струей и стенкой не проникает воздух (это будет в том случае, когда прямоугольный канал за водосливной стенкой будет такой же ширины, как и ребро водослива), то в этом пространстве образуется вакуум и струя будет принимать различные формы.

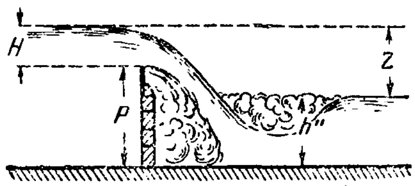
Если $H<0{,}4p$, струя прижмется к стенке, дальность полета ее уменьшится, уменьшится подъем на гребне нижней струи и повысится горизонт воды в пространстве под струей на некоторую высоту над горизонтом нижнего бьефа.

в) **Подтопленная струя.** Если $H>0{,}4p$, струя также будет отжата к стенке и пространство под струей полностью заполнится жидкостью. Жидкость в этом пространстве образует водовороты. Такую струю называют подтопленной и при этом различают: подтопленную струю с отогнанным прыжком (фиг. 218) и покрытую подтопленную струю, если прыжок придвинулся к порогу водослива и покрыл струю (фиг. 219).

г) **Прилипшая струя.** Если ребро водослива строить так, как показано на фиг. 220, при толщине стенки меньше 0,67 H, но значительно



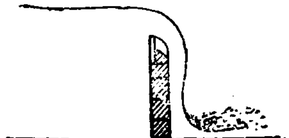
Фиг. 218



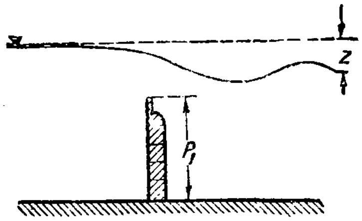
Фиг. 219

больше толщины ребра, то переливающаяся через ребро струя может обычно при малых H прилипнуть к стенке. Между струей и острым ребром на оголовке водослива образуется пространство, заполненное частично воздухом.

д) **Волнистая струя.** Если глубина в нижнем бьефе будет такая, что сопряжение струи про-



Фиг. 220



Фиг. 221

изойдет с надвинутым прыжком (покрытая струя), а z — разность горизонтов в верхнем и нижнем бьефах—будет равно $(0{,}17 \div 0{,}20)p_1$, то струя примет волнистую форму. Верхний и нижний уровни сопрягаются непрерывной волнообразной поверхностью (фиг. 221). Такие водосливы отнесем к затопленным водосливам.

Обычно устраивают водосливы таким образом, чтобы получить устойчивый характер явления. К числу водосливов с устойчивым характером явления относится совершенный водослив. Поэтому рассмотрим наиболее подробно этот тип водослива.

§ 160. Расчетные уравнения совершенного водослива с острым ребром. Метод Полени

Для определения расхода, переливающегося через водослив с острым ребром, Полени[1] (1716) предложил рассматривать водослив как частный случай истечения через большое отверстие, у которого отсутствует верхняя кромка.

Разделяя мысленно это отверстие на ряд горизонтальных полос высотой dz и предполагая, что верхняя кромка отверстия расположена на уровне воды перед водосливом (понижение поверхности воды на ребре рассматриваем как сжатие струи сверху), получим

$$Q=\mu b\int_0^H\sqrt{2gz}\,dz=\frac{2}{3}\mu b\sqrt{2g}\,H^{3/2}. \qquad (494)$$

Опыты Дюбуа[2] (1779) подтвердили эту зависимость и с тех пор формула Полени[3] в несколько измененном виде применяется в гидравлике.

Формула (494) выведена без учета скорости подхода жидкости к водосливу. Как показали опыты Кастелли и Д'Обюиссона, увеличение скорости подхода повышает расход Q.

При учете скорости подхода получаем

$$Q=\mu b\int_0^H\sqrt{2g\left(z+\frac{v_0^2}{2g}\right)}\,dz=$$

$$=\frac{2}{3}\mu b\sqrt{2g}\left[\left(H+\frac{v_0^2}{2g}\right)^{3/2}-\left(\frac{v_0^2}{2g}\right)^{3/2}\right], \qquad (495)$$

где v_0 — средняя скорость потока перед водосливом. Формулу (495) называют формулой Эйтельвейна-Вейсбаха[4].

Если пренебречь в формуле (495) величиной $\left(\frac{v_0^2}{2g}\right)^{3/2}$, как относительно малой, получим

$$Q=\frac{2}{3}\mu b\sqrt{2g}\left(H+\frac{v_0^2}{2g}\right)^{3/2}. \qquad (496)$$

[1] Poleni, «De motu aquae mixtu», Padova, 1717.

[2] Du Buat, «Principes d'hydraulique», Paris, 1779.

[3] Формулу (494), которая впервые была подвергнута экспериментальной проверке Дюбуа, часто называют формулой Дюбуа.

[4] Формула (495) впервые была приведена Eitelwein'ом в «Handbuch der Mechanikfester Körper und Hydraulik», 1823.

Базен[1] считал возможным применение этой формулы с введением коэфициента α, учитывающего неравномерность распределения скоростей по поперечному сечению потока, подходящего к водосливу, т. е.

$$Q=\frac{2}{3}\mu b\sqrt{2g}\left(H+\alpha\frac{v_0^2}{2g}\right)^{3/2}. \qquad (497)$$

Обозначим $\frac{2}{3}\mu$ через m. Очевидно, что m есть коэфициент расхода водослива в формуле Полени без учета скорости подхода.

Перепишем после этого формулу (497) таким образом:

$$Q=m\left(1+\alpha\frac{v_0^2}{2gH}\right)^{3/2}b\sqrt{2g}\,H^{3/2}$$

или, обозначая

$$m_0=m\left(1+\alpha\frac{v_0^2}{2gH}\right)^{3/2}, \qquad (498)$$

получим

$$Q=m_0 b\sqrt{2g}\,H^{5/2}, \qquad (499)$$

где m_0 — коэфициент расхода водослива, учитывающий и скорость подхода.

Коэфициент расхода совершенного водослива m_0 зависит от скорости подхода потока к водосливу, которая изменяется вместе с изменением отношения $\frac{H}{p}$, от характера распределения скорости в сечении, в котором измеряется напор, от характера закругления ребра, а также от поверхностного натяжения.

Попытка учесть все эти факторы при теоретическом определении расхода не увенчалась пока успехом. Поэтому коэфициенты m и m_0 определяются опытным путем.

Отождествление истечения через водослив с истечением через большое отверстие и принятие в формуле (494) для нижнего предела $H_2=0$ теоретически не является строго выдержанным. Но поскольку в конечном итоге коэфициент расхода устанавливается опытным путем, то отдельные приближенные допущения не приводят практически к заметным погрешностям.

Поэтому в дальнейшем мы будем пользоваться формулой (499), имея в виду, что скорость подхода учитывается коэфициентом m_0.

Формула (499) отличается от формулы (488), полученной выше для водослива с широким порогом, иным значением коэфициента расхода и тем, что в формуле (499) скорость подхода учитывается в коэфициенте m_0, а в формуле (488) в напоре H_0.

---

[1] См. сноску[7] на стр. 231.

Определению коэфициента расхода m_0 было посвящено много исследований и в результате предложен ряд эмпирических формул.

В первый период изучения водослива с острым ребром исследователи исходили из формулы Полени, пытаясь определить коэфициент μ. Французский инженер Дюбуа (1779) получил $\mu=0{,}652$.

То же значение для μ получили почти одновременно с Дюбуа английские инженеры Brindley и Smeaton. Eitelwein (1823) нашел среднее значение $\mu=0{,}629$. Bidon на основании своих опытов, проведенных в обсерватории Michelotti, в 1829 г. получил для μ значения от 0,603 до 0,607. Ponselet и Lebros на основании своих опытов, проведенных с 1827 по 1829 г. и Lebros на основании опытов, проведенных с 1829 по 1834 г. (последним было проведено более 2 000 опытов), установили, что коэфициент расхода μ увеличивается с уменьшением напора. При больших напорах они считали возможным принимать $\mu=0{,}610$. Castel и d'Aubuisson (1840 г.) на основании своих 494 опытов с водосливами различной ширины (от 0,01 до 0,74 *м*) пришли к выводу, что коэфициент μ для различных ширин различен и значительно больше для широких водосливов, чем узких. Weisbach (1842), подтвердив правильность формулы (495), показал, что расход водослива зависит от скорости подхода, от отношения ширины водослива к ширине подводящего канала и от отношения напора к высоте порога.

В результате Weisbach предложил специальную формулу для определения μ. Почти одновременно с Вейсбахом Boileau (1845 г.) указал на зависимость коэфициента расхода от высоты порога водослива над дном канала и предложил также специальные формулы для определения μ. Таким образом было установлено, что μ не может быть постоянной величиной и зависит от размера водослива. После этого был предложен ряд формул для определения μ: Francis (1855), Брашман (1861), Bornemann (1870), Fteley и Stearns (1883), Cipolleti (1886), Wex (1888).

Предложенные формулы давали значения для коэфициента расхода, на много отличающиеся друг от друга.

Многочисленные, наиболее полные и всесторонние опыты по изучению водослива и определению коэфициентов m и m_0 были проведены Базеном (1888—1898 гг.).

На основании этих опытов Базен дал такое выражение для m:

$$m=0{,}405+\frac{0{,}003}{H}. \qquad (500)$$

Для определения m_0 разложим $\left(1+\alpha\frac{v_0^2}{2gH}\right)^{3/2}$ по биному Ньютона

$$\left(1+\alpha\frac{v_0^2}{2gH}\right)^{3/2}=1+\frac{3}{2}\alpha\frac{v_0^2}{2gH}+\frac{3}{16}\alpha\frac{v_0^4}{g^2H^2}+\ldots$$

Ограничимся только первыми двумя членами этого ряда, тогда

$$\left(1+\alpha\frac{v_0^2}{2gH}\right)^{3/2}\approx 1+\frac{3}{2}\alpha\frac{v_0^2}{2gH}.$$

Скорость подхода

$$v_0=\frac{q}{H+p}.$$

Выразим q через напор над ребром водослива такой зависимостью

$$q=KH^{3/2}.$$

Тогда

$$v_0 = \frac{K'H^{3/2}}{H+p},$$

а

$$\left(1+\alpha\frac{v_0^2}{2gH}\right)^{3/2} = 1+\frac{3}{2}\alpha\frac{(K'H^{3/2})^2}{2g\,H(H+p)^2} = 1+K\frac{H^2}{(H+p)^2},$$

где

$$K = \frac{3\alpha(K')^2}{2\cdot 2g}.$$

После этого формула (498) перепишется следующим образом:

$$m_0 = m\left[1+K\frac{H^2}{(H+p)^2}\right]. \tag{501}$$

На основании многочисленных опытов с водосливами, имевшими высоту порога p, равную от 0,240 до 0,753 *м*, и напор $H=0{,}05$ *м* $\div$ 0,44 *м*, Базен получил $K=0{,}55$.

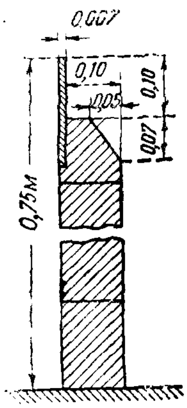
Имея в виду (500), получим окончательно для определения коэфициента расхода формулу Базена:

$$m_0 = \left(0{,}405+\frac{0{,}003}{H}\right)\left[1+0{,}55\left(\frac{H}{H+p}\right)^2\right], \tag{502}$$

где (в метрах):

H — напор над ребром водослива;

p — высота ребра водослива с верховой стороны.



Фиг. 222

Формула Базена получена на основании его опытов над совершенными водосливами шириной $b=0{,}5$, 1 и 2 *м* с высотой ребра $p=0{,}24$ *м* $\div$ 0,75 *м* при напорах от 0,05 *м* до 0,60 *м*, ребро водослива имело форму, показанную на фиг. 222.

Опыты Нэглера[1] (Nagler) (1920) показали, что формула Базена остается справедливой для размеров

$$b\leqslant 2\ м;\ p\leqslant 1{,}13\ м;\ H\leqslant 1{,}24\ м.$$

Формула Базена подвергалась многократной проверке другими исследователями, причем поправки вносились в значение m, оставляя неизменным в формуле (502) второй множитель, учитывающий скорость подхода. Фрезе[2] (F. Frese) на основании собственных опытов и опытов Базена, Кастеля, Понселе и Лебро, Френсиса, Фтили и Стирнса считал возможным придать m_0 такое значение:

$$m_0 = \left(0{,}410+\frac{0{,}0014}{H}\right)\left[1+0{,}55\left(\frac{H}{H+p}\right)^2\right].$$

Эгли[3] (Hegly) предложил для определения m_0 следующую формулу:

$$m_0 = \left(0{,}405+\frac{0{,}0027}{H}\right)\left[1+0{,}55\left(\frac{H}{H+p}\right)^2\right]. \tag{503}$$

[1] F. A. Nagler, „Verification of the Bazin Weir Formula by hydrochemical gaugings" Trans. Amer. Soc. Civ. Engineering, vol. LXXXIII, 1919—1920.

[2] Zeitschrift des Ver. deutscher Ingen., № 44, 1890.

[3] La Houille Blanche, № 178, 1922.

Швейцарский союз инженеров и архитекторов[4] в выработанных им нормах для измерения воды предложил (1924) для m_0 формулу

$$m_0 = 0{,}410\left(1+\frac{1}{1\,000\,H+1{,}6}\right)\left[1+0{,}5\left(\frac{H}{H+p}\right)^2\right].$$

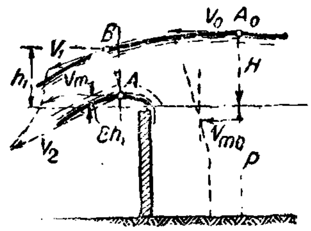
Проф. Ребок[5], возвращаясь несколько раз к данной им в 1900 г. формуле для определения m, предложил (1929) определять расход совершенного водослива по формуле

$$Q = \left(1{,}782+0{,}24\frac{H+0{,}0011}{p}\right)b\,(H+0{,}0011)^{3/2}. \tag{504}$$

Формула Ребока при больших значениях H (в опытах Ребока H достигало до 1,25 *м*) дает расход Q, хорошо совпадающий с расходом, определяемым по формуле Базена, а при малых значениях H дает расход меньше на несколько сотых.

Акад. Г. Проскура[6] (1931) подошел к определению m_0 следующим образом. Применяя уравнение Бернулли, он получает

$$v_1 = \sqrt{2g(H-h_1)+v_0^2}. \tag{505}$$



Фиг. 223

Выражая скорость v_1 и v_0 через среднюю скорость в сечениях A_0 и B (фиг. 223) с помощью соотношений

$$v_{m0} = \alpha_0 v_0 \text{ и } v_{m1} = \alpha_1 v_1,$$

а расход q водослива шириной в 1 *м* при обозначениях (фиг. 223) через

$$q = (H+p)\alpha_0 v_0 = h_1(1-\varepsilon)\alpha_1 v_1,$$

акад. Проскура получает вместо (505) такую зависимость:

$$v_1 = \sqrt{2g(H-h_1)+\frac{q^2}{(H+p)^2\alpha_0^2}}.$$

Тогда расход

$$q = h_1(1-\varepsilon)\alpha_1\sqrt{\frac{2g(H-h_1)}{1-\left[\frac{h_1(1-\varepsilon)}{H+p}\right]^2\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\right)^2}}. \tag{506}$$

Применяя принцип Беланже максимума расхода в таком виде:

$$\frac{dq}{dh_1} = 0,$$

акад. Г. Проскура получает

$$q = m_0\sqrt{2g}\,H^{3/2}$$

и

$$m_0 = \alpha_0\left(1+\frac{p}{H}\right)\sqrt{1-\frac{2}{3}\frac{h_1}{H}}.$$

Из последнего выражения

$$\frac{h_1}{H} = \frac{2}{3}\left[1-\frac{m_0^2}{\alpha_0^2}\left(\frac{H}{H+p}\right)^2\right]$$

[4] Mitteilungen des Amtes Wasserwirtschaft, № 18, 1924.

[5] Zeitschrift des Ver. deutscher Ingen., № 73, 1929.

[6] Акад. Г. Проскура, Теория водослива без бокового сжатия. „Гидротехническое строительство" № 6, 1931.

или, приняв $\alpha_0 \doteq 0{,}90$ и $m = 0{,}435$,

$$\frac{h_1}{H} = \frac{2}{3}\left[1 - 0{,}235\left(\frac{H}{H+p}\right)^2\right]. \tag{507}$$

В результате преобразований уравнений (506) и (507) акад. Проскура, приняв $\varepsilon = 0{,}14$, $\alpha_1 = 1{,}27$, получает для коэфициента расхода m_0 такое выражение:

$$m_0 = 0{,}420 \frac{1 - 0{,}235\left(\frac{H}{H+p}\right)^2}{\sqrt{1 - 1{,}09\left[1 - 0{,}235\left(\frac{H}{H+p}\right)^2\right]^2\left(\frac{H}{H+p}\right)^2}}.$$

Это выражение акад. Проскура приводит затем к виду, данному Ребоком (504) и Базеном (502), и тем самым показывает, что структура формул, данных Базеном и Ребоком, находит теоретическое обоснование.

Акад. Н. Н. Павловский[1] рекомендует определять m_0 по формуле Базена-Эгли (503), которая основана на весьма тщательных и обстоятельных опытах Базена, получивших широкую известность, и исправлена в соответствии с позднейшими исследованиями Эгли — ученика Базена.

Ошибка в определении расхода, в тех условиях, для которых даны приведенные формулы, не превышает 1% и поэтому совершенный водослив имеет широкое применение как водомер.

При применении водосливов в качестве водомеров необходимо соблюдать следующие условия: водослив должен быть без бокового сжатия, под струю должен быть обеспечен доступ воздуха с тем, чтобы под ней не создавалось вакуума, напор H надо замерять на достаточном удалении от ребра водослива, где уже незаметно понижение горизонта воды, т. е. на расстоянии $l \geqslant 3H$.

При выборе размеров водослива необходимо придерживаться пределов, при которых получены формулы, если расход определяется по последним, и стремиться к тому, чтобы $b > 0{,}20$ *м* и $H > 0{,}10$ *м*.

§ 161. Затопленный водослив с острым ребром

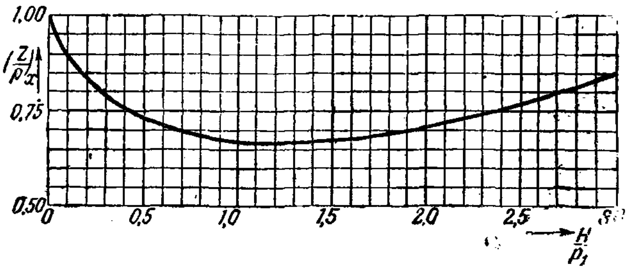
Условия, при которых водослив с острым ребром можно считать затопленным, отличаются от условий затопления водослива с широким порогом.

Водослив с острым ребром будет затопленным, если уровень воды в нижнем бьефе выше ребра водослива, а сопряжение струи происходит в форме надвинутого прыжка.

Базен своими опытами установил, что форма сопряжения струи в нижнем бьефе зависит от относительного перепада $\frac{z}{p_1}$. При этом его наблюдения показали, что сопряжение в форме надвинутого прыжка произойдет, если $\frac{z}{p_1} < 0{,}70$.

Последующие исследоваия проф. Бахметева показали, что надвинутый прыжок происходнт при значениях $\frac{z}{p_1}$, несколько отклоняющихся от указанных Базеном и зависящих от отношения $\frac{H}{p_1}$.

На фиг. 224 приведен график[2], на котором



Фиг. 224

по оси абсцисс отложены значения $\frac{H}{p_1}$, а по оси ординат величины $\left(\frac{z}{p}\right)_x$, меньше которых должно быть $\frac{z}{p_1}$, чтобы сопряжение происходило в форме надвинутого прыжка.

Таким образом для того чтобы считать водослив затопленным, недостаточно одного условия $h_б > p_1$, но необходимо и второе условие $\frac{z}{p_1} < \left(\frac{z}{p}\right)_x$.

Если первое условие не соблюдено, то водослив будет не затоплен, независимо от второго условия.

Если первое условие соблюдено, но $\frac{z}{p_1} > \left(\frac{z}{p}\right)_x$, то сопряжение струи, переливающейся через водослив, произойдет в форме отогнанного прыжка и уровень нижнего бьефа не будет оказывать влияния на характер водослива и он останется незатопленным.

Расход затопленного водослива определяется по формуле (499), но с особым коэфициентом расхода $m_з$, а именно по формуле

$$Q = m_з b\sqrt{2g}\,H^{3/2}. \tag{508}$$

Базен на основании своих опытов предложил такое значение для коэфициента затопленного водослива

$$m_з = m_0 \cdot 1{,}05\left(1 + 0{,}2\frac{h}{p_1}\right)\sqrt[3]{\frac{z}{H}},$$

где H — напор над ребром водослива;

p_1 — высота ребра водослива со стороны нижнего бьефа;

---

[1] Акад. Н. Н. Павловский, Гидравлический справочник, 1937.

[2] Н. Н. Павловский, «Гидравлический справочник». Этот график построен для значений $m = 0{,}42$ и $\varphi = 1$, однако для практических целей им можно пользоваться и для других близких значений коэфициентов.

h — превышение горизонта воды в нижнем бьефе над ребром водослива;

z — разность уровней (перепад) перед водосливом и за водосливом.

Отношение $\frac{m_з}{m_0} = \sigma$ называют коэфициентом затопления и уравнение (508) обычно применяют в виде

$$Q = m_0 \sigma b \sqrt{2g} H^{3/2}, \qquad (509)$$

где коэфициент затопления

$$\sigma = 1{,}05\left(1 + 0{,}2\frac{h}{p_1}\right)\sqrt[3]{\frac{z}{H}}. \qquad (510)$$

§ 162. Влияние бокового сжатия при водосливах с острым ребром

Если ширина ребра водослива меньше ширины подводящего канала, то вступающая на ребро струя будет претерпевать боковое сжатие. Благодаря этому расход такого водослива будет меньше, чем совершенного водослива при одинаковых напоре H и ширине ребра b.

Если пользоваться для определения расхода водослива с боковым сжатием формулой (499), то вместо коэфициента расхода m_0 нужно применять другой меньший коэфициент m_c.

Первая попытка выразить коэфициент расхода в зависимости от степени сжатия принадлежит Вейсбаху (1842). Такую же попытку сделал Redtenbacher (1848). Френсис[1] (1855) на основании своих опытов предложил вводить в формулу (499) вместо ширины водослива b ширину сжатой струи

$$b_c = b - 0{,}1nH, \qquad (511)$$

где n — число боковых сжатий, в обыкновенном водосливе равное двум.

Эгли предложил (1922) на основании своих опытов такую зависимость для определения m_c:

$$m_c = \left[0{,}405 + \frac{0{,}0027}{H} - 0{,}030\frac{B-b}{B}\right]\left[1 + 0{,}55\left(\frac{b}{B}\right)^2\left(\frac{H}{H+p}\right)^2\right], \qquad (512)$$

где B — ширина прямоугольного подводящего канала, а остальные обозначения такие же, как и в формуле Базена-Эгли для совершенного водослива.

Формула (512) при $b=B$ превращается в формулу (503).

Водосливы с боковым сжатием устраиваются всегда таким образом, что под струю свободно попадает воздух, т. е. ширина отводящего лотка больше ширины ребра водослива, таким образом водослив с боковым сжатием не может быть подтоплен.

[1] J. B. Francis, Lowell Hydraulic Experiments Boston, 1855.

Если водослив с боковым сжатием затоплен, то его расход определяется по формуле (499) с коэфициентом расхода m_c по формуле Эгли (512) и коэфициентом затопления σ по формуле (510).

Задача 97. Определить расход через прямоугольный водослив, если ширина водосливного ребра $b = 0{,}50$ *м*, высота ребра $p_1 = 0{,}35$ *м*, напор $H = 0{,}40$ *м*. Водослив без бокового сжатия с свободным доступом воздуха под струю.

Определяем расход по формуле

$$Q = m_0 b \sqrt{2g} H^{3/2}.$$

Вычисляя m_0 по формуле Базена-Эгли (503):

$$m_0 = \left(0{,}405 + \frac{0{,}0027}{0{,}40}\right)\left[1 + 0{,}55\left(\frac{0{,}40}{0{,}40 + 0{,}35}\right)^2\right] = 0{,}47,$$

получаем

$$Q = 0{,}47 \cdot 0{,}50 \cdot 4{,}43 \cdot 0{,}40^{3/2} = 0{,}26 \ м^3/сек.$$

Задача 98. Определить расход того же водослива, если глубина за водосливом $h_б = 0{,}45$ *м*.

Так как уровень воды в нижнем бьефе выше ребра водослива, то последний будет не затоплен только при условии, что сопряжение в нижнем бьефе будет происходить с отогнанным прыжком.

Пользуясь графиком фиг. 224, устанавливаем, что для $\frac{H}{p_1} = \frac{0{,}40}{0{,}35} = 1{,}14$, отогнанный прыжок возникает при значении $\left(\frac{z}{p}\right)_x = 0{,}67$.

Для рассматриваемого же водослива имеем

$$\frac{z}{p_1} = \frac{H + p_1 - h_б}{p_1} = \frac{0{,}30}{0{,}35} = 0{,}85 > 0{,}67.$$

Следовательно, струя сопрягается с отогнанным прыжком, водослив останется незатопленным и расход сохранит свое значение, установленное в предыдущей задаче.

Задача 99. Определить расход того же водослива, если

$$h_б = 0{,}55 \ м.$$

В этом случае при том же значении $\left(\frac{z}{p}\right)_x = 0{,}67$ имеем уже другую величину

$$\frac{z}{p_1} = \frac{H + p_1 - h_б}{p_1} = \frac{0{,}40 + 0{,}35 - 0{,}55}{0{,}35} = 0{,}57 < 0{,}67.$$

Значит водослив затоплен и в формулу расхода нужно ввести коэфициент затопления согласно (510).

Имеем

$$\sigma = 1{,}05\left(1 + 0{,}2\frac{h}{p_1}\right)\sqrt[3]{\frac{z}{H}} = 1{,}05\left(1 + 0{,}2\frac{0{,}20}{0{,}35}\right)\sqrt[3]{\frac{0{,}20}{0{,}40}} = 0{,}93$$

и, следовательно,

$$Q = \sigma m_0 b \sqrt{2g} H^{3/2} = 0{,}93 \cdot 0{,}47 \cdot 0{,}50 \cdot 4{,}43 \cdot 0{,}40^{3/2} = 0{,}242 \ м^3/сек.$$

Задача 100. Определить расход того же водослива, если он установлен в лотке шириной $B = 1{,}2$ *м*.

Имеем водослив совершенный с боковым сжатием.

Определяем коэфициент расхода по формуле Эгли (512):

$$m_c = \left(0{,}405 + \frac{0{,}0027}{0{,}40} - 0{,}030\,\frac{1{,}2-0{,}5}{1{,}2}\right)\left[1 + 0{,}55\,\frac{0{,}50^2}{1{,}2^2}\left(\frac{0{,}40}{0{,}40+0{,}35}\right)^2\right] = 0{,}407.$$

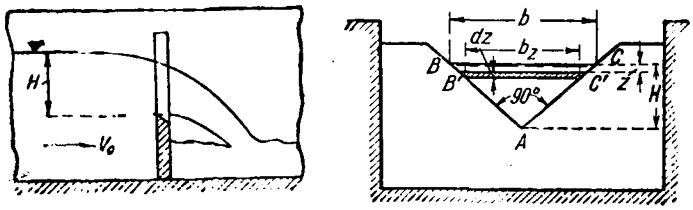
Тогда искомый расход будет

$$Q = 0{,}407\cdot 0{,}50\cdot 4{,}43\cdot 0{,}40^{3/2} = 0{,}224\ м^3/сек.$$

§ 163. Треугольный водослив с острым ребром

Для определения сравнительно небольших расходов удобно пользоваться треугольными водосливами.

Для установления уравнения расхода рассмотрим такой водослив, показанный на фиг. 225.



Фиг. 225

Разобьем сливную струю в плоскости стенки на элементарные полоски высотой dz и шириной b_z. Тогда расход через водослив будет

$$Q = \int_0^H \mu b_z dz \sqrt{2gz}.$$

Из подобия треугольников ABC и $AB'C'$ видно, что

$$\frac{b_z}{b} = \frac{H-z}{H} \quad \text{или} \quad b_z = b\,\frac{H-z}{H}.$$

Тогда

$$Q = \int_0^H \mu b\,\frac{H-z}{H}\sqrt{2gz}\,dz = \frac{\mu b\sqrt{2g}}{H}\int_0^H (H-z)\sqrt{z}\,dz$$

или

$$Q = \mu b\sqrt{2g}\left[\frac{2}{3}H^{3/2} - \frac{2}{5}H^{3/2}\right] = \frac{4}{15}\mu b\sqrt{2g}H^{3/2}.$$

Если угол при вершине A равен 90° (так называемый водослив Томсона), то $b = 2H$ и

$$Q = \frac{4}{15}\mu 2H\sqrt{2g}H^{3/2} = \frac{8}{15}\mu\sqrt{2g}H^{5/2} = MH^{5/2},$$

где $M = \frac{8}{15}\mu\sqrt{2g}.$

Томсон (Thomson)[1], исследуя треугольные водосливы при напорах от 0,05 до 0,25 $м$, установил, что для треугольного водослива с прямым углом при вершине $\mu = 0{,}593$ и, следовательно,

$$M = \frac{8}{15}\,0{,}593\sqrt{2g} = 1{,}4.$$

Тогда получаем для водослива Томсона

$$Q = 1{,}4H^{5/2}. \tag{513}$$

Данные ряда исследователей показывают, что водослив Томсона является достаточно точным измерителем расхода.

Поэтому такие водосливы находят широкое применение как водомеры в гидравлических лабораториях.

§ 164. Трапецоидальные водосливы

Трапецоидальные водосливы применяются в тех случаях, когда надо измерить расходы, большие тех, какие могут пропускать треугольные водосливы, и когда не представляется возможным установить прямоугольный водослив без бокового сжатия.

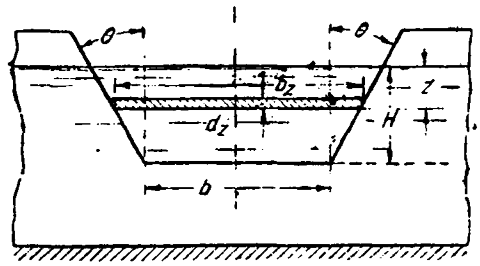
Рассмотрим водослив на фиг. 226

Разобьем сливную струю в плоскости стенки на элементарные полоски высотой dz и шириной b_z.

Тогда расход через водослив будет

$$Q = \int_0^H \mu\, b_z\, dz\sqrt{2gz}. \tag{514}$$

Из фиг. 226 видно, что $b_z = b + 2(H-z)\mathrm{tg}\,\theta$, где b — ширина ребра водослива.



Фиг. 226

Тогда вместо (514) имеем:

$$Q = \int_0^H \mu\, b\sqrt{2gz}\,dz + \int_0^H \mu\, 2\,\mathrm{tg}\,\theta\, H\sqrt{2gz}\,dz - \int_0^H \mu\, 2\,\mathrm{tg}\,\theta\, z\sqrt{2gz}\,dz = \frac{2}{3}\mu b\sqrt{2g}H^{3/2} +$$

$$+ \frac{2}{3}\mu\, 2\,\mathrm{tg}\,\theta\sqrt{2g}\,H^{5/2} - \frac{2}{5}\mu\, 2\,\mathrm{tg}\,\theta\sqrt{2g}\,H^{5/2} =$$

$$= \frac{2}{3}\mu b\sqrt{2g}H^{3/2} + \frac{8}{51}\mu\,\mathrm{tg}\,\theta\sqrt{2g}H^{5/2} =$$

$$= \frac{2}{3}\mu\left(b + \frac{4}{5}\mathrm{tg}\,\theta\, H\right)\sqrt{2g}H^{3/2}$$

[1] British Association Report, 1858, Civil Engineer and Architects Journal, 24 (1861), 26 (1863).

или, обозначив $\frac{2}{3}\mu$ через m,

$$Q = m(b + 0,8\,\mathrm{tg}\,\theta\,H)\sqrt{2g}\,H^{3/2}. \qquad (515)$$

Чиполетти[1] установил, что при трапецоидальном водосливе с $\mathrm{tg}\,\theta = \frac{1}{4}$ нет необходимости вводить поправки на боковое сжатие струи, оставляя в формуле полную ширину понизу b.

В самом деле, при $\mathrm{tg}\,\theta = \frac{1}{4}$ и наличии бокового сжатия формула (515) перепишется так:

$$Q = m(b_c + 0,2\,H)\sqrt{2g}\,H^{3/2}, \qquad (516)$$

где b_c — ширина струи с учетом сжатия. По данным Френсиса имеем

$$b_c = b - 0,2\,H$$

и, следовательно, вместо формулы (516) получим

$$Q = m(b - 0,2H + 0,2\,H)\sqrt{2g}\,H^{3/2} = m\,b\sqrt{2g}\,H^{3/2}.$$

По опытам Чиполетти $m = 0,42$, и тогда для рассматриваемого частного случая имеем

$$Q = 1,86\,b\,H^{3/2}. \qquad (517)$$

Трапецоидальный водослив, в котором $\mathrm{tg}\,\theta = \frac{1}{4}$, называемый водосливом Чиполетти, находит широкое применение для измерения расходов в ирригационных каналах.

Для правильной работы водослива Чиполетти нужно соблюдать следующие условия:

1. Водослив должен быть не затоплен, под струю должен свободно проникать воздух.
2. Ширина понизу должна быть не менее тройного напора, т. е. $b \geqslant 3H$.
3. Скорость подхода должна быть достаточно мала, чтобы ею возможно было бы пренебречь.
4. Ребро порога водослива должно быть выше дна подводящего канала, т. е. водослив должен иметь сжатие струи по дну.

§ 165. Параболический водослив

Параболические водосливы представляют собой вырезы в тонкой стенке по параболической кривой

$$x^2 = 2py,$$

где p — параметр параболы.

Исследования такого водослива, произведенные Греве (Greve)[2] (1921), показали, что коэфициент расхода достаточно устойчив при заданном очертании водослива.

Уравнение расхода параболического водослива может быть получено тем же методом Полени, который был применен при выводе уравнения прямоугольного, треугольного и трапецоидального водосливов, и имеет такой вид:

$$Q = \frac{\mu\pi\sqrt{2p}}{4}\sqrt{2g}\,H^2.$$

обозначая

$$M = \frac{\mu\pi\sqrt{2p}}{4}\sqrt{2g},$$

имеем

$$Q = M\,H^2.$$

По опытам Греве, который исследовал параболические водосливы с параметром $p = 0,25$ *см* $\div$ 5 *см* при напоре $H = 0,03$ *м* $\div$ 0,6 *м*, величина $M = 0,293\,p^{0,488}$, где p — в сантиметрах.

Параболический водослив является хорошим в смысле точности водомером и может применяться на узких лотках при измерении расходов различной величины.

При применении параболических водосливов необходимо следить, чтобы водослив был не затоплен.

§ 166. Водосливы практических профилей

Водосливы практических профилей представляют собой гидротехнические сооружения—плотины самой различной формы, обусловленной целевым назначением водослива и конструктивными соображениями. Такие водосливы с гидравлической точки зрения занимают промежуточное положение между водосливами с широким порогом и водосливами с острым ребром.

Расчетное уравнение для незатопленных водосливов практического профиля без бокового сжатия будет аналогично формуле (484) $Q = mb\sqrt{2g}\,H_0^{3/2}$ и отличается лишь численным значением коэфициента расхода m.

По форме очертания порога водосливы практического профиля делятся на две группы:

1. Водосливы криволинейного профиля (фиг. 227).
2. Водосливы прямолинейного профиля (фиг. 228).

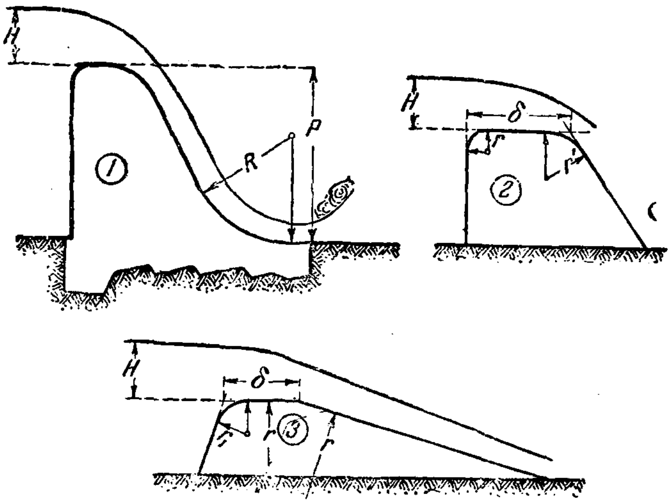
Водосливы криволинейного профиля получили наибольшее распространение в практике гидротехнического строительства и поэтому приковывали внимание многих авторов (Дюбуа, Лебро, Френсиса, Фтили и Стирнса, Рафтера и Фримена, Базена, Гершеля, Хортона, Паркера, Ребока, Бахметева, Кригра, Сабанеева, Бовина, Пузыревского, Казанской, Шимеми, Празиля, Павловского и др.).

По очертанию профиля такие водосливы делятся на вакуумные и безвакуумные.

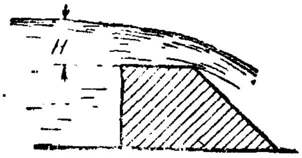
Если пространство между свободной струей совершенного водослива с острым ребром и стен-

[1] C. Cipoletti, Canal Villoresi, Mailand, 1887.

[2] F. Greve, Parabolic Weirs. Trans. of Amer. Soc. of Civil Engineers, Vol. LXXXIV, 1921.



Фиг. 227



Фиг. 228

кой порога заполнить неразмываемым материалом, например, бетоном, то получим профиль водослива, совпадающий с нижним очертанием свободной струи. Профиль с таким очертанием будет безвакуумным.

Если между поверхностью профиля водослива и переливающейся через него струей будет свободное пространство, то в этом пространстве образуется вакуум. Такой профиль водослива называют вакуумным.

Наличие вакуума под струей на гребне водослива увеличивает его пропускную способность. Вместе с тем вакуум несколько увеличивает расчетную нагрузку на плотину. Неустойчивый при этом характер переливающейся струи приводит к вибрации плотины, преждевременному разрушению облицовки плотин и в частности к коррозии бетона.

Поэтому при проектировании водосливных плотин в большинстве случаев предпочитают безвакуумные профили.

Безвакуумный профиль, построенный по форме свободно падающей струи, отличается от других безвакуумных профилей наибольшей пропускной способностью, так как благодаря плавности этого профиля коэфициент сопротивления при вступлении потока на гребень водослива и величина сжатия струи получаются минимальными.

Для построения безвакуумных профилей предложено несколько методов, которые в основном базируются на классических опытах Базена по изучению формы свободной струи, переливающейся через гребень водослива с острым ребром.

Методы построения профиля водослива можно разделить на две группы:

а) Методы, в основу которых положены уравнения движения центра тяжести струи как свободно падающего тела с заданной начальной скоростью на гребне.

К ним относятся методы: Базена[1], Кригера[2], Шимеми[3], Бовина[4], Пузыревского[5] и др.

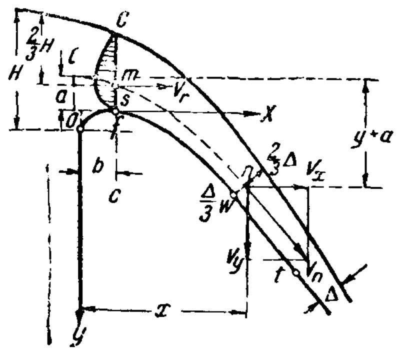
б) Методы, при которых исходят из потенциального характера движения струи, переливающейся через гребень водослива.

К ним относятся методы: Блазиуса[6], Форхгеймера[7], Ричардсона[8], Празиля[9], Лаука[10].

Из упомянутых методов рассмотрим методы Базена, Кригера и Лаука.

§ 167. Методы Базена и Кригера для построения безвакуумного профиля водослива

Первые исследования криволинейных профилей, имеющих очертание свободно падающей струи, были проведены Базеном. Исследованные им водосливы были сравнительно невелики ($p \leqslant 0{,}75$ *м*, $H \leqslant 0{,}4$ *м*). На основе этих опытов и опытов с водосливом со свободной струей Базен предложил следующий метод построения профиля плотин.



Фиг. 229

За профиль плотины принимается нижнее очертание струи, свободно падающей с острого гребня водослива (фиг. 229).

Очертание этой струи находится по траектории lmn центра тяжести ее, от которой нижняя граница струи отстоит по наблюдениям Базена на расстоянии, равном одной трети толщины струи Δ.

Траектория центра тяжести струи строится для частицы жидкости, которая проходит через точку m, находящуюся в сечении c-c на глубине $\frac{2}{3} H$ от свободной поверхности перед водо-

[1] Bazin, Expériences nouvelles sur l'écoulement en déversoir, 1898.

[2] Creager, Engineering for Masonry Dams, New York. Second ed., 1929.

[3] Scimemi E. Sulla forma della sene fracemente, L'Energia Elettrica № 4, 1930.

[4] В. Г. Бовин, Вопросы использования гидравлической энергии, 1925.

[5] С различными методами построения профилей можно ознакомиться по работе А. С. Офицерова, Профиль водосливных плотин, 1935.

[6] Zeitschrift für Mathematik und Phys., 58, 1910.

[7] Ф. Форхгеймер, Гидравлика, 1935.

[8] Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 1920.

[9] F. Prášil, Technische Hydrodynamik, 1926.

[10] A. Lauck, „Der Ueberfall über ein wehr Z.A.M.M. 1925 Heft 1.

сливом, т. е. предполагается, что центр тяжести в сечении струи совпадает с центром гидростатического давления.

Если принять начало координат в точке O, то траектория названной частицы может быть построена по уравнениям

$$\left.\begin{aligned} x-b&=v_x t, \\ y+a&=\frac{1}{2}gt^2, \end{aligned}\right\} \tag{518}$$

где v_x — горизонтальная составляющая скорости; a и b — параметры параболы с вертикальной осью.

При этом предполагается, что горизонтальная составляющая скорости частицы, которую она приобретает в точке m, находящейся под напором $\frac{2}{3}H$, остается постоянной на всем пути перемещения частицы.

Вертикальная составляющая скорости не зависит от напора H и определяется уравнением

$$v_y=\sqrt{2g(y+a)}.$$

Скорость в любой точке падающей струи

$$v_n=\sqrt{v_x^2+v_y^2}.$$

Зная скорость v_n и расход, переливающийся через водослив, можно найти толщину струи

$$\Delta=\frac{Q}{bv_n}.$$

Если теперь построить кривую, которая будет отстоять в любом сечении струи на расстоянии $\frac{1}{3}\Delta$ от траектории центра струи, то получим нижнее очертание струи или, что то же, очертание профиля водослива.

Координаты нижнего очертания струи, уменьшенные в H раз, дают независимо от величины напора H одну и ту же кривую.

Эпюра горизонтальной составляющей скорости в сечении c-c также приводится к эпюре скоростей при единичном напоре через деление на напор H.

Это дает возможность, располагая координатами очертания профиля при $H_1=1$, определять простым их умножением на заданный напор H координаты профиля водослива для заданного напора.

Кригер[1], исходя из собственных опытов и опытов Базена, установил, что при $H=1$ для системы уравнений (518)

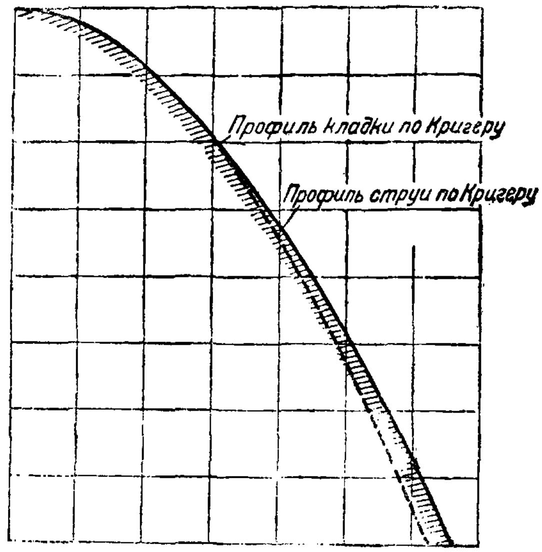
$$\begin{aligned} a&=+0{,}261\ \text{м}, \\ b&=-0{,}063\ \text{м} \\ v_x&=+3{,}66\ \text{м/сек}. \end{aligned}$$

Тогда уравнения (518) принимают такой вид:

$$x^2=2{,}732\,y. \tag{519}$$

Это уравнение и служит для построения траектории падения центра тяжести струи.

При указанных параметрах параболы Кригер получает профиль, несколько врезающийся в струю (на фиг. 230 струя показана пунктиром), что исключает возможность образования вакуума под струей.



Фиг. 230

В табл. 83 даны координаты профиля и координаты струи, соответствующие напору $H=1$, для двух типов плотин[2], показанных на фиг. 231.

Таблица 83

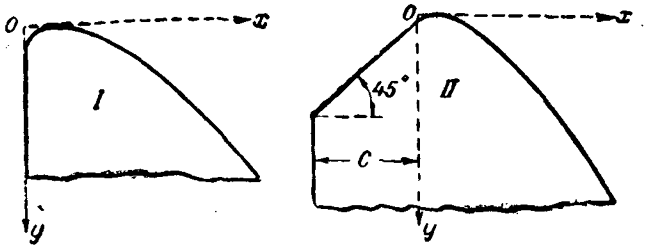
Координаты для построения профиля водослива по Кригеру

x	Форма I: y: Очертание кладки	Форма I: y: Очертания струи: Внешняя поверхность	Форма I: y: Очертания струи: Внутренняя поверхность	Форма II: y: Очертание кладки	Форма II: y: Очертания струи: Внешняя поверхность	Форма II: y: Очертания струи: Внутренняя поверхность
0,0	0,126	—0,831	0,126	0,043	—0,781	0 043
0,1	0,036	—0,803	0,036	0,010	—0,756	0,010
0,2	0,007	—0,772	0,007	0,000	—0,724	0,000
0,3	0,000	—0,740	0,000	0,005	—0,689	0,005
0,4	0,007	—0,702	0,007	0,023	—0,648	0,023
0,6	0,060	—0,620	0,063	0,090	—0,552	0,090
0,8	0,042	—0,511	0,153	0,189	—0,435	0,193
1,0	0,257	—0,380	0,257	0,321	—0,293	0,333
1,2	0,397	—0,219	0,410	0,480	—0,120	0,500
1,4	0,565	—0,030	0,590	0,665	—0,075	0,700
1,7	0,870	0,305	0,920	0,992	0,438	1,05
2,0	1,22	0,693	1,31	1,377	0,860	1,47
2,5	1,96	1,50	2,10	2,14	1,71	2,34
3,0	2,82	2,50	3,11	3,06	2,76	3,39
3,5	3,82	3,66	4,26	4,08	4,00	4,61
4,0	4,93	5,00	5,61	5,24	5,42	6,04
4,5	6,22	6,54	7,15	6,58	7,07	7,61

Примечание. Координаты даны для „полного" напора $H_0=1$ (в любых мерах); при других величинах напора следует все числа таблицы умножить на H_0.

[1] См. предыдущую сноску.

[2] Профиль II принимается обычно в тех случаях, когда необходимо усилить устойчивость плотины, а также для лучшего пропуска льда через плотину.



Фиг. 231

Координаты в таблице даны на участке $x \leqslant 1{,}5$ на основе экспериментальных замеров, а на участке $x > 1{,}5$ по уравнению (519).

§ 168. Метод Лаука для построения безвакуумного профиля водослива

В 1925 г. Лаук (Lauck)[1] дал теоретическое решение задачи о движении жидкости через водослив с острым ребром.

В 1927 г. проф. В. Н. Кузнецов указал на возможность применения этого решения к построению практического профиля водослива.

В основу теоретического решения Лаука положены следующие предпосылки: движение жидкости, переливающейся через водослив с острым ребром,— плоскопараллельное (плоская задача), установившееся, потенциальное и происходит под влиянием только силы тяжести и атмосферного давления.

К такому движению применимо уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial^2 y}=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}=0,$$

где Φ — потенциал скорости, а Ψ — функция тока.

При решении этого уравнения должны удовлетворяться и граничные условия.

Первое граничное условие вытекает из уравнения Бернулли. Скорость частицы жидкости на верхней и нижней границах струи, как на свободной поверхности жидкости, находящейся под влиянием атмосферного давления, как это вытекает из уравнения Бернулли, равна

$$v=\sqrt{2gh},$$

а так как

$$v=\frac{\partial\Phi}{\partial s}, \text{ то } \frac{\partial\Phi}{\partial s}=\sqrt{2gh}.$$

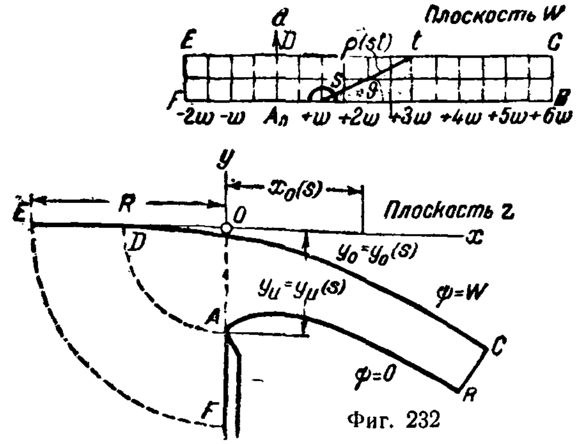
Так как уравнение Лапласа однородно, то оно остается в силе при всякой конечной величине, кратной Φ.

Поэтому можно искать решение вопроса, принимая

$$\frac{\partial\Phi}{\partial s}=\sqrt{h}.$$

Далее известно, что разность значений Ψ на двух смежных линиях тока $\Psi_1-\Psi_2=\text{const}$ дает количество жидкости, протекающей между ними в единицу времени.

Если на нижней границе струи положить $\Psi=0$, то на верхней имеем $\Psi_n=W$, где W будет единичный расход, переливающийся через водослив (фиг. 232).



Фиг. 232

$\Phi=\text{const}$ и $\Psi=\text{const}$ образуют семейство кривых (гидродинамическую сетку) в области струи, которую примем за плоскость комплексного переменного $z=x+iy$. На другой плоскости $W=\Phi+i\Psi$ это семейство кривых можно представить при помощи конформного отображения в виде прямоугольной сетки, а всю область струи в виде прямоугольника.

Если установить аналитическую связь между $z(x, y)$ и $W(\Phi, \Psi)$, то получим значения $\Phi(x, y)$ и $\Psi(x, y)$ на плоскости z и тем самым задача будет решена до конца.

Такая задача может быть выполнена с помощью интегральной формулы Коши

$$z(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{z(t)dt}{t-s},$$

где $z(s)$ выражает значение функции для точки s (фиг. 232 сверху);

$\int_c$ обозначает, что интегрирование совершается по всему контуру c области z;

$z(t)$ выражает частное значение, которое $z(s)$ принимает для точки границы c;

$t-s$ представляет собой расстояние движущейся при интегрировании граничной точки до точки s внутри данной области;

$i=\sqrt{-1}$.

Формула Коши дает возможность определить $z(s)$ внутри области через значение $z(t)$ на границе данной области и переносить конформное изображение с одной плоскости на другую.

При установлении граничных контуров области струи в плоскости z Лаук предположил, что глубина перед стенкой бесконечно велика. Стенка FA будет частью граничного контура. Точка E, в которой верхний бьеф не изменяет еще своего уровня, принята за начало очертания струи. Поток при вступлении на ребро движется радиально, тогда эквипотенциаль, являясь частью окружности, пройдет через точки E и F. Эта эквипотенциаль принимается также за часть граничного контура струи. Справа граничным контуром будет линия BC. Предполагается, что на этой линии происходит выравнивание скоростей и она выступает в качестве эквипотенциали.

Остальной частью контура рассматриваемой области являются неизвестные пока очертания верхней и нижней струи.

На плоскости W вся область струи с указанными граничными контурами представлена в виде прямоугольника.

Соответствующие точки двух плоскостей обозначены одинаковыми буквами.

Интересуясь очертанием струи, переливающейся через водослив, ограничимся решением на границе.

[1] Метод Лаука подробно изложен в работе Г. Т. Дмитриева, О построении теоретического профиля водосливной плотины по Лауку. Информационно-технический бюллетень Гидротехгеоинститута № 11 и 12, 1932, а также в работе А. Севко, К расчету шахтных водосливов, 1938.

Если точку s взять на контуре прямоугольника, то формула Коши примет такой вид:

$$z(s)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\square}\frac{z(t)}{t-s}\,dt.$$

Здесь через t обозначены граничные точки прямоугольника, знак $\square$ обозначает интегрирование вдоль контура прямоугольника.

Из этого уравнения можно получить $x(s)$ и $y(s)$ для границ переливающейся струи.

Имея в виду, что

$$z(s)=x(s)+iy(s),$$

а комплексное переменное

$$t-s=\rho(s,t)e^{\vartheta(s,\,t)},$$

где $\rho(s,t)$ — модуль, а $\vartheta(s,t)$ — амплитуда, получим

$$\pi x(s)=\int\limits_{\square}x(t)d\vartheta(s,t)-\int\limits_{\square}y(t)d\ln\rho(s,t), \qquad (520)$$

$$\pi y(s)=\int\limits_{\square}x(t)d\ln\rho(s,t)+\int\limits_{\square}y(t)d\vartheta(s,t). \qquad (521)$$

Из граничных условий получаем ряд формул для $x(t)$. На интересующей нас свободной поверхности и на линии BC

$$x(t)=\int\limits_{\beta}^{t}\sqrt{\frac{1}{h(t)}-\left(\frac{dh(t)}{dt}\right)^2}\,dt. \qquad (522)$$

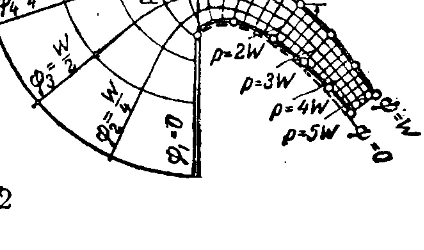
В дальнейшем для решения потребуются только формулы (521) и (522).

Ход приближенного решения уравнения (521) следующий: задаваясь приблизительно значениями функции $y(t)$ (на границе) и вычисляя $x(t)$ по формуле (522), находим $y(s)$. Если бы значения $y(t)$ совпадали с значениями $y(s)$, то $y(t)$ и было бы искомым решением с точностью до постоянного множителя.

В противном случае в качестве второго приближения берут значения $y(t)$, промежуточные между взятыми и полученными, находят снова $y(s)$ и т. д., до тех пор пока получаемая разница не будет находиться в пределах точности применяемых приемов вычисления. Попутно по формуле (520) определяется $x(s)$.

В качестве начальных данных для первого приближения Лаук принимает $y(t)$ из опытов Базена, т. е. принимает очертание нижней струи по Базену. Предполагая, что точка s перемещается по контуру прямоугольника, принимая последовательно значения: $-2W$, $-W$, $-\frac{1}{2}W$, 0, $+\frac{1}{4}W$, $+\frac{1}{2}W$, $+\ldots 3W+\ldots+6W$, Лаук путем вычислений с пятикратным приближением дал значения $x(s)$ и $y(s)$ для указанных значений s.

На фиг. 233 показано очертание струи, построенное по изложенному методу, и сетка, построенная Лауком по способу численного решения Runge. Пунктиром нанесена для сравнения форма струи по Базену. Верхняя граница струи сливается с вычисленной.



Фиг. 233

Пользуясь теоретическим решением Лаука, Г. Т. Дмитриев[1] определил координаты x и y для построения практического профиля водослива, приводимые в табл. 84.

Таблица 84

Координаты для построения профиля плотин по методу Лаука

x	y	x	y
0,000	0,166	0,788	0,131
0,068	0,064	0,893	0,186
0,182	0,011	0,992	0,248
0,300	0,000	1,305	0,463
0,434	0,013	1,601	0,741
0,558	0,043	1,848	1,021
0,675	0,082	2,026	1,324

Примечание. Координаты даны для полного напора $H_0=1$ (в любых мерах); при других величинах напора следует все числа таблиц умножить на H_0.

§ 169. Оценка безвакуумных профилей и форма сопряжения их с нижним бьефом

В гидротехнической практике наибольшее распространение из безвакуумных профилей получил профиль Кригера. Многочисленными испытаниями в гидравлических лабораториях установлены положительные качества такого профиля: безвакуумность и высокий коэфициент расхода.

Профиль Лаука не получил еще распространения и менее исследован. Объясняется это тем, что координаты для построения этого профиля еще мало известны. Между тем первые небольшие исследования профилей водосливных плотин, проведенные В. С. Истоминой[2], показывают, что профиль Лаука не уступает по своим качествам профилю Кригера. Коэфициент расхода профиля Лаука, полученный Истоминой, оказался несколько выше коэфициента расхода профиля Кригера. Объясняется это тем, что профиль Лаука имеет более плавный скругленный вход.

Если построить профиль плотины заданной высоты по координатам Кригера или Лаука, то водосливная поверхность не будет плавно сопрягаться с дном нижнего бьефа. В таком случае флютбет плотины или дно русла за плотиной воспринимали бы удары падающей струи и живая сила последней затрачивалась бы на размывание русла.

Во избежание этого нижнюю часть плотины сопрягают с дном чаще всего с помощью кривой определенного радиуса так, чтобы придать струе горизонтальное или близкое к нему направление.

[1] Г. Т. Дмитриев, см. предыдущую сноску.

[2] В. С. Истомина, Исследование профиля водосливной плотины, очерченного по Лауку по модели плотины Ниазбекской ГЭС (р. Чирчик), Информационно-технический бюллетень № 11 и 12, Гидротехгеоинститут, 1932.

В табл. 85 приведены значения сопрягающих радиусов r для различных H и p, данные Кригером.

Таблица 85

Значения сопрягающих радиусов r для плотин по Кригеру (размеры в метрах)

p \ H	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	3,0	4,2	5,4	6,5	7,5	8,5	9,6	10,6	11,6
20	4,0	6,0	7,8	8,9	10,0	11,0	12,2	13,3	14,3
30	4,5	7,5	9,7	11,0	12,4	13,5	14,7	15,8	16,8
40	4,7	8,4	11,0	13,0	14,5	15,8	17,0	18,0	19,0
50	4,8	8,8	12,2	14,5	16,5	18,0	19,2	20,3	21,3
60	4,9	8,9	13,0	15,5	18,0	20,0	21,2	22,2	23,2

Для плотин высотой $p<10$ *м* можно принять по примеру американских инженеров $r=0,5\ p$.

При выборе r надо учитывать, что при большем радиусе лед и вообще плавающие тела будут свободнее проноситься, не задерживаясь у подошвы плотины.

§ 170. Коэфициенты расхода водосливов с криволинейными безвакуумными профилями

Коэфициент расхода водослива с криволинейным профилем зависит от очертания гребня этого профиля, напора H, относительной шероховатости на участках соприкосновения струи с плотиной, поверхностного натяжения и от отношения $\frac{H}{p}$.

Опыты Камишеля и Эскандa[1] над моделями плотин, выполненными в различных масштабах от 1 : 20 до 1 : 300, показывают, что коэфициент расхода уменьшается при уменьшении масштаба модели. Причина этого явления заключается в увеличении влияния вязкости жидкости и капиллярных сил. Опыты проф. А. Н. Ахутина[2] показывают, что влияние вязкости становится ничтожным только при числе Рейнольдса порядка 20 000 ÷ 40 000.

Эйснер[3] исследовал профиль водослива на пяти моделях разных масштабов при одинаковой абсолютной шероховатости. Опыты показали, что при укрупнении масштаба влияние относительной шероховатости $\frac{\Delta}{H}$ на пропускную способность водослива существенно уменьшается.

Учесть влияние указанных выше факторов можно только опытным путем, поэтому коэфициенты расхода водосливов практической формы устанавливаются опытом.

[1] Escande, Revue générale d'électricité, 1929.

[2] Инж. Н. П. Розанов, Вакуумные водосливные плотины, 1940, под ред. проф. А. Н. Ахутина.

[3] Ф. Эйснер. Экспериментальная гидравлика сооружений и открытых русел, 1937.

Для водосливов, очерченных по координатам Кригера (фиг. 231), коэфициент расхода имеет следующее значение.

Для профиля I $m=0,49$.

Для профиля II $m=0,48$.

Профиль Лаука по указанным выше исследованиям Истоминой имеет $m=0,491$.

Если профиль очерчен по данным опытов Базена или по координатам Кригера, коэфициент расхода можно определить, пользуясь формулой Базена, полученной им для водосливов с острым ребром, преобразовав ее следующим образом.

Обозначим напор над острым ребром через H_1, а коэфициент расхода попрежнему через m_0.

По данным Базена

$$H_1=1,125\,H.$$

Тогда

$$Q=m_0 b\sqrt{2g}\,H_1^{3/2}=mb\sqrt{2g}\,(1,125\,H)^{3/2},$$

откуда

$$m=1,195\ m_0.$$

Подставляя в формулу (502) для m_0 значение H, отвечающее водосливу практического профиля и имея в виду, что $H+p=H_1+p_1$, получим

$$m=1,195\left(0,405+\frac{0,003}{1,125H}\right)\left[1+0,55\ \frac{1,125^2H^2}{(H+p)^2}\right]$$

или

$$m=\left(0,484+\frac{0,0032}{H}\right)\left[1+0,697\left(\frac{H}{H+p}\right)^2\right]. \quad (523)$$

Приведенные значения коэфициентов расхода отвечают профилям, построенным по так называемому проектному напору $H_{пр}$, который при проектировании безвакуумных профилей принимается равным максимальному напору.

При работе водослива с меньшим напором очертание профиля плотины уже не будет отвечать нижнему очертанию струи и коэфициент расхода будет иметь иное значение.

Акад. Павловский[1] рекомендует для высоких профилей (к которым относят плотины высотой $p>5$ *м*) определять коэфициент расхода по такой зависимости:

1. Для профиля I

$$m=0,49\left(0,785+0,25\ \frac{H}{H_{пр}}\right) \quad (524)$$

при

$$\frac{H}{H_{пр}}\leqslant 0,8$$

и

$$m=0,49\left(0,88+0,12\sqrt{\frac{H}{H_{пр}}}\right) \quad (525)$$

при

$$\frac{H}{H_{пр}}>0,80.$$

[1] Акад. Н. Н. Павловский, Гидравлический справочник, 1937.

2. Для профиля II

$$m=0{,}48\left(0{,}805+0{,}31\frac{H}{H_{np}}\right) \qquad (526)$$

при

$$\frac{H}{H_{np}}=0{,}1\div0{,}5$$

и

$$m=0{,}48\sqrt[20]{\frac{H}{H_{np}}} \qquad (527)$$

при

$$\frac{H}{H_{np}}>0{,}5.$$

Окончательный выбор коэфициента расхода при проектировании ответственных плотин должен решаться на основе специальных лабораторных исследований.

Задача 101. Определить расход, переливающийся через плотину практического профиля, очерченного по координатам Кригера при расчетном напоре над гребнем плотины $H=2$ *м*. Ширина гребня плотины $b=45$ *м*. Скорость в реке перед плотиной $v_0=0{,}90$ *м/сек*. Водослив не затоплен.

Принимая $m=0{,}49$ и не учитывая бокового сжатия, определяем расход

$$Q=mb\sqrt{2g}\,H_0^{3/2}=0{,}49\cdot45\cdot4{,}43\left(2+\frac{0{,}9^2}{19{,}62}\right)^{3/2}=$$
$$=284{,}2\ \text{м}^3/\text{сек}.$$

Задача 102. Определить, какой расход пройдет через ту же плотину при напоре $H=1{,}2$ *м*. Высота плотины $p>5$ *м*.

Определим соотношение

$$\frac{H}{H_{np}}=\frac{1{,}2}{2}=0{,}6.$$

При этом соотношении определим коэфициент расхода по формуле (524):

$$m=0{,}49\,(0{,}785+0{,}25\cdot0{,}6)=0{,}458.$$

Тогда

$$Q=0{,}458\cdot45\sqrt{19{,}62}\left(1{,}2+\frac{0{,}9^2}{19{,}62}\right)^{3/2}=122{,}8\ \text{м}^3/\text{сек}.$$

Задача 103. Определить ширину водосливной плотины, через которую должен быть пропущен расход $Q=400$ *м³/сек* при напоре $H=2{,}6$ *м*. Водослив не затоплен. Профиль водослива очерчен по координатам Лаука. Принимая коэфициент водослива $m=0{,}49$ и не учитывая бокового сжатия, находим

$$b=\frac{Q}{m\sqrt{2g}\,H_0^{3/2}}=\frac{400}{0{,}49\cdot4{,}43\cdot2{,}6^{3/2}}\approx44\ \text{м}.$$

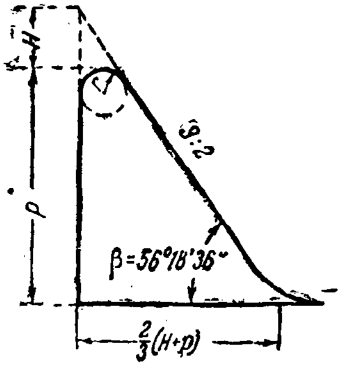
§ 171. Водосливы с криволинейным вакуумным профилем

Если сливной поверхности водослива практического профиля придать, как указывалось выше, очертание, не совпадающее с очертанием нижней границы струи, и этим создать условия для образования вакуума в пространстве между струей и плотиной, то получится так называемый вакуумный профиль плотины. Образование вакуума есть результат захвата и увлечения (отсасывания) воздуха струей воды из пространства между плотиной и струей.

Вакуумный профиль обладает при одном и том же напоре над гребнем большей пропускной способностью, чем безвакуумный, т. е. отличается большим коэфициентом расхода.

Это основное преимущество вакуумных профилей и приковывает в последние годы к ним внимание гидравликов и гидротехников.

Однако до сих пор вакуумные профили изучены и распространены мало и, как указывалось выше, в практике стремятся к проектированию плотин с безвакуумным профилем. Объясняется это прежде всего указанными выше недостатками, которыми обладают вакуумные профили.



Фиг. 234

Специального вакуумного профиля до сих пор не предложено. Однако, как показали исследования А. Абросимовой и Н. Розанова[1], к вакуумным профилям можно отнести профиль Ребока (фиг. 234). Своими исследованиями Ребок установил, что очертание гребня водослива оказывает большое влияние на величину коэфициента расхода. Он исследовал гребни с круговым и эллиптическим очертанием. Для коэфициента расхода, входящего в расчетную формулу, им предложена зависимость

$$m=\frac{2}{3}\left[0{,}312+\sqrt{0{,}30-0{,}01\left(5-\frac{H}{r}\right)^2}+0{,}09\frac{H}{p}\right], \qquad (528)$$

где H — напор на водосливе;

p — высота водослива со стороны верхнего бьефа;

r — радиус кривизны гребня.

Формула применима в пределах

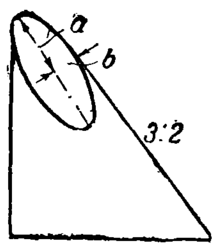
$$a\geqslant r;\quad r>0{,}02\ \text{м};\quad \frac{H}{r}\leqslant\left(6-\frac{20r}{p+3r}\right).$$

Для эллиптического очертания гребня (фиг. 235) радиус кривизны r заменяется приведенным радиусом

$$r_{np}=a\left(\frac{4{,}57}{\frac{2a}{b}+1}+\frac{a}{20b}-0{,}573\right),$$

где a — полуось эллипса, параллельная низовой грани водослива;

b — полуось эллипса, перпендикулярная низовой грани водослива.



Фиг. 235

Профиль вакуумного водослива должен удовлетворять следующим требованиям:

1. Обладать при расчетном напоре H_{np} максимальным коэфициентом расхода.

2. Иметь по возможности минимальный коэфициент вакуумности σ_0, под которым по предложению инж. Розанова понимается отношение максимального вакуума на оголовке к напору, т. е.

$$\sigma_0=\frac{(h_{vac})_{\max}}{H_0}.$$

[1] Инж. Н. П. Розанов, Вакуумные водосливные плотины. Под редакцией проф. А. Н. Ахутина, 1940.

В дальнейшем изложении мы будем базироваться на материалах и выводах, излагаемых в данной работе.

3. Зона вакуума должна охватывать оголовок (гребень) плотины, не распространяясь на сливную поверхность ниже гребня.

4. Гарантировать отсутствие возможности прорыва воздуха под струю.

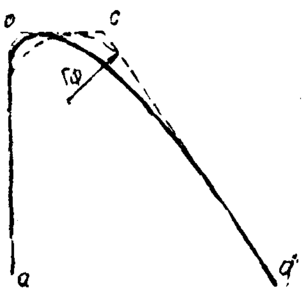
5. Не иметь значительных пульсаций давлений и вакуума на профиле.

Все эти требования преследуют цель облегчения профиля при достаточной статической устойчивости и высокой пропускной способности его.

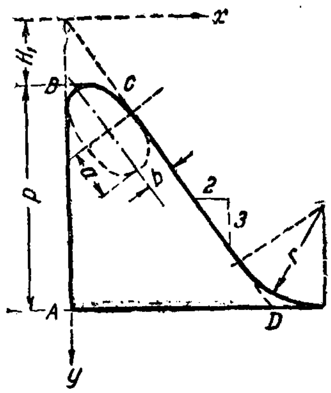
Лабораторные исследования Абросимовой, а затем и Розанова, проведенные под руководством проф. Ахутина, показали, что из всех других криволинейных профилей профиль Ребока с эллиптическим очертанием гребня при $\frac{a}{b}=2$ и $\frac{a}{b}=3$ лучше всего удовлетворяет этим требованиям.

Исследования Розанова показали, что названный профиль Ребока при $\frac{p}{r_ф}=9{,}4$ имел коэфициент расхода $m = 0{,}552 \div 0{,}554$. Здесь $r_ф$ — так называемый фиктивный радиус, под которым понимается радиус окружности, вписанной в контур $abcd$ (фиг. 236). При $\frac{a}{b} = 1{,}0$ фиктивный радиус является действительным радиусом гребня.

Основной вакуумный профиль водослива показан на фиг. 237.



Фиг. 236



Фиг. 237

В табл. 86 даются координаты для построения профиля при $r_ф = 1$ и разных значениях $\frac{a}{b}$.

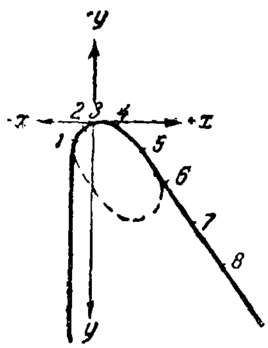
Таблица 86

№ точек	$\frac{a}{b}=1{,}0$		$\frac{a}{b}=2{,}0$		$\frac{a}{b}=3{,}0$	
	x	y	x	y	x	y
1	−1,000	1,000	−0,692	0,830	−0,472	0,629
2	−0,756	0,330	−0,560	0,248	−0,368	0,189
3	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
4	0,585	0,208	0,629	0,226	0,541	0,173
5	1,377	1,302	1,242	0,730	1,022	0,503
6	2,434	2,896	1,682	1,278	1,456	0,803
7	3,670	4,717	2,327	2,246	1,855	1,320
8	5,462	7,424	2,956	3,189	2,240	1,792
9	—	—	4,450	5,430	2,580	2,270
10	—	—	5,299	6,704	3,193	3,214
11	—	—	—	—	4,685	5,453
12	—	—	—	—	5,561	6,767

При этом оси координат и номера точек располагаются так, как показано на фиг. 238.

Для профилей с гребнем, фиктивный радиус которых отличен от единицы, необходимо табличные координаты, которые приведены для $r_ф = 1$, умножить на заданное значение $r_ф$.

Сопряжение сливной поверхности с дном нижнего бьефа осуществляется так же, как и в профилях Кригера.



Фиг. 238

По данным ВОДГЕО[1] коэфициент расхода зависит от $\frac{H_0}{r_ф}$ и имеет значения, приводимые в табл. 87.

Таблица 87

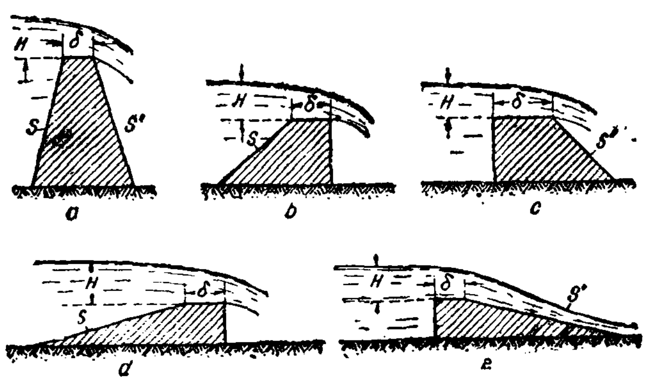
$\frac{H_0}{r_ф}$	Коэфициент расхода m при $\frac{a}{b}=1$	$\frac{a}{b}=2$	$\frac{a}{b}=3$	$\frac{H_0}{r_ф}$	Коэфициент расхода m при $\frac{a}{b}=1$	$\frac{a}{b}=2$	$\frac{a}{b}=3$
1,00	0,486	0,487	0,495	2,40	0,538	0,554	0,557
1,20	0,497	0,500	0,509	2,60	0,543	0,560	0,562
1,40	0,506	0,512	0,520	2,80	0,549	0,565	0,566
1,60	0,513	0,521	0,530	3,00	0,553	0,569	0,570
1,80	0,521	0,531	0,537	3,20	0,557	0,573	0,575
2,00	0,526	0,540	0,544	3,40	0,560	0,577	0,577
2,20	0,533	0,548	0,551				

Из таблицы видно, что значения m увеличиваются с ростом отношения $\frac{H_0}{r_ф}$.

Однако при выборе $\frac{H_0}{r_ф}$ необходимо исходить из допустимого максимального значения вакуума и обеспечения статической устойчивости профиля.

§ 172. Водосливы прямолинейных профилей

К группе водосливов с прямолинейными профилями можно отнести водосливы: трапецоидальных (фиг. 239), прямоугольных (фиг. 240) и полигональных (фиг. 241) профилей.



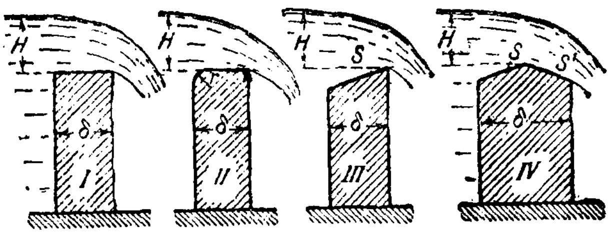
Фиг. 239

[1] Всесоюзный научно-исследовательский институт водоснабжения, канализации, гидротехнических сооружений и инженерной гидрогеологии.

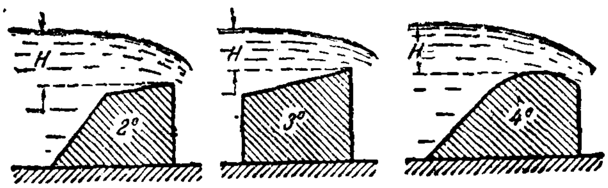
Каждая из этих подгрупп может быть подразделена на типы. Величина коэфициента расхода будет различна для каждой из указанной подгруппы и для отдельных типов.

Из водосливов прямолинейных профилей в гидротехнической практике преимущественное место занимают водосливы трапецоидальных и прямоугольных профилей.

Водосливы трапецоидального профиля. Такие водосливы находят широкое применение в гидротехнической практике как бревенчатые, досчатые и фашинные плотины.



Фиг. 240



Фиг.241

Коэфициент расхода трапецоидальных профилей зависит от высоты плотины, формы профиля (наклона граней) и относительного напора.

Разнообразие форм профилей (типов плотин) не дает возможности установить простую зависимость между коэфициентом расхода и указанными элементами водослива. В табл. 88 приведены опытные данные о значении коэфициента m для наиболее часто встречающихся в практике типов трапецоидальных профилей[1].

Водосливы прямоугольных профилей. В практике это будут преимущественно толстые стенки с переливающейся через них водой—шандорные щиты, пороги отверстий регуляторов, устраиваемые для перехватывания донных наносов, водосливные стенки, регуляторы и т. д.

Исходя из изложенной выше классификации, к рассматриваемой подгруппе относят водосливы, толщина порога которых

$$0{,}67\,H < \delta < 2H.$$

По этому признаку водосливы прямоугольных профилей занимают промежуточное положение между водосливами с острым ребром ($\delta < 0{,}67\,H$) и водосливами с широким порогом ($\delta > 2\,H$).

Таблица 88

Значения коэфициента расхода m для трапецоидальных водосливов

Тип профиля		Тип напора $\frac{H}{\delta} > 2$	Тип напора $\frac{H}{\delta} = 2 \div 1$	Тип напора $\frac{H}{\delta} = 1 \div 0{,}5$
Высокие $p > 5$ *м*	$S \leqslant 0{,}5$ $S' \leqslant 0{,}5$* (фиг. 239 a)	0,43—0,42	0,40—0,38	0,36—0,35
Средние $2\,м < p < 5\,м$	С наклонной верховой гранью (фиг. 239 b)			
	$S=1$	0,44	0,42	0,40
	$S=2$	0,43	0,41	0,39
	С наклонной низовой гранью (фиг. 239 c)			
	$S'=1$	0,42	0,40	0,38—0,37
	$S'=2$	0,40	0,38	0,36—0,35
Низкие (растянутые) $p < 2\,м$	С развитой понурной частью (фиг. 239 d)			
	$S=3$	0,42	0,40	0,38
	$S=5$	0,40	0,38	0,36
	$S=10$	0,38	0,36	**
	С развитой водосливной частью (фиг. 239 e)			
	$S'=3$	0,39	0,37	0,35
	$S'=5$	0,375	0,35	**
	$S'=10$	0,35	0,35	**

* S и S' - котангенсы угла наклона граней к горизонту.
** Водослив с широким порогом.

[1] Акад. Н. Н. Павловский, Гидравлический справочник, 1937 г.

Для водосливов этой подгруппы, показанных на фиг. 240, можно в среднем считать такие коэфициенты расхода:

$\frac{H}{\delta}$	0,10	0,33	0,5	1,0	1,5	1,5—2,0
m	0,30	0,32	0,33	0,37	0,41	0,42

§ 173. Учет бокового сжатия при вступлении струи на гребень водослива

Наличие береговых устоев или бычков снижает пропускную способность плотин. Это вызывается проявлением сил сопротивления при обтекании устоев и бычков и главным образом сжатием потока, переливающегося через водослив.

Для учета этих факторов при расчете водослива принимают не полную геометрическую ширину водослива b, а ширину b_c в сжатом сечении. Тогда

$$Q = m b_c \sqrt{2g}\, H_0^{3/2}. \qquad (529)$$

Для определения b_c пользуются формулой Френсиса-Кригера[1]:

$$b_c = b - 0{,}1\, n \zeta H_0$$

или

$$b_c = \varepsilon b = \left(1 - 0{,}1\, n \zeta \frac{H_0}{b}\right) b,$$

где n — число мест сжатия потока;

ζ — коэфициент формы устоев или быков, который введен в формулу по предложению Кригера;

H_0 — напор над гребнем водослива с учетом скорости подхода;

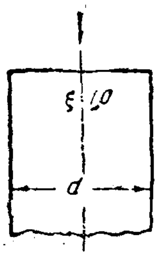
ε — коэфициент сжатия.

По данным Кригера коэфициент ζ имеет следующие значения:

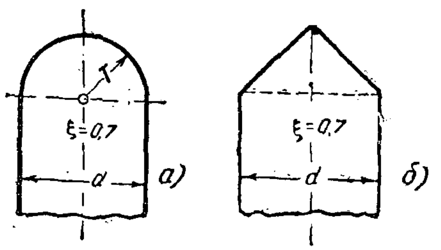
а) для бычков прямоугольной формы (фиг. 242) $\zeta = 1{,}0$;

б) полуциркульной или заостренной формы (фиг. 243) $\zeta = 0{,}7$;

в) криволинейной заостренной формы (фиг. 244) $\zeta = 0{,}4$.



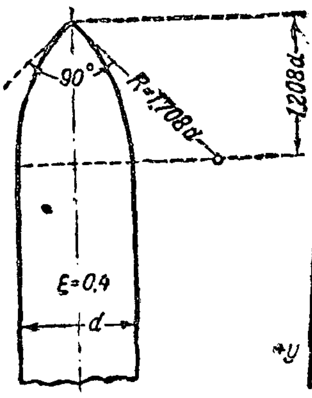
Фиг. 242



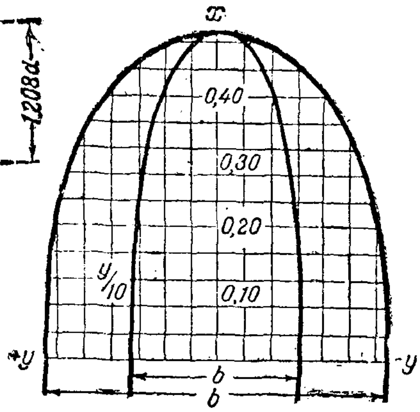
Фиг. 243

Коэфициент ζ зависит от положения быков по отношению к напорной грани плотины и, как показывают опыты Офицерова[2] при выдвижении быков вперед по отношению к напорной грани коэфициент ζ уменьшается.

Исследования Эсканда и Сабатэ[3] показали, что для быков обтекаемой формы, очерченных по Жуковскому (фиг. 245), коэфициент $\zeta = 0$.



Фиг. 244



Фиг. 245

Если вместо быков применяется ряд стоек, которые разбивают плотину на мелкие пролеты, то для коэфициента сжатия можно взять приближенные значения

$$\varepsilon = 0{,}85 \div 0{,}95$$

в зависимости от степени стеснения потока этими стойками и плавности их очертания[4].

Задача 104. Определить ширину водосливной плотины при следующих данных. Напор над гребнем плотины $H = 2{,}4$ *м*, расход $Q = 80$ *м³/сек*. Береговые устои имеют прямоугольную форму. Водослив не затоплен. Коэфициент расхода проектируемого водослива $m = 0{,}49$.

Определяем сначала b_c, пользуясь формулой (529),

$$b_c = \frac{Q}{m\sqrt{2g}H_0^{3/2}} = \frac{80}{0{,}49 \cdot 4{,}43 \cdot 2{,}4^{3/2}} = 9{,}85.$$

Геометрическая ширина (ширина в свету) будет

$$b = b_c + 0{,}1\, n \zeta H_0.$$

В данном случае $n = 2$; $\zeta = 1$.

Тогда

$$b = 9{,}85 + 0{,}2 \cdot 2{,}4 = 10{,}33 \text{ м}.$$

Задача 105. Определить напор над гребнем плотины шириной $b = 40$ *м* при пропуске $Q = 120$ *м³/сек*. Скорость перед плотиной $v_0 = 0{,}8$ *м/сек*.

Профиль плотины — прямолинейной трапецоидальной формы с коэфициентом расхода $m = 0{,}42$. Водослив с боковым сжатием.

Так как водослив с боковым сжатием и b_c зависит от H_0, то задачу решаем методом последовательного приближения.

[1] Creager, Engineering for Masonry Dams New-York, 1929.

[2] А. С. Офицеров, Быки и пропускная способность водослива, „Гидротехническое строительство" № 4, 1940 (см. также в этой работе координаты для быков обтекаемой формы).

[3] Escande et Sabathe, Expériences sur les piles de barrages déversoirs à profil aérodynamique et à contractions nulles, La Houille blanche № 235—236, 1936.

[4] Акад. Н. Н. Павловский, Гидравлический справочник, 1937.

Принимаем $b_c = b$, тогда

$$H_0 = \left(\frac{Q}{mb\sqrt{2g}}\right)^{3/2} = \left(\frac{120}{0{,}42\cdot40\cdot4{,}43}\right)^{3/2} = 1{,}35 \text{ м}.$$

Определяем теперь b_c, приняв $\zeta = 0{,}7$ (устои заостренной формы):

$$b_c = b - 0{,}1\, n\, \zeta\, H_0 = 40 - 0{,}2\cdot0{,}7\cdot1{,}35 \approx 39{,}81 \text{ м}.$$

Найдем H_0 во втором приближении, принимая $b_c = 39{,}81$:

$$H_0 = \left(\frac{120}{0{,}42\cdot39{,}81\cdot4{,}43}\right)^{2/3} = 1{,}37.$$

В дальнейшем уточнении H_0 нет необходимости, и таким образом напор над гребнем будет равен

$$H = H_0 - \frac{v_0^2}{2g} = 1{,}37 - \frac{0{,}8^2}{19{,}62} = 1{,}34 \text{ м}.$$

§ 174. Затопление водосливов практического профиля

Рассмотренные в предыдущих параграфах расчетные уравнения водосливов практического профиля относятся к водосливам незатопленным, т. е. к таким случаям, когда расположение горизонта в нижнем бьефе не мешает истечению через гребень сооружения.

Нижний бьеф при сопряжении с отогнанным прыжком не влияет на пропускную способность водослива независимо от того, на какой высоте устанавливается горизонт жидкости в отводящем русле.

Затопление водослива и связанное с этим уменьшение его пропускной способности, следовательно, имеют место при одновременном наличии следующих двух условий:

1. Отметка горизонта жидкости в нижнем бьефе выше отметки гребня водослива ($z_н > z_{гр}$).

2. Сопряжение потока за сооружением происходит в форме надвинутого прыжка[1].

Уменьшение пропускной способности водослива при его затоплении учитывается в формуле расхода введением специального коэфициента затопления $\sigma < 1$, и уравнение затопленного водослива практического профиля принимает вид

$$Q = \sigma m b\sqrt{2g}\, H_0^{3/2}. \qquad (530)$$

Уменьшение пропускной способности водослива, учитываемое величиной σ, зависит от так называемого относительного затопления $\frac{\Delta}{H}$, где $\Delta = z_н - z_{гр}$.

На основании специальных опытных исследований, проведенных U. S. Deep Waterway Board (1900 г.), американские инженеры принимают значения σ, приводимые в табл. 89 в зависимости от величины относительного затопления $\frac{\Delta}{H}$.

[1] При предварительных расчетах форму сопряжения потока в нижнем бьефе можно определять, пользуясь критерием Базена. Подробно теория сопряжения потока рассматривается в главе XXII.

Таблица 89[2]

$\frac{\Delta}{H}$	σ	$\frac{\Delta}{H}$	σ	$\frac{\Delta}{H}$	σ
0	1	0,50	0,937	0,82	0,752
0,05	0,996	0,55	0,923	0,84	0,725
0,10	0,991	0,60	0,907	0,85	0,709
0,15	0,986	0,65	0,886	0,86	0,696
0,20	0,981	0,70	0,856	0,88	0,661
0,25	0,976	0,72	0,843	0,90	0,621
0,30	0,970	0,74	0,830	0,92	0,562
0,35	0,963	0,75	0,821	0,94	0,487
0,40	0,956	0,76	0,815	0,95	0,438
0,45	0,948	0,78	0,797	1,00	0
		0,80	0,778		

Задача 106. Определить расход, переливающийся через плотину практического профиля, очерченного по координатам Кригера. Дано $H = 2$ м; ширина гребня $b = 45$ м; скорость потока в реке перед плотиной $v_0 = 0{,}9$ м/сек; высота плотины со стороны нижнего бьефа $p_1 = 3{,}8$ м; бытовая глубина в нижнем бьефе $h_б = 4{,}2$ м. Береговые устои имеют прямоугольную форму ($\zeta = 1$).

Для рассматриваемой плотины можно принять коэфициент расхода $m = 0{,}49$ и коэфициент скорости $\varphi = 0{,}95$. Напор, исправленный на скорость подхода, будет

$$H_0 = H + \frac{v_0^2}{2g} = 2{,}04 \text{ м}.$$

Так как по условию задачи горизонт воды в нижнем бьефе выше гребня водослива, то водослив может быть затоплен, если сопряжение в нижнем бьефе произойдет с надвинутым прыжком.

Для выяснения характера сопряжения потока воспользуемся критерием Базена. Для этого установим отношение величины перепада водослива к высоте стенки падения

$$\frac{z}{p} = \frac{H_0 + p - h_б}{p} = \frac{2{,}04 + 3{,}8 - 4{,}2}{3{,}8} = 0{,}44.$$

Так как полученное отношение оказалось меньше 0,7, то, в соответствии с критерием Базена, сопряжение будет происходить с надвинутым прыжком и водослив будет затоплен.

Тогда для определения расхода водослива нужно знать величину коэфициента затопления σ, зависящую, как уже отмечалось, от значения относительного затопления, равного в данном случае

$$\frac{\Delta}{H} = \frac{4{,}2 - 3{,}8}{2} = 0{,}20.$$

При таком относительном затоплении устанавливаем по табл. 89, что

$$\sigma = 0{,}981.$$

Наконец, учтем боковое сжатие и определим

$$b_c = b - 0{,}1\cdot n\cdot\zeta\cdot H_0 = 45 - 0{,}1\cdot2\cdot1\cdot2{,}04 = 44{,}6 \text{ м}.$$

[2] Инж. А. Офицеров («Гидравлика водосливов», 1938) на основе своих опытных данных считает, что значения σ в табл. 89 несколько занижены: от 2% при $\frac{\Delta}{H} = 0{,}30$ до 7,7% при $\frac{\Delta}{H} = 0{,}70$.

Тогда искомый расход водослива будет

$$Q = \sigma m b_c \sqrt{2g} H_0^{3/2} = 0{,}981 \cdot 0{,}49 \cdot 44{,}6 \cdot 4{,}43 \cdot 2{,}04^{3/2} = 283 \text{ м}^3/\text{сек}.$$

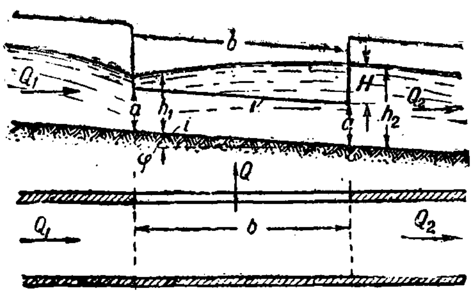
§ 175. Боковые и косые водосливы

Водосливы, которые выделяются по расположению их в плане в особую группу, а именно боковые и косые водосливы, могут иметь профиль порога как практической формы, так и в виде тонкой стенки или широкого порога.

Боковой водослив. Так называют водослив, ребро которого расположено параллельно направлению течения потока. Такого типа водосливы применяются иногда при боковом водозаборе и боковом водосбросе. При этом имеется в виду водослив, через который переливается только часть расхода, идущего по главному руслу.

Боковой водослив с тонкой стенкой подвергался экспериментальным исследованиям Н. Энгельсом в Дрезденской гидротехнической лаборатории[1] (1923). Исследования проводились в прямоугольном лотке, в боковой стенке которого устраивался водослив в виде выреза; ребро водослива было параллельно линии дна канала. Ширина лотка при опытах была от $b = 0{,}2$ *м* до $b = 2$ *м*, длина ребра водослива от 0,5 до 10,0 *м*; расход в канале перед водосливом $Q = 15 \div 180$ *л/сек*.

Опытами установлено, что напор над водосливом изменяется вдоль ребра таким образом, что в начале ребра он меньше, чем в конце его. Кривая свободной поверхности в канале перед водосливом и над ребром водослива имеет вид, показанный на фиг. 246.



Фиг. 246

Для определения расхода через боковой незатопленный водослив Н. Энгельс предложил формулу

$$Q = m\sqrt{2g}\sqrt[3]{b^{2,5}H^5},$$

где b — длина ребра водослива (ширина сливного фронта);

H — напор над ребром водослива в конце его, который принимается равным $H = h_2 - a$ (фиг. 246);

h_2 — глубина потока при равномерном движении в канале за водосливом;

a — высота расположения ребра водослива над дном канала.

Эту формулу можно представить в таком виде[2]:

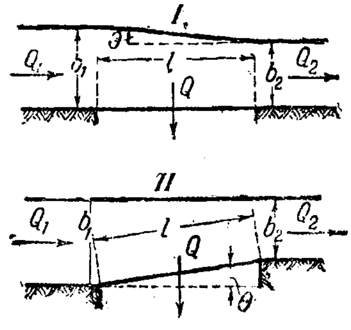
$$Q = \sigma_{бок} m b \sqrt{2g} H^{3/2},$$

где $\sigma_{бок}$ — поправочный коэфициент бокового водослива.

$$\sigma_{бок} = \left(\frac{H}{b}\right)^{1/6}.$$

При расположении бокового водослива по схеме, показанной на фиг. 247, когда $\operatorname{tg}\theta$ находится в пределах $\frac{1}{40} \div \frac{1}{3}$,

$$\sigma_{бок} = \left(\frac{H}{l}\right)^{0,1}.$$



Фиг. 247

Косые водосливы. Косым называют водослив, ребро которого располагается под углом $\theta < 90°$ к направлению движения потока.

Расход через косой незатопленный водослив определяется по формуле

$$Q = \sigma_{кос} m b \sqrt{2g} H^{3/2},$$

где $\sigma_{кос}$ — поправочный коэфициент на косину водослива;

m — обычный коэфициент расхода для водослива, расположенного нормально к оси движения;

b — длина ребра водослива.

Изучение количественного влияния косины водослива на его пропускную способность проводилось недостаточно. Из более надежных данных можно привести данные Буало[3] (1854 г.), который на основании своих опытов дает значения для $\sigma_{кос}$ в зависимости от угла косины θ, приведенные в табл. 90.

Таблица 90

Значения $\sigma_{кос}$ для косых водосливов

$\theta°$	15°	30°	45°	60°	90°
$\sigma_{кос}$	0,86	0,91	0,94	0,96	1,0

По сравнению с нормально расположенным водосливом, косой водослив в том же русле имеет бóльшую длину сливного фронта. Поэтому, несмотря на некоторое уменьшение коэфициента расхода от влияния косины, учитываемое введением в формулу $\sigma_{кос}$, косой водослив при одинаковом напоре пропускает больший расход, чем водослив, расположенный в том же русле нормально оси движения потока.

[1] H. Engels, Handbuch des Wasserbaues, Leipzig, 1923.

[2] Н. Н. Павловский, Гидравлический справочник, 1937.

[3] Boileau, Traité de la mesure des eaux courantes, 1854.

ГЛАВА XXII

РАСЧЕТ СОПРЯЖЕНИЯ НИСПАДАЮЩЕЙ СТРУИ С НИЖНИМ БЬЕФОМ

§ 176. Сопряжение струи, переливающейся через водослив, с нижним бьефом

Если профиль водослива сопрягается с дном нижнего бьефа плавной кривой, то сопряжение струи с горизонтом воды в нижнем бьефе может принимать различные формы. Последние будут зависеть от характера потока в нижнем бьефе и глубины в нем.

Переливаясь через гребень плотины, струя приобретает скорость больше критической, толщина струи по мере приближения к подошве плотины уменьшается и достигает наименьшей величины при вступлении струи на флютбет. Сечение, в котором глубина ниспадающего потока делается наименьшей, называют сжатым. Глубина в сжатом сечении h_c всегда меньше критической.

Таким образом струя в результате падения с высоты водослива вступает на флютбет в бурном состоянии.

Если в отводящем русле за плотиной бытовое состояние потока также бурное, то сопряжение переливающейся струи с горизонтом нижнего бьефа произойдет плавно в виде непрерывной кривой подпора или спада от глубины h_c до бытовой глубины $h_б$ в нижнем бьефе.

Чаще всего, однако, будут случаи, когда поток в нижнем бьефе находится в спокойном состоянии ($h_б > h_{кр}$).

В этих случаях переход от бурного состояния при h_c в спокойное состояние с $h_б$ может произойти только через гидравлический прыжок.

В зависимости от соотношения запаса энергии в сжатом сечении и в сечении с бытовой глубиной будет различное местоположение прыжка относительно сжатого сечения и различная форма самого прыжка.

Как известно, переход потока из бурного состояния в спокойное происходит прыжком при сопряженных глубинах, связанных уравнением прыжковой функции (444).

По этому уравнению всегда можно для h_c определить сопряженную с ней глубину h''_c.

При глубине h''_c удельная энергия потока в спокойном состоянии была бы уравновешена (с учетом потерь в прыжке) энергией потока в бурном состоянии в сжатом сечении.

Если бы глубина $h_б$ в нижнем бьефе была равна h''_c, то переход потока из бурного состояния в спокойное произошел бы именно в сжатом сечении прыжком с глубины h_c к глубине $h''_c = h_б$.

Если же вычисленная h''_c получится больше имеющейся в нижнем бьефе $h_б$, то это значит, что энергия потока в сжатом сечении превышает энергию потока при бытовой глубине больше, чем на потери в прыжке. Поэтому прыжка в сжатом сечении не произойдет и поток продолжит свое движение в бурном состоянии дальше на некотором участке нижнего бъефа в форме кривой подпора типа c_1.

Это движение, сопровождаясь потерей энергии на преодоление путевых сопротивлений, будет наблюдаться до тех пор, пока удельная энергия потока не уменьшится до величины, уравновешенной (с учетом потерь в прыжке) с энергией потока, при бытовой глубине.

Иначе говоря, в этом случае прыжок произойдет в том месте, где глубина кривой подпора достигнет некоторой величины $h'_б$, являющейся первой сопряженной глубиной для бытовой глубины $h_б$.

Достигнув глубины $h'_б$ в конце кривой подпора, поток прыжком перейдет из бурного состояния в спокойное с бытовой для нижнего бьефа глубиной $h_б$.

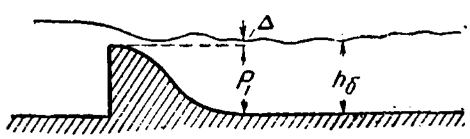
Описанный случай сопряжения называется сопряжением с отогнанным прыжком. Длина отгона прыжка при этом легко может быть определена как длина кривой подпора между глубинами h_c и $h'_б$.

Наконец, рассмотрим третий из возможных случаев сопряжения, когда глубина h''_c оказывается меньше бытовой глубины:

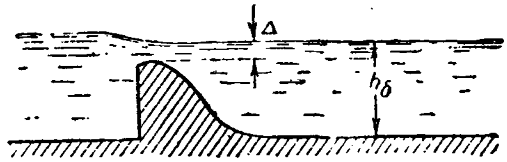
$$h''_c < h_б.$$

В этом случае энергия потока в спокойном состоянии при бытовой глубине больше энергии в сжатом сечении и потому поток нижнего бьефа надвинется в сторону сжатого сечения и прыжок «упрется» в плотину. Это будет сопряжение с надвинутым прыжком.

Если при сопряжении с надвинутым прыжком глубина в нижнем бьефе $h_б > p$, прыжок примет форму прыжка волны (фиг. 248) или вовсе исчезнет (фиг. 249). Такое сопряжение приведет к затоплению водослива.



Фиг. 248

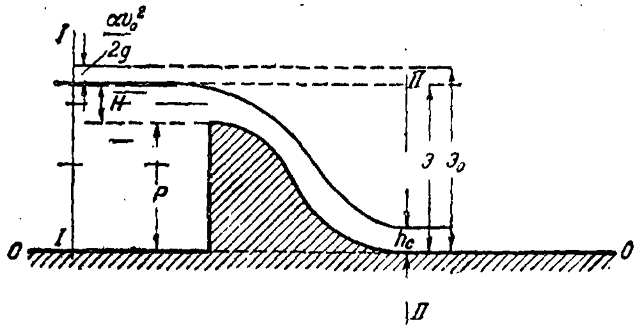


Фиг. 249

§ 177. Определение глубины в сжатом сечении и сопряженной с ней

Как видно из изложенного, характер сопряжения полностью выясняется если известна глубина в сжатом сечении. Поэтому рассмотрим метод вычисления величины h_c.

Воспользуемся уравнением Бернулли для двух сечений: сечения *I-I* перед водосливом и сжатого сечения *II-II* у подошвы водослива.



Фиг. 250

Плоскость сравнения *0-0* примем совпадающей с дном нижнего бьефа. В отмеченных сечениях движение будет плавно-изменяющимся с распределением давлений по гидростатическому закону.

Тогда (фиг. 250) имеем

$$H + p + \frac{\alpha v_0^2}{2g} = Э_0 = h_c + \frac{\alpha v_c^2}{2g} + h_{mp},$$

где h_{mp} — потери энергии на сопротивления, преодолеваемые потоком при переливании через плотину;

p — высота гребня плотины со стороны нижнего бьефа.

Принимая $h_{mp} = \Sigma\zeta \frac{v_c^2}{2g}$, получим

$$\sqrt{\alpha}\, v_c = \frac{1}{\sqrt{1+\Sigma\zeta}} \sqrt{2g\,(Э_0 - h_c)} = \varphi \sqrt{2g(Э_0 - h_c)},$$

где $\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\Sigma\zeta}}$ — коэфициент скорости, а $Э$ — удельная энергия верхнего бьефа относительно дна нижнего бьефа.

При расчете плотин ввиду значительной длины их гребня можно, не считаясь с формой русла за плотиной, рассматривать движение в одной плоскости (плоская задача), отнеся все элементы к единице длины гребня.

Расход на единицу ширины потока будет

$$q = v_c h_c = \frac{\varphi}{\sqrt{\alpha}} h_c \sqrt{2g\,(Э_0 - h_c)}, \tag{531}$$

откуда подбором можно определить значение h_c

Громоздкость подсчетов, свойственная вообще методам подбора при решении уравнений, заставляет находить более рациональные способы определения h_c. В этих целях предложен ряд графиков и таблиц, упрощающих технику вычислений[1].

В дальнейшем для определения h_c будем пользоваться следующим методом[2].

Разделим обе части уравнения (531) на $Э_0^{3/2} = (H_0 + p)^{3/2}$ и получим

$$\frac{\sqrt{\alpha}\, q}{\varphi\, Э_0^{3/2}} = \frac{h_c}{Э_0} \sqrt{2g\left(1 - \frac{h_c}{Э_0}\right)}.$$

Обозначим

$$\frac{h_c}{Э_0} = \tau_c.$$

Тогда (в метрах)

$$\frac{\sqrt{\alpha}\, q}{\varphi\, Э_0^{3/2}} = 4{,}43\, \tau_c \sqrt{1 - \tau_c}. \tag{532}$$

Правая часть этого уравнения зависит только от τ_c, т. е.

$$4{,}43\, \tau_c \sqrt{1 - \tau_c} = \Phi(\tau_c). \tag{533}$$

Задаваясь различными значениями τ_c, можно по (533) составить таблицу значений $\Phi(\tau_c)$*. А так как величина

$$\frac{\sqrt{\alpha}\, q}{\varphi Э_0^{3/2}} = \Phi(\tau_c) \tag{534}$$

при расчетах известна, то тем самым легко в таблице по $\Phi(\tau_c)$ найти τ_c и определить

$$h_c = \tau_c Э_0.$$

Для выявления характера сопряжения нужно знать, собственно, не величину h_c, а ее сопряженную h''_c, которую можно определить по уравнению

$$h''_c = \frac{h_c}{2}\left[\sqrt{1 + \frac{8\alpha q^2}{g h_c^3}} - 1\right]. \tag{535}$$

Пользуясь переменной τ_c, можно упростить технику вычислений и для расчета h''_c.

---

[1] Проф. Б. А. Бахметев, О неравномерном движении жидкости в открытом русле, 1928.

Инж. А. Н. Рахманов, Графики критических и взаимных глубин. Известия Научно-мелиорационного института (НМИ), 1929, вып. XVIII.

Инж. А. А. Угинчус, К вопросу о расчете водобойных колодцев, Известия НМИ, 1929, вып. XIX.

Проф. М. Д. Чертоусов, Инженерная гидравлика, 1934.

Акад. Н. Н. Павловский, Гидравлический справочник, 1937.

[2] И. И. Агроскин, Гидравлика каналов, 1940.

* См. И. И. Агроскин, Гидравлика каналов. 1940, приложения XVI, XVII, стр. 156.

Для этого преобразуем уравнение (535) следующим образом:

$$\frac{h''_c}{Э_0}=0,5\frac{h_c}{Э_0}\left[\sqrt{1+\frac{8\alpha q^2}{gЭ_0^3\frac{h^3_c}{Э_0^3}}}-1\right]$$

или, обозначая $\frac{h''_c}{Э_0}=\tau_c''$,

$$\tau_c''=0,5\tau_c\left[\sqrt{1+\frac{8\alpha q^2}{gЭ_0^3\tau_c^3}}-1\right]. \qquad (536)$$

Далее из уравнения (532) устанавливаем, что

$$\frac{8\alpha q^2}{gЭ_0^3\tau_c^3}=16\varphi^2\frac{1-\tau_c}{\tau_c},$$

и тогда вместо (536) имеем

$$\tau_c''=0,5\tau_c\left(\sqrt{1+16\varphi^2\frac{1-\tau_c}{\tau_c}}-1\right). \qquad (537)$$

Из уравнения (537) видно, что каждому значению τ_c [или каждому значению $\Phi(\tau_c)$] соответствует определенное значение τ_c'' в зависимости от коэфициента φ.

В упомянутой выше таблице даны также величины τ_c'', вычисленные по (537) для наиболее часто применяемых в практике значений φ.

Пользование изложенным методом весьма просто. По исходным данным проектируемого сооружения вычисляется величина $\Phi(\tau_c)$ по (534), далее, пользуясь упомянутой таблицей[1], устанавливается по необходимости τ_c или τ_c'' и вычисляется

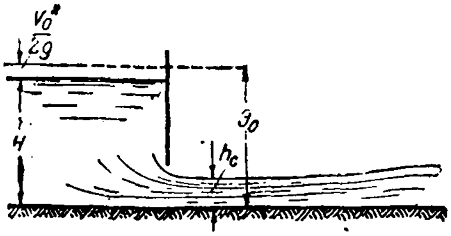
$$h_c=\tau_c Э_0$$

или

$$h_c''=\tau_c''Э_0.$$

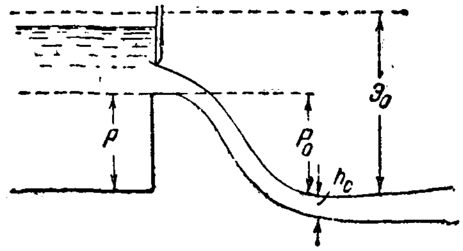
Сравнением найденного значения h_c'' с бытовой глубиной нижнего бьефа выясняется характер сопряжения.

Изложенный метод установления характера сопряжения ниспадающей струи с потоком в нижнем бьефе приложим к самым разнообразным водосливным сооружениям (плотинам практического профиля, плотинам с очертанием, отличающимся от практического профиля, к водосливам с острым ребром, перепадам), а также при истечении из-под щита (фиг. 251), при переливе через плотины, гребень которых перекрывается щитом (фиг. 252), и т. п.



Фиг. 251

Специфика всех этих случаев будет отражаться в уравнении (537) значением коэфициента скорости φ и величиной $Э_0$, показанной на фигурах.



Фиг. 252

Задача 107. Установить характер сопряжения в нижнем бьефе водосливной плотины высотой $p_1=7$ *м* при $q=8$ *м*^{3}*/сек*; $\varphi=0,90$. Ширина отводящего русла равна длине водосливного фронта. Бытовая глубина в нижнем бьефе $h_б=3,60$ *м*.

Принимая коэфициент расхода водослива $m=0,49$, найдем напор над его гребнем при пропуске $q=8$ *м*^{3}*/сек* из уравнения расхода водослива:

$$Q=mb\sqrt{2g}H_0^{3/2}.$$

Имеем

$$H_0^{3/2}=\frac{q}{m\sqrt{2g}}=\frac{8}{0,49\cdot 4,43}=3,68,$$

откуда находим

$$H_0=2,38 \text{ м}.$$

Тогда удельная энергия перед водосливом относительно дна нижнего бьефа будет

$$Э_0=p_1+H_0=7+2,38=9,38 \text{ м}.$$

Для выявления характера сопряжения в нижнем бьефе вычисляем $\Phi(\tau_c)$ по (534).

Имеем

$$\Phi(\tau_c)=\frac{\sqrt{\alpha}}{\varphi}\,\frac{q}{Э_0^{3/2}}=1,171\frac{8}{9,38^{3/2}}=0,325.$$

Такому значению $\Phi(\tau_c)$ в таблице[1] соответствуют при $\varphi=0,90$

$$\tau_c=0,0764 \text{ и } \tau_c''=0,4413.$$

Далее находим глубину потока в сжатом сечении

$$h_c=\tau_c Э_0=0,0764\cdot 9,38=0,72 \text{ м}$$

и глубину, сопряженную с ней,

$$h_c''=\tau_c''Э_0=0,4413\cdot 9,38=4,15 \text{ м}.$$

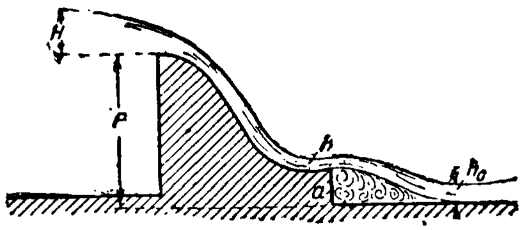
Выполненный расчет показывает, что сопряжение в нижнем бьефе будет происходить с отогнанным прыжком, так как

$$h_c''=4,15>h_б=3,60 \text{ м}.$$

[1] См. И. И. Агроскин, Гидравлика каналов. 1940, стр. 156—157.

§ 178. Сопряжение с нижним бьефом плотин с вертикальным уступом

Пусть поток переливается через водослив практического профиля, который сопрягается с дном нижнего бьефа вертикальным уступом (фиг. 253).

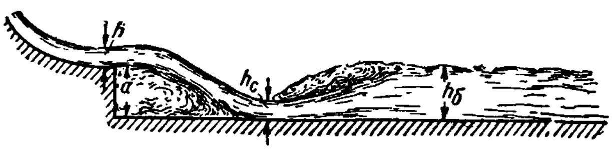


Фиг. 253

При таком очертании поверхности водосливной плотины и дна нижнего бьефа переливающаяся через плотину струя будет сопрягаться с потоком в нижнем бьефе, находящемся в спокойном состоянии, в виде поверхностного прыжка.

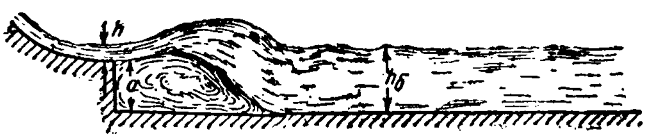
Поверхностный прыжок может быть свободным или затопленным. При прочих неизменных условиях (высота плотины, расход, высота уступа) форма поверхностного прыжка будет определяться глубиной в нижнем бьефе.

Проследим за ходом образования прыжка у подошвы плотины с уступом и за изменением формы этого прыжка. Струя, стекающая с уступа, достигнет дна нижнего бьефа в бурном состоянии с начальной глубиной h_c (фиг. 253). Если глубина в нижнем бьефе равна сопряженной глубине в сжатом сечении, то сопряжение произойдет в форме совершенного прыжка (фиг. 254).



Фиг. 254

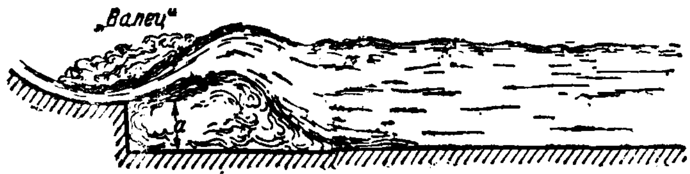
С увеличением глубины $h_б$ прыжок будет перемещаться к уступу плотины, стремясь покрыть падающую струю, одновременно затопляя водой пространство между падающей струей, дном и уступом. При этом будет увеличиваться возникающий в этом пространстве донный валец и сопряжение примет форму, показанную на фиг. 255. Это будет сопряжение со свободным поверхностным прыжком.



Фиг. 255

При дальнейшем увеличении глубины $h_б$ прыжок будет перемещаться к плотине, и на поверхности сходящей с уступа струи образуется «валец». Это будет сопряжение с затопленным поверхностным прыжком (фиг. 256).

Последующее увеличение глубины будет вызывать увеличение объема поверхностного «вальца» и уменьшение донного с сохранением общего



Фиг. 256

характера сопряжения с помощью затопленного поверхностного прыжка.

Еще до момента образования совершенного прыжка пространство, перекрываемое струей, при отсутствии доступа воздуха заполнится водой и возникнет донный валец, давление в котором будет меньше гидростатического.

При переходе от совершенного прыжка к поверхностному донный валец будет увеличиваться, кривизна струи также будет увеличиваться и давление в пространстве под струей станет больше гидростатического. Опыты показывают[1], что давление под струей равно гидростатическому, когда кривизна струй равна нулю, т. е. когда струя сходит с плотины по касательной к водосливной поверхности. Это есть начало образования свободного поверхностного прыжка. Проф. Сабанеев[1] назвал это состояние первым критическим режимом поверхностного прыжка.

Переход от свободного поверхностного прыжка к затопленному характеризуется началом образования поверхностного вальца. Это состояние проф. Сабанеев назвал вторым критическим режимом поверхностного прыжка.

Выясним, при какой глубине h на уступе и какой его высоте a стекающая с плотины струя будет сопрягаться с потоком в нижнем бьефе в форме свободного поверхностного прыжка.

Ограничим зону свободного поверхностного прыжка двумя сечениями — сечением *I-I*, совпадающим с обрезом уступа, и сечением *II-II*, расположенным за прыжком, где струя достигает полного растекания (фиг. 257), и применим закон изменения количества движения.

Рассматривая плоскую задачу, принимая дно за плотиной горизонтальным и пренебрегая поте-

---

[1] А. А. Сабанеев, О форме сопряжения водосливной поверхности плотины с дном нижнего бьефа, Труды МИИТ, 1929, вып. XI.

И. И. Леви, К вопросу о теории поверхностного прыжка и о расчете плотин при поверхностном режиме, Известия НИИГ, 1932, т. VII.

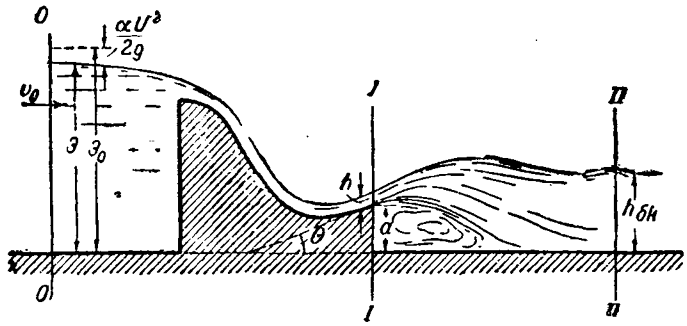
рями энергии потока по длине, можно записать

$$\frac{\gamma q}{g}(v_2-v_1\cos\theta)=P_1-P_2, \quad (538)$$

где v_2 — скорость в сечении II-II;

v_1 — скорость в сечении I-I;

θ — угол, который составляет касательная к водосливной поверхности уступа с горизонтальной плоскостью.



Фиг. 257

Принимая во внимание высказанное выше замечание о распределении давления в донном вальце под струей при первом критическом режиме поверхностного прыжка, найдем силу давления в сечении I-I

$$P_1=\frac{1}{2}\gamma(h\cos\theta+a)^2,$$

где h — глубина струи на уступе;

a — высота уступа.

Соответственно для сечения II-II имеем

$$P_2=\frac{\gamma}{2}h_{б_1}^2,$$

где $h_{б_1}$ — глубина в нижнем бьефе, отвечающая первому критическому режиму.

Подставляя эти значения P_1 и P_2 в уравнение (538) и заменяя v_2 и v_1 через $\frac{q}{h_n}$, получим

$$\frac{q^2}{ghh_{б_1}}(h-h_{б_1}\cos\theta)=\frac{1}{2}(h\cdot\cos\theta+a)^2-\frac{1}{2}h_{б_1}^2 \quad (539)$$

или

$$a^2+Aa+B=0,$$

где

$$A=2h\cos\theta,$$

$$B=h^2\cos^2\theta+\frac{2q^2}{ghh_{б_1}}(h_{б_1}\cos\theta-h)-h_{б_1}^2.$$

В уравнении (539) не известны h и a. Для определения их составим еще одно уравнение, а именно уравнение Бернулли для сечения O-O перед плотиной и сечения I-I:

$$Э_0=h\cos\theta+a+\frac{\alpha v_1^2}{2g}+h_{тр}, \quad (540)$$

где $Э_0$ — удельная энергия потока в верхнем бьефе относительно дна нижнего бьефа;

$h_{тр}$ — потери энергии на пути от сечения O-O до сечения I-I.

Подставляя

$$h_{тр}=\Sigma\zeta\frac{v_1^2}{2g}$$

и преобразовывая уравнение (540), получим

$$a=Э_0-h\cos\theta-\frac{\alpha q^2}{2g\varphi^2h^2}, \quad (541)$$

где $\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+\Sigma\zeta}}$ — коэфициент скорости струи, переливающейся через плотину.

Решая совместно уравнения (539) и (541), можно при заданных q, $h_б$, $Э_0$ и θ определить высоту уступа a и глубину струи h на уступе, отвечающие первому критическому режиму поверхностного прыжка.

Далее установим, при каких гидравлических элементах свободный поверхностный прыжок перейдет в затопленный. Попытка решить эту задачу аналитически приводит или к весьма сложным зависимостям, требующим длительных вычислений (метод проф. Леви), или базируется на произвольных допущениях (метод Сабанеева). Поэтому изложим метод проф. Чертоусова[1], основанный на экспериментальных данных. Проф. Чертоусов предложил следующую эмпирическую зависимость, которая связывает между собой гидравлические элементы, отвечающие второму критическому режиму:

$$t_1=1{,}05t_2+0{,}40, \quad (542)$$

причем t_1 и t_2 определяются так:

$$t_1=\frac{h_{б_2}+a}{h_{кр}}; \quad t_2=\frac{Э_0-a}{h_{кр}},$$

где $h_{б_2}$ — глубина в нижнем бьефе, отвечающая второму критическому режиму;

$h_{кр}$ — критическая глубина при $\alpha=1{,}0$.

Уравнение (542) после подстановки в него t_1 и t_2 перепишется так:

$$h_{б_2}=1{,}05\,Э_0-2{,}05\,a+0{,}4h_{кр}. \quad (543)$$

[1] М. Д. Чертоусов, Специальный курс гидравлики, 1937.

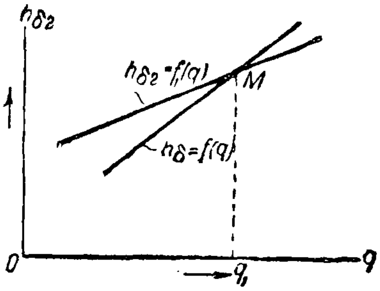
Определяемое по этой зависимости $h_{б_2}$ будет отвечать второму критическому режиму.

Если ставится задача подобрать высоту уступа a и угол θ так, чтобы в пределах заданного изменения расхода q сопряжение осуществлялось со свободным поверхностным прыжком, к решению ее можно подойти следующим образом.

Пусть задано $Э_0$, φ и $h_б = f(q)$.

Задаемся величиной угла θ и определяем из уравнений (539) и (541) высоту уступа a из условия пропуска наименьшего расхода q_{min}.

Зная a, находим по формуле (543) $h_{б_2}$ для различных расходов q. По этим данным строим кривую $h_{б_2} = f_1(q)$. Совмещая кривые $h_б = f(q)$ и $h_{б2} = f_1(q)$ на одном чертеже (фиг. 258), найдем по точке M их пересечения тот расход q_1, при котором свободный поверхностный прыжок переходит в затопленный.



Фиг. 258

Очевидно, если $h_{б_2} > h_б$ при заданном расходе q или $q < q_1$, сопряжение будет со свободным поверхностным прыжком; при $h_{б_2} < h_б$ или $q > q_1$ — с затопленным поверхностным прыжком.

Если наибольший заданный расход q_{max} будет меньше полученного по графику значения q_1, то сопряжение будет со свободным прыжком и поставленная задача решена правильно.

Задача 108[1]. Требуется спроектировать вертикальный уступ с приподнятым носком при $\theta = 15°$ для водосливной плотины высотой $p = 20$ *м* так, чтобы при изменении расхода от $q_{min} = 8$ *м³/сек* до $q_{max} = 12$ *м³/сек* сопряжение струи, переливающейся через плотину, с нижним бьефом происходило со свободным поверхностным прыжком.

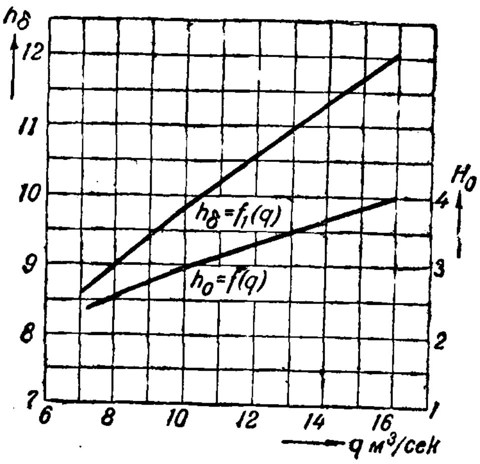
Изменение напора на водосливе при этом дано кривой $H_0 = f(q)$, построенной по уравнению $q = MH_0^{3/2}$, а изменение бытовых глубин в нижнем бьефе — кривой $h_б = f_1(q)$ (фиг. 259).

Высоту уступа a будем определять, пользуясь уравнениями (539) и (541).

Прежде всего установим условия пропуска q_{min}.

Для этого по кривым фиг. 259 найдем, что для

[1] М. Д. Чертоусов, Специальный курс гидравлики, 1937.



Фиг. 259

$q = 8$ *м³/сек* напор на водосливе H_0 и бытовая глубина $h_б$ будут

$$H_0 = 2{,}53 \text{ м и } h_б = 9{,}0 \text{ м}.$$

Переходя к уравнению (539), будем определять a и h следующим образом:

Примем $h_{б1} = h_б$ и подставим значения величин q, $h_б$ и $\cos\theta$ в формулу (539).

Тогда

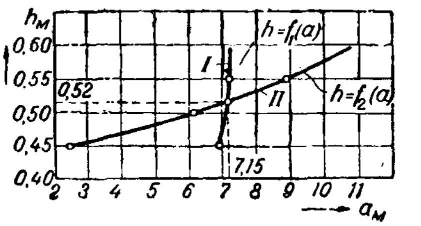
$$A = 1{,}932h,$$

$$B = 0{,}933h^2 + \frac{12{,}6}{h} - 82{,}45$$

и

$$a^2 - 1{,}932ha + 0{,}933h^2 + \frac{12{,}6}{h} - 82{,}45 = 0.$$

Задаваясь разными значениями h, находим соответствующие им величины a и по полученным данным строим (фиг. 260) кривую $h = f_1(a)$.



Фиг. 260

Теперь перейдем к уравнению (541), которое в условиях данной задачи принимает такой вид:

$$a = 22{,}53 - 0{,}966h - \frac{3{,}97}{h^2}.$$

Из этого уравнения, также задаваясь теми же значениями h, найдем соответствующие им величины a и по результатам вычислений строим (фиг. 260) другую кривую $h = f_2(a)$.

Точка пересечения кривых $h = f_1(a)$ и $h = f_2(a)$ определяет толщину водосливной струи на носке $h = 0{,}52$ *м* и высоту уступа $a = 7{,}15$ *м*.

Проверим, как будет работать вертикальный уступ с $a = 7{,}15$ *м* при других расходах.

Для этого для различных q определим по уравнению (543) значения бытовой глубины, отвечающие второму критическому режиму.

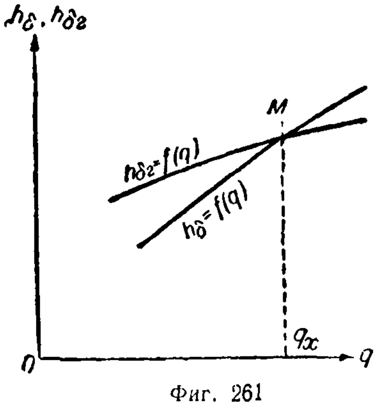
Результаты вычислений сводим в табл. 91.

Таблица 91

q м³/сек	H_0	$Э_0$	$h_{кр}$	$h_{б2}$
8	2,53	22,53	1,868	9,76
10	2,94	22,94	2,168	10,32
12	3,30	23,30	2,448	10,81
14	3,65	23,65	2,723	11,29
16	3,98	23,98	2,967	11,74

По данным этой таблицы построена кривая $h_{б_2} = f(q)$ (фиг. 261). Точка M пересечения кривых $h_{б2} = f(q)$ и $h_б = f(q)$ определяет тот критический расход, при котором будет наблюдаться смена режимов[1].

В данном случае этот расход $q = 13{,}5$ м³/сек, т. е. больше $q_{max} = 12$ м³/сек, и потому принятый размер вертикального уступа можно считать удовлетворяющим условиям задачи.



Фиг. 261

ГЛАВА XXIII

ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ЩИТОВЫХ ОТВЕРСТИЙ

Отверстия плотин перекрывают щитами. Маневрируя последними, пропускают через эти отверстия необходимый расход. Щитовые отверстия обычно устраивают прямоугольного сечения.

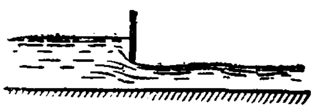
Отметим следующие типы щитовых отверстий:

а) щитовое отверстие без порога (фиг. 262);

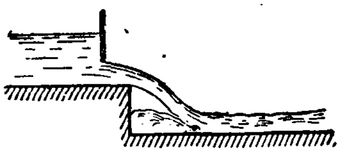
б) щитовое отверстие с широким порогом (фиг. 263);

в) щитовое отверстие перед перепадом (фиг. 264);

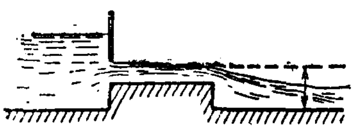
г) щитовое отверстие на гребне порога практического профиля (фиг. 265).



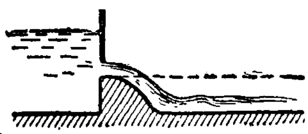
Фиг. 262



Фиг. 264



Фиг. 263



Фиг. 265

Если горизонт нижнего бьефа не влияет на истечение струи, то отверстие будет со свободным истечением. Если же нижний бьеф оказывает влияние на истечение, то оно будет не свободное или истечение под уровень.

Примем в дальнейшем следующие обозначения:

b — ширина отверстия;

a — высота отверстия (высота поднятия щита);

H — глубина перед отверстием (напор);

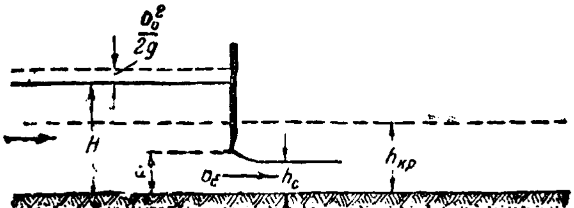
$h_б$ — глубина за отверстием (бытовая глубина).

§ 179. Свободное истечение из-под щита

Рассмотрим истечение из щитового отверстия без порога.

Если подводящий канал шире отверстия, то при полном поднятии щита отверстие будет работать как водослив с широким порогом.

При неполном поднятии щита вытекающая из-под него струя претерпевает сжатие в вертикальной плоскости. Глубина в сжатом сечении (фиг. 266) $h_c < a$ и меньше $h_{кр}$, и потому вытекающая из-под щита струя будет в бурном состоянии.



Фиг. 266

Условия, при которых истечение из отверстия будет свободным, не зависящим от горизонта в нижнем бьефе, определяются теми же обстоятельствами, которые были уже рассмотрены выше, при анализе работы водосливов и сопряжения потоков.

[1] Кривая $h_б = f_1(q)$ перенесена с фиг. 259.

Расход при свободном истечении из-под щита выразится уравнением

$$Q=\varphi b h_c \sqrt{2g(H_0-h_c)}. \qquad (544)$$

Значения коэфициента скорости φ по опытным данным можно принимать следующие [1]:

1. Щитовое отверстие без порога . . . . 1,00÷0,95
2. Щитовое отверстие с широким порогом . . 0,95÷0,85
3. Щитовое отверстие без порога перед перепадом 1,00÷0,97
4. Щитовое отверстие на гребне порога практического профиля . . . . 0,95÷0,85

Глубину в сжатом сечении (которое наблюдается ниже щита на расстоянии, примерно равном высоте отверстия) можно выразить через высоту отверстия

$$h_c=\varepsilon a, \qquad (545)$$

где ε — коэфициент вертикального сжатия.

Тогда имеем

$$Q=\varphi\varepsilon b a\sqrt{2g(H_0-\varepsilon a)}. \qquad (546)$$

Проф. Жуковский [2], рассматривая истечение жидкости из сосуда конечной ширины и бесконечно большой длины на основе созданного им метода образующей и направляющей сети, получил такие уравнения:

$$Q=\frac{\pi}{\pi+2\frac{2\theta}{\operatorname{tg}2\theta}}\,2av_c,$$

$$\frac{a}{H}=\operatorname{tg}\theta\left(1+\frac{2}{\pi}\,\frac{2\theta}{\operatorname{tg}2\theta}\right). \qquad (547)$$

Заменим [3] ось симметрии сосуда, которая соответствует средней линии тока, дном лотка. Тогда, рассматривая половину ширины отверстия, получим для случая истечения из прямоугольного отверстия единицы ширины в лоток без сжатия по дну (т. е. для рассматриваемого истечения из-под щита)

$$q=\varepsilon a v_c=\frac{\pi}{\pi+2\frac{2\theta}{\operatorname{tg}2\theta}}\,a v_c.$$

Отсюда

$$\varepsilon=\frac{h_c}{a}=\frac{\pi}{\pi+2\frac{2\theta}{\operatorname{tg}2\theta}}.$$

При этом угол θ определяется из уравнения (547) в зависимости от величины $\frac{a}{H}$.

Проф. Жуковский, рассматривая потенциальное движение, тем самым не учитывал потерь энергии.

По теоретическим исследованиям проф. Н. Е. Жуковского следует, что

$$\varepsilon=f\left(\frac{a}{H}\right).$$

Лабораторные исследования щитовых отверстий, по ширине равных ширине русла, показали, что теоретические выводы проф. Жуковского хорошо согласуются с опытными данными [4].

В табл. 92 приведены значения ε по Жуковскому.

Таблица 92

$\frac{a}{H}$	ε	$\frac{a}{H}$	ε	$\frac{a}{H}$	ε	$\frac{a}{H}$	ε
0,00	0,611	0,30	0,625	0,55	0,650	0,80	0,720
0,10	0,615	0,35	0,628	0,60	0,660	0,85	0,745
0,15	0,618	0,40	0,630	0,65	0,675	0,90	0,780
0,20	0,620	0,45	0,638	0,70	0,690	0,95	0,835
0,25	0,622	0,50	0,645	0,75	0,705	1,00	1,000

Из таблицы видно, что коэфициент сжатия меняется от $\varepsilon=0{,}611$ для малых открытий щита, до $\varepsilon=1$, когда щит вовсе удален. При этом имеется в виду, что ширина подводящего канала равна ширине отверстия, перекрываемого щитом.

Наличие подводящего канала более широкого, чем отверстие, не оказывает влияния на величину вертикального сжатия ε, поэтому данными таблицы можно пользоваться и для расчета отверстий с боковым сжатием.

Уравнения (544) и (545) позволяют определить расход при заданном поднятии щита, а также установить необходимую высоту подъема щита для пропуска заданного расхода.

В последнем случае прежде всего определяют h_c, используя уравнение (534), приведенное выше для расчета глубин в сжатом сечении.

Высота подъема щита $a=\frac{h_c}{\varepsilon}$ получается методом приближений, как это показано ниже при решении задач.

Задача 109. Определить расход Q, вытекающий из-под щита, при следующих данных. Напор перед щитом $H=2$ *м*; щит поднят на высоту $a=0{,}70$ *м*; ширина отверстия, перекрываемого щитом, $b=3$ *м*; скорость подхода $v_0=0{,}75$ *м/сек*. Щитовое отверстие без порога. Глубина за щитом $h_б=1{,}2$ *м*.

Предполагая истечение свободным, определим расход по формуле (544) при значении $\varphi=0{,}97$.

Для этого, замечая, что $\frac{a}{H}=\frac{0{,}70}{2}=0{,}35$, устанавливаем по табл. 92 значение

$$\varepsilon=0{,}628$$

и определяем глубину в сжатом сечении

$$h_c=\varepsilon a=0{,}628\cdot 0{,}70=0{,}44 \text{ м}^*,$$

[1] Акад. Н. Н. Павловский. Гидравлический справочник, 1937, стр. 721.

[2] Н. Е. Жуковский, Полное собрание сочинений, т. III, стр. 220, 1936.

[3] Такую замену делает сам проф. Жуковский, переходя от истечения из сосуда, стенки которого наклонены к оси симметрии под углом 45°, к истечению из-под наклонного щита; там же, стр. 217.

[4] В. А. Шаумян. Теория щитовых водомеров—регуляторов и ее практическое применение в орошении, Труды ВНИИГ и М, т. XXII.

* В рассматриваемом случае $h_{кр}=\sqrt[3]{\frac{\alpha q^2}{g}}=\sqrt[3]{\frac{1{,}1\cdot 2{,}38^2}{9{,}81}}=0{,}83$ *м*. Отсюда видно, что в сжатом сечении, где глубина $h_c=0{,}44$ *м* $<0{,}83$ *м*, поток находится в бурном состоянии.

Тогда находим

$$Q = \varphi b h_c \sqrt{2g(H_0 - h_c)} =$$

$$= 0{,}97 \cdot 3 \cdot 0{,}44 \cdot 4{,}43 \sqrt{2 + \frac{0{,}75^2}{19{,}62} - 0{,}44} = 7{,}16 \text{ м}^3/\text{сек}.$$

Далее необходимо проверить, будет ли истечение действительно свободным. Поэтому выясним характер сопряжения струи, вытекающей из-под щита, с нижним бьефом.

Найдем сопряженную глубину для h_c по (535)

$$h_c'' = 0{,}5 h_c \left[\sqrt{1 + \frac{8\alpha q^2}{g h_c^3}} - 1 \right] =$$

$$= 0{,}22 \left(\sqrt{1 + \frac{8 \cdot 2{,}38^2}{9{,}81 \cdot 0{,}44^3}} - 1 \right) = 1{,}42 \text{ м}.$$

Так как $h_c'' = 1{,}42$ м $> h_б = 1{,}2$ м, то сопряжение произойдет в форме отогнанного прыжка и истечение будет действительно свободное.

Задача 110. Через щитовое отверстие перед перепадом надо пропустить расход $Q = 5$ м³/сек. На какую высоту надо поднять щит, если напор перед щитом $H_0 = 2{,}58$ м, ширина отверстия $b = 2{,}5$ м. Истечение свободное ($\varphi = 0{,}95$).

Прежде всего определим глубину в сжатом сечении по уравнению (534).

В данном случае имеем $Э_0 = H_0 = 2{,}58$ м и $q = 2$ м³/сек. Тогда

$$\Phi(\tau_c) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\varphi} \frac{q}{Э_0^{3/2}} = 1{,}109 \frac{2}{2{,}58^{3/2}} = 0{,}535$$

и по соответствующей таблице находим $\tau_c = 0{,}13$ и определяем

$$h_c = \tau_c Э_0 = 0{,}13 \cdot 2{,}58 = 0{,}335 \text{ м}.$$

Искомая высота подъема щита, считая в первом приближении $\varepsilon = 0{,}62$, будет

$$a = \frac{h_c}{\varepsilon} = \frac{0{,}335}{0{,}621} = 0{,}54 \text{ м}.$$

По полученному значению a находим $\frac{a}{H} = \frac{0{,}54}{2{,}58} = 0{,}213$ и по данным Жуковского (табл. 92) уточняем для второго приближения значение

$$\varepsilon = 0{,}621.$$

Тогда высота подъема щита и во втором приближении будет

$$a = \frac{h_c}{\varepsilon} = \frac{0{,}335}{0{,}621} = 0{,}54 \text{ м}.$$

§ 180. Несвободное истечение из-под щита

Мы уже знаем, что если сопряженная глубина $h_c'' < h_б$, то сопряжение струи, вытекающей из-под щита, с нижним бьефом произойдет с надвинутым прыжком. При этом совершенный прыжок, упираясь в щит, превратится в подтопленный, а свободное истечение — в затопленное.

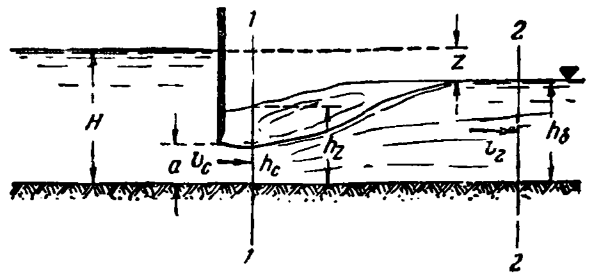
Расход щитового отверстия в этом случае (как вообще при истечении из отверстий под уровень) будет определяться величиной перепада z между горизонтами перед щитом и непосредственно за щитом, т. е.

$$Q = \mu b a \sqrt{2g(H_0 - h_z)}, \tag{548}$$

где h_z — глубина непосредственно за щитом ($h_c < h_z < h_б$), а μ — коэфициент расхода.

Опыты Escande'a, Smetana, Дмитриева[1], Рельтова[2] и др. показывают, что μ в формуле (548) имеет такое же численное значение, как $\varphi\varepsilon$ при свободном истечении.

Опыт показывает, что при затопленном истечении из-под щита горизонт воды непосредственно за щитом устанавливается ниже горизонта воды в отводящем канале (фиг. 267).



Фиг. 267

Перейдем к определению глубины h_z, пользуясь методом Беланже-Бресса, который изложен нами при выводе уравнения совершенного прыжка.

Ограничим прыжок сечением *1-1*, совпадающим с сжатым сечением, и сечением *2-2*, в котором глубина достигает $h_б$ (фиг. 267).

Тогда уравнение приращения количества движения примет такой вид:

$$\frac{\gamma}{g} Q (\alpha'_2 v_2 - \alpha'_1 v_c) = P_1 - P_2, \tag{549}$$

где v_c — скорость в сжатом сечении (в поступательной зоне прыжка)

[1] Г. Т. Дмитриев, О коэфициенте расхода при истечении из-под вертикальных цилиндрических и плоских щитов. Журнал „Водный транспорт“ № 10, 1937 г.

[2] Инж. Б. Ф. Рельтов, Об истечении из-под вертикального щита в горизонтальный лоток, „Известия Научно-исследовательского института гидротехники“ № 11, 1934.

Будем рассматривать прямоугольное русло, допуская, что в сечении *1-1* давление распределяется по гидростатическому закону.

Тогда сила давления, передаваемая массе жидкости со стороны сечения *1-1*, будет

$$P_1 = \gamma \frac{h_z^2}{2} b,$$

а со стороны потока в спокойном состоянии

$$P_2 = \gamma \frac{h_б^2}{2} b.$$

Уравнение (549), отнесенное к единице ширины прямоугольного русла, примет такой вид:

$$\frac{\gamma}{g} q (\alpha'_2 v_2 - \alpha'_1 v_c) = \gamma \frac{h_z^2 - h_б^2}{2}.$$

Заменив $v_2 = \frac{q}{h_б}$, $v_c = \frac{q}{h_c}$ и приняв $\alpha'_2 = \alpha'_1 = 1$, получим

$$h_z^2 = h_б^2 - \frac{2q^2}{g} \frac{h_б - h_c}{h_б h_c}. \qquad (550)$$

Это уравнение позволяет вычислить h_z, когда известны $h_б$ и q при заданной высоте отверстия a (так как $h_c = \varepsilon a$).

Уравнению (550) можно придать другой вид, заменив в нем q его значением из уравнения (548).

Тогда

$$h_z^2 = h_б^2 - 4\mu^2 a^2 (H_0 - h_z) \frac{h_б - h_c}{h_б h_c}$$

или, обозначая

$$L = 4\mu^2 a^2 \frac{h_б - h_c}{h_б h_c}, \qquad (551)$$

окончательно

$$h_z = \sqrt{h_c^2 - L\left(H_0 - \frac{L}{4}\right)} + \frac{L}{2}. \qquad (552)$$

Опытные наблюдения J. Smetana подтверждают правильность уравнения (552).

Вычислив h_z при заданных H_0, $h_б$ и a, можно определить по формуле (548) расход Q.

Если требуется определить другие элементы, связанные с расчетом отверстий, то задача решается с помощью тех же формул (548) и (551) методом подбора.

Задача 111. Определить расход, вытекающий из-под щита, если: $H_0 = 2{,}5$ *м*, ширина отверстия $b = 2{,}8$ *м*, щит поднят на высоту $a = 0{,}50$ *м*. Нормальная глубина за щитом $h_б = 2$ *м*; $\varphi = 0{,}95$.

Для выяснения характера истечения определим глубину в сжатом сечении $h_c = \varepsilon a$.

При $\frac{a}{H_0} = \frac{0{,}50}{2{,}5} = 0{,}20$ имеем по табл. 92 значение $\varepsilon = 0{,}620$ и определяем

$$h_c = \varepsilon a = 0{,}62 \cdot 0{,}50 = 0{,}31 \text{ м}.$$

Для определения глубины h_c'', сопряженной с h_c, вычислим значение

$$\tau_c = \frac{h_c}{Э_0} = \frac{0{,}31}{2{,}5} = 0{,}124,$$

которому согласно упомянутой выше таблице[1] соответствует при $\varphi = 0{,}95$ величина $\tau_c'' = 0{,}567$ и, следовательно,

$$h_c'' = \tau_c'' Э_0 = 0{,}567 \cdot 2{,}5 = 1{,}42 \text{ м}.$$

Так как сопряженная глубина получилась меньше бытовой ($1{,}42 < 2$), то прыжок надвинут и отверстие будет затоплено.

В таком случае расход определяем по формуле (548)

$$Q = \mu b a \sqrt{2g(H_0 - h_z)},$$

находя глубину непосредственно за щитом по формуле (552)

$$h_z = \sqrt{h_б^2 - L\left(H_0 - \frac{L}{4}\right)} + \frac{L}{2}.$$

При коэфициенте расхода $\mu = \varphi\varepsilon = 0{,}60$ имеем, согласно (551),

$$L = 4\mu^2 a^2 \frac{h_б - h_c}{h_б h_c} = 4 \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}5^2 \frac{2 - 0{,}31}{2 \cdot 0{,}31} = 0{,}98.$$

Тогда

$$h_z = \sqrt{2^2 - 0{,}98\left(2{,}5 - \frac{0{,}98}{4}\right)} + 0{,}49 = 1{,}84 \text{ м}$$

и расход

$$Q = 0{,}60 \cdot 2{,}8 \cdot 0{,}5 \cdot 4{,}33 \sqrt{2{,}5 - 1{,}84} = 3{,}45 \text{ м}^3/\text{сек}.$$

Задача 112. Определить, на какую высоту a надо поднять щит, чтобы пропустить расход $Q = 2{,}25$ *м³/сек* при $H = 2{,}5$ *м*, $\mu = 0{,}65$, $b = 4{,}2$ *м* и $h_б = 2$ *м*.

Для определения a воспользуемся формулой (548), по которой

$$a = \frac{Q}{\mu b \sqrt{2g(H_0 - h_z)}}.$$

Так как $h_z = f(a)$, то задачу решим методом последовательного приближения. В качестве первого приближения возьмем $h_z = h_б$.

Тогда

$$a = \frac{2{,}25}{0{,}65 \cdot 4{,}2 \cdot 4{,}43 \sqrt{2{,}5 - 2}} = 0{,}27 \text{ м}.$$

Вычислим при данном a значение h_z по (552), принимая $\varepsilon = 0{,}62$.

Имеем

$$L = 4\mu^2 a^2 \frac{h_б - h_c}{h_б h_c} = 4 \cdot 0{,}65^2 \cdot 0{,}27^2 \frac{2 - 0{,}62 \cdot 0{,}27}{2 \cdot 0{,}62 \cdot 0{,}27} = 0{,}67.$$

Тогда

$$h_z = \sqrt{2^2 - 0{,}67\left(2{,}5 - \frac{0{,}67}{4}\right)} + \frac{0{,}67}{2} = 1{,}90 \text{ м}.$$

Вычисляем a во втором приближении:

$$a = \frac{2{,}25}{0{,}65 \cdot 4{,}2 \cdot 4{,}43 \sqrt{2{,}5 - 1{,}90}} = 0{,}24 \text{ м}.$$

Вычислим теперь h_z при $a = 0{,}24$ *м*. Имеем

$$L = 4 \cdot 0{,}65^2 \cdot 0{,}24^2 \frac{2 - 0{,}62 \cdot 0{,}24}{2 \cdot 0{,}62 \cdot 0{,}24} = 0{,}62,$$

$$h_z = \sqrt{2^2 - 0{,}62\left(2{,}5 - \frac{0{,}62}{4}\right)} + \frac{0{,}62}{2} = 1{,}88 \text{ м}$$

и окончательно

$$a = \frac{2{,}25}{0{,}65 \cdot 4{,}2 \cdot 4{,}43 \sqrt{2{,}5 - 1{,}88}} = 0{,}236 \approx 0{,}24 \text{ м}.$$

[1] См. таблицу на стр. 322

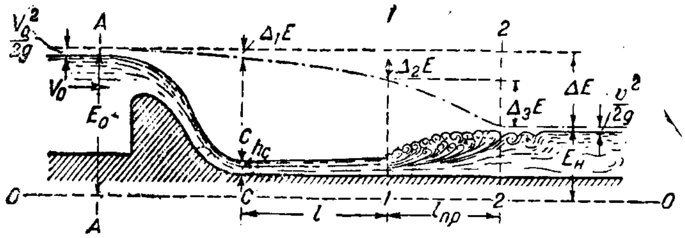
ГЛАВА XXIV

ГАШЕНИЕ ЭНЕРГИИ В НИЖНЕМ БЬЕФЕ СООРУЖЕНИЙ

§ 181. Общие соображения. Типы гасителей

В предыдущей главе было установлено, что, в зависимости от положения прыжка в нижнем бьефе по отношению к сжатому сечению, различают три вида сопряжения: с отогнанным прыжком, с надвинутым прыжком и критическое сопряжение.

Рассмотрим условия гашения энергии в нижнем бьефе для всех трех видов сопряжения (фиг. 268). Приняв за плоскость сравнения горизонтальную плоскость *O—O*, обозначим полную



Фиг. 268

удельную энергию перед сооружением через E_0 и за сооружением, в бытовых условиях, через $E_н$. Разность ($E_0 - E_н = \Delta E$) является как раз тем избытком энергии, который погашается в нижнем бьефе.

Часть этой энергии (на фигуре — $\Delta_1 E$) погашается в пределах самого сооружения между сечением *A-A* и сжатым сечением *C-C*; часть (на фигуре — $\Delta_3 E$) погашается в прыжке между сечениями *1-1* и *2-2*.

При сопряжении с отогнанным прыжком этих местных сопротивлений (сооружение и прыжок) недостаточно для погашения всего избытка энергии $\Delta E = E_0 - E_н$ и поэтому часть ее (на фигуре—$\Delta_2 E$) погашается на преодоление сопротивлений по длине на участке кривой подпора от *C-C* до *1-1*.

При обычных шероховатостях путевые потери на единицу длины сравнительно невелики и поэтому гашение энергии происходит на довольно большой длине. Поток на участке кривой подпора находится в бурном состоянии, с повышенными скоростями и поэтому русло этого участка необходимо крепить, что значительно увеличивает стоимость сооружения.

Отсюда основной задачей при проектировании является уменьшение длины дорогостоящего крепленного участка. Достигнуть этого можно искусственным созданием повышенной шероховатости. Однако наиболее желательными являются решения, позволяющие погасить весь избыток энергии исключительно с помощью местных потерь, сводя таким образом участок с кривой подпора к нулю.

В этом случае прыжок придвинется к сооружению и сопряжение может быть или критическим или с надвинутым прыжком.

При критическом сопряжении прыжок начинается непосредственно в сжатом сечении; при этом всякое изменение расхода сооружения повлечет за собой перемещение прыжка в нижнем бьефе.

Ввиду неустойчивости критического сопряжения целесообразно добиваться сопряжения с надвинутым прыжком, что достигается устройством в нижнем бьефе специальных гасителей.

Однако отметим, что создание в нижнем бьефе сопряжения с надвинутым прыжком не будет еще полным решением задачи по гашению энергии.

Дело в том, что при надвинутом прыжке в отводящем русле могут наблюдаться два «режима», в зависимости от характера распределения скоростей по вертикали: поверхностный режим, если максимальные скорости потока наблюдаются ближе к свободной поверхности, и донный режим, если максимальные скорости создаются вблизи дна.

Донный режим является неизбежным следствием прохождения потока через сооружение, так как при падении струи донные скорости получаются больше поверхностных.

Донный режим безусловно нежелателен, так как вследствие значительных донных скоростей отводящее русло будет размываться, что может повлечь за собой аварию сооружения.

Поэтому при проектировании сооружений, одновременно с созданием сопряжения с надвинутым прыжком, стремятся обеспечить в отводящем русле режим с меньшими донными скоростями. Последнее может быть достигнуто лишь специальными устройствами.

В гидротехнической практике применяются весьма разнообразные типы гасителей энергии. Некоторые из них поддаются теоретическим расчетам, некоторые же изучены только экспериментальным путем. Различные гасители энергии, как конструктивные элементы сооружения, рассматриваются в курсе гидротехнических сооружений. Поэтому остановимся только на гидравлической стороне основных типов гасителей энергии потока.

Наиболее простым и часто встречающимся в практике гасителем энергии является водобойный колодец. Устройством водобойного колодца непосредственно за сооружением создается глубина, вызывающая надвинутый прыжок. При этом падающая с сооружения струя ударяется в водную подушку, образуемую водобойным колодцем, и этим облегчается работа флютбета.

Создание в нижнем бьефе глубины, вызывающей надвинутый прыжок, может быть достигнуто:

а) за счет специального углубления в дне флютбета (фиг. 269);

б) устройством подпорной стенки в отводящем русле (фиг. 270);

в) комбинированно, частично углублением в

Фиг. 269

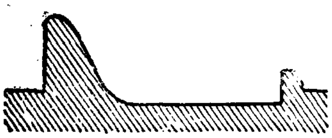
Фиг. 270

дне флютбета и частично подпором, вызываемым стенкой (фиг. 271).

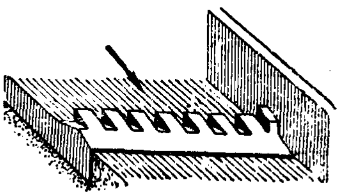
В зависимости от принятого конструктивного решения говорят в первом случае собственно о водобойном колодце, во втором — о водобойной стенке и в третьем — о комбинированном водобойном колодце.

Этих терминов и будем придерживаться в дальнейшем изложении.

Упомянутые сооружения при надлежащей глубине и длине будут обеспечивать сопряжение с надвинутым прыжком. Для создания поверхностного режима при выходе потока из колодца необходимы еще дополнительные устройства, например,—зубчатые пороги Ребока[1] (Rehbock) (фиг. 272).



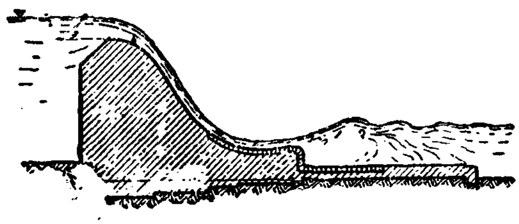
Фиг. 271



Фиг. 272

Благодаря зубчатому порогу происходит перераспределение скоростей в потоке — поверхностные скорости получаются значительно больше донных и, таким образом, устраняется опасность размыва нижнего бьефа за колодцем.

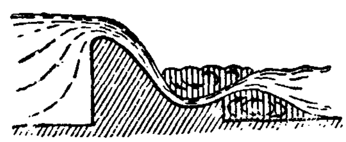
Часто для создания поверхностного режима при сопряжении струи, переливающейся через водосливные плотины, применяется вертикальный уступ с горизонтальным или приподнятым носком (фиг. 273).



Фиг. 273

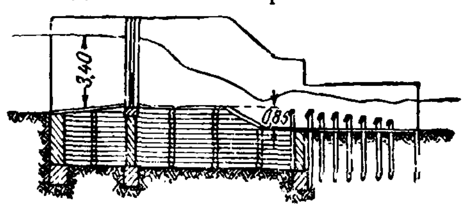
При устройстве такого уступа сопряжение происходит с поверхностным прыжком, рассмотренным нами в § 178.

С точки зрения гашения энергии лучшим будет сопряжение с надвинутым поверхностным прыжком (фиг. 274).



Фиг. 274

Назовем еще один тип гасителя, вошедший в нашу гидротехническую практику—гаситель инж. Сенкова (фиг. 275). Основная идея гасителя—разбить поток на ряд



Фиг. 275

отдельных струй, заставить их ударяться друг о друга и тем самым рассеять часть своей кинетической энергии.

§ 182. Определение длины водобойной части сооружения при отсутствии гасителей в нижнем бьефе

Поступая в нижний бьеф сооружения, поток обычно находится в бурном состоянии, с повышенными скоростями. Во избежание размыва русло приходится укреплять на более или менее значительном участке за водосливным сооружением.

Рассмотрим, как определить длину водобойной части, подлежащей тому или иному креплению.

Наибольшая длина участка, подлежащего креплению, потребуется при сопряжении с отогнанным прыжком.

В этом случае длина водобойной части (фиг. 276) определится следующим уравнением:

$$L = l_{пад} + l + l_{пр} + l_{зап}, \qquad (553)$$

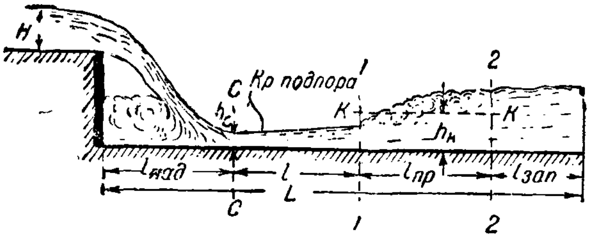
где $l_{пад}$ — расстояние от сооружения до сжатого сечения, называемое дальностью падения струи;

---

[1] Th. Rehbock, Bekämpfung der Sohlenauskolkung bei Wehren durch Zahnschwellen, Zeitschrift des Vereines deutcher Ingenieure, 1925, № 44, S. 1382;

Th. Rehbock. Die Verhütung schadlicher Kolke bei Sturzbetten. Der Bauingenieur, 1928, H. 4—5.

Перевод см. «Бюллетень научно-технического кружка Донского политехнического института». 1926, № 2.



Фиг. 276

l — расстояние от сжатого сечения до начала прыжка, т. е. длина кривой подпора, определяемая по формулам гл. XVII;

$l_{пр}$ — длина прыжка, определяемая по формулам § 151;

$l_{зап}$ — величина запаса за счет неточностей, могущих быть при расчете, обычно принимаемая равной от одной до двух нормальных глубин в нижнем бьефе.

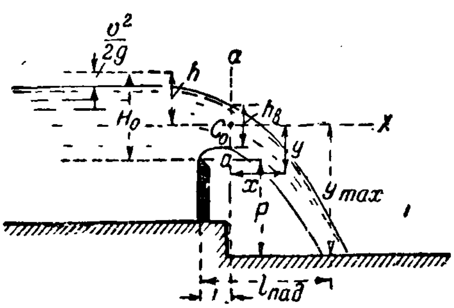
Уравнение (553) в общем виде остается в силе и для других видов сопряжения.

При критическом сопряжении $l=0$, так как в этом случае прыжок начинается непосредственно в сжатом сечении и кривая подпора отсутствует.

При сопряжении с надвинутым прыжком длина кривой подпора также равняется нулю. Сам же прыжок, надвигаясь на падающую струю, в значительной степени деформируется. Длина такого прыжка мало изучена вследствие сложности явления, но она должна быть меньше длины совершенного прыжка. Оставляя в таких случаях в уравнении (553) $l_{пр}$ как длину совершенного прыжка, т. е. уже с запасом, можно исключить из уравнения $l_{зап}$.

Остановимся на определении только дальности падения струи, так как способы расчета остальных величин уравнения (553) известны из предыдущих глав курса.

Обратимся к фиг. 277. За время t свободно па-



Фиг. 277

дающая частица жидкости, находящаяся в центре тяжести (C_0) сечения a-a, пройдет:

$$\left.\begin{array}{l}\text{в горизонтальном направлении } x=ut, \\ \text{в вертикальном направлении } y=\dfrac{1}{2}gt^2,\end{array}\right\} \quad (554)$$

где скорость рассматриваемой частицы

$$u=\varphi\sqrt{2gh},$$

если h обозначает полный напор в точке C_0.

Исключая из уравнений (554) параметр t, получим уравнение траектории частицы

$$x=2\varphi\sqrt{hy}.$$

Условимся отсчитывать дальность падения струи от передней грани сооружения, как показано на фиг. 277. Тогда дальность падения струи определится выражением:

$$l_{пад}=l_0+2\varphi\sqrt{hy_{\max}}, \quad (555)$$

где l_0 — расстояние от передней грани сооружения до сечения $a-a$.

При вычислении коэфициента скорости будем пользоваться известными зависимостями

$$\varphi=\frac{\mu}{\varepsilon} \text{ и } m=\frac{2}{3}\mu.$$

Уравнение (555) можно конкретизировать применительно к отдельным типам водосливных сооружений.

1. Водослив с тонкой стенкой. В этом случае с учетом очертания падающей струи по опытам Базена (фиг. 277) имеем:

$$l_0=0{,}3H;\ \varepsilon=\frac{2}{3};\ h=H_0-0{,}11H-0{,}5h_в$$

и

$$y_{max}=p+0{,}11H+0{,}5h_в.$$

Уравнение (555) для рассматриваемого случая после простых преобразований примет вид

$$l_{пад}=0{,}3H+4{,}5m\sqrt{(H_0-0{,}45H)(p+0{,}45H)}$$

или при значении коэфициента расхода в среднем $m=0{,}42$ и $H_0\approx H$

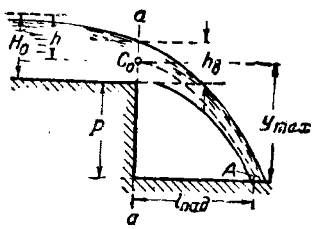
$$l_{пад}=0{,}3H+1{,}4\sqrt{H(p+0{,}45H)}. \quad (556)$$

2. Водослив с широким порогом. Сечение $a-a$ рассматриваем на выходном ребре водослива (фиг. 278). Обозначим глубину на этом ребре также через $h_в$. Значение величин, входящих в уравнение (555), будет

$$l_0=0;\ h=H_0-0{,}5h_в$$

и

$$y_{\max}=p+0{,}5h_в.$$



Фиг. 278

Тогда уравнение дальности падения струи примет такой вид:

$$l_{пад}=2\varphi\sqrt{(H_0-0{,}5h_в)(p+0{,}5h_в)}. \quad (557)$$

Глубина $h_в$ определится по такой зависимости[1]:

$$h_в=2(1-\sqrt{1-m})H_0, \quad (558)$$

где m — коэфициент расхода водослива.

[1] Ф. Пикалов, Дальность полета струи на перепадах, Труды ВНИИГиМ, IX, 1933.

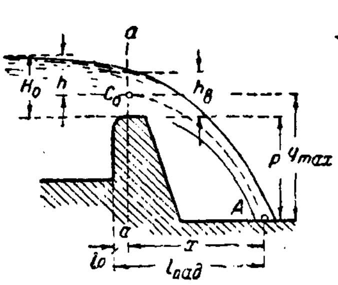
3. Водослив практического профиля. Принимая согласно данным акад. Павловского[1] $\varepsilon = \frac{3}{2}m$ для сечения a-a (фиг. 279), имеем:

$$l_0 = 0{,}3H;\quad h = H_0 - 0{,}5h_в \text{ и } y_{\max} = p + 0{,}5h_в.$$

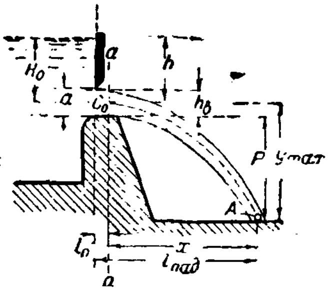
Тогда при $m = 0{,}42$ (в среднем) и $H_0 \approx H$ имеем для водослива прямолинейного профиля вместо общей формулы (555):

$$l_{пад} = 0{,}3H + 1{,}65\sqrt{H(p + 0{,}32H)}. \qquad (559)$$

Если же водослив—криволинейного профиля, то никакого отлета струи не будет и сжатое сечение следует считать непосредственно у подошвы водосливной грани.



Фиг. 279



Фиг. 280

4. Истечение из-под щита. Принимая в среднем $\varphi = 0{,}975$; $\varepsilon = 0{,}64$ и имея значения

$$h = H_0 + \frac{1-\varepsilon}{2}a \text{ и } y_{\max} = p + 0{,}5\varepsilon a,$$

получим дальность падения струи (фиг. 280)

$$l_{пад} = a + 1{,}95\sqrt{(H_0 + 0{,}18a)(p + 0{,}32a)}. \qquad (560)$$

5. Вертикальный уступ на быстротоке. Уравнения (554) запишутся (фиг. 281)

$$x = ut\cos\theta, \quad y = ut\sin\theta + \frac{1}{2}gt^2 \approx \frac{1}{2}gt^2.$$

Исключая параметр t, получим

$$x = u\cos\theta\sqrt{\frac{2y}{g}} \text{ или } l_{пад} \approx 0{,}45v_0\cos\theta\sqrt{p + 0{,}5H},$$

где v_0 — средняя скорость на конце быстротока; H — глубина на конце быстротока.

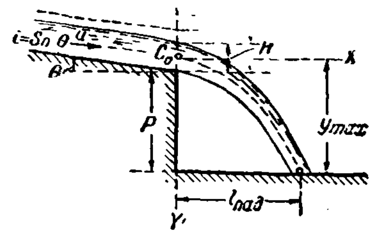
Выражая $\cos\theta$ через уклон быстротока, а именно $\cos\theta = \sqrt{1 - i^2}$, получим

$$l_{пад} = 0{,}45v_0\sqrt{(p + 0{,}5H)(1 - i^2)}.$$

При незначительном уклоне можно принять $i^2 = 0$ и

$$l_{пад} = 0{,}45v_0\sqrt{p + 0{,}5H}. \qquad (561)$$

Задача 113. Определить длину водобойной части водосливной плотины высотой $p = 7{,}4$ *м* при следующих данных: $q = 8$ *м²/сек*; $\varphi = 0{,}90$; $H_0 = 2{,}0$ *м*; $n_r = 0{,}020$; ширина сливной части $b = 10$ *м*; отводящее русло прямоугольное той же ширины; бытовая глубина в отводящем русле $h_б = 2{,}5$ *м*.



Фиг. 281

Установим характер сопряжения в нижнем бьефе.

Имеем

$$\Phi(\tau_c) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\varphi}\frac{q}{Э_0^{\frac{3}{2}}} = 1{,}171\frac{8}{(7{,}4 + 2)^{\frac{3}{2}}} = 0{,}325;$$

по таблице[2] при $\varphi = 0{,}90$ находим

$$\tau_c = 0{,}0764 \text{ и } \tau_c'' = 0{,}441.$$

Отсюда глубина в сжатом сечении будет

$$h_c = \tau_c Э_0 = 0{,}0764 \cdot 9{,}4 = 0{,}72 \text{ м},$$

а глубина, взаимная с ней,

$$h_c'' = \tau_c'' Э_0 = 0{,}441 \cdot 9{,}4 = 4{,}15 \text{ м}.$$

Так как $h_c'' = 4{,}15$ *м* $> h_б = 2{,}50$ *м*, то прыжок отогнан.

Взаимными глу инами в прыжке будут: бытовая глубина в нижнем бьефе $h_б = 2{,}5$ *м* и ей сопряженная

$$h_б' = 0{,}5h_б\left(\sqrt{1 + \frac{8\alpha q^2}{gh_б^3}} - 1\right) =$$

$$= 0{,}5 \cdot 2{,}5\left(\sqrt{1 + \frac{8 \cdot 1{,}1 \cdot 8^2}{9{,}81 \cdot 2{,}5^3}} - 1\right) = 1{,}45 \text{ м}.$$

От сжатого сечения с глубиной $h_c = 0{,}72$ *м* до начала прыжка с глубиной $h_б' = 1{,}45$ *м* будет кривая подпора, длину которой и определим.

Результаты подсчетов по способу Агроскина сведены в табл. 93, из которой видно, что длина отгона прыжка $l \approx 136$ *м*.

Таблица 93

№ сечений	η	$a_1 - f_1(\eta)$	$a_2 - \theta(\eta)$	$\varphi(\eta) = \frac{(3)}{(4)}$	$\sum_n^{n+1}\varphi(\eta)$	l м	h м	Примечание
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0,072	2 560	9 153	0,280			0,72	$a_1 = f_1(\eta_{kp}) = 139$
					0,562	55,4		
2	0,100	860	3 044	0,282			1,00	$a_2 = \theta(\eta_0) = 196{,}6$
					0,513	81,1		
3	0,145	189	817	0,231			1,45	$A = 3\,520\,\Delta\eta$
						$\sum l = 136{,}5$ м		

[1] «Гидравлический справочник», 1937, стр. 727.

[2] См. таблицу на стр. 322

Далее определяем длину прыжка.

Из сопоставления сопряженных глубин$\left(\frac{2,50}{1,45}<2\right)$видно, что прыжок будет иметь форму прыжка волны. Тогда длину прыжка определим по (467):

$$l_{пр}=10,6h'(\mathrm{Fr}_1-1)=10,6\cdot 1,45(2,15-1)=18 \text{ м}.$$

Наконец, принимая $l_{зап}=2h_б=2\cdot 2,5=5$ м и учитывая, что в данном случае $l_0=0$, получим по (553)

$$L=136,5+18+5\approx 160 \text{ м}.$$

Обратим внимание, что длина кривой подпора по величине значительно больше остальных слагаемых.

§ 183. Гидравлический расчет водобойного колодца

Водобойный колодец является довольно надежным и испытанным гасителем энергии и применяется в тех случаях, когда в нижнем бьефе получается сопряжение с отогнанным прыжком.

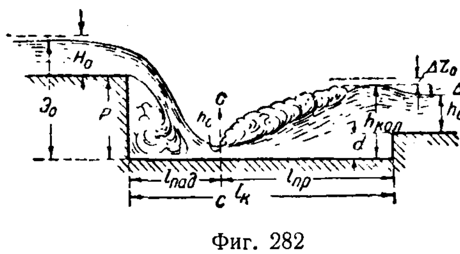
Гидравлический расчет водобойного колодца заключается в определении его глубины и длины.

Целесообразность устройства колодца объясняется тем, что за счет увеличения глубины воды создается сопряжение в форме надвинутого прыжка вместо отогнанного. Это может быть достигнуто при условии, что глубина воды в колодце ($h_{кол}$) будет несколько превышать взаимную глубину потока в сжатом сечении на дне колодца, вычисляемую по уравнению совершенного прыжка, т. е. при условии

$$h_{кол}=\sigma_з h''_c,$$

где $\sigma_з=1,05\div 1,10$ — коэфициент запаса, обеспечивающий затопление прыжка и компенсирующий также отдельные допущения при расчете, отмечаемые ниже.

Глубина воды в колодце складывается из трех величин (фиг. 282):



Фиг. 282

$$h_{кол}=d+h_б+\Delta z,$$

где d — глубина самого колодца;

$h_б$ — глубина воды в отводящем русле;

Δz — перепад, который образуется при выходе потока из водобойного колодца.

Величина перепада Δz может быть определена в предположении, что выходная часть водобойного колодца работает как затопленный водослив с широким порогом. Пренебрегая скоростным напором, имеем

$$\Delta z=\frac{\alpha q^2}{2g\varphi^2 h_б^2}.$$

В действительности явление истечения через выходную часть колодца будет более сложным, чем истечение через водослив с широким порогом. Поэтому принятую схему истечения надо считать условной и осторожно назначать значение коэфициента скорости φ.

Проф. Угинчус на основе своих опытов, проведенных в 1936 г. при испытании сооружений канала Москва—Волга, рекомендует $\varphi=1$.

Итак для определения необходимой глубины колодца можно исходить из следующего уравнения:

$$d+h_б+\Delta z=\sigma_з h_c''$$

или

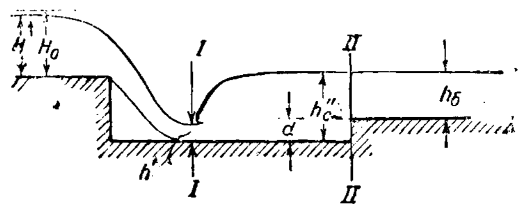
$$d=\sigma_з h_c''-(h_б+\Delta z). \tag{562}$$

В этом уравнении кроме d неизвестна также величина h''_c, относящаяся к сжатому сечению на дне колодца.

Поэтому уравнение (562) приходится решать методом постепенных приближений, как это показано в приводимом ниже числовом расчете.

Можно указать на другой метод расчета колодца, предложенный инж. Ф. Пикаловым.

С устройством водобойного колодца совершенный прыжок превращается в подпёртый. Выбрав сечения так, как показано на фиг. 283, и применив теорему о приращении количества движения, положенную в основу вывода общего уравнения прыжка, получим, отнеся уравнение к единице ширины потока,



Фиг. 283

$$\frac{2\alpha q}{g}(v_0-v_1)=(h')^2-(h_c'')^2,$$

откуда

$$h_c''=\sqrt{(h')^2+\frac{2\alpha q}{g}(v_1-v_0)}, \tag{563}$$

где h' — глубина в сжатом сечении перед прыжком на дне колодца;

v_1 — скорость в этом сечении;

v_0 — скорость в сечении II-II, равная средней скорости в нижнем бьефе.

При выводе уравнения (563) пренебрегается величиной Δz — понижением горизонта при выходе из колодца и принято, что давление в сечении *II-II*, совпадающем с плоскостью выходного сечения колодца, распределяется по гидростатическому закону.

Из уравнения (563) видно, что для определения h_c'' надо знать величину h', которая зависит от глубины колодца. Кроме того $h_c''=h_б+d$. Таким образом и по этому методу глубина колодца определяется постепенным подбором. Глубина колодца принимается $d=h_c''-h_б$ без коэфициента запаса σ.

Задача 114. Рассчитать глубину водобойного колодца в нижнем бьефе водосливной плотины при $q=8$ *м³/сек*; $\varphi=0{,}90$; $p=7{,}4$ *м*, $H=2$ *м*; $h_б=2{,}5$ *м* (отводящее русло прямоугольное).

Как уже было установлено выше (см. задачу 113), сопряжение бьефов в данном случае происходит с отогнанным прыжком ($h_c''=4{,}15$ *м* $>h_б=2{,}5$ *м*) и, следовательно, устройство водобойного колодца необходимо.

В первом приближении примем взаимную глубину $h_c''=4{,}15$ *м* так, как она проявляется в нижнем бьефе без устройства колодца.

Тогда, определяя величину перепада (без учета скоростного напора)

$$\Delta z=\frac{\alpha q^2}{2g\varphi^2 h_б{}^2}=\frac{1{,}1\cdot 8^2}{19{,}62\cdot 1\cdot 2{,}5^2}=0{,}6\ м,$$

найдем глубину колодца в первом приближении равной

$$d=\sigma_з h_c''-(h_б+\Delta z)=1{,}1\cdot 4{,}15-(2{,}5+0{,}6)=1{,}5\ м.$$

При наличии такого колодца общая высота падения жидкости изменится с $Э_0=9{,}4$ *м* до $Э_0=9{,}4+1{,}5=10{,}9$ *м* что приведет к новым значениям как глубины в сжатом сечении, так и глубины ей взаимной.

Определим это новое значение h_c''. Имеем

$$\Phi(\tau_c)=\frac{\sqrt{\alpha}}{\varphi}\,\frac{q}{Э_0^{3/2}}=1{,}171\,\frac{8}{10{,}9^{3/2}}=0{,}260,$$

чему по таблице[1] соответствует, при $\varphi=0{,}90$,

$$\tau_c''=0{,}3999$$

и, следовательно,

$$h_c''=\tau_c''Э_0=0{,}3999\cdot 10{,}9=4{,}36\ м.$$

По уравнению (562) находим глубину колодца во втором приближении, а именно

$$d=\sigma_з h_c''-(h_б+\Delta z)=1{,}1\cdot 4{,}36-3{,}1=1{,}7\ м.$$

Третье приближение дает практически близкие результаты.

Вторым не менее ответственным элементом водобойного колодца, подлежащим определению, является его длина. Излишне длинный колодец нецелесообразно удорожает стоимость сооружения. Колодец же недостаточной длины не будет эффективным гасителем энергии — струя будет выскакивать из колодца и частичное гашение энергии будет происходить за пределами колодца в нижнем бьефе, подвергая опасности все сооружение.

Общую длину колодца можно определить по зависимости:

$$l_{кол}=l_{пад}+\beta l_{пр}, \tag{564}$$

где $l_{пад}$ — дальность падения струи с учетом принятой глубины водобойного колодца;

$l_{пр}$ — длина совершенного прыжка, определяемая по формулам § 151;

β — коэфициент, учитывающий уменьшение длины подпертого прыжка и принимаемый, по предложению проф. Чертоусова, равным $0{,}7\div 0{,}8$.

Если сопряженная глубина h_c'' вычисляется по формуле (563), то длина прыжка вычисляется по формуле Ф. Пикалова, предложенной им на основании опытов инж. Шаумяна

$$l_{пр}=3\ h_c''. \tag{565}$$

Длина колодца в таком случае будет равна

$$l_{кол}=l_{пад}+3\ h_c''. \tag{566}$$

Как уже отмечалось выше, рассчитанный таким образом водобойный колодец создает сопряжение с надвинутым прыжком, но еще не обеспечивает поверхностного режима при выходе потока из колодца. Следовательно, русло за водобойным колодцем должно быть укреплено во избежание размыва. Крепление это рекомендуется делать на длине, равной трем — четырем глубинам отводящего русла.

Создать поверхностный режим за водобойным колодцем можно, если выходной порог его осуществить, например, по типу зубчатого порога Ребока.

В заключение необходимо подчеркнуть, что в наиболее ответственных случаях запроектированный водобойный колодец, как правило, подвергают лабораторным испытаниям на моделях и окончательные размеры колодца принимают в соответствии с лабораторными данными.

Задача 115. Канал трапецоидального сечения ($b=5{,}0$ *м* и $m=1$) с уклоном дна $i=0{,}057$ больше критического сопрягается с каналом, уклон дна которого меньше критического.

Глубина воды в конце первого канала $h_1=0{,}50$ *м* и скорость $v_1=12{,}2$ *м/сек*; глубина воды во втором канале $h_2=2{,}0$ *м* и скорость $v_2=1{,}0$ *м/сек*. Расход $Q=33{,}6$ *м³/сек*. Рассчитать водобойный колодец трапецоидального профиля ($b=5$ *м*; $m=1$)

Определяем глубину, сопряженную с глубиной $h_1=0{,}50$ *м* по графику взаимных глубин в трапецоидальном русле,[2] пользуясь кривой с параметром

$$0{,}482\,\frac{m}{b}\sqrt[3]{q^2}=0{,}482\,\frac{1}{5}\sqrt[3]{6{,}72}\approx 0{,}35.$$

Вычислив $z'=\frac{m}{b}h_1=\frac{1}{5}0{,}5=0{,}10$, находим по кривой парную для z точку с $z''=0{,}68$.

Тогда

$$h''=z''\frac{b}{m}=0{,}68\,\frac{5}{1}=3{,}40\ м.$$

Так как $h''=3{,}40$ *м* $>h_2=2{,}0$ *м*, то прыжок отогнан и устройство колодца целесообразно.

В первом приближении принимаем

$$h_{кол}=\sigma_з(h''-h_2)=1{,}1\,(3{,}40-2{,}00)=1{,}54\ м.$$

[1] См. таблицу на стр. 322.

[2] См. график на стр. 320—321.

Удельная энергия относительно дна колодца будет

$$Э_0 = h_1 + \frac{\alpha v_1^2}{2g} + d = 0{,}50 + \frac{1{,}1 \cdot 12{,}2^2}{19{,}62} + 1{,}54 = $$
$$= 8{,}87 + 1{,}54 = 10{,}4 \ м.$$

Глубина в сжатом сечении на дне колодца будет, очевидно, мало отличаться от глубины в конце первого канала.

Определим ее по формуле (532), считая $\varphi = 1$:

$$\Phi(\tau_c) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\varphi} \cdot \frac{q_{cp}}{Э_0^{3/2}} = 1{,}054 \frac{6{,}11}{10{,}4^{3/2}} = 0{,}192,$$

где $q_{cp} = \frac{Q}{b + mh_1} = \frac{33{,}6}{5 + 1 \cdot 0{,}5} = 6{,}11$ $м^3/сек$ — расход на единицу ширины средней линии трапеции в сжатом сечении при $h_1 = h_c = 0{,}5$ $м$.

Для $\Phi(\tau_c) = 0{,}192$ из таблиц[1] имеем $\tau_c = 0{,}0445$ и находим

$$h_c = \tau_c Э_0 = 0{,}0445 \cdot 10{,}4 \approx 0{,}46 \ м.$$

Последующего приближения не потребуется, так как при $h_c = 0{,}46$ м

$$q_{cp} = \frac{33{,}6}{5 + 1 \cdot 0{,}46} = 6{,}14 \ м^3/сек \text{ и } \Phi(\tau_c) = 1{,}054 \frac{6{,}14}{10{,}4^{3/2}} = 0{,}193,$$

что практически не изменит величины h_c.

Поэтому принимаем

$$h_c = 0{,}46 \ м.$$

Сопряженную ей глубину находим по упомянутому графику взаимных глубин в трапецоидальном русле. Кривая остается прежней, с параметром 0,35.

Для

$$z' = \frac{m}{b} h_c = \frac{1}{5} 0{,}46 = 0{,}092$$

по кривой находим $z'' = 0{,}703$ и получаем

$$h''_c = \frac{b}{m} z'' = \frac{5}{1} 0{,}708 = 3{,}54 \ м.$$

Определяем глубину колодца во втором приближении

$$h_{кол} = \sigma_з (h''_c - h_2) = 1{,}1 (3{,}54 - 2{,}00) = 1{,}7 \ м.$$

Длину колодца определим по формуле (564):

$$l_{кол} = l_{пад} + \beta l_{пр},$$

где длина падения струи согласно (561) будет

$$l_{пад} = 0{,}45 \cdot 12{,}2 \sqrt{1{,}7 + 0{,}25} = 7{,}1 \ м,$$

а длина затопленного прыжка, принимая длину совершенного прыжка по формуле (463), будет

$$\beta l_{пр} = 0{,}8 \cdot 4{,}33 \cdot 3{,}54 = 12{,}25 \ м.$$

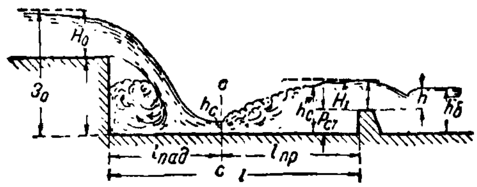
Следовательно, общая длина колодца определится так:

$$l_{кол} = l_{пад} + \beta l_{пр} = 7{,}1 + 12{,}25 = 19{,}5 \ м.$$

§ 184. Гидравлический расчет водобойной стенки

Той же цели, которую преследует устройство водобойного колодца, а именно: увеличения глубины воды в нижнем бьефе для затопления прыжка, можно достигнуть и другим путем — водобойной стенкой.

Гидравлический расчет водобойной стенки заключается в определении высоты стенки (p_{cm}) и расстояния (l) от стенки до сооружения (фиг. 284).



Фиг. 284

Водобойная стенка должна быть такой высоты (p_{cm}), которая в сумме с напором (H_1), при котором расчетный расход проходит через стенку как через водослив, равнялась бы сопряженной глубине (h''_c).

Вводя коэфициент запаса $\sigma_з = 1{,}05 \div 1{,}10$, обеспечивающий определенную степень затопления, получим для расчета высоты стенки формулу

$$p_{cm} = \sigma_з \cdot h_c'' - H_1.$$

Величина h''_c вычисляется по уравнениям совершенного прыжка.

Применяя уравнение подпертого прыжка, получим для h_c'' такую зависимость:

$$h_c'' = \sqrt{(h')^2 + \frac{2\alpha q}{g}(v_1 - v)}, \tag{567}$$

где h' и v_1 — глубина и скорость в сжатом сечении; v — скорость перед ребром стенки, равная $v = \frac{q}{H_1} = \sqrt[3]{m^2 q}$.

Высота стенки в этом случае будет

$$p_{cm} = h_c'' - H_1.$$

Расстояние от сооружения l, на котором должна быть поставлена стенка, определяется по рекомендованным выше формулам для длины водобойного колодца.

Длина водобойного колодца, получающегося при устройстве в нижнем бьефе водобойной стенки, является довольно важным фактором для гашения энергии. Правильно подобранная высота стенки при недостаточной длине l не дает эффективного гашения энергии, так как струя будет выскакивать из колодца.

Следует иметь в виду, что при расчете водобойной стенки надо обязательно проверить сопряжение потока за стенкой. Если получается отогнанный прыжок, то за первой стенкой должна быть поставлена вторая, расчет которой аналогичен расчету первой водобойной стенки.

Задача 116. Рассчитать водобойную стенку в нижнем бьефе одноступенчатого перепада прямоугольного сечения при следующих данных: $q = 4$ $м^3/сек$; $p_1 = 3{,}2$ $м$; $H_0 = 2{,}0$ $м$; $Э_0 = H_0 + p_1 = 5{,}2$ $м$; $\varphi_1 = 0{,}85$ — для перепада; $\varphi_2 = 0{,}90$ — для водобойной стенки; глубина воды в нижнем бьефе $h_б = 2{,}0$ $м$.

Для установления характера сопряжения найдем

$$\Phi(\tau_c) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\varphi_1} \cdot \frac{q}{Э_0^{3/2}} = 1{,}239 \ \frac{4}{5{,}2^{3/2}} = 0{,}417 \ .$$

[1] См. сноску[1] на стр. 265.

Для $\Phi(\tau_c)=0,417$ имеем по таблице[1] $\tau_c''=0,46$ (при $\varphi_1=0,85$). Поэтому $h_c''=\tau_c''Э_0=0,46\cdot 5,2=2,39$ $м>2$ $м$.

Следовательно, прыжок отогнан и устройство гасителя энергии необходимо.

Для определения высоты водобойной стенки, вычислим предварительно напор H_1, при котором через гребень стенки пройдет проектный расход.

Предполагая, что стенка работает как незатопленный водослив и принимая $M=m\sqrt{2g}=1,86$, имеем

$$H_1=\left(\frac{q}{M}\right)^{2/3}-\frac{\alpha q^2}{2g(\sigma_з h_c'')^2}=$$

$$=\left(\frac{4}{1,86}\right)^{2/3}-\frac{1,1\cdot 4^2}{19,62(1,05\cdot 2,39)^2}=1,54\ м.$$

Высота самой стенки, следовательно, будет

$$p_2=\sigma_з h_c''-H_1=1,05\cdot 2,39-1,54=0,97\ \ м.$$

Хотя $p_2=0,97$ $м$ и меньше $h_б=2$ $м$, все же необходимо проверить сопряжение за стенкой.

Тогда для

$$\Phi(\tau_c)=\frac{\sqrt{\alpha}}{\varphi_2}\cdot\frac{q}{Э_{02}^{3/2}}=1,171\frac{4}{2,63^{3/2}}=1,097$$

(где $Э_{02}=p_2+H_{01}=0,97+1,66=2,63$ — удельная энергия перед стенкой) находим (по упомянутой выше таблице при $\varphi_2=0,90$) значение $\tau_c''=0,686$ и определяем

$$h_c''=0,686\cdot 2,63=1,81<h_б=2,0\ м.$$

Следовательно, стенка будет работать как затопленный водослив и поэтому высоту стенки можно уменьшить. Примем высоту стенки $p_2=0,80$ $м$.

Тогда, для обеспечения перед стенкой той же глубины $\sigma_з\cdot h_c''=1,05\cdot 2,39=2,5$ $м$, необходимо иметь перед ней напор

$$H_1=\sigma_з h_c''-p_2=2,5-0,80=1,70\ м.$$

При этом высота затопления будет

$$\Delta=h_б-p_2=2,00-0,80=1,20\ \ м.$$

Тогда по табл. 89 для значения $\dfrac{\Delta}{H_1}=\dfrac{1,20}{1,7}=0,7$ находим коэфициент затопления водослива $\sigma=0,856$ и определяем расход на единицу ширины его:

$$q=\sigma M\left[H_1+\frac{\alpha q^2}{2g(\sigma_з h_c'')^2}\right]^{3/2}=$$

$$=0,856\cdot 1,86(1,70+0,14)^{3/2}=4\ \ м^3/сек,$$

что соответствует условию.

Таким образом при $p_2=0,8$ $м$ обеспечивается пропуск заданного расхода $q=4$ $м^3/сек$ при создании глубины перед стенкой

$$\sigma_з h_c''=1,05\cdot 2,39=2,5\ \ м.$$

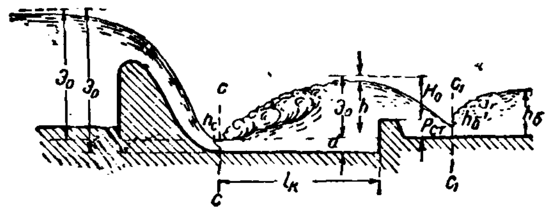
Наконец, определяем длину колодца по (556):

$$l_{кол}=0,3H+1,4\sqrt{H(p+0,45H)}+0,75\cdot 4,33h_c''=$$

$$=0,3\cdot 2+1,4\sqrt{2(3,2+0,45\cdot 2)}+0,75\cdot 4,33\cdot 2,39=11,5\ м.$$

§ 185. Гидравлический расчет комбинированного водобойного колодца

Колодцем комбинированного типа называется колодец, созданный частично углублением в дне флютбета, частично—водобойной стенкой (фиг. 285).



Фиг. 285

Эта конструкция применяется в тех случаях практики, когда обычный колодец получается слишком глубоким, а водобойная стенка слишком высокой. При высоких водобойных стенках, за ними, в нижнем бьефе получается снова отогнанный прыжок и появляется необходимость ставить за первой стенкой одну, а то и несколько стенок меньшей высоты.

Гидравлический расчет комбинированного колодца рассмотрим на конкретном примере.

Задача 117. Рассчитать комбинированный водобойный колодец для плотины, применительно к условиям задачи 113. Имеем: $q=8$ $м^3/сек$; $\varphi=0,90$; $Э_0=9,4$ $м$; глубина в нижнем бьефе $h_б=2,5$ $м$; взаимная глубина $h_c''=4,15$ $м$; русло прямоугольное.

Высоту водобойной стенки определим так, чтобы за ней получилось сопряжение с затопленным прыжком.

Для этого найдем глубину, сопряженную в прыжке с глубиной нижнего бьефа $h_б=2,5$ $м$.

Имеем

$$h'_б=\frac{h_б}{2}\left(\sqrt{1+\frac{8\alpha q^2}{gh_б^3}}-1\right)=$$

$$=\frac{2,5}{2}\left(\sqrt{1+\frac{8,8\cdot 8^2}{9,81\cdot 2,5^3}}-1\right)=1,46\ м.$$

При таком значении глубины в сжатом сечении за стенкой полная удельная энергия перед стенкой будет

$$Э_0=h'_б+\frac{\alpha q^2}{2g\varphi^2(h'_б)^2}=1,46+\frac{1,1\cdot 8^2}{19,62\cdot 0,9^2\cdot 1,46^2}=3,55\ м.$$

Напор перед стенкой

$$H_0=\left(\frac{q}{M}\right)^{2/3}=\left(\frac{8}{1,86}\right)^{2/3}=2,65\ м.$$

Тогда высота стенки, при которой получится критическое сопряжение, будет

$$p_{ст}=Э_0-H_0=3,55-2,65=0,90\ м.$$

Уменьшение высоты стенки приведет к сопряжению за ней в форме затопленного прыжка.

С этой целью остановимся на несколько меньшей высоте стенки, а именно, примем

$$p_{ст}=0,85\ м.$$

Глубина воды перед стенкой (без колодца) будет равна полной удельной энергии за вычетом скоростного напора.

Приближенно находим глубину воды перед стенкой. В первом приближении имеем

$$h=Э_0-\frac{\alpha v_0^2}{2g}=3,55-\frac{1,1\cdot 8^2}{19,62\cdot 3,55^2}=3,27\ м.$$

Во втором приближении

$$h=3,55-\frac{1,1\cdot 8^2}{19,62\cdot 3,27^2}=3,2\ м,$$

на котором и останавливаемся, так как третье приближение приводит к такому же результату.

[1] См. таблицу на стр. 322.

Такая глубина воды за плотиной недостаточна для гашения энергии при $h_c'' = 4{,}15$ *м* и потому кроме стенки необходим и колодец.

Глубина колодца без учета дополнительного влияния глубины самого колодца на падение струи будет

$$d = \sigma_з\,(h_c'' - h_б) = 1{,}1\,(4{,}15 - 3{,}20) = 1{,}05 \text{ м}$$

Для уточнения глубины колодца определим новое значение h_c'', учитывая дополнительное увеличение высоты падения струи на 1,05 *м* (т. е. при $Э_0 = 9{,}4 + 1{,}05 = 10{,}45$).

Имеем, при $\varphi = 0{,}90$,

$$\Phi(\tau_c) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\varphi} : \frac{q}{Э_0^{3/2}} = 1{,}171\,\frac{8}{10{,}45^{3/2}} = 0{,}277$$

и по таблице[1] находим $\tau_c'' = 0{,}412$.

Тогда имеем

$$h_c'' = 0{,}412 \cdot 10{,}45 = 4{,}30 \text{ м.}$$

Так как полученное значение $h_c'' = 4{,}30$ мало отличается от исходного, нет необходимости в последующем приближении и глубину колодца можно окончательно принять

$$d = \sigma_з\,(h_c'' - h_б) = 1{,}1\,(4{,}30 - 3{,}20) = 1{,}2 \text{ м.}$$

Длину этого колодца определим по (564):

$$l_{кол} = \beta l_{пр} = 0{,}8 \cdot 4{,}33 \cdot 4{,}30 = 14{,}8 \text{ м.}$$

§ 186. Установление расчетного расхода

В гидротехнической практике очень редко встречаются сооружения, работающие с постоянным расходом. Расход сооружения обычно меняется от минимального (иногда близкого к нулю) до некоторого максимального.

При изменении расхода, как правило, меняется и удельная энергия $Э_0$.

Максимальный расход далеко не всегда является в то же время и наиболее опасным расходом, т. е. таким, который создает в нижнем бьефе наибольшую длину отгона прыжка и, следовательно, требует для гашения избыточной энергии наибольшую глубину водобойного колодца.

Таким образом возникает необходимость в выборе величины этого наиболее опасного расхода в интервале от Q_{min} до Q_{max}, который и носит название расчетного расхода $Q_{рсч}$, так как на него именно и должен гидравлически рассчитываться принятого типа гаситель энергии.

В качестве критерия для установления величины расчетного расхода примем разность

$$h_c'' - h_б,$$

которой будет пропорциональна глубина водобойного колодца[2].

Здесь h_c'' — глубина, взаимная с глубиной в сжатом сечении;

$h_б$ — нормальная глубина в нижнем бьефе.

Расчетным расходом будет, очевидно, такой расход, при котором значение этой разности окажется наибольшей.

Порядок определения расчетного расхода рассмотрим на конкретном примере.

Задача 118. Установить расчетный расход $Q_{рсч}$ для водосливной плотины высотой $p = 6$ *м* при следующих данных:

$$\varphi = 0{,}95;\quad M = m\sqrt{2g} = 2{,}00;\quad Q_{max} = 180 \text{ м}^3/сек;$$

ширина сливного фронта $b = 15$ *м*; отводящее русло той же ширины с уклоном $i = 0{,}0004$ и $n_z = 0{,}02$.

Расчет выполняем в последовательности, указанной в заголовках табл. 94.

Из таблицы видно, что расчетный расход соответствует

$$(h_c'' - h_б)_{max} = 0{,}45 \text{ при } q = 1{,}5 \text{ м}^3/сек$$

и равняется

$$Q_{рсч} = qb = 1{,}5 \cdot 15 = 22{,}5 \text{ м}^3/сек.$$

Проф. А. А. Угинчус[3] на основе анализа значительного количества частных примеров устанавливает случаи, когда расчетным расходом является Q_{max}.

Вводя критерий «высоконапорности» в виде отношения

$$\frac{(h_б)_{max}}{Э_0},$$

где $(h_б)_{max}$ — глубина воды в отводящем русле при максимальном расходе Q_{max};

$Э_0$ — полная удельная энергия перед сооружением относительно дна нижнего бьефа, соответствующая расходу Q_{max},

и относя к категории «высоконапорных» сооружения при

$$\frac{(h_б)_{max}}{Э_0} \leqslant 0{,}5,$$

Таблица 94

№	$q = \frac{Q}{b}$	$H_0 = \left(\frac{q}{M}\right)^{\frac{2}{3}}$	$Э_0 = p + H_0$	$\Phi(\tau_c) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\varphi}\;\frac{q}{Э_0^{3/2}}$	τ''_c	$h''_c = \tau''_c Э_0$	$\Psi(\eta_0) = \lg b^{1,7} - \lg\frac{n}{\sqrt{i}} - \lg q$	η_0	$h_б = \eta_0 b$	$h''_c - h_б$
1	1,0	0,62	6,62	0,0651	0,2230	1,48	1,9994	0,071	1,07	0,41
2	1,5	0,83	6,83	0,0933	0,2657	1,81	1,8233	0,091	1,36	0,45
3	2,0	1,00	7,00	0,1198	0,2973	2,08	1,6984	0,109	1,635	0,445
4	4,0	1,58	7,58	0,2129	0,3890	2,95	1,3973	0,170	2,55	0,40
5	6,0	2,07	8,07	0,2901	0,4505	3,64	1,2212	0,217	3,26	0,38

[1] См. таблицу на стр. 322.

[2] См. И. И. Агроскин, Гидравлика каналов, 1940, стр. 99—100.

[3] Работа не опубликована, но любезно предоставлена автором для ознакомления.

проф. Угинчус показывает, что для «высоконапорных» сооружений максимальный расход будет являться в то же время и расчетным расходом при обязательном выполнении следующих двух условий:

$$1)\ \frac{h_{кр}}{Э_0} \leqslant 0{,}35 \text{ и } 2)\ \frac{(h_б)_{ср}}{(h_б)_{\max}} \geqslant 0{,}75,$$

где $h_{кр}$ — критическая глубина нижнего бьефа при расходе Q_{max};

$(h_б)_{ср}$ — глубина воды в отводящем русле при расходе $0{,}5Q_{\max}$.

Если же одно из этих двух условий не выполняется, то расчетный расход не будет равен максимальному, а будет меньше его.

Низконапорные сооружения $\frac{(h_б)_{\max}}{Э_0} > 0{,}5$ всегда дают худшие условия гашения энергии в нижнем бьефе при расходе, меньшем $Q_{\max}$.

При этом расчетный расход низконапорных сооружений будет, примерно, равен расходу, соответствующему отношению

$$\frac{h_{кр}}{Э_0} \approx 0{,}35,$$

т. е.

$$q_{рсч} \approx \sqrt{0{,}35^3 \frac{g}{\alpha}}\, Э_0^{3/2} \approx 0{,}65\, Э_0^{3/2}$$

при $\alpha = 1$ и $g = 9{,}81$ *м/сек*^{2}.

Предложение проф. А. А. Угинчуса, подтвержденное рядом типичных примеров, представляет определенный интерес, хотя числовые значения отношений подлежат уточнению и в настоящее время могут быть приняты в качестве первого приближения. Отметим, что числовые значения этих отношений получены в предположении, что русло прямоугольное, $\varphi = 1$ и $\alpha = 1$.

ГЛАВА XXV
ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ СОПРЯГАЮЩИХ СООРУЖЕНИЙ

К сооружениям, применяемым при сопряжении бьефов, можно отнести: перепады, быстротоки, сифоны, шахтные, траншейные и консольные сбросы и др.

Краткие сведения о сопрягающих сооружениях, необходимые для понимания условий их работы, приводятся ниже наряду с рассмотрением гидравлического расчета этих сооружений.

§ 187. Перепады. Гидравлический расчет одноступенчатого перепада

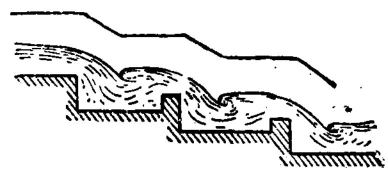
Одним из распространенных в гидротехнической практике типов сопрягающих сооружений являются перепады. В зависимости от разности отметок верхнего и нижнего бьефов перепады устраивают одноступенчатыми или многоступенчатыми.

Ступени перепада должны быть гидравлически рассчитаны так, чтобы в пределах каждой ступени была максимально погашена кинетическая энергия, образовавшаяся при падении потока на ступень. Это значит, что в конце ступени желательно иметь поток в критическом состоянии. На перепадах без водобойных стенок (фиг.

Фиг. 286

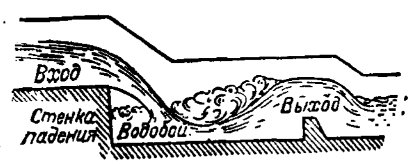
286) гашение энергии происходит в результате преодоления трения по длине ступени. При этом, так как путевые потери на единицу длины при обычных шероховатостях незначительны, длина ступени для погашения энергии требуется большая.

При наличии водобойных стенок (фиг. 287) на концах ступеней в качестве гасителя выступает водобойный колодец, образовавшийся перед стенкой, и поэтому необходимая длина ступени резко сокращается.



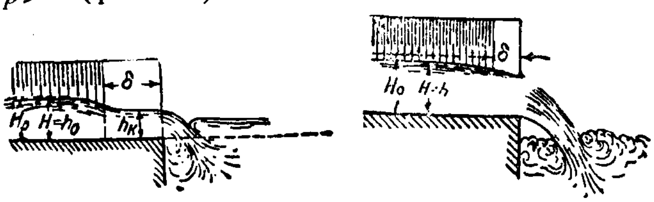
Фиг. 287

Рассмотрим в отдельности элементы, из которых состоит одноступенчатый перепад, подлежащие гидравлическому расчету, а именно: входную часть, водобой и выходную часть (фиг. 288).



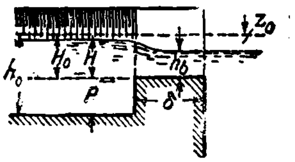
Фиг. 288

В х о д н а я ч а с т ь п е р е п а д а в большинстве случаев практики работает как водослив с широким порогом или в виде водослива практического профиля. Порог водослива может быть или на одной отметке с дном подводящего канала—$p=0$ (фиг. 289) или с приподнятым порогом $p>0$ (фиг. 290).



Фиг. 289

Гидравлический расчет входной части заключается в определении полной ширины водослива на основе соображений и формул, изложенных в разделе о водосливах.



Фиг. 290

При расчете входной части перепада необходимо обращать особое внимание на увязку горизонтов потока в подводящем канале и во входной части сооружения.

Если подводящий канал работает с постоянным расходом Q и, следовательно, с постоянной нормальной глубиной h_0, нужно, чтобы напор на входной части водослива не создавал подпора или спада в подводящем канале.

При постоянном расходе Q для обеспечения в подводящем канале равномерного режима надо при определении ширины водослива за напор (H) на водосливе принимать

$$H = h_0 - p.$$

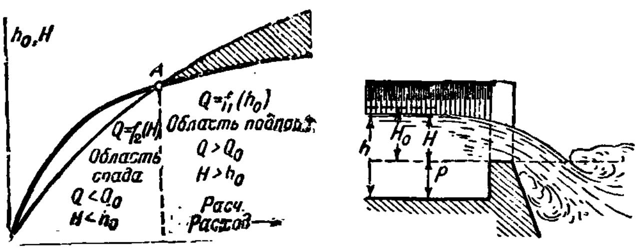
Здесь p — высота порога;

h_0 — нормальная глубина канала.

Если же расход канала переменный, то во всех случаях, когда расход в канале не равен расчетному для водослива, в канале будет наблюдаться неравномерный режим. При расходах меньше расчетного в канале будет спад, а при расходах больше расчетного — подпор.

Построим для канала кривую зависимости расхода от глубины равномерного режима $Q=f_1(h_0)$, а для водослива кривую зависимости расхода от напора водослива $Q=f_2(H)$ (фиг. 291).

Кривые пересеклись в точке A. Влево от нее лежит зона спада, вправо — зона подпора.



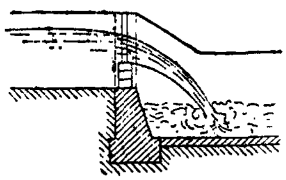
Фиг. 291

Как спад, так и подпор нежелательные явления для канала. При спаде ($h<h_0$) скорости возрастут и канал может размываться. При подпоре ($h>h_0$) канал может заиляться и кроме того канал надо проектировать более глубоким, чтобы избежать перелива воды через борта при максимальном расходе.

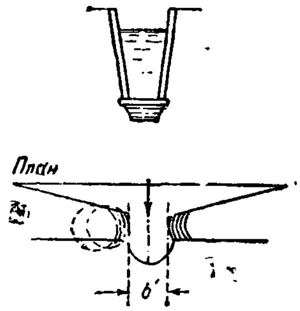
При переменном расходе можно поддерживать в подводящем канале режим, близкий к равномерному, если приподнятый порог водослива практического профиля устроить разборного типа — в виде шандорной стенки (фиг. 292).

Однако можно применить особый саморегулирующий водослив, который позволяет автоматически поддерживать постоянство нормального режима в подводящем канале при различных расходах.

Из такого типа водосливов рассмотрим так называемый щелевой водослив (фиг. 293)



Фиг. 292



Фиг. 293

трапецоидального профиля, который позволяет сохранить равномерный режим подводящего канала при двух заданных расходах [1].

Пусть канал работает периодически при расходах Q_1 и Q_2, которым в подводящем канале соответствуют нормальные глубины h_{01} и h_{02}.

Определим, какой ширины и с каким заложением откосов должен быть трапецоидальный водослив, способный пропустить указанные расходы, не вызывая в канале ни подпора, ни спада.

Возьмем уравнение расхода через трапецоидальный водослив в таком виде:

$$Q = MH_0^{3/2}(b+0{,}8\,n'H).$$

Здесь величина в скобках представляет собой среднюю линию трапеции в плоскости водослива при толщине струи $0{,}8\,H$, т. е.

$$b_{cp} = b+0{,}8\,n'H,$$

а n' — коэфициент откоса в отверстии водослива.

Чтобы водослив не нарушал равномерного движения воды в канале, необходимо иметь напор на водосливе равным нормальной глубине в канале при заданном расходе.

Тогда имеем, пренебрегая скоростным напором,

$$Q_1 = M\,b'_{cp}\,H_1^{3/2} = M\,(b+0{,}8\,n'\,H_1)\,H_1^{3/2},$$
$$Q_2 = Mb''_{cp}\,H_2^{3/2} = M\,(b+0{,}8\,n'\,H_2)\,H_2^{3/2}.$$

Решая эти уравнения совместно относительно b и n', получим расчетные формулы:

$$b = \frac{H_1\,b''_{cp} - H_2\,b'_{cp}}{H_1 - H_2} \qquad (568)$$

[1] Равномерный режим в канале при переменных расходах вообще может поддерживаться только водосливом с криволинейным очертанием.

и $$n' = 1{,}25\,\frac{b'_{cp} - b_{cp}''}{H_1 - H_2}, \qquad (569)$$

где

$$b'_{cp} = \frac{Q_1}{MH_1^{3/2}} \quad \text{и} \quad b''_{cp} = \frac{Q_2}{MH_2^{3/2}}. \qquad (570)$$

Щелевой водослив, построенный по (568) и (569), таким образом, автоматически обеспечивает равномерность движения жидкости в канале при двух расходах, положенных в основу расчета.

Щелевой водослив при пропуске других расходов уже не будет поддерживать равномерное движение в подводящем канале.

Чтобы получить меньшие нарушения равномерности движения в каналах, работающих при разных расходах от некоторого $Q_{\min}$ до некоторого $Q_{\max}$, расчет щелевого водослива выполняют не для крайних значений расхода, а для некоторых промежуточных его значений

$$Q_1 > Q_{\min} \text{ и } Q_2 < Q_{\max}.$$

По данным американской практики расчетные расходы выбирают так, чтобы соответствующие им глубины в канале определялись следующими формулами:

$$h_1 = h_{\max} - 0{,}25\ (h_{\max} - h_{\min}),$$
$$h_2 = h_{\min} + 0{,}25\ (h_{\max} - h_{\min}),$$

где $h_{\max}$ и $h_{\min}$ — глубины равномерного режима в подводящем канале, соответствующие максимальному ($Q_{\max}$) и минимальному ($Q_{\min}$) расходам.

Обычно щелевой водослив устраивается в виде нескольких одинаковых щелей, через каждую из которых пропускается часть общего расхода.

Число щелей N по данным американской практики рекомендуется назначать по формуле:

$$N = \frac{b}{(1{,}25 \div 1{,}50)\,h_{\max}},$$

где

b — ширина подводящего канала;

$h_{\max}$ — глубина равномерного режима в канале при $Q_{\max}$.

Размеры щели в этом случае определяются по тем же формулам, принимая расходы через одну щель равными $\frac{Q}{N}$.

После того как размеры щелевого водослива определены и приняты с практическим округлением, рекомендуется обязательно проверить согласованность горизонтов подводящего канала и водослива при заданном диапазоне расходов. Для этого нужно построить и сопоставить кривые $Q = f_1(h_0)$ для канала и $Q = f_2(H)$ для водослива входной части сооружения.

Водобойная часть перепада является гидравлически наиболее ответственным его элементом, так как именно в ее пределах происходит в основном гашение энергии. Применяя к этому случаю формулу (531), можно установить как h_c — глубину струи в сжатом сечении в месте падения струи с перепада на ступень, так и глубину h_c'', сопряженную с h_c.

Глубина потока в бытовых условиях в отводящем русле обычно известна или же может быть определена из уравнений равномерного движения.

Эти данные позволяют проанализировать характер сопряжения с нижним бьефом. Если при проверке сопряжения окажется отогнанный прыжок ($h_c'' > h_б$), то водобойную часть желательно проектировать в виде водобойного колодца, водобойной стенки или колодца комбинированного типа, гидравлический расчет которых рассмотрен выше.

Выходная часть перепада может являться или водосливом с широким порогом или водосливом практического профиля в зависимости от того, как устроена водобойная часть. Гидравлический расчет выходной части включается в расчет гасителя.

§ 188. Гидравлический расчет многоступенчатого перепада без водобойных стенок

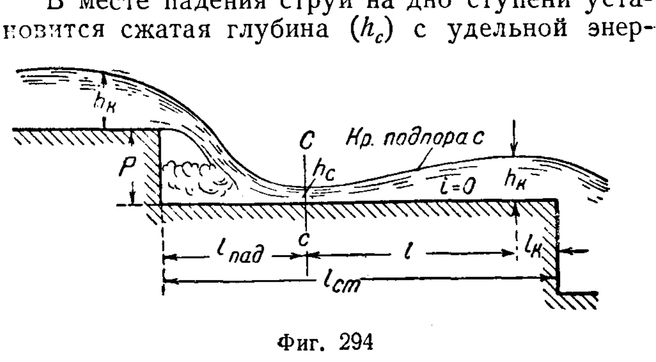
Если число ступеней перепада больше одной, то такой перепад называют многоступенчатым (фиг. 286, 287). При гидравлическом расчете многоступенчатого перепада определяются все элементы одноступенчатого перепада и дополнительно рассчитывается длина ступеней, за исключением последней. Последняя ступень обычно проектируется в виде водобойной части одноступенчатого перепада.

Совершенно очевидно, что длину ступени целесообразно назначать из тех соображений, чтобы в пределах каждой ступени происходило максимальное гашение кинетической энергии, образовавшейся вследствие падения струи на дно ступени.

В целях наибольшей ясности допустим, что поперечные сечения входной части перепада и ступени тождественны, а сама ступень горизонтальна.

Известно, что вблизи выходного ребра водослива (фиг. 294) установится критическая глубина ($h_{кр}$) с некоторым минимальным значением удельной энергии сечения ($Э_{\min}$).

В месте падения струи на дно ступени установится сжатая глубина (h_c) с удельной энер-

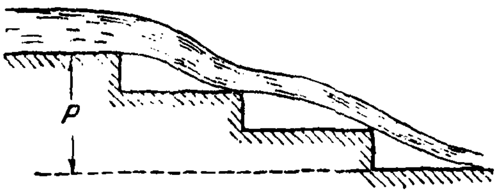


Фиг. 294

гией сечения ($Э_c$), причем разность $Э_c - Э_{min}$ и подлежит гашению в пределах длины ступени.

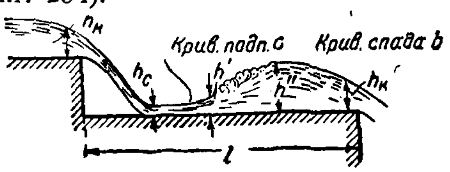
Так как $h_c < h_{кр}$, то поток будет находиться в бурном состоянии и потери энергии, связанные с преодолением путевых сопротивлений, будут вызывать в потоке нарастание глубин от h_c до $h_{кр}$.

Глубина вблизи конца ступени (h) будет, очевидно, зависеть от длины ступени и по величине может быть или меньше критической или равна ей. Глубина меньше критической ($h < h_{кр}$) будет при сравнительно короткой ступени. В этом случае удельная энергия сечения, соответствующая глубине $h < h_{кр}$, будет больше минимальной и, следовательно, достаточного гашения энергии на данной ступени не произойдет. Такого положения допускать не рекомендуется, так как следствием его будет нарастание запаса энергии и даже возможно опасное перескакивание струи через ступени перепада (фиг. 295).



Фиг. 295

При увеличении длины ступени глубина вблизи конца будет возрастать и можно подобрать такую длину, при которой глубина h станет равна $h_{кр}$. В этом случае весь избыток энергии будет погашен с помощью путевых потерь (фиг. 294).



Фиг. 296

При дальнейшем увеличении длины ступени в ее пределах появится прыжок (фиг. 296), хотя весь избыток энергии также будет погашен, но на значительно большей длине, что экономически невыгодно.

Таким образом мы получили вполне определенные условия для назначения длины ступени (фиг. 294):

$$l_{cm} = l_{пад} + l_{подп} + l_к,$$

где $l_{пад}$ — дальность падения струи, определяемая соответствующими формулами § 182;
$l_{подп}$ — длина кривой подпора между сжатым сечением c-c с глубиной h_c и сечением k-k с критической глубиной $h_{кр}$;
$l_к$ — расстояние от конца ступени до сечения с критической глубиной.

Величину $l_к$ по практическим данным[1] рекомендуется принимать равной двум критическим глубинам:

$$l_к \approx 2h_{кр}.$$

Длина ступени, рассчитанная из условия минимальной удельной энергии сечения в конце каждой ступени, получается обычно все-таки довольно значительной. Объясняется это слабым рассеиванием избытка энергии ($Э_c - Э_{min}$) на участке кривой подпора.

Уменьшить длину ступени можно:

1) искусственно увеличивая шероховатость русла в пределах длины ступени;

2) придавая ступени обратный уклон.

Из уравнений (402) и (403) для расчета кривых свободной поверхности при $i = 0$ видно, что изменение шероховатости сказывается на величине параметра

$$A = \frac{ab^{1/4}}{2gn^2}\Delta\eta.$$

Следовательно, можно для горизонтальной ступени установить связь между длиной кривой подпора при нормальной шероховатости ($l_{н.ш}$) и ее длиной при усиленной шероховатости ($l_{у.ш}$) в виде

$$l_{у.ш} = l_{н.ш}\frac{n^2_{н.ш}}{n^2_{у.ш}}, \tag{571}$$

где $n_{н.ш}$, $n_{у.ш}$ коэфициенты нормальной и усиленной шероховатостей.

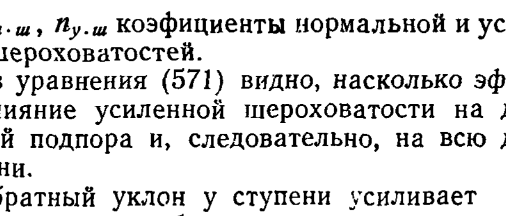
Из уравнения (571) видно, насколько эффектно влияние усиленной шероховатости на длину кривой подпора и, следовательно, на всю длину ступени.

Обратный уклон у ступени усиливает нарастание подпора в бурном потоке и также приводит к сокращению длины ступени.

Понятно, что, применяя наряду с обратным уклоном и усиленную шероховатость, можно добиться гашения энергии на еще более коротком расстоянии.

§ 189. Гидравлический расчет многоступенчатых перепадов колодезного типа

Если в конце каждой ступени поставить водобойные стенки, то перед стенками образуются колодцы. Такой перепад носит название колодезного (фиг. 297).



Фиг. 297

[1] Проф. В. Д. Журин, „Вестник ирригации". 1923 г., № 7—8, стр. 113, а также проф. М. Д. Чертоусов, Специальный курс гидравлики, стр. 293 — 294.

Гидравлический расчет водобойных стенок проводится так, чтобы на каждой ступени создать сопряжение с затопленным прыжком и тем самым погасить энергию падающей струи в пределах образовавшегося водобойного колодца.

Длина ступени перепада колодезного типа получается значительно короче, чем длина ступени перепада без водобойных стенок.

Гидравлический расчет многоступенчатого перепада колодезного типа заключается в расчете ряда одноступенчатых перепадов и состоит в определении высоты водобойной стенки и длины колодца. Входная и выходная части рассчитываются так же, как у одноступенчатых перепадов.

Расчет перепада можно вести, исходя из трех предпосылок:

а) Равенство перепадов на каждой ступени

$$z=\frac{Z}{N}=\text{const},$$

где Z — разность отметок горизонтов воды верхнего и нижнего бьефов;

N — число ступеней, назначаемое на основе технико-экономических подсчетов.

б) Равенство стенок падения на всех ступенях, т. е.

$$p=p_i=\text{const}.$$

в) Равенство разности отметок дна соседних ступеней

$$p=\frac{P}{N}=\text{const},$$

где P—разность отметок дна верхнего и нижнего бьефов.

Задача 119. Рассчитать трехступенчатый колодезный перепад на трапецоидальном канале. Дано: $b=10$ *м*; $m=1$; $n_z=0{,}025$; $i=0{,}000365$; $Q_{\max}=50$ *м³/сек*; $Q_{\min}=12{,}5$ *м³/сек*; $h_{\max}=3$ *м*; $h_{\min}=1{,}35$ *м*; отметка верхнего бьефа 112,00 *м*; отметка нижнего бьефа 100,00 *м*.

Ширину перепада принимаем равной ширине канала по дну, т. е. $b=10$ *м*.

В целях обеспечения в канале равномерного режима устраиваем в голове перепада щелевой водослив.

Расчет щелевого водослива. 1. Определяем число щелей по эмпирической зависимости:

$$N=\frac{b}{(1{,}25\div 1{,}5)h_{\max}}=\frac{10}{(1{,}25\div 1{,}5)\,3}\approx 2 \text{ щели}.$$

2. Определяем расчетные значения глубин и им соответствующие расходы канала:

$$H_1=h_{\max}-0{,}25\,(h_{\max}-h_{\min})=3-0{,}25(3-1{,}35)\approx 2{,}60 \text{ м},$$
$$H_2=h_{\min}+0{,}25(h_{\max}-h_{\min})=1{,}35+0{,}25(3-1{,}35)\approx 1{,}76 \text{ м};$$

Найденным глубинам по уравнениям равномерного движения соответствуют расходы в подводящем канале:

$$Q_1=38{,}7 \text{ м}^3/\text{сек} \text{ и } Q_2=19{,}8 \text{ м}^3/\text{сек}.$$

3. Определяем полные напоры перед щелевым водосливом:

$$H_{01}=H_1+\frac{\alpha\left(\frac{Q_1}{\omega_1}\right)^2}{2g}=2{,}60+\frac{1{,}19^2}{19{,}62}=2{,}66 \text{ м},$$

$$H_{02}=H_2+\frac{\alpha\left(\frac{Q_2}{\omega_2}\right)^2}{2g}=1{,}76+\frac{0{,}96^2}{19{,}62}=1{,}81 \text{ м}$$

при $\alpha=1$.

4. Определяем величины b'_{cp} и b''_{cp} по формуле (570). Имеем:

$$b'_{cp}=\frac{\frac{Q_1}{N}}{M_1H_{01}^{3/2}}=\frac{33{,}70}{2\cdot 2{,}25\cdot 2{,}66^{3/2}}=1{,}98 \text{ м}.$$

$$b''_{cp}=\frac{\frac{Q_2}{N}}{M_2H_{02}^{3/2}}=\frac{19{,}8}{2\cdot 2{,}25\cdot 1{,}81^{3/2}}=1{,}80 \text{ м}.$$

Здесь принято $M_1=M_2=m\sqrt{2g}=2{,}25$.

5. *Определяем размеры щелей по* (568):

$$b=\frac{H_1b''_{cp}-H_2b'_{cp}}{H_1-H_2}=\frac{2{,}60\cdot 1{,}80-1{,}76\cdot 1{,}98}{2{,}60-1{,}76}=1{,}42 \text{ м}$$

и заложение их откосов по (569)

$$n'=1{,}25\,\frac{b'_{cp}-b''_{cp}}{H_1-H_2}=1{,}25\,\frac{1{,}98-1{,}80}{2{,}60-1{,}76}=0{,}268.$$

Входная часть, оборудованная такими щелями, должна обеспечивать в канале практически равномерный режим при различных расходах в пределах от $Q_{\max}=50$ *м³/сек* до $Q_{\min}=12{,}5$ *м³/сек*.

Расчет перепада. При трех ступенях высота каждой из них будет

$$p=\frac{112{,}0-100{,}0}{3}=4{,}0 \text{ м}.$$

Расчет перепада выполним для $Q_{\max}=50$ *м³/сек* или $q=5$ *м³/сек*.

Первая ступень. Удельная энергия в данном случае будет

$$Э_0=p+H_0=4{,}0+3{,}08=7{,}08 \text{ м}.$$

Находим при $\varphi=0{,}95$ значение функции

$$\Phi(\tau_c)=\frac{\sqrt{\alpha}}{\varphi}\,\frac{q}{Э_0^{3/2}}=1{,}109\,\frac{5}{7{,}08^{3/2}}=0{,}294,$$

чему по таблице[1] соответствует $\tau''_c=0{,}4479$, откуда

$$h''_c=\tau''_cЭ_0=0{,}4479\cdot 7{,}08=3{,}17 \text{ м}.$$

Далее найдем полный напор перед водобойной стенкой

$$H_0=\left(\frac{q}{m\sqrt{2g}}\right)^{2/3}=\left(\frac{5}{0{,}42\cdot 4{,}43}\right)^{2/3}=1{,}90 \text{ м},$$

где $m=0{,}42$ — коэфициент расхода порога водобойной стенки.

[1] См. сноску на стр. 265.

Скорость подхода будет

$$v_0=\frac{q}{\sigma_з h''_c}=\frac{5}{1{,}05\cdot 3{,}17}=1{,}50\ м/сек$$

и

$$H_1=H_0-\frac{v_0^2}{2g}=1{,}90-\frac{1{,}5^2}{19{,}62}=1{,}79\ м.$$

Тогда искомая высота водобойной стенки будет

$$p=\sigma_з h''_c-H_1=1{,}05\cdot 3{,}17-1{,}79\approx 1{,}50\ м.$$

Далее определяем длину ступени

$$l_{cm}=l_{пад}+\beta l_{пр}=7{,}27+0{,}7\cdot 4{,}33\cdot 3{,}17\approx 16{,}9\ м,$$

где длина прыжка по формуле (463) принята

$$l_{пр}=4{,}33h''_c=4{,}33\cdot 3{,}17=13{,}7\ м,$$

а длина падения по формуле (559)

$$l_{пад}=0{,}3h_{max}+1{,}65\sqrt{h_{max}(p+0{,}32h_{max})}=$$
$$=0{,}8\cdot 3{,}0+1{,}65\sqrt{3{,}0\cdot(4{,}0+0{,}32\cdot 3{,}0)}=7{,}27\ м.$$

Так как глубина воды на первой ступени $\sigma_з h''_c=1{,}05\cdot 3{,}17=3{,}33\ м$ меньше, чем высота ступени $p=4{,}0\ м$, то щелевой водослив безусловно затапливаться не будет.

Вторая ступень. Для второй ступени имеем

$$Э_0=p+p_1+H_0=4{,}0+1{,}50+1{,}90=7{,}4\ м,$$

$$\Phi(\tau_c)=\frac{\sqrt{\alpha}\cdot 5}{0{,}9\cdot 7{,}4^{3/2}}{}^{*}=0{,}290,$$ чему соответствует $\tau''_c=0{,}419.$

Тогда

$$h''_c=0{,}419\cdot 7{,}4=3{,}10\ м,$$

скорость подхода

$$v_0=\frac{q}{\sigma_з h''_c}=\frac{5}{1{,}05\cdot 3{,}10}=1{,}53\ м/сек$$

и напор

$$H_2=H_0-\frac{v^2}{2g}=1{,}90-\frac{1{,}53^2}{19{,}62}=1{,}78\ м.$$

На основе полученных данных определяем высоту стенки

$$p_2=\sigma_з h''_c-H_2=1{,}05\cdot 3{,}10-1{,}78\approx 1{,}5\ м$$

и длину ступени (от передней грани стенки)

$$l_{cm}=0{,}3H_1+1{,}65\sqrt{H_1[(p+p_1)+0{,}32H_1]}+\beta l_{пр}=$$
$$=0{,}3\cdot 1{,}79+1{,}65\sqrt{1{,}79(5{,}5+0{,}32\cdot 1{,}79)}+$$
$$+0{,}7\cdot 4{,}33\cdot 3{,}10\approx 15{,}4\ м.$$

Так как глубина воды на второй ступени $\sigma_з\cdot h''_c=3{,}26\ м$ меньше стенки падения первой ступени $p+p_1=4{,}0+1{,}50=5{,}50\ м$, то первая водобойная стенка не затоплена.

Третья ступень. На третьей ступени

$$Э_0=p+p_2+H_0=4{,}00+1{,}50+1{,}90=7{,}40\ м$$

и, следовательно, h''_c имеет то же значение, что и на второй ступени, т. е. $h''_c=3{,}10\ м.$

* Надо иметь в виду, что коэфициенты скорости φ щелевого водослива и водобойной стенки, вообще говоря, не равны.

На третьей ступени проектируем водобойный колодец. Определяем глубину колодца без учета перепада.
В первом приближении имеем:

$$d=\sigma_з\cdot h''_c-h_{max}=1{,}05\cdot 3{,}10-3{,}00=0{,}25\ м,$$
$$Э_0=7{,}40+0{,}25=7{,}65\ м,$$
$$\Phi(\tau_c)=1{,}17\frac{5}{7{,}65^{3/2}}=0{,}277.$$

По таблице[1] при $\varphi=0{,}90$ находим $\tau''_c=0{,}412$ и, следовательно, $h''_c=\tau''_c Э_0=0{,}412\cdot 7{,}65=3{,}15\ м.$

Глубина колодца во втором приближении будет

$$d=\sigma_з h''_c-h_{max}=1{,}05\cdot 3{,}15-3{,}00=0{,}30\ м.$$

Третье приближение дает практически близкие результаты.

Глубина воды на третьей ступени

$$\sigma_з h''_c-d=1{,}05\cdot 3{,}15-0{,}30=3{,}00\ м$$

оказывается меньше, чем

$$p+p_2=4{,}0+1{,}50=5{,}50\ м$$

и, следовательно, вторая водобойная стенка не затоплена.

Наконец, определяем длину водобойного колодца по (563)

$$l_{кол}=0{,}3\cdot 1{,}78+1{,}65\sqrt{1{,}78\,(5{,}5+0{,}32\cdot 1{,}78)}+$$
$$+0{,}7\cdot 4{,}33\cdot 3{,}15=15{,}4\ м.$$

Задача 120. Для условий предыдущего примера, при $Q_{max}=50\ м^3/сек$ и коэфициенте шероховатости ступени $n_г=0{,}017$, определить длину горизонтальной ступени трехступенчатого перепада без водобойных стенок.

Длина ступени многоступенчатого перепада определяется формулой

$$l_{cm}=l_{пад}+l_{подп}+2h_{кр}.$$

Длина падения ($l_{пад}$) была подсчитана в предыдущем примере при расчете первой ступени и составила

$$l_{пад}=7{,}27\ м.$$

Сжатая глубина в месте падения струи определится по

$$\Phi(\tau_c)=\frac{\sqrt{\alpha}}{\varphi}\frac{q}{Э_0^{3/2}}.$$

Имея по предыдущей задаче $\Phi(\tau_c)=0{,}294$, находим по упомянутым выше таблицам значение $\tau_c=0{,}069$ и определяем

$$h_c=\tau_c Э_0=0{,}069\cdot 7{,}08=0{,}5\ м.$$

На ступени перепада будет кривая подпора до глубины $h_{кр}$ перед концом ступени.

Критическая глубина при $q=\frac{Q}{b}=\frac{50}{10}=5\ м^3/сек$ будет

$$h_{кр}=\sqrt[3]{\frac{\alpha}{g}q^2}=1{,}41\ м.$$

Длина кривой подпора между сечениями c-c с глубиной $h_c=0{,}5\ м$ и k-k с глубиной $h_{кр}=1{,}41\ м$, рассчитанная по методу суммирования (как это показано в табл. 95) составляет $l_{подп}=158{,}2\ м.$

[1] См. сноску на стр. 265.

Таблица 95*

№ точек	η	$f_1(\eta) - a_1$	$\theta(\eta)$	$\varphi(\eta)$	$\sum_{n}^{n+1}\varphi(\eta)$	l м	h м	Примечание
1	0,050	7 643	30 167	0,252	0,500	61,0	0,50	$a_1 = f_1(\eta_{кр}) = 357$
2	0,075	2 018	8 124	0,248	0,447	54,5	0,75	$A = 4\,870\,\Delta\eta$
3	0,100	648	3 241	0,199	0,296	35,1	1,00	
4	0,125	155	1 608	0,097	0,097	7,6	6,75	
5	0,141	0	1 105	0,000		$\Sigma l = 158{,}2$ м	1,41	

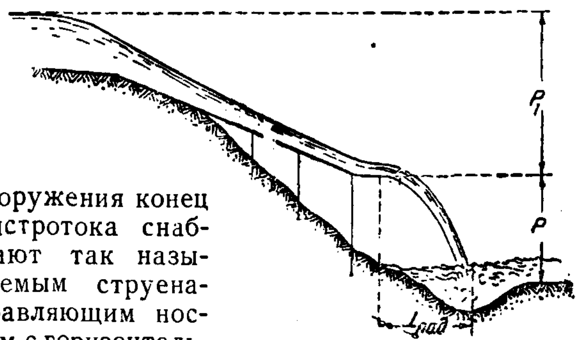
Тогда вся длина ступени будет равна

$$l_{cm} = 7{,}27 + 158{,}2 + 2 \cdot 1{,}41 = 168 \text{ м}.$$

При наличии же водобойной стенки, как мы видели в задаче 119, длина ступени равнялась только 16,9 м.

§ 190. Гидравлический расчет консольного сброса

В консольном сбросе (фиг. 298) часть общего падения (p_1) преодолевается быстротоком и часть (p) — свободным сбросом струи. В целях получения возможно большего отлета струи от сооружения конец быстротока снабжают так называемым струенаправляющим носком с горизонтальным дном или с обратным уклоном.



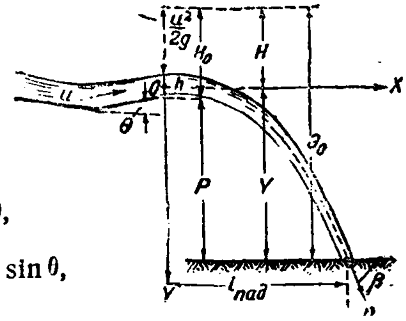
Фиг. 298

Однако при больших углах подъема носка произойдет резко выраженное явление удара при переходе струи с быстротока на носок. Из этих соображений угол подъема практически назначают не выше $\theta = 15°$ ($i_н = \sin\theta \approx 0{,}026$). Длину носка принимают обычно равной 1 м ÷ 2 м.

Гидравлический расчет консольного сброса состоит в рассмотренном уже выше расчете быстротока[1] и определении места падения струи и воронки размыва в нижнем бьефе.

В результате расчета кривой свободной поверхности быстротока можно установить глубину и скорость течения в конце носка консоли. Эти величины необходимы для последующего определения дальности падения струи на дно нижнего бьефа, считая от конца консоли. В работе консольных сбросов длина падения ($l_{пад}$) имеет первостепенное значение. Действительно, чем больше длина падения, тем дальше от консоли образуется воронка размыва и тем меньше опасность подмыва и разрушения опор консоли.

Для струйки, проходящей в центре выходного сечения консоли (фиг. 299), можно написать:



Фиг. 299

$$x = ut \cdot \cos\theta,$$

$$y = \frac{1}{2} g t^2 - ut \sin\theta,$$

где θ — угол подъема носка консоли.

Исключая время t, получим квадратное уравнение

$$x^2 - \frac{2u^2 \sin\theta \cos\theta}{g} x - \frac{2u^2 \cos^2\theta}{g} y = 0.$$

Решая это уравнение при значении скорости в точке O

$$u = \sqrt{2gH},$$

где H — полный напор в точке O, получим

$$l_{пад} = x = 2H\cos\theta\left(\sqrt{\sin^2\theta + \frac{y}{H}} + \sin\theta\right)$$

или

$$l_{пад} = 2H\sqrt{1 - i_н^2}\left(\sqrt{i_н^2 + \frac{y}{H}} + i_н\right),$$

так как

$$\sin\theta = i_н; \quad \cos\theta = \sqrt{1 - i_н^2}.$$

Из фиг. 299 видим, что

$$H = H_0 - 0{,}5h \text{ и } y = p + 0{,}5h.$$

Тогда формула длины падения примет вид

$$l_{пад} = 2(H_0 - 0{,}5h)\sqrt{1 - i_н^2}\left(\sqrt{i_н^2 + \frac{p + 0{,}5h}{H_0 - 0{,}5h}} + i_н\right). \quad (572)$$

При горизонтальном носке консоли ($i_н = 0$) формула длины падения упростится и

$$l_{пад} = 2\sqrt{(p + 0{,}5h)(H_0 - 0{,}5h)}.$$

* Значения $f_1(\eta)$ и $\theta(\eta)$ взяты из таблиц на стр. 323.

[1] См. § 134.

Для дальнейшего анализа введем следующие обозначения:

$\lambda=\frac{l_{пад}}{Э_0}$ — относительная длина падения;

$\sigma=\frac{p}{Э_0}$ — относительный перепад консоли $(0<\sigma<1)$;

$\delta=\frac{h}{Э_0}$ — относительная глубина на конце консоли,

где p — перепад, преодолеваемый консолью;

h — глубина воды в конце консоли;

$Э_0$ — полная удельная энергия в конце консоли относительно дна нижнего бьефа.

Выразим величины p, h и H_0 через $Э_0$ с учетом принятых обозначений:

$$p=\sigma Э_0;\ h=\delta Э_0;\ H_0=Э_0-p=(1-\sigma)Э_0.$$

Подставим эти значения в формулу длины падения (572) и после несложных преобразований получим уравнение в безразмерных величинах

$$\frac{l_n}{Э_0}=\lambda=$$

$$=[2(1-\sigma)-\delta]\sqrt{1-i_н^2}\left(\sqrt{i_н^2+\frac{2\sigma+\delta}{2(1-\sigma)-\delta}}+i_н\right) \quad (573)$$

и, соответственно, при горизонтальном носке консоли

$$\lambda=2\sqrt{(\sigma+0{,}5\delta)[(1-\sigma)-0{,}5\delta]}.$$

Теперь выясним влияние величины относительного перепада σ на дальность падения струи. Без особой погрешности можно принять $\delta=0$. Во-первых, потому, что величина δ вообще мала. Во-вторых, потому, что δ входит в уравнения так, что при $\delta=0$ множитель, стоящий перед радикалом, увеличивается, а подкоренное выражение уменьшается, что дает известную компенсацию.

При $\delta=0$ уравнение (573) примет вид

$$\lambda=2(1-\sigma)\sqrt{1-i_н^2}\left(\sqrt{i_н^2+\frac{\sigma}{1-\sigma}}+i_н\right). \quad (574)$$

Найдем максимальное значение относительной длины падения. Для этого найдем первую производную λ по σ и приравняем ее нулю $\left(\frac{d\lambda}{d\sigma}=0\right)$.

В результате, после простых преобразований, получим

$$\sigma^2+\frac{1-2i_н^2}{1-i_н^2}\sigma+\frac{1-4i_н^2}{4(1-i_н^2)}=0,$$

откуда найдем формулу для σ, соответствующего λ_{max}:

$$\sigma=\frac{1-i_н-2i_н^2}{2(1-i_н^2)}. \quad (575)$$

Если подставить в уравнение (573), полученное для σ выражение (575), то получим весьма простую формулу для максимальных значений относительной длины падения в зависимости от уклона носка консоли

$$\lambda_{max}=\sqrt{\frac{1+i_н}{1-i_н}}.$$

Максимальная же длина падения будет

$$l_{пад(max)}=\sqrt{\frac{1+i_н}{1-i_н}}\cdot Э_0. \quad (576)$$

При горизонтальном носке консоли ($i_н=0$) максимальная длина падения равняется полной удельной энергии в конце консоли относительно дна нижнего бьефа, если σ принято в соответствии с (575).

По формулам (575) и (576) нетрудно подсчитать соответствующие значения σ и λ_{max} для различных уклонов носка консоли, приведенные в табл. 96.

Анализируя таблицу, можно сделать следующие выводы:

1. При горизонтальном носке ($i_н=0$) максимальная длина падения $l_{пад(max)}=Э_0$ будет наблюдаться при перепаде консоли $p=0{,}5Э_0$.

Таблица 96

Уклон носка консоли $i_н$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$\sigma=\frac{p}{Э_0}$	0,500	0,444	0,375	0,285	0,1665	0
$\lambda_{max}=\frac{l_{пад\,(max)}}{Э_0}$	1,000	1,105	1,225	1,362	1,525	1,732

2. С увеличением уклона носка консоли максимальная длина падения будет соответствовать значениям перепада консоли $p<0{,}5Э_0$.

3. При уклоне $i_н=0{,}5$ ($\theta=30°$) максимальная длина падения будет иметь место при $p=0$, что уже сводит на-нет само понятие консольного сброса, так как в этом случае отметки конца консоли и нижнего бьефа совпадают.

В табл. 97 приводятся значения λ и для других отношений σ в практически возможных пределах, вычисленные по формуле (574).

$\sigma=\frac{p}{Э_0}$	0,285	0,3	0,375	0,4	0,444	0,5	0,6	0,7	0,8
$i_н=0$	—	0,916	—	0,980	—	$\boxed{1,000}$	0,980	0,916	0,800
$i_н=0,1$	—	1,060	—	1,099	$\boxed{1,105}$	1,100	1,058	0,974	0,837
$i_н=0,2$	—	1,212	$\boxed{1,225}$	1,224	—	1,197	1,138	1,022	0,866
$i_н=0,3$	$\boxed{1,362}$	1,361	—	1,340	—	1,287	1,192	1,062	0,886

В этой таблице числа в рамках соответствуют значению λ_{max} для заданного уклона носка консоли.

Теперь перейдем к установлению скорости, с которой струя достигает дна нижнего бьефа, и угла наклона струи к горизонту.

Средняя скорость, с которой струя достигает дна нижнего бьефа, будет определяться формулой

$$v=\sqrt{2g(p+H_0)}.$$

Горизонтальную проекцию этой скорости найдем независимо, если продиференцируем полученную выше горизонтальную проекцию траектории,

$$v_x=\frac{d(ut\cos\theta)}{dt}=u\cos\theta$$

или, так как $u=\sqrt{2g(H_0-0,5h)}$, то имеем

$$v_x=\sqrt{2g(H_0-0,5h)}\cos\theta.$$

Угол между направлением скорости v и горизонтальным направлением определится из уравнения

$$\cos\beta=\frac{v_x}{v}=\sqrt{\frac{H_0-0,5h}{H_0+p}}\cos\theta.$$

Так как $\cos\theta=\sqrt{1-i^2_н}$, то можно записать

$$\cos\beta=\sqrt{(1-i_н^2)\frac{H_0-0,5h}{H_0+p}}. \qquad (577)$$

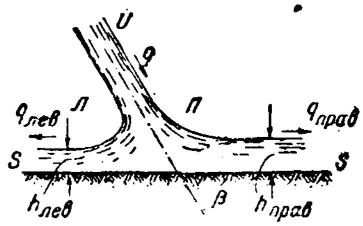
В том месте, где струя падает на размываемое дно нижнего бьефа, будет происходить так называемый местный размыв. В результате более или менее продолжительного действия струи образуется воронка размыва. Максимальная глубина размыва получается обычно в месте падения струи (фиг. 298).

Для практических целей важно определить глубину воронки размыва и установить ширину воронки поверху. Однако этот вопрос пока нельзя считать достаточно разработанным.

Остановимся на некоторых предложениях, заслуживающих известного внимания.

Инж. Б. А. Мацман[1] предложил определять воронку размыва на основе теории сопряженных глубин, считая, что струя при падении на дно нижнего бьефа сохраняет ширину, равную ширине конца консоли.

Струя, имеющая среднюю скорость v, ударившись о неподвижную плоскость $s-s$, разделится на две самостоятельных струи, текущих в противоположные стороны (фиг. 300).



Фиг. 300

Если погонный расход основной струи обозначим q, расход левой струи—$q_{лев}$ и расход правой струи — $q_{прв}$, то

$$q_{лев}+q_{прв}=q.$$

Естественно полагать, что при угле β между направлением струи и плоскостью, равном 90° (струя падает вертикально), расход левой струи будет равен расходу правой струи ($q_{лев}=q_{пр}=0,5\,q$).

При $\beta=0°$ (направление струи параллельно плоскости s—s) $q_{лев}=0$ и $q_{прв}=q$. Если же $0<\beta<90°$, то допускается, что

$$q_{лев}=\frac{\beta}{180°}q,$$

$$q_{прв}=\left(1-\frac{\beta}{180°}\right)q.$$

Допуская, что средние скорости в обеих струях будут одинаковыми и равными средней скорости основной струи (v), можно найти глубины воды в струях после разделения:

$$h_{лев}=\frac{q_{лев}}{v},$$

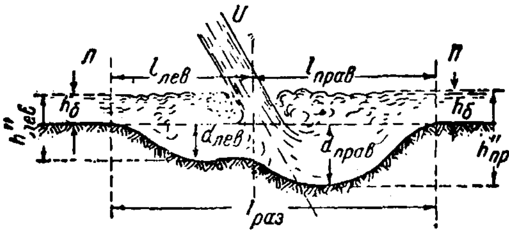
$$h_{прв}=\frac{q_{прв}}{v}.$$

[1] Инж. Б. А. Мацман, К вопросу расчета перепадов консольного типа, „Вестник ирригации". 1927, № 3, стр. 29—48.

В случае размываемого русла размыв будет происходить до тех пор, пока образовавшиеся глубины размыва не достигнут соответственно значений (фиг. 301):

$$d_{лев} = h''_{лев} - h_б,$$
$$d_{прв} = h''_{прв} - h_б,$$

где $h''_{лев}$ и $h''_{прв}$ — глубины, взаимные с глубинами $h_{лев}$ и $h_{прв}$.



Фиг. 301

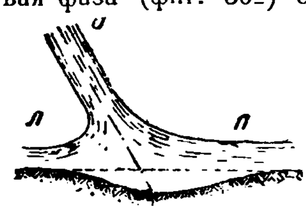
Таким образом определение вертикальных размеров воронки размыва, по предложению инж. Мацмана, сводится к расчету глубины водобойного колодца из условия критического сопряжения и ни в какой степени не увязано со свойствами грунта нижнего бьефа. Поэтому, на основании опытного материала, рекомендуется полученные значения размыва $d_{лев}$ и $d_{прв}$ умножать на коэфициент больше единицы[1]. Тогда расчетная глубина размыва определится так:

$$d_{рсч} = \sigma_з d,$$

где $\sigma_з = 2$ для плотного лесса;

$\sigma_з = 1{,}5 \div 2{,}5$ для гравелисто-песчаных грунтов.

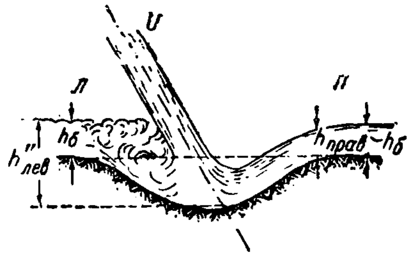
Если $\beta < 90°$, то затопление левой струи произойдет раньше, чем правой, а глубина размыва $d_{лев}$ будет меньше глубины размыва $d_{прв}$ потому, что $q_{лев} < q_{прв}$. При образовании воронки размыва устанавливаются три фазы. Первая фаза (фиг. 302) отвечает начальному моменту, когда вследствие одинаковых скоростей в струях размыв будет протекать с одной и той же интенсивностью в обе стороны. Подобное явление будет происходить до тех пор, пока глубина размыва левой струей не достигнет величины



Фиг. 302

$$d_{лев} = h''_{лев} - h_б,$$

т. е. пока не произойдет затопления левой струи (фиг. 303). Этот момент отвечает второй фазе размыва. Таким образом значительная часть энергии левой струи будет гаситься в образовавшемся над ней поверхностном вальце. Энергия же правой струи к этому моменту еще погашена не будет ($q_{прв} > q_{лев}$) и размыв русла правой струей будет продолжаться до тех пор, пока глубина размыва $d_{прв}$ не станет достаточной для затопления правой струи. Это будет третья фаза размыва (фиг. 301).



Фиг. 303

Если левая струя имеет свободный отток воды, то правую струю надо рассчитывать на расход

$$q_{прв} = \left(1 - \frac{\beta}{180°}\right) q.$$

Если же, как это обычно бывает на практике, оттока воды, приносимого левой струей, нет, то после затопления ее весь расход q пойдет в направлении правой струи. В этом случае Мацман рекомендует определять взаимную глубину для правой струи, исходя из полного расхода q.

С другой стороны, в этом случае возможно допустить и следующую картину движения. Левая струя, повернув вправо, образует дополнительный валец — донный (поверхностный валец образуется правой струей). Такая схема движения подтверждается рядом лабораторных исследований[2]. Тогда глубина размыва в правой части воронки при условии, что струя сохранила свои размеры, будет равняться

$$d'_{прв} = d_{прв} + h''_{лев},$$

где $d_{прв}$ — глубина размыва, найденная по расходу $q_{прв}$.

Что касается определения горизонтальных размеров воронки, то здесь можно пользоваться известными формулами[3] для длины прыжка в водобойном колодце, т. е.

$$l_{лев} = \beta\, l_{пр(лев)}, \qquad (578)$$
$$l_{прв} = \beta\, l_{пр(прв)},$$

где коэфициент $\beta = 0{,}7 \div 0{,}8$ (см. выше расчет водобойного колодца).

Если принять длину прыжка $l_{пр}$ по формуле (463) и $\beta = 0{,}785$, то зависимости (578) могут быть представлены в следующем виде:

$$l_{лев} = 3{,}4\, h''_{лев},$$
$$l_{прв} = 3{,}4\, h''_{прв}.$$

[1] И. И. Леви, Гидротехнические сооружения, ч. 1, вып. 2, стр. 135.

[2] Инж. М. С. Вызго, Труды САНИИРИ, т. 10; A. Schoklitsch, Die Wasserwirtschaft, 1932, № 16—17.

[3] Мацман рекомендует более сложные формулы.

Построение воронки размыва показано на фиг. 301.

Другая, применяемая в практике формула предложена проф. Е. А. Замариным[1]. Получена она на основе теории растекания струи в массе той же жидкости и имеет вид

$$h_{рзм} = \frac{Nq\sin\beta'}{\sqrt{v' v_{доп}}} - h_б, \tag{579}$$

где $h_{рзм}$ — глубина воронки размыва;

$h_б$ — глубина воды в отводящем русле;

β' — угол, образуемый струей с горизонтом при встрече струи с уровнем нижнего бьефа;

q — погонный расход;

v' — скорость струи в месте встречи с уровнем воды нижнего бьефа;

$v_{доп}$ — допустимая скорость для грунта нижнего бьефа;

N — коэфициент, значения которого приведены в табл. 98 в зависимости от величины z — расстояния от дна носка консоли до уровня воды в нижнем бьефе.

Таблица 98

z м	2	3	4	5	6	7	8
N	4,3	4,6	4,8	5,0	5,3	5,5	5,8

Инж. Патрашевым[2] предложена формула для определения максимальной глубины размыва (также исходя из теории растекания) на основе лабораторных исследований по размыву несвязных грунтов, в виде

$$h_{рзм} = \frac{3{,}9}{\sqrt[6]{d_m}}\sqrt{q\sqrt{z_0}} - h_б, \tag{580}$$

где q — расход на погонный метр ширины;

$z_0 = (Э_0 - h_б)_м$ — перепад, исправленный на скорость подхода;

d_m — диаметр (в *мм*) зерен, меньше которых по весу в данном грунте содержится 90%.

Пользуясь формулами (579) и (580), определяют длину размыва ($l_{рзм}$), рассматривая воронку трапецоидального профиля с шириной основания $b = \frac{q}{v_{доп}}$ и с коэфициентом откосов m, соответствующим особенностям грунта.

Задача 121. Произвести гидравлический расчет железобетонного консольного перепада прямоугольного сечения для сброса паводковых вод из водохранилища. Дано:

сбросной расход . . . . $Q = 20$ м³/сек
коэфициент шероховатости консоли . . $n_г = 0{,}014$
длина консоли . . . . $l = 32{,}0$ м
максимально допустимая скорость для быстротока . . . . $v_{max} = 8$ м/сек
грунт нижнего бьефа—гравий $d = 10$ мм; $v_{доп} = 1{,}15$ м/сек
отметка горизонта воды водохранилища . 111,00 м
отметка горизонта нижнего бьефа . . . 101,50 м
отметка дна нижнего бьефа . . . . . 100,00 м

Исходя из ряда конструктивных и практических соображений, приняты:

1. Погонный расход . . . . $q = 4{,}0$ м³/сек
2. Ширина быстротока — равной ширине входного водослива
3. Носок консоли приподнятым . . . . . $i_н = 0{,}2$
4. Относительный перепад консоли . . . $\sigma = 0{,}6 \div 0{,}7$
5. Коэфициент расхода входного водослива . $m = 0{,}33$
6. Длина быстротока . . . . $l_б = 30{,}0$ м
7. Длина носка консоли . . . . $l_н = 2{,}0$ м

Определяем напор на входном водосливе, пренебрегая скоростью подхода (вода поступает из водохранилища):

$$H_{вод} = \left(\frac{q}{m\sqrt{2g}}\right)^{2/3} = \left(\frac{4}{0{,}33\cdot 4{,}43}\right)^{2/3} = 1{,}95\ м.$$

Считая, что уклон быстротока должен быть подобран так, чтобы скорость в конце его была близкой к $v_{max} = 8$ м/сек, можно найти величину перепада консоли (p). Из соотношения

$$\sigma = \frac{p}{Э_0} = \frac{p}{p + h_{0(б)}}$$

получаем

$$p = \frac{\sigma}{1-\sigma}h_{0(б)} = \frac{0{,}6}{0{,}4}\left(0{,}5 + \frac{1{,}1\cdot 8^2}{19{,}62}\right) = 6{,}15\ м$$

(при $v_{max} = 8$ м/сек глубина в конце быстротока $h_б = \frac{q}{v_{max}} = \frac{4}{8} = 0{,}5$ м, а та же глубина, исправленная на скорость подхода $h_{0(б)} = 0{,}5 + \frac{\alpha v^2}{2g}$).

Отметка дна выходного сечения носка консоли

$100{,}00 + p = 100{,}00 + 6{,}15 = 106{,}15$ м.

Отметка дна быстротока в конце, в месте соединения с носком консоли, будет

$$106{,}15 - i_н\cdot l_н = 106{,}15 - 0{,}2\cdot 2{,}0 = 105{,}75\ м.$$

Отметка дна быстротока в начале

$$111{,}00 - 1{,}95 = 109{,}05\ м.$$

Таким образом уклон дна быстротока

$$i_б = \frac{109{,}05 - 105{,}75}{l_б} = \frac{3{,}30}{30} = 0{,}11.$$

Находим критическую глубину

$$h_{кр} = \sqrt[3]{\frac{\alpha q^2}{g}} = \sqrt[3]{\frac{1{,}1\cdot 4^2}{9{,}81}} = 1{,}214\ м.$$

Для глубины равномерного режима на быстротоке имеем

$$\Psi(\eta_0) = 2{,}7\lg b - \lg Q - N = 2{,}7\lg 5 - \lg 20 - \lg\frac{0{,}014}{\sqrt{0{,}11}} = 1{,}95.$$

Отсюда

$$\eta_0 = 0{,}076 \text{ и } h_0 = 0{,}076\cdot 5 = 0{,}38\ м.$$

Рассчитаем кривую спада в быстротоке от глубины $h_{кр} = 1{,}214$ м по уравнению (402). Вычисления сведены в табл. 99, из которой видно, что при заданной длине быстротока $l_б = 30$ м глубина в конце его будет 0,53 м.

[1] Проф. Е. А. Замарин, проф. Попов и др., Гидротехнические сооружения, 1940, стр. 204—206.

[2] Инж. А. Н. Патрашев, Определение максимальной глубины размыва грунта, производимого ниспадающей струей. Известия НИИГ, Ленинград, 1937, т. XXI.

Таблица 99

№ точек	η	$f_1(\eta) - a_1$	$\theta(\eta) - a_2$	$\varphi(\eta)$	$\sum\limits_{n}^{n+1} \varphi(\eta)$	l м	h м	Примечание
1	0,243	0	—	0			1,214	$a_1 = f_1(\eta_{кр}) = 71,5$
2	0,150	224,8	6 310	0,0356	0,0356	8,98	0,75	$a_2 = \theta(\eta_0) = 7\,220$
3	0,120	507,0	5 397	0,0942	0,1298	10,55	0,60	$A = 2\,710 \cdot \Delta\eta$
4	0,105	792,3	4 440	0,1785	0,2727	11,10	0,525	
						$\Sigma l = 30,63$ м		

Скорость к концу быстротока будет $v = \frac{4,0}{0,53} = 7,6$ м/сек, что не противоречит условию $v_{max} \approx 8$ м/сек.

Ввиду незначительной длины носка консоли ($l_н = 2$ м) принимаем в конце носка

$$h_н = 0,53 \text{ м}; \quad v_н = 7,60 \text{ м/сек} \quad и \quad h_{0(н)} = h_н + \frac{\alpha \cdot 7,6^2}{19,62} = 3,72 \text{ м}.$$

Тогда

$$\sigma = \frac{p}{p + h_{0(н)}} = \frac{6,15}{6,15 + 3,72} = 0,623,$$

что не противоречит заданному значению $\sigma = 0,6 \div 0,7$.

Определим скорость в месте падения струи на дно нижнего бьефа

$$v = \sqrt{2g\,(h_{0(н)} + p)} = 4,43\sqrt{3,72 + 6,15} \approx 14 \text{ м/сек}$$

и угол наклона струи к горизонту по формуле (577)

$$\cos\beta = \sqrt{(1 - i^2_н)\left(\frac{h_{0(н)} - 0,5\,h_н}{h_{0(н)} + p}\right)} = \sqrt{(1 - 0,04)\left(\frac{3,72 - 0,5 \cdot 0,53}{3,72 + 6,15}\right)} = 0,58$$

или

$$\beta = 54°\,30'.$$

Длину падения найдем по формуле (572):

$$l_{пад} = 2\,(h_{0(н)} - 0,5\,h_н)\sqrt{1 - i_н^2}\left[\sqrt{i_н^2 + \frac{p + 0,5\,h_н}{h_{0(н)} - 0,5 h_{(н)}}} + i_н\right] =$$

$$= 2\,(3,72 - 0,5 \cdot 0,53)\sqrt{1 - 0,2^2}\left[\sqrt{0,2^2 + \frac{6,15 + 0,5 \cdot 0,53}{3,72 - 0,5 \cdot 0,53}} + 0,2\right] = 10,7 \text{ м}.$$

Перейдем теперь к расчету воронки размыва.

1. По формуле Мацмана. Глубины размыва $d_{лев}$ и $d_{прав}$ находим по формуле (534), минуя отыскание величин $h_{лев}$ и $h_{прав}$.

Левая струя.

$$q_{лев} = \frac{\beta}{180}\,q = \frac{54°30'}{180°}\,4,0 = 1,21 \text{ м}^3/\text{сек},$$

$$\Phi(\tau_c) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\varphi}\,\frac{q_{лев}}{Э_0^{3/2}} = 1,054\,\frac{1,21}{9,87^{3/2}} = 0,041,$$

чему, при $\varphi = 1$, по таблицам соответствует $\tau_c'' = 0,187$ и, следовательно, $h''_{лев} = 0,187 \cdot 9,87 = 1,85$ м.

Тогда в первом приближении глубина размыва будет $d_{лев} = h''_{лев} - h_б = 1,85 - 1,50 = 0,35$ м.

Уточняя, находим

$$\Phi(\tau_c) = 1,054\,\frac{1,21}{(9,87 + 0,35)^{3/2}} = 0,0391,$$

$$\tau_c'' = 0,183 \quad и \quad h''_{лев} = 0,183 \cdot 10,22 = 1,87 \text{ м}.$$

Так как два соседних значения $h''_{лев}$ близки, то последующих приближений не требуется и глубина размыва левой струей может быть принята (с учетом поправки на свойства грунта нижнего бьефа) равной

$$d_{лев} = 1,5\,(1,87 - 1,50) \approx 0,6 \text{ м}.$$

Длина размыва $l_{лев} = 3,4\,h''_{лев} = 3,4 \cdot 1,87 \approx 6,40$ м.

Правая струя.

Рассчитывая на полный расход $q = 4,0$ м³/сек, имеем:

$$\Phi(\tau_c) = \frac{\sqrt{\alpha} \cdot q}{\varphi\,Э_0^{3/2}} = 1,054\,\frac{4}{9,87^{3/2}} = 0,1362;$$

и, соответственно,

$$\tau_c'' = 0,333 \quad и \quad h_{прв}'' = 0,333 \cdot 9,87 = 3,29 \text{ м}.$$

Тогда в первом приближении глубина размыва будет $d_{прв} = h''_{прв} - h_б = 3,29 - 1,50 = 1,79$ м.

Уточняя, находим

$$\Phi(\tau_c) = 1,054\,\frac{4}{(9,87 + 1,79)^{3/2}} = 0,106,$$

$$\tau_c'' = 0,295 \quad и \quad h_{прв}'' = 0,295 \cdot 11,66 = 3,44 \text{ м}.$$

Во втором приближении имеем

$$d_{прв} = 3,44 - 1,50 = 1,94 \text{ м},$$

$$\Phi(\tau_c) = 1,054\,\frac{4}{(9,87 + 1,94)^{3/2}} = 0,104,$$

$$\tau_c'' = 0,293 \quad и \quad h_{прв}'' = 0,293 \cdot 11,81 = 3,46 \text{ м}.$$

Дальнейшее уточнение не требуется и глубина размыва правой струей с учетом свойств грунта будет

$$d_{прв} = 1,5\,(3,46 - 1,50) = 2,9 \text{ м}.$$

Длина размыва $l_{прв} = 3,4\,h_{прв}'' = 3,4 \cdot 3,46 \approx 12$ м.

Общая длина размыва воронки

$$l_{рзм} = l_{лев} + l_{прв} = 6,4 + 12 = 18,4 \text{ м}.$$

Воронка размыва и построения показаны на фиг. 301.

2. По формуле Замарина

$$h_{рзм} = \frac{N\,q \sin\beta'}{\sqrt{v' \cdot v_{доп}}} - h_б = \frac{4,93 \cdot 4 \cdot \sin 51°10'}{\sqrt{12,80 \cdot 1,15}} - 1,50 = 2,5 \text{ м},$$

где $N = 4{,}93$— из табл. (98) для $z = 106,15 - 101,50 = 4,65$ *м*.

$\beta' = 51°10'$— угол при встрече струи с горизонтом воды нижнего бьефа, определенный по значению

$$\cos\beta' = \cos\beta\cdot\frac{v}{v'} = 0{,}58\,\frac{13{,}9}{12\,8} = 0{,}63,$$

а $v' = \sqrt{2g\,(Э_0 - h_б)} = 4{,}43\sqrt{9{,}87 - 1{,}50} = 12{,}8$ *м/сек* — скорость струи на уровне горизонта воды нижнего бьефа.

Воронку размыва принимаем трапецоидальной формы шириной по дну

$$b_{рзм} = \frac{q}{v_{доп}} = \frac{4{,}0}{1{,}15} = 3{,}5\ м$$

и откосом $m = 1{,}75$.

Общая длина размыва будет

$$l_{рзм} = b_{рзм} + 2\,mh_{рзм} = 3{,}5 + 2\cdot 1{,}75\cdot 2{,}50 \approx 13{,}3\ м.$$

3. По формуле Патрашева

$$h_{рзм} = \frac{3{,}9}{\sqrt[4]{d_m}}\sqrt{q\sqrt{z_0}} - h_б =$$

$$= \frac{3{,}9}{\sqrt[4]{10}}\sqrt{4\sqrt{9{,}87 - 1{,}50}} - 1{,}50 = 5{,}95\ м.$$

Общая длина размыва

$$l_{рзм} = b_{рзм} + 2\,mh_{рзм} = 3{,}50 + 2\cdot 1{,}75\cdot 5{,}95 = 24{,}3\ м.$$

Как видим, размеры воронки размыва получились различными по разным формулам (наибольшие размеры по Патрашеву). Это еще раз позволяет отметить неразработанность этого вопроса.

ГЛАВА XXVI

ДВИЖЕНИЕ ГРУНТОВЫХ ВОД

Движение грунтовых вод является частным случаем движения однородной жидкости в пористой среде.

Явление движения жидкости в порах грунта называется фильтрацией.

С таким движением жидкости приходится встречаться в самых разнообразных областях техники: в гидротехнике и мелиорации, водоснабжении и канализации, нефтепромысловом деле, в литейном деле (фильтрации газов через формовочный материал) и т. п.

В области гидротехнических сооружений фильтрация играет исключительно важную роль.

Знание условий движения грунтового потока позволяет, например, решать вопросы устойчивости земляных, бетонных и иных плотин, решать вопросы фильтрации из каналов, определять положения уровня грунтовых вод после постройки каналов, решать вопросы орошения и осушения почвы открытыми каналами, вопросы дренажа, вопросы притока к артезианским и шахтным колодцам, водосборным галереям и т. д.

Изучение типичных и важных в практическом отношении случаев движения грунтовых вод, установление общих законов и методов расчета такого движения являются предметом особого раздела гидравлики, излагаемого в настоящей главе.

§ 191. Грунтовые воды и виды их движения

В почве и в пористых водопроницаемых горных породах вода может находиться в четырех различных состояниях:

1. При самой малой влажности вода впитана в зерна грунта и удаляется лишь при нагревании грунта до 100° С. При такой влажности, называемой *гигроскопической*, движение воды в грунте невозможно.

2. При увеличении влажности вода обволакивает зерна грунта в виде пленок и может передвигаться только под влиянием сил молекулярного воздействия между частицами воды и грунта и в этом случае называется *пленочной* водой.

3. При дальнейшем увеличении влажности вода заполняет наиболее узкие поры и может передвигаться уже под действием сил капиллярного давления; это — *капиллярная* вода.

В этих трех состояниях молекулярные силы играют столь большую роль, что, по сравнению с ними, действие силы тяжести ничтожно.

4. И, наконец, при еще большем увеличении содержания воды в грунте, она заполняет все поры и приобретает способность двигаться уже под влиянием сил тяжести и поэтому называется *гравитационной* водой.

В дальнейшем мы будем рассматривать движение только гравитационной воды и только к этому типу воды в грунте будем применять термин «*грунтовая вода*».

Как и в гидравлике наземных вод, движение грунтовых вод может быть *безнапорным* и *напорным*, т. е. без наличия свободной поверхности и при ее наличии.

Примером напорного движения может служить движение артезианских вод, залегающих между плотными геологическими образованиями, а также фильтрация воды под бетонной плотиной. Примером безнапорного движения — фильтрация через тело земляной плотины.

§ 192. Историческая справка

Фундаментом всей теории фильтрации служит закон Дарси, полученный на основе многочисленных наблюдений над фильтрацией в песчаных грунтах в 1852 — 1855 годах[1].

[1] H. Darcy, Les fontaines publiques de la ville de Dijon, 1856.

Исходя из представления об идеальном грунте, все поры которого составлены из параллельных между собой цилиндров, и приняв в качестве реального основания закон Дарси, Дюпюи в 1863 году[1] создал первую теорию движения грунтовых вод. В дальнейшем эта теория была развита Буссинеском, Форхгеймером, Павловским, Дахлером и др.

В 1897/98 г. Слихтером[2] было введено понятие фиктивного грунта, составленного из шарообразных частиц одинакового диаметра и впервые была дана попытка оценить влияние порозности грунта па фильтрацию. Теория фильтрации, данная Слихтером, развита была потом Козени[3] и американскими учеными Гратоном и Фразером[4].

Основы гидродинамической теории движения грунтовых вод были заложены блестящими работами проф. Н. Е. Жуковского[5].

Эта теория была развита потом в работах Слихтера, акад. Н. А. Павловского[6], Муската[7] и др.

Под явлением фильтрации подразумевается движение однородной жидкости (вода, нефть, газ и т. п.) в пористой среде, в свою очередь однородной или неоднородной. При этом жидкость движется по мельчайшим каналам между частицами пористой среды.

В дальнейшем под пористой средой будем подразумевать однородный грунт, т. е. грунт, отдельные объемы которого оказывают одинаковое сопротивление движущейся в нем жидкости, под которой в свою очередь будем подразумевать только воду.

Однако движение и через такой грунт, вследствие чрезвычайного разнообразия форм и размеров частиц среды, а следовательно, и пор, настолько сложно, что при теоретических исследованиях этого явления приходится итти по пути упрощения, заменяя действительный грунт некоторой моделью — «фиктивным грунтом». Под последним понимают грунт, составленный из шарообразных частиц одинакового диаметра.

Основными свойствами такого грунта, определяющими ход фильтрации, являются порозность и проницаемость.

Пусть W — некоторый объем грунта; w — объем содержащихся в нем частиц. Сумма объемов пор, заключенных в объеме W, будет, очевидно, равна $W - w$.

Отношение объема пор ко всему объему грунта

$$m = \frac{W - w}{W} = 1 - \frac{w}{W} \qquad (581)$$

называют порозностью, или *коэфициентом порозности.*

Пусть далее Ω — площадь сечения выделённого объема грунта; ω — площадь, занимаемая сечениями частиц грунта. Отношение площади сечения пор $(\Omega - \omega)$ к площади всего сечения Ω

$$n = \frac{\Omega - \omega}{\Omega} = 1 - \frac{\omega}{\Omega} \qquad (582)$$

называют *коэфициентом пористости.*

Очевидно, что

$$0 < m < 1,$$
$$0 < n < 1.$$

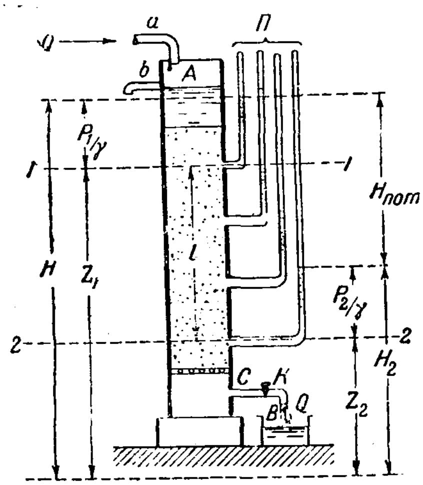
§ 193. Закон фильтрации

Известный гидравлик-экспериментатор Дарси (Darcy) на основе тщательно проведенных опытов установил, что расход воды Q, фильтрующийся через грунт, пропорционален полному сечению фильтра Ω и гидравлическому градиенту или пьезометрическому уклону I, т. е. что

$$Q = k\Omega I, \qquad (583)$$

где k — некоторый коэфициент пропорциональности, зависящий от свойств грунта и называемый *коэфициентом фильтрации.*

Зависимость (583) получила наименование закона Дарси. Опыты, на основе которых Дарси выдвинул упомянутую зависимость, проводились им с песчаными грунтами на особом приборе, схематически представленном на фиг. 304.



Фиг. 304

Это вертикальный, открытый сверху цилиндр A, снабженный рядом отверстий с пьезометрами $П$. Вода в цилиндр поступает сверху по трубке a; чтобы уровень воды в цилиндре при этом поддерживался на постоянной отметке, в нем на соответствующем горизонте имеется сливная трубка b. У дна цилиндра находится сетка, поддерживающая испытуемый грунт; между ней и дном расположена трубка C с краном K для выпуска фильтрующейся через грунт воды в мерный бачок B.

[1] J. Dupuit, Etudes théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux, 1863.

[2] C. S. Slichter, Theoretical investigations on the motion of ground Waters. 19th Annual Report of U. S geological Survey, 1897/98, part 2, Washington, 1899. На русском языке: Ч. Слихтер, Подземные воды, СПБ, 1912.

[3] J. Kozeny, Wien Ber. 136 (1927), Wasserkraft und Wasserwirtschaft. 22 (1927), 55, 67—86.

[4] L. C. Graton und H. J. Fraser, Jour. Geol, 43, 785, 1935.

[5] Теоретическое исследование о движении подпочвенных вод, Журнал Русского физико-химического о-ва при императорском С.-Петербургском Университете, т. XXI Физ. отдел, вып. I, 1889. Просачивание воды через земляные плотины, М, 1923.

[6] Теория движения грунтовых вод под гидротехническими сооружениями, Изд. Научно-мелиорац. института, Петроград, 1922.

[7] Ph. D. Muskat, B S. Wyckoff. The Flow of homogeneous fluids through porous media. 1937.

Добиваясь в своих опытах установившегося движения воды в порах грунта, при котором расход воды, подаваемой в цилиндр при постоянном уровне, равнялся расходу, отводимому через трубку C, Дарси и установил, что

$$Q = k\Omega I$$

или

$$v = \frac{Q}{\Omega} = kI.$$

Здесь, применительно к схеме прибора, Ω — площадь поперечного сечения цилиндра; I — гидравлический градиент, или уклон, равный, ввиду малости скоростного напора, пьезометрическому, а v—так называемая скорость фильтрации.

Предполагая линейную зависимость потерь по пути, гидравлический градиент будет равен

$$I = \frac{H_{пот}}{L},$$

где L — длина пути фильтрации, $L = z_1 - z_2$; $H_{пот}$ — потеря напора на этом пути:

$$H_{пот} = \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma}\right) = H_1 - H_2.$$

В случае нелинейной зависимости потерь по пути L гидравлический градиент I записывается в диференциальной форме:

$$I = -\frac{dH}{dL}, \tag{584}$$

где dH — приращение напора на пути dL в данном случае отрицательное и равное — $(H'_2 - H'_1)$.

Тогда формула закона Дарси примет вид

$$Q = -k\Omega\frac{dH}{dL}$$

или

$$v = -k\frac{dH}{dL}, \tag{585}$$

где k — коэфициент фильтрации, определяемый излагаемыми ниже способами.

К установленной Дарси зависимости можно прийти и теоретически, рассматривая модель фильтрации через фиктивный грунт.

В самом деле, ввиду чрезвычайно малых размеров поперечных сечений пор грунта и малых значений скоростей течения жидкости, фильтрующейся через поры, задача определения водопроницаемости грунта сводится к исследованию ламинарного движения вязкой жидкости в порах грунта.

Рассмотрим фильтрацию жидкости через фиктивный однородный грунт с диаметром пор d_0.

Скорость течения через поры грунта обозначим

$$v' = \frac{v}{n},$$

где v — скорость фильтрации через все сечение фильтра, а n — коэфициент пористости.

Потери напора при движении жидкости на участке длиной L выразятся в общем виде формулой

$$h_{тр} = \lambda\frac{L}{d_0}\cdot\frac{v^2}{n^2 2g}.$$

При ламинарном движении, как известно,

$$\lambda = \frac{A}{R_e} = \frac{A\nu}{v' d_0} = \frac{Ag\mu n}{v d_0 \gamma}.^*$$

Тогда имеем

$$\frac{h_{тр}}{L} = I = \frac{A\mu v}{2\gamma d_0^2 n}. \tag{586}$$

В это уравнение введем вместо d_0 значение диаметра d'_e частиц фиктивного грунта. Оба диаметра связаны между собой линейной зависимостью

$$d_0 = \varkappa d'_e,$$

где $\varkappa$ — некоторый коэфициент пропорциональности.

При этом из (586) получим формулу Дарси:

$$v = \frac{2\gamma n \varkappa^2 d'^2_e}{A\mu} I = kI, \tag{587}$$

где коэфициент фильтрации обозначен

$$k = \frac{2n\varkappa^2}{A}\cdot\frac{\gamma}{\mu}d^2_e = A' d^2_e, \tag{588}$$

при $A' = \frac{2n\varkappa^2\gamma}{A\mu}$. Из формулы (587) видно, что коэфициент фильтрации k имеет размерность скорости и его можно рассматривать как скорость фильтрации при уклоне, равном единице.

Коэфициент фильтрации, как видно из (588), зависит от квадрата диаметра частиц грунта, физических свойств грунта и физических свойств фильтрующейся жидкости.

Уравнения (587) и (588) представляют собой лишь схематические приближения, устанавливающие общие взаимосвязи при фильтрации жидкости.

Однако опытные данные показывают, что во всех случаях фильтрации с устойчивым ламинарным режимом закон Дарси полностью оправдывается и потому может быть положен в основу расчетов.

§ 194. Переход от фиктивного грунта к естественному

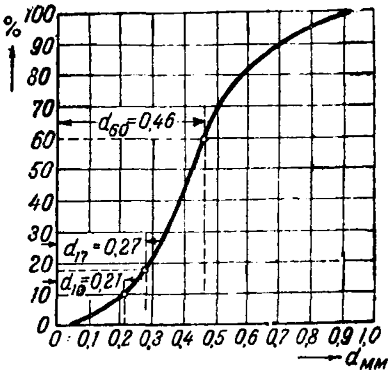
Состав и строение естественного грунта характеризуются данными механического анализа и определением порозности. Порозность определяется специальными приборами — порозиметрами.

Механический состав может быть определен различными способами, например, путем просеивания грунта через серию сит с отверстиями различного диаметра. Просеивание через сита

* Здесь A — некоторое постоянное безразмерное число.

позволяет рассортировать грунт по фракциям и установить весовое участие каждой фракции в составе грунта.

По данным такой сортировки строят кривую механического анализа грунта (фиг. 305), откладывая по оси абсцисс средний диаметр фракции d_i, а по оси ординат сумму процентного весового содержания всех фракций, начиная от нуля и кончая данным диаметром.



Фиг. 305

Представим себе вместо естественного грунта, со свойственным ему многообразием диаметров отдельных его фракций, фиктивный грунт с одинаковым диаметром частиц, через который жидкость фильтруется с той же скоростью.

Диаметр частиц такого фиктивного грунта, заменяющего естественный, назовем **эффективным диаметром** и будем такой диаметр частиц обозначать d_e.

Тогда для естественного грунта можно сохранить структуру уравнений (587) и (588), записывая их так:

$$v = k\,l.$$
$$k = A' d_e^2.$$

Для определения эффективного диаметра d_e имеется много способов. Отметим наиболее распространенные из них.

1. Способ Кинга (F. King). В этом способе определяется суммарная поверхность всех частиц в 1 $см^3$, затем полученная величина делится на число частиц и результат приравнивается поверхности частицы с эффективным диаметром d_e:

$$\pi d_e^2 = \frac{\Sigma n_i \pi d_i^2}{\Sigma n_i}.$$

Отсюда

$$d_e = \sqrt{\frac{1}{\pi}}\sqrt{\frac{\Sigma n_i \pi d_i^2}{\Sigma n_i}},$$

при этом сумма $\Sigma n_i \pi d_i^2$ подсчитывается по формуле

$$\Sigma n_i \pi d_i^2 = \frac{6(1-m)}{100}\,\Sigma\frac{\Delta g_i}{d_i}, \tag{589}$$

где m — порозность;

Δg_i — доля каждой фракции в процентах по весу в 1 $см^3$;

d_i — средний диаметр частиц данной фракции;

n_i — число частиц данной фракции.

2. Способ А. Газена (A. Hazen). **Эффективный диаметр** по опытам Газена определяется как диаметр частиц, для которых сумма всех фракций, начиная от нуля и кончая этим диаметром, составляет 10% по весу. Иначе говоря, это — диаметр отверстий такого сита, через которое просеивается 10% по весу испытуемого грунта[1].

Предложение Газена оправдывается при $0{,}01 < d_e < 0{,}3$ *см*, если так называемый **коэфициент однородности** не более 5.

Коэфициентом однородности называется отношение диаметра d_{60}, при котором сумма всех фракций, начиная от нуля и кончая этим диаметром, равна 60% по весу, к эффективному диаметру d_e.

И тот и другой диаметры определяются по кривой механического анализа грунта (фиг. 305).

3. Способ Крюгера-Цункера (Krüger-Zunker). В этом способе, в отличие от способа Кинга, дается не суммарная поверхность всех частиц в 1 $см^3$ при различном фракционном составе, а поверхность частиц фиктивного грунта, все частицы которого при той же порозности имеют одинаковый эффективный диаметр d_e, что дает

$$\frac{6(1-m)}{100}\,\Sigma\frac{\Delta g_i}{d_i} = \frac{6(1-m)}{d_e},$$

откуда получается уравнение

$$\frac{100}{d_e} = \Sigma\frac{\Delta g_i}{d_i}, \tag{590}$$

имеющее большое распространение в практике. Здесь d_i — средний диаметр фракции (i).

4. По способу Козени (J. Kozeny) эффективный диаметр определяется по формуле

$$\frac{100}{d_e} = \frac{3}{2}\,\frac{\Delta g_1}{d_1} + \sum_{i=2}^{i=n}\frac{\Delta g_i}{d_i}, \tag{591}$$

d_i здесь определяется не по формуле среднего диаметра, как в способе Кинга и Крюгера-Цункера, а по формуле

$$\frac{1}{d_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{d'_i} + \frac{1}{d''_i}\right), \tag{592}$$

или — по более точной

$$\frac{1}{d_i} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{d'_i} + \frac{2}{d'_i + d''_i} + \frac{1}{d''_i}\right). \tag{593}$$

Здесь d'_i и d''_i — крайние диаметры данной фракции;

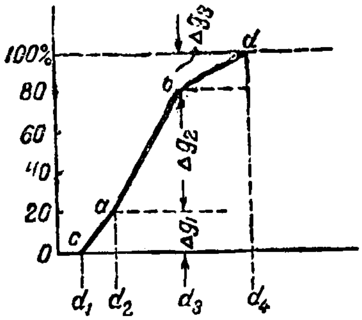
d_1 — верхний крайний диаметр фракции с диаметром $< 0{,}0025$ *мм*;

Δg_1 — доля веса (в %) грунта, падающая на эту фракцию[2].

[1] Инж. Зауэрбрей на основании своей обработки опытов предлагает принимать за эффективный диаметр тот, для которого сумма всех фракций, начиная от нуля и кончая этим диаметром, составляет 17% по весу.

[2] В случае отсутствия малых фракций формула (591) заменяется формулой $\frac{100}{d_e} = \sum_{i=1}^{i=n}\frac{\Delta g_i}{d_i}$, в которой d_i вычисляется по тем же формулам (592) и (593).

5. Способ проф. Е. А. Замарина. Проф. Замарин, анализируя метод Козени и Крюгера и учитывая, что практически кривая веса (механического состава) составлена из отрезков прямых с разными относительно оси d угловыми коэфициентами $A_1, A_2 \ldots, A_m$ (фиг. 306), приходит к следующей зависимости для определения эффективного диаметра d_e:



Фиг. 306

$$\frac{1}{d_e}=\sum_{n=1}^{m} A_i \ln\frac{d_{n+1}}{d_n}+ + \ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^{A_1}\left(\frac{d_3}{d_2}\right)^{A_2}\cdots \cdots\left(\frac{d_{n+1}}{d_n}\right)^{An}. \tag{594}$$

Для эффективных диаметров грунтов, имеющих кривую веса, начинающуюся от нуля

$$\frac{1}{d_e}=\sum_{n=2}^{m} A_i \ln\frac{d_{n+1}}{d_n}+\frac{3}{2}\frac{\Delta g_1}{d_1}, \tag{595}$$

где первый интервал берется по Козени.

§ 195. Определение коэфициента фильтрации

Числовая часть формулы, установленной выше для коэфициента фильтрации, в случае естественного грунта должна учитывать не только физические свойства грунта, но должна также отразить и те неучтенные особенности, которые имеются при фильтрации через естественный грунт и которые отличны от упрощенной схемы движения, положенной в основу выводов. Поэтому пока наиболее надежным следует считать определение коэфициента фильтрации на основе специальных опытных исследований и данных.

Ниже приводятся формулы для определения коэфициента фильтрации, полученные экспериментально. Формулы эти относятся к фильтрации через пески и в них приняты следующие единицы измерения:

d_e — в сантиметрах;
μ — в пуазах;
k — в сантиметрах в секунду;
t — температура в градусах Цельсия.

1. Формула Газена

$$k=c\,\frac{d_e^2}{\mu}. \tag{596}$$

d_e определяется при этом по способу Газена, величина c учитывает порозность и меняется в пределах:

$c = 0{,}80$ для очень плотных песков;
$c = 1{,}55$ для песков средней порозности;
$c = 2{,}00$ для песков, составленных из округленных частиц почти одинакового диаметра.

Для воды

$$k=75\,c\,d_e^2\tau, \tag{597}$$

где τ — температурный коэфициент, определяемый по формуле

$$\tau=0{,}70+0{,}03\,t. \tag{598}$$

2. Формула Слихтера

$$k=10{,}22\,\frac{d_e^2}{\mu\sigma}, \tag{599}$$

где

$$\sigma=\frac{1-m}{n^3}.$$

Для воды при наиболее обычной температуре (10°C) имеем $\mu=0{,}01335$ и

$$k=771\,\frac{d_e^2}{\sigma}. \tag{600}$$

3. Формула Крюгера-Цункера

$$k=0{,}5\,\frac{d_e^2}{\mu\sigma_1}, \tag{601}$$

где

$$\sigma_1=\frac{(1-m)^2}{m}, \tag{602}$$

d_e — эффективный диаметр, определяемый по способу Крюгера-Цункера.

Для воды при 18°C

$$k=46{,}3\,\frac{d_e^2}{\sigma_1}.$$

При других температурах $t°$ эту величину k надо умножить на μ при 18°C и разделить на μ при соответственной температуре $t°$.

Формула пригодна при $d_e < 0{,}2$ *см* и гидравлическом уклоне $I < 0{,}5$.

4. Формула Козени

$$k=8{,}2\,\frac{d_e^3}{\mu\sigma_2}, \tag{603}$$

где

$$\sigma_2=\frac{(1-m)^2}{m^3}, \tag{604}$$

d_e — эффективный диаметр, определяемый по способу Козени.

Для воды при $t=18$°C

$$k_{18}=780\,\frac{d_e^2}{\sigma_2}.$$

Переход к другим температурам производится таким же путем, как в формуле Крюгера-Цункера.

И. И. Зауэрбрей дает формулу Козени в виде

$$k_{18}=\beta\,\frac{d_e^2}{\sigma_2}, \tag{605}$$

где:

1) $\beta = 167$ для грунта, составленного из очень неправильных частиц;

2) $\beta=300\div330$ для грунта, составленного из нормальных частиц;

3) $\beta=500$ для грунта, составленного из однообразных частиц.

Проф. Замарин Е. А. дает формулу Козени в виде

$$k_{18}=800\alpha^3\frac{d_e^2}{\sigma_2}, \quad (606)$$

$$\alpha=1{,}275\div1{,}5\ m, \quad (607)$$

d_e определяются по способу Замарина (§ 191).

Многочисленные опыты показывают, что формула Козени наиболее точно отражает зависимость коэфициента фильтрации k от порозности m, затем идет уже формула Слихтера, Крюгера-Цункера и т. д.

В случае большой разнородности песка все формулы дают значительные отклонения от опытов.

Подчеркнем, что приведенные формулы применимы для песчаных грунтов. Вопросы фильтрации через глинистые грунты сравнительно мало изучены.

Приводим формулу Терцаги[1] для глин и суглинков:

$$k=0{,}556\cdot10^{-8}\tau\frac{(\varepsilon-0{,}15)^{11}(1+\varepsilon)}{(\varepsilon-0{,}15)^8+\frac{0{,}0166}{\eta^8}}\eta^2, \quad (608)$$

где τ — температурный коэфициент, определяемый по формуле (598);

ε — отношение объема пор грунта к объему, занимаемому зернами грунта. Эту величину легко определить, зная порозность грунта из соотношения

$$\varepsilon=\frac{m}{1-m},$$

η — эмпирический коэфициент, вычисляемый по формуле $\eta=\frac{d_e}{0{,}00006}$, где d_e определяется по Газену. Численное значение знаменателя весьма приближенно, так как оно получено из опытов над одним типом глины.

При проектировании ответственных сооружений в условиях глинистого или суглинистого грунтов для определения коэфициента k обычно пользуются полевыми и лабораторными методами.

§ 196. Применение закона Дарси. Формула Дюпюи

Закон Дарси $v=kI$ дает основное соотношение между скоростью фильтрации и падением гидродинамического напора.

Применяя закон Дарси для определения местной скорости в той ли иной точке грунтового потока, необходимо принимать гидравлический градиент

$$I=-\frac{dH}{dL},$$

где H — гидродинамический напор в рассматриваемой точке грунтового потока, а L — расстояние, отсчитываемое в направлении определяемой скорости фильтрации.

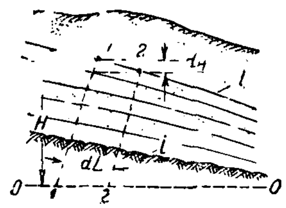
В общем случае движения грунтового потока гидравлический градиент I является функцией координат пространства, занятого рассматриваемым потоком.

В отдельных частных случаях гидравлический градиент становится постоянным для определенной совокупности точек пространства и даже для всех точек потока в целом.

Такое выравнивание гидравлического градиента имеет место при плавно-изменяющемся движении грунтового потока.

Выделим в плавно-изменяющемся потоке (фиг. 307) два живых сечения на бесконечно малом расстоянии dL друг от друга.

Так как при плавно-изменяющемся движении давление в плоскости живого сечения распределяется по законам гидростатики, то все точки живого сечения будут характеризоваться одним и тем же значением гидродинамического напора.



Фиг. 307

Следовательно, при переходе в направлении фильтрации (т. е. вдоль линии тока) от одного сечения к другому будет наблюдаться одно и то же падение напора dH на любом из линий токов.

С другой стороны, в силу плавной изменяемости движения можно считать, что расстояние dL между сечениями остается постоянным независимо от выбора линии тока, вдоль которой будет это расстояние измеряться.

Поэтому приходим к весьма важному заключению, что при плавно-изменяющемся движении грунтового потока гидравлический градиент для всего живого сечения будет величиной постоянной и, следовательно, местные скорости во всех точках живого сечения в однородном грунте будут одинаковы:

$$u=-k\frac{dH}{dL}=\text{const}.$$

Эпюра распределения скоростей по живому сечению грунтового потока в отличие от наземных потоков характеризуется полной выравненностью местных скоростей. Поэтому в грунтовом потоке при плавно изменяющемся движении

[1] К. Терцаги, Строительная механика грунта на основе его физических свойств, Госстройиздат, 1933.

средняя скорость фильтрации в живом сечении будет равна местной скорости любой из точек живого сечения, т. е.

$$v = -k\frac{dH}{dL} = u.$$

Уравнение в этом виде называется формулой Дюпюи (Dupuit) и может быть положено в основу расчетов плавно-изменяющегося движения грунтовых вод.

В частном случае плавно-изменяющегося движения—равномерном движении гидравлический градиент будет постоянной величиной не только в пределах того или иного живого сечения, но и по длине для всего потока в целом.

В самом деле, при равномерном движении все линии токов будут параллельны линии дна и потому на всем протяжении потока имеем

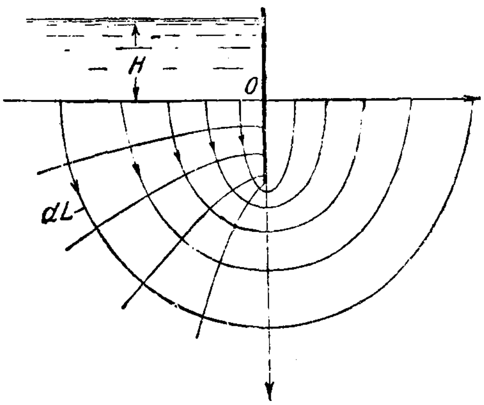
$$I = -\frac{dH}{dL} = i$$

и формула Дюпюи в этом случае примет вид

$$v = ki.$$

Расчеты движения грунтового потока, в основу которых может быть положена формула Дюпюи, т. е. расчеты для случаев плавно-изменяющегося движения, достаточно просты именно благодаря постоянству значения местных скоростей по всему живому сечению потока.

Во всех же случаях, не отвечающих условиям плавной изменяемости движения (фиг. 308), ли-



Фиг. 308

нии токов отличаются определенной кривизной, расстояния при переходе вдоль линии тока от одного живого сечения к другому различны в зависимости от того, вдоль какой линии тока они измеряются, и следовательно, значение гидравлического уклона не может быть принято постоянным в пределах живого сечения. Гидравлический уклон, а потому и местные скорости фильтрации будут различны в разных точках пространства, занятого грунтовым потоком.

В связи с этим приходится рассматривать гидродинамические характеристики установившегося грунтового потока как некоторые непрерывные функции координат, т. е. прибегать к общим уравнениям гидромеханики, что значительно усложняет технику расчетов по сравнению с отмеченным выше частным случаем плавно-изменяющегося движения.

Прежде всего рассмотрим расчеты плавно-изменяющегося движения грунтового потока.

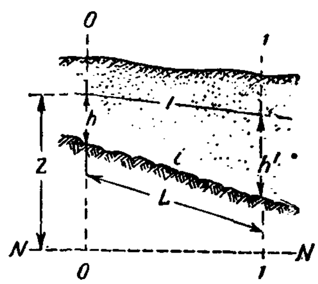
§ 197. Расчет кривых свободной поверхности при плавно-изменяющемся неравномерном движении грунтовых вод

1. Основные уравнения и их исследование. Рассмотрим грунтовый поток в призматическом русле любой формы.

В силу плавной изменяемости движения в основу расчетов может быть положено уравнение Дюпюи

$$v = kI.$$

Обозначим (фиг. 309):



Фиг. 309

z — координата свободной поверхности, отсчитываемая по вертикали вверх от некоторой горизонтальной оси;

h — глубина потока в рассматриваемом сечении;

L — расстояние от начала отсчета O вдоль линии подстилающего слоя;

i — уклон подстилающего слоя.

Так же как и для надземных потоков, имеем

$$-\frac{dz}{dL} = I = i - \frac{dh}{dL},$$

и потому уравнение Дюпюи можно записать так:

$$v = k\left(i - \frac{dh}{dL}\right),$$

тогда уравнение расхода потока в общем виде будет

$$Q = \omega v = k\omega\left(i - \frac{dh}{dL}\right), \tag{609}$$

где i может быть величиной положительной, отрицательной или равной нулю.

Подставим в уравнение (609) вместо расхода равную ему величину

$$Q = k\omega_0 i',$$

где i' — произвольный положительный уклон, а ω_0 — соответствующая ему площадь живого сечения при равномерном движении потока.

Тогда, обозначая $\frac{\omega}{\omega_0} = \varepsilon$, получим вместо уравнения (609)

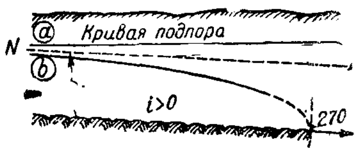
$$i' = \varepsilon i - \varepsilon\frac{dh}{dL}$$

или
$$dL = \frac{\varepsilon}{i\left(\varepsilon - \frac{i'}{i}\right)} dh. \qquad (610')$$

Отсюда
$$\frac{dh}{dL} = \frac{i\left(\varepsilon - \frac{i'}{i}\right)}{\varepsilon}. \qquad (610)$$

Проведем исследование форм кривых депрессий для каждого случая уклона отдельно.

П р я м о й у к л о н п о д с т и л а ю щ е г о с л о я. Проведя для определенного расхода линию нормальных глубин N-N (фиг. 310), получим д в е



Фиг. 310

з о н ы в области грунтового потока: зону a при глубинах $h > h_0$ и зону b при $h < h_0$, для каждой из которых и проведем исследование, принимая $i' = i$.

а) Зона a при $h > h_0$. В этом случае $\varepsilon = \frac{\omega}{\omega_0} > 1$ и, следовательно, согласно (610)
$$\frac{dh}{dL} > 0.$$

Таким образом г л у б и н а в д о л ь п о т о к а д о л ж н а в о з р а с т а т ь и кривая депрессии будет кривой подпора.

Исследуя вторую производную, легко установить, что кривая депрессии вогнутостью своей направлена вверх.

Наконец, отметим, что при $h \to h_0$ имеем $\frac{dh}{dL} \to 0$, а при $h \to \infty$ имеем $\frac{dh}{dL} \to i$ и, следовательно, в верхней части кривая депрессии будет асимптотически приближаться к линии нормальных глубин N-N, а в нижней своей части она будет иметь своей асимптотой горизонтальную прямую.

Всем сказанным вполне определяется форма свободной поверхности грунтового потока в этой зоне.

б) Зона b при $h < h_0$. Так как в данном случае $\omega < \omega_0$, то по (610)
$$\frac{dh}{dL} < 0,$$
т. е. глубина грунтового потока вниз по течению уменьшается и кривая депрессии будет кривой спада.

В этом случае исследование величины $\frac{d}{dL}\left(\frac{dh}{dL}\right)$ показывает, что кривая депрессии будет своей вогнутостью направлена вниз.

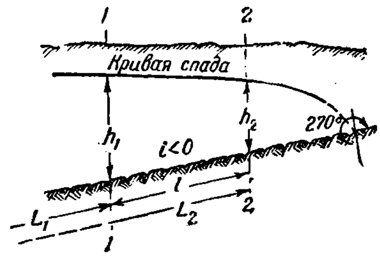
Далее устанавливаем, что при $h \to h_0$ имеем $\frac{dh}{dL} \to 0$, т. е. в верхней своей части кривая депрессии имеет асимптотой линию нормальных глубин N-N.

Когда же $h = 0$, то $\frac{dh}{dL} = -\infty$ и кривая депрессии составляет с осью L, т. е. с линией подстилающего слоя, угол в 270°*.

Отметим здесь, что как в этой точке, так и вблизи нее решение, даваемое теорией Дюпюи, не действительно ввиду нарушения основной ее предпосылки плавной изменяемости движения грунтового потока.

О б р а т н ы й у к л о н п о д с т и л а ю щ е г о с л о я (фиг. 311). Уравнение (610) в этом случае (полагая $i' = |i|$) дает только $\frac{dh}{dL} < 0$ и, следовательно, глубины h всегда убывают и мы имеем лишь одну линию депрессии: кривую спада.

Вторая производная также будет всегда отрицательной и потому заключаем, что кривая депрессии на всем протяжении обращена вогнутостью вниз.



Фиг. 311

При $h \to 0$ уравнение дает
$$\frac{dh}{dL} = -\infty,$$
т. е. при $h = 0$ касательная к кривой депрессии, как и в предыдущем случае, пересекает линию подстилающего слоя под углом в 270°.

При $h \to \infty$ имеем
$$\frac{dh}{dL} = -i,$$
т. е. линия депрессии асимптотически стремится к горизонтальной прямой.

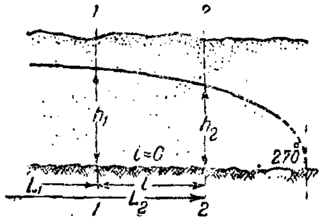
Третий случай — нулевого уклона подстилающего слоя, ввиду простоты, не требует дополнительного исследования. Кривая депрессии будет иметь только одну форму — кривой спада.

2. Интегрирование уравнений неравномерного движения грунтового потока. Возвращаясь к исходным диференциальным уравнениям, рассмотрим их раздельно для случаев, когда $i = 0$ и $i \neq 0$.

* Строго говоря, это будет выполняться только в том случае, если глубины откладывать не по вертикали, а по нормали к линии подстилающего слоя. При незначительных уклонах последнего ошибка будет, однако, очень мала.

а) Когда $i=0$ (фиг. 312) из уравнения (609) непосредственно следует

$$dL=-\frac{k\omega}{Q}\,dh. \tag{611}$$



Фиг. 312

При этом для грунтового потока значительной ширины, позволяющей рассматривать его плоским с прямоугольной формой русла, имеем

$$\omega=bh,$$
$$Q=qb.$$

Тогда

$$dL=-\frac{k}{q}\,hdh$$

или

$$L=\frac{k}{2q}(h_1^2-h_2^2),$$

где L — расстояние между двумя сечениями потока с соответствующими глубинами h_1 и h_2.

б) Переходя к рассмотрению случаев при $i\neq 0$, примем в уравнении (610′) $i'=|i|$.

Тогда имеем:

при $i>0$

$$dL=\frac{1}{i}\,\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\,dh \tag{612}$$

и при $i<0$

$$dL=-\frac{1}{|i|}\,\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}\,dh. \tag{613}$$

Диференциальные уравнения (612), (613), как и (611), при произвольной форме призматического русла могут быть решены приближенно способом суммирования.

Рассмотрим теперь при $i\neq 0$ важный практически частный случай, когда грунтовый поток имеет столь значительную ширину по сравнению с мощностью водоносного пласта, что его можно считать плоским с прямоугольной формой русла.

В рассматриваемом случае будем иметь

$$\varepsilon=\frac{\omega}{\omega_0}=\frac{h}{h_0}.$$

Обозначив, как это принималось ранее,

$$\frac{h}{h_0}=\eta,$$

получим

$$dh=h_0 d\eta.$$

Тогда для $i>0$ вместо уравнения (612) получим

$$dL=\frac{h_0}{i}\,\frac{\eta}{\eta-1}\,d\eta=\frac{h_0}{i}\left(d\eta+\frac{d\eta}{\eta-1}\right),$$

или при $\eta>1$

$$dL=\frac{h_0}{i}\left(d\eta-\frac{d\eta}{1-\eta}\right),$$

откуда

$$L=\frac{h_0}{i}\left(\eta_2-\eta_1+\ln\frac{\eta_2-1}{\eta_1-1}\right),$$

или при $\eta<1$

$$L=\frac{h_0}{i}\left(\eta_2-\eta_1+\ln\frac{1-\eta_2}{1-\eta_1}\right).$$

Тогда имеем

$$L=\frac{h_0}{i}[F(\eta_2)-F(\eta_1)], \tag{614}$$

где обозначено

$$F(\eta)=\eta+\ln(\eta-1)\ \text{при}\ \eta>1,$$
$$F(\eta)=\eta+\ln(1-\eta)\ \text{при}\ \eta<1.$$

Для $i<0$ вместо уравнения (613) получим

$$dL=\frac{h_0}{|i|}\,\frac{\eta}{-(1+\eta)}\,d\eta=\frac{h_0}{|i|}\left(-d\eta+\frac{d\eta}{1+\eta}\right),$$

откуда

$$L=\frac{h_0}{|i|}\left(\eta_1-\eta_2+\ln\frac{1+\eta_2}{1+\eta_1}\right),$$

или

$$L=\frac{h_0}{|i|}[F'(\eta_2)-F'(\eta_1)], \tag{615}$$

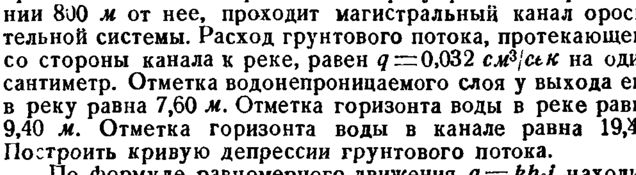
где обозначено

$$F'(\eta)=-\eta+\ln(1+\eta).$$

Значения $F(\eta)$ и $F'(\eta)$ по Павловскому даны в таблицах[1].

В уравнениях для случая с $i<0$ величину h_0 следует понимать как нормальную глубину рассматриваемого потока при движении его в обратном направлении, т. е. на участке с прямым уклоном, равным $|i|$, т. е. абсолютному значению заданного обратного уклона.

Задача 122[1]. Берег реки, изображенный в поперечном разрезе на фиг. 313, слагается из водонепроницаемого пласта, имеющего уклон в сторону реки $i=0{,}01$ и лежащего поверх него водопроницаемого песчаного слоя, имеющего коэфициент фильтрации $k=0{,}008$ *см/сек*. В водопроницаемом слое, параллельно берегу реки, на расстоянии 800 *м* от нее, проходит магистральный канал оросительной системы. Расход грунтового потока, протекающего со стороны канала к реке, равен $q=0{,}032$ *см³/сек* на один сантиметр. Отметка водонепроницаемого слоя у выхода его в реку равна 7,60 *м*. Отметка горизонта воды в реке равна 9,40 *м*. Отметка горизонта воды в канале равна 19,42. Построить кривую депрессии грунтового потока.



Фиг. 313

По формуле равномерного движения $q=kh_0 i$ находим нормальную глубину

$$h_0=\frac{q}{ki}=\frac{0{,}032}{0{,}008\cdot 0{,}01}=4{,}0\ \text{м}.$$

[1] Н. Н. Павловский, Неравномерное движение грунтовых вод, 1930.

№ точек	h *м*	$\eta = \frac{h}{h_0}$	$F(\eta)$	L *м*	Примечание
1	1,80	0,45	— 0,1478	0	$\frac{h_0}{i} = \frac{4}{0,01} = 400$ *м*
2	2,00	0,50	— 0,1932	18	$L_{(1-n)} = \frac{h_0}{i}[F(\eta_n) - F(\eta_1)] = 400\,[F(\eta_n) + 0,1478]$
3	2,40	0,60	— 0,3162	67	
4	2,80	0,70	— 0,5040	142	
5	3,20	0,80	— 0,8094	265	
6	3,60	0,90	— 1,4026	502	
7	3,82	0,955	— 2,1461	799	

Глубина грунтового потока у выхода его в реку равна

$$h_p = 9{,}40 - 7{,}60 = 1{,}80\ \text{м}.$$

Глубина грунтового потока у выхода из канала

$$h_{кан} = 19{,}42 - (7{,}60 + 800 \times 0{,}01) = 3{,}82\ \text{м}.$$

Так как $h_p < h_{кан}$, то в данном случае глубины потока убывают по направлению его движения и, следовательно, кривая свободной поверхности будет кривой спада.

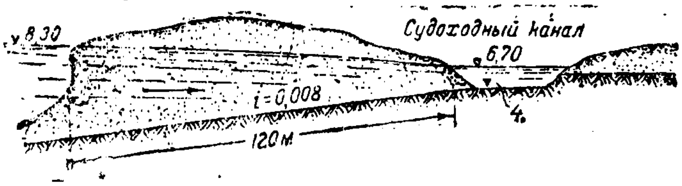
Задаваясь различными значениями глубины потока в пределах от $h_p = 1{,}80$ *м* до $h_{кан} = 3{,}8$ *м*, вычисляем расстояния между сечениями с заданной глубиной и сечением у выхода в реку по формуле (614), которая в данном случае будет иметь вид

$$l = \frac{h_0}{i}\left(\eta_2 - \eta_1 + \ln\frac{1-\eta_2}{1-\eta_1}\right) = \frac{h_0}{i}[F(\eta_2) - F(\eta_1)].$$

Вычисления сведены в табл. 100.

Полученные данные дают возможность построить ряд точек свободной поверхности, а по ним и самую кривую депрессии.

Задача 123. На фиг. 314 показан геологический профиль для судоходного канала. Как видно из чертежа водонепроницаемый слой имеет уклон $i = 0{,}008$, направленный в сторону от канала. С левой стороны канала лежит озеро. Коэфициент фильтрации $k = 0{,}01$ *см/сек*. Расстояние между озером и каналом 120 *м*. Отметка водонепроницаемого слоя у выхода его в судоходном канале 4,90 *м*. Отметка поверхности воды в озере 8,3 *м*, а в канале — 6,70. Вследствие разности отметок горизонтов воды в канале и озере грунтовый поток движется в сторону судоходного канала, причем расход потока $q = 0{,}04$ *см³/сек* на погонный сантиметр длины канала.



Фиг. 314

Построить кривую депрессии.

В данном случае имеем подстилающий водонепроницаемый слой с обратным уклоном. Для решения такого рода задач нормальная глубина h_0 должна быть вычислена для движения в **обратном** направлении при сохранении прочих условий движения, т. е. при том же расходе q, той же величине уклона $|i|$ и том же значении коэфициента фильтрации k.

В данном случае эта глубина будет

$$h_0 = \frac{0{,}04}{0{,}01 \cdot 0{,}008} = 5{,}0\ \text{м}.$$

Глубина потока при выходе его в судоходный канал равна

$$h_{кан} = 6{,}70 - 4{,}90 = 1{,}80\ \text{м}.$$

Глубина потока у озера

$$h_{оз} = 8{,}30 - (4{,}90 - 120 \cdot 0{,}008) = 4{,}36\ \text{м}.$$

Таким образом все возможные значения глубин грунтового потока будут в пределах $h_{кан} = 1{,}80$ *м* и $h_{оз} = 4{,}36$ *м*.

Задаваясь в этих пределах рядом глубин, находим по формуле (615), имеющей в данном случае вид

$$l = \frac{h_0}{|i|}\left[(\eta_2 - \eta_1) + \ln\frac{1+\eta_2}{1+\eta_1}\right] = \frac{h_0}{|i|}[F'(\eta_2) - F'(\eta_1)], \qquad (616)$$

расстояния между сечениями с заданными глубинами.

Вычисления сведены в табл. 101.

Пользуясь полученными данными, строим кривую депрессии (фиг. 314).

Задача 124.[1] Определить расход грунтового потока по следующим данным разведки.

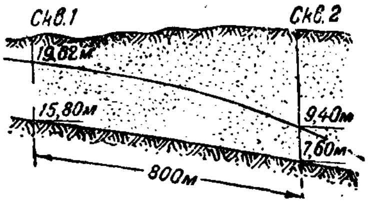
Имеются две буровые скважины *№ 1* и *№ 2*, расположенные по направлению потока. Расстояние между скважинами 800 *м* (фиг. 315).

В скважине *№ 2* уровень грунтовых вод установился на отметке 9,40 *м*, а основание водоносного пласта встречено на отметке 7,60 *м*. В скважине *№ 1* уровень грун-

Таблица 101

№ точек	h	$\eta = \frac{h}{h_0}$	$F(\eta)$	L *м*	Примечание
1	1,80	0,36	— 0,0525	0	$\frac{h_0}{\lvert i\rvert} = \frac{5}{0,008} = 625$ *м*
2	2,20	0,44	— 0,0754	14	$L_{(1-n)} = \frac{h_0}{\lvert i\rvert}[F'(\eta_n) - F'(\eta_1)] = 625\,[F'(\eta_n) + 0,0525]$
3	2,60	0,52	— 0,1013	30	
4	3,00	0,60	— 0,1300	48	
5	3,40	0,68	— 0,1612	68	
6	3,80	0,76	— 0,1947	89	
7	4,20	0,84	— 0,2302	112	
8	4,35	0,87	— 0,2440	120	

[1] См. Г. Н. Каменский, Основы динамики подземных вод. Госгеоиздат, 1943.



Фиг. 315

товых вод имеет отметку 19,62, основание водоносного пласта 15,80 *м*. Коэфициент фильтрации пласта $k=8$ *м/сутки*.

Выясним сначала вид кривой депрессии, для чего находим глубины h_1 и h_2 в скважинах № *1* и № *2*:

$$h_2 = 9{,}40 - 7{,}60 = 1{,}80 \text{ м},$$
$$h_1 = 19{,}62 - 15{,}80 = 3{,}82 \text{ м}.$$

Из сопоставления этих глубин заключаем, что мы имеем кривую спада.

Уклон подстилающего слоя будет

$$i = \frac{15{,}80 - 7{,}60}{800} = \frac{8{,}20}{800} = 0{,}0103.$$

Воспользуемся уравнением (614):

$$L = \frac{h_0}{i}\,[F(\eta_2) - F(\eta_1)].$$

Применительно к потоку между скважинами № *1* и № *2* получим

$$0{,}0103\cdot 800 = h_0\left[F\left(\frac{1{,}80}{h_0}\right) - F\left(\frac{3{,}82}{h_0}\right)\right] = 8{,}24.$$

Решая последнее уравнение способом подбора или графически, найдем значение

$$h_0 = 3{,}99 \text{ м}.$$

Тогда по формуле равномерного движения искомый расход будет

$$q = kh_0 i = 8\cdot 3{,}99\cdot 0{,}0103 = 0{,}327 \text{ м}^3/\text{сутки на 1 пог. м}.$$

§ 198. Основные уравнения движения грунтового потока

Основная разница между гидродинамикой грунтового потока и общей гидродинамикой вязкой жидкости заключается в физической схеме движения.

Ввиду чрезвычайно большого числа пор неправильной формы и беспорядочности их распределения в грунте нельзя учесть движение жидкости в каждой из отдельных пор и потому непосредственное применение уравнений классической гидродинамики невозможно. Вместе с тем очевидно, что нет необходимости и знать распределение скоростей и давлений в каждой из пор, а вполне достаточно знать скорости фильтрации через некоторые, малые сами по себе, но крупные по сравнению с порами грунта площадки и средние величины давлений на такого рода площадках.

Движение действительной жидкости мы таким образом можем заменить движением некоторой фиктивной жидкости, заполняющей сплошь все пространство, т. е. занимающей каждую точку этого пространства вне зависимости от того, чем занята эта точка в действительности — частицей грунта или водой, лишь бы удовлетворялись основные требования:

1) произведение скорости фильтрации на величину элементарной площадки равно действительному расходу фильтрующейся через эту площадку жидкости и 2) плотность фиктивной жидкости равна плотности ρ жидкости действительной.

Из сил, действующих на фиктивную жидкость, особое положение занимают силы сопротивления. Эти силы должны быть рассчитаны как результат сопротивления грунтового скелета, находящегося внутри каждого элементарного объема, и следовательно, их нужно рассматривать как объемные силы. Силами трения внутри самой жидкости можно пренебречь по сравнению с таковыми на поверхности обтекаемых частиц грунта.

Эта схема позволяет применить к грунтовому потоку основные уравнения движения идеальной жидкости Эйлера (59) или в развернутой форме (60).

Из сил, относимых к единице массы и входящих в уравнение (60) в виде своих компонентов F_x, F_y и F_z, в данном случае будут:

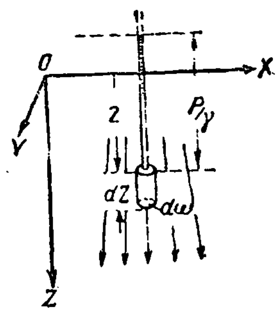
1) сила тяжести с компонентами

$$F'_x = 0;\quad F'_y = 0;\quad F'_z = +g; \tag{617}$$

2) силы сопротивления грунтового скелета F'' с компонентами

$$F''_x,\quad F''_y \text{ и } F''_z.$$

Для определения сил сопротивления F'' рассмотрим внутри грунтового потока элементарный цилиндрик с основанием $d\omega$, высотой dz при коэфициенте пористости m. Силу сопротивления, отнесенную к единице массы жидкости, фильтрующейся через этот цилиндрик, найдем из равенства нулю проекций всех имеющихся сил на направление фильтрации.



Фиг. 316

К таким силам относятся (фиг. 316):

а) сила веса

$$\gamma m dz d\omega;$$

б) силы гидродинамического давления

$$dp m d\omega;$$

в) силы сопротивления

$$F''\rho m dz d\omega.$$

Тогда имеем

$$\gamma m dz d\omega - dp m d\omega - F''\rho m dz d\omega = 0$$

или

$$\rho dz F'' = -dp + \gamma dz = -\gamma d\left(\frac{p}{\gamma} - z\right).$$

Так как $\frac{p}{\gamma} - z = H$, то

$$F'' = -g\frac{dH}{dz} = -gI.$$

Заменяя по закону Дарси $I=\frac{u}{k}$, получим

$$F''=-g\frac{u}{k}$$

или, переходя к компонентам,

$$\left.\begin{aligned} F''_x&=-\frac{g}{k}u_x,\\ F''_y&=-\frac{g}{k}u_y,\\ F''_z&=-\frac{g}{k}u_z.\end{aligned}\right\}\qquad(618)$$

Внося в уравнения (60) Эйлера $F=F'+F''$, получим уравнения проф. Н. Е. Жуковского движения грунтовых вод:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}&=-\frac{g}{k}u_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\\ \frac{\partial u_y}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_y}{\partial z}&=-\frac{g}{k}u_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},\\ \frac{\partial u_z}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_z}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_z}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}&=g-\frac{g}{k}u_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.\end{aligned}\right\}(619)$$

Вместе с характеристическими уравнениями $\rho=\mathrm{const}$, $k=\mathrm{const}$ и уравнением несжимаемости (37)

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0$$

уравнения Н. Е. Жуковского (619) составляют полную систему диференциальных уравнений движения грунтовых вод.

Обычно силами инерции, ввиду их малости, в уравнениях Н. Е. Жуковского (619) пренебрегают. Тогда последние принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{g}{k}u_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}&=0,\\ -\frac{g}{k}u_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}&=0,\\ g-\frac{g}{k}u_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}&=0,\end{aligned}\right\}\qquad(620)$$

откуда, деля обе части на g и принимая во внимание равенство $\gamma=\rho g$, имеем:

$$\left.\begin{aligned} u_x&=-k\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\gamma}\right),\\ u_y&=-k\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{\gamma}\right),\\ u_z&=-k\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\gamma}-z\right).\end{aligned}\right\}\qquad(621)$$

Заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\gamma}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\gamma}-z\right)=\frac{\partial H}{\partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{\gamma}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{\gamma}-z\right)=\frac{\partial H}{\partial y},$$

где

$$H=\frac{p}{\gamma}-z\qquad(622)$$

— гидравлический напор.

Тогда уравнение (621) можно переписать в виде:

$$\left.\begin{aligned} u_x&=-k\frac{\partial H}{\partial x},\\ u_y&=-k\frac{\partial H}{\partial y},\\ u_z&=-k\frac{\partial H}{\partial z}.\end{aligned}\right\}\qquad(623)$$

Уравнения (623) есть не что иное, как закон Дарси в обобщенном виде.

Из этих уравнений видим, что H является функцией координат:

$$H=f(x,\ y,\ z).$$

Эта функция имеет весьма важное значение в гидравлике грунтовых вод и носит название напорной функции.

Вводя новую функцию координат

$$\Phi=kH,\qquad(624)$$

мы можем систему основных уравнений движения грунтовых вод (623) записать в виде:

$$\left.\begin{aligned} u_x&=-\frac{\partial\Phi}{\partial x},\\ u_y&=-\frac{\partial\Phi}{\partial y},\\ u_z&=-\frac{\partial\Phi}{\partial z}.\end{aligned}\right\}\qquad(625)$$

Значит применительно к движению грунтового потока существует некоторая функция координат

$$\Phi=\Phi(x,\ y,\ z)=kH,$$

частные производные от которой (625), взятые с обратным знаком, являются компонентами скоростей. Как уже известно, такая функция называется потенциалом скоростей[1], а само движение с такими скоростями — безвихревым, или потенциальным.

Следовательно, движение грунтовых вод в пределах применимости закона Дарси является потенциальным, безвихревым.

Поэтому задача о движении грунтовых вод в однородном грунте сводится, как это было показано в кинематике, к решению уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0\qquad(626)$$

с учетом пограничных условий.

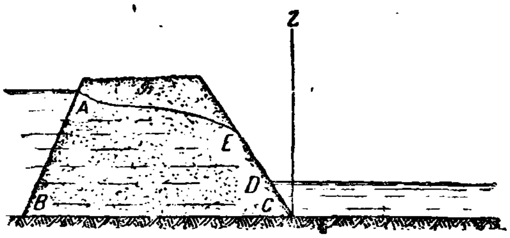
Если по уравнению Лапласа, при учете условий на границах, будет найдено значение $\Phi(x,\ y,\ z)$, то по (625) можно получить u_x, u_y, u_z, а по (623) и (622) также и $\frac{p}{\gamma}$, т. е. определить элементы, характеризующие движение грунтового потока.

[1] См. § 28.

§ 199. Граничные условия

Уравнение Лапласа (626) имеет множество решений и потому для получения определенного решения необходимо учесть пограничные условия.

Границы области движения грунтовых вод могут быть следующих видов (фиг. 317):



Фиг. 317

а) непроницаемые границы BC;

б) границы водоемов AB и DC;

в) промежутки высачивания, выхода, выклинивания ED;

г) свободные поверхности AE.

На непроницаемой границе скорость фильтрации в любой точке направлена по касательной, следовательно, скорость фильтрации в направлении нормали n к границе равна нулю, т. е.

$$\frac{d\Phi}{dn}=0.$$

Это условие называют кинематическим.

Если форма этой границы заранее известна и ее уравнение дано в виде

$$F(x, y, z)=0,$$

то кинематическое условие может быть выражено так называемой производной Стокса

$$u_x\frac{\partial F}{\partial x}+u_y\frac{\partial F}{\partial y}+u_z\frac{\partial F}{\partial z}=0. \qquad (627)$$

Как известно из диференциальной геометрии, направляющие косинусы нормали к поверхности равны:

$$\cos(n, x)=\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{A} \qquad \cos(n, y)=\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{A}, \qquad \cos(n, z)=\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{A},$$

где

$$A=\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}.$$

Направляющие же скорости фильтрации равны

$$\cos\alpha=\frac{u_x}{u},$$

$$\cos\beta=\frac{u_y}{u},$$

$$\cos\gamma=\frac{u_z}{u}.$$

Так как по известной формуле из аналитической геометрии

$$\cos(u, n)=\cos\alpha\cos(n, x)+\cos\beta\cos(n, y)+\cos\gamma\cos(n, z),$$

то из условия $(u, n)=\frac{\pi}{2}$ и получаем зависимость (627).

На границе водоемов, ввиду малости скоростей фильтрации, можно полагать давление распределенным по гидростатическому закону:

$$\frac{p}{\gamma}=\frac{p_a}{\gamma}+(H-z), \qquad (628)$$

где p_a — давление на свободной поверхности водоема;

H — отметка этой поверхности, отнесенная к горизонтальной координатной плоскости.

На свободной поверхности и на границе выклинивания, где область движения грунтовых вод примыкает либо к атмосферному воздуху, либо к какой-нибудь заполненной воздухом пустоте внутри земли, давление следует считать постоянным (т. е. не зависящим от положения точки на этом участке) и равным атмосферному.

Если бы не существовало явления капиллярного поднятия воды, то давление на свободной поверхности действительно равнялось бы атмосферному, однако фактически оно несколько меньше атмосферного на ту или иную величину в зависимости от средней величины пор. При однородном грунте эта величина везде одинакова, одинаковым остается и понижение давления, так что условие постоянства давления остается верным.

Так как форма свободной поверхности заранее неизвестна, то одного постоянства давления на свободной поверхности для решения задачи недостаточно; при установившемся движении, если пренебрегать факторами испарения, конденсации, инфильтрации и т. д., недостающее условие дается равенством нулю нормальной составляющей скорости фильтрации.

§ 200. Плоское установившееся движение грунтового потока

Полученными уравнениями охватывается трехразмерный поток, так называемая пространственная задача. Сущность гидродинамического решения этих задач состоит в том, чтобы найти такое значение потенциальной функции, которое удовлетворяло бы и уравнению Лапласа и граничным условиям. Если такая функция будет найдена, то тогда в любом месте исследуемой области могут быть определены скорость грунтового потока, давление или напор.

Однако нахождение такой функции $\Phi(x, y, z)$ часто представляет непреодолимые трудности, которые лишь несколько упрощаются при решении задач установившегося движения в одной плоскости (плоский поток).

Плоский поток — ближайший к одноразмерному, самому элементарному потоку, исследованному еще Дарси. При таком потоке задача сводится к изучению двухразмерного (напорного или безнапорного) движения в одной плоскости (идентичного с движением в любых так же ориентированных плоскостях, расположенных в зоне потока).

Такая идентичность движения в одинаково ориентированных плоскостях имеет место в ряде случаев инженерной практики, например, при фильтрации под плотинами, притекании к дренам и т. п., когда грунтовый поток движется широким фронтом в одинаковых условиях по всей ширине потока.

Как уже указывалось в кинематике (§ 25, 28), линии тока в плоском потоке, будучи расположены в одной плоскости, определяются значениями функции тока $\Psi(x, y)$, а полная картина движения потока отражается гидродинамической сеткой двух ортогональных семейств линий.

Напомним, что для плоского потока (в плоскости XOY) имеют место основные уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=0, \\ \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}=0, \end{aligned}\right\} \tag{629}$$

где связь между потенциалом скорости $\Phi(x, y)$, функцией тока $\Psi(x, y)$ и компонентами скорости такова, что

$$\left.\begin{aligned} u_x=\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{\partial\Psi}{\partial y}, \\ u_y=\frac{\partial\Phi}{\partial y}=-\frac{\partial\Psi}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \tag{630}$$

В этих уравнениях функция потенциала скоростей в общем виде будет:

а) при вертикальном расположении плоского потока

$$\Phi=kH=k\left(y+\frac{p}{\gamma}\right); \tag{631}$$

б) при горизонтальном расположении плоского потока

$$\Phi=kH=\frac{k}{\gamma}p. \tag{632}$$

Рассмотрим, чему будет равна функция потенциала скоростей при плоском (в вертикальной плоскости) плавно-изменяющемся грунтовом потоке со свободной поверхностью при горизонтальном подстилающем слое.

Для этого применим общее условие неразрывности (§ 27)

$$-\frac{\partial(\rho q)}{\partial s}\,ds dt=\frac{\partial(\rho\omega)}{\partial t}\,ds\cdot dt$$

к элементарному параллелепипеду с вертикальной гранью высотой h, отсчитываемой от горизонтального непроницаемого слоя до свободной поверхности.

Применительно к рассматриваемому случаю имеем:

1) $$\frac{\partial(\rho q)}{\partial s}\,ds\cdot dt=\frac{\partial}{\partial x}(\rho h dy u_x)\,dx dt+\frac{\partial}{\partial y}(\rho h dx u_y)\,dy dt=$$
$$=\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho h u_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho h u_y)\right]dx dy dt;$$

2) $$\frac{\partial(\rho\omega)}{\partial t}\,ds dt=m\frac{\partial}{\partial t}(\rho h dy)\,dx dt+m\frac{\partial}{\partial t}(\rho h dx)\,dy dt=$$
$$=2m\frac{\partial(\rho h)}{\partial t}\,dx dy dt,$$

где m — коэфициент порозности.

Тогда уравнение неразрывности для рассматриваемого случая будет

$$2m\,\frac{\partial(\rho h)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho h u_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho h u_y)=0. \tag{633}$$

Для плавно-изменяющегося потока компоненты скорости могут быть выражены по формуле Дюпюи:

$$u_x=-k\,\frac{\partial h}{\partial x} \text{ и } u_y=-k\,\frac{\partial h}{\partial y}.$$

Подставляя эти значения компонентов скорости и считая жидкость несжимаемой ($\rho=\text{const}$), получим вместо (633)

$$\frac{2m}{k}\frac{\partial h}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(h\,\frac{\partial h}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(h\,\frac{\partial h}{\partial y}\right)=0$$

или

$$\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h^2}{\partial y^2}=\frac{2m}{k}\,\frac{\partial h}{\partial t}.$$

При установившемся движении $\frac{\partial h}{\partial t}=0$ и вместо (633) будем иметь уравнение Дюпюи-Форхгеймера (1886 г.)

$$\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h^2}{\partial y^2}=0. \tag{634}$$

Как видим, в рассматриваемом случае потенциал Φ заменяется величиной h^2.

Согласно изложенному в настоящем параграфе приходим к заключению, что решение задач, связанных с плоским потоком, должно проводиться: 1) на основе уравнения Лапласа с учетом пограничных условий при любом виде движения грунтового потока и 2) на основе формулы Дюпюи при плавно-изменяющемся движении.

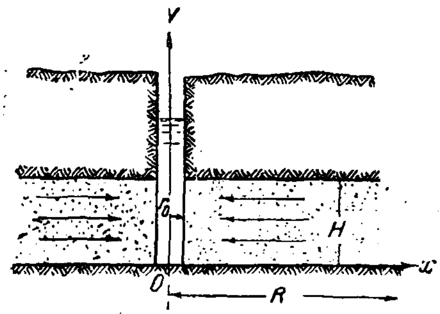
Переходя к рассмотрению методов гидромеханического решения общих случаев движения, укажем, что непосредственное интегрирование уравнения Лапласа возможно только для самых простых правильных форм движения жидкости. Чаще всего непосредственное интегрирование оказывается невозможным и приходится искать косвенных методов решения вопроса, применяя метод сопряженных функций или пользуясь конформными отображениями.

Применение упомянутых методов рассмотрим на конкретных случаях движения грунтовых потоков.

А. МЕТОД НЕПОСРЕДСТВЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

§ 201. Расчет притока грунтовых вод к колодцам

Рассмотрим радиальный приток напорных грунтовых вод к колодцу (фиг. 318).



Фиг. 318

Движение грунтовых вод в этом случае достаточно изучать в каком-либо горизонтальном сечении, так как условия движения в таких сечениях должны быть однотипными.

Поэтому вопрос сводится к решению плоской задачи, принимая согласно (632) $\Phi=\frac{kp}{\gamma}$.

Тогда

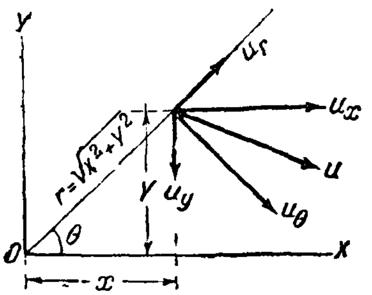
$$\left.\begin{aligned} u_x&=-\frac{\partial\Phi}{\partial x}=-\frac{k}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial x},\\ u_y&=-\frac{\partial\Phi}{\partial y}=-\frac{k}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial y}\end{aligned}\right\} \qquad (635)$$

и

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}=0.$$

Переходя к полярным координатам (фиг. 319)

$$r=\sqrt{x^2+y^2};\ \theta=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \qquad (636)$$



Фиг. 319

получим уравнения радиального потока:

$$\left.\begin{aligned} u_r&=-\frac{k}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial r},\\ u_\theta&=-\frac{k}{\gamma r}\frac{\partial p}{\partial \theta},\end{aligned}\right\} \qquad (637)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 p}{\partial\theta^2}=0. \qquad (638)$$

В самом деле, из формул полярных координат имеем, в силу соотношений $x=r\cos\theta$ и $y=r\sin\theta$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x}&=\frac{x}{r}=\cos\theta, & \frac{\partial\theta}{\partial x}&=-\frac{y}{r^2}=-\frac{\sin\theta}{r},\\ \frac{\partial r}{\partial y}&=\frac{y}{r}=\sin\theta, & \frac{\partial\theta}{\partial y}&=\frac{x}{r^2}=\frac{\cos\theta}{r},\end{aligned}\right\} \qquad (639)$$

так как далее $p=f(r,\theta)$, то

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x},$$

$$\frac{\partial p}{\partial}=\frac{\partial p}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y}$$

или, в силу (639),

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x}&=\frac{\partial p}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial p}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{r},\\ \frac{\partial p}{\partial y}&=\frac{\partial p}{\partial r}\sin\theta+\frac{\partial p}{\partial\theta}\frac{\cos\theta}{r}.\end{aligned}\right\} \qquad (640)$$

Подставляя эти выражения в (635) и направляя ось X вдоль радиуса-вектора r, мы очевидно вместо u_x и u_y получим u_r и u_θ. А так как при этом $\theta=0$, то будем иметь выражения (637).

Чтобы получить (638), найдем вторые производные от p по x и по y:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial p}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial p}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{r}\right)\cos\theta-$$

$$-\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial p}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial p}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{r}\right)\frac{\sin\theta}{r},$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial p}{\partial r}\sin\theta+\frac{\partial p}{\partial\theta}\frac{\cos\theta}{r}\right)\sin\theta+$$

$$+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial p}{\partial r}\sin\theta+\frac{\partial p}{\partial\theta}\frac{\cos\theta}{r}\right)\frac{\cos\theta}{r}.$$

Почленное сложение левых и правых частей приведет нас к равенству

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 p}{\partial\theta^2}.$$

Принимая во внимание, что первые два члена правой части равны $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right)$, мы и получим требуемое выражение левой части уравнения (638).

Полагая радиальный поток симметричным относительно вертикальной оси oz, т. е. изменяющимся только с изменением расстояния r от оси oz, мы вместо (637) и (638) получим:

$$\left.\begin{aligned} u_r &= -\frac{k}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial r}, \\ u_\theta &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{641}$$

и

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right)=0. \tag{642}$$

Интегрирование последнего уравнения дает

$$r\frac{\partial p}{\partial r}=\mathrm{const}=C_1$$

и после вторичного интегрирования получаем

$$p=C_1\ln r+C_2. \tag{643}$$

Такова общая форма выражения распределения давления в системе радиального потока, симметричного относительно вертикальной оси. Чтобы получить определенное конкретное решение, необходимо задаться граничными условиями в зависимости от конкретной обстановки.

1°. Движение к колодцу артезианских вод в горизонтальном водоносном пласте небольшой толщины H (фиг. 318). В силу предполагавшейся при решении симметрии потока относительно вертикальной оси z границы его могут быть только концентрическими окружностями. Тогда граничные условия будут представлены в виде (фиг. 318)

$$\left.\begin{aligned} p&=p_0 \text{ при } r=r_0, \\ p&=p_R \text{ при } r=R, \end{aligned}\right\} \tag{644}$$

где r_0 — радиус скважины (колодца), к которой притекает грунтовый поток;

p_0 — давление в колодце, легко учитываемое по глубине воды в нем;

p_R — давление на расстоянии R от колодца, где уже почти не сказывается вызываемое его наличием понижение давления;

R — радиус влияния колодца.

Вводя условия (644) в уравнение (643), найдем

$$p_0=C_1\ln r_0+C_2,$$
$$p_R=C_1\ln R+C_2,$$

откуда

$$C_1=\frac{p_R-p_0}{\ln\frac{R}{r_0}};\quad C_2=\frac{p_0\ln R-p_R\ln r_0}{\ln\frac{R}{r_0}}.$$

Тогда

$$p=\frac{p_R-p_0}{\ln\frac{R}{r_0}}\ln r+\frac{p_0\ln R-p_R\ln r_0}{\ln\frac{R}{r_0}}=$$
$$=\frac{p_R-p_0}{\ln\frac{R}{r_0}}\ln\frac{r}{r_0}+p_0. \tag{645}$$

Вставляя в (641), находим

$$u_r=-\frac{k}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial r}=-\frac{k}{\gamma r}\frac{p_R-p_0}{\ln\frac{R}{r_0}}. \tag{646}$$

Количество воды, протекающей внутрь контура колодца через пласт единичной толщины (или так называемый дебит колодца), будет, следовательно, равно

$$q=-\int_0^{2\pi} ru_r\,d\theta=\frac{2\pi k(p_R-p_0)}{\gamma\ln\frac{R}{r_0}}. \tag{647}$$

Тогда общий расход колодца будет

$$Q=qH. \tag{648}$$

Вставляя (647) в (648), получим формулу Дюпюи-Тима:

$$Q=\frac{2\pi kH(p_R-p_0)}{\gamma\ln\frac{R}{r_0}}.$$

Вводя величину Q в формулы (645) и (646), получим

$$p=\frac{Q\gamma}{2\pi kH}\ln\frac{r}{r_0}+p_0 \tag{649}$$

и

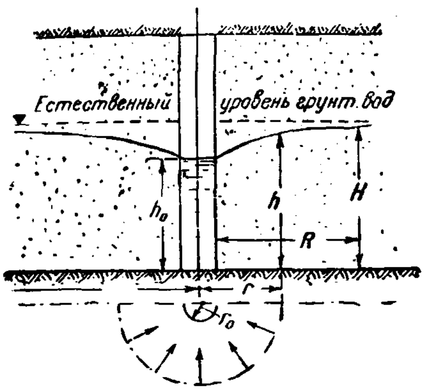
$$u_r=-\frac{Q}{2\pi rH} \tag{650}$$

— закон распределения давления и скоростей в плоском радиальном симметричном грунтовом потоке.

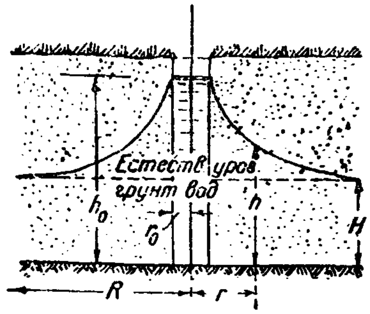
2°. Приток к колодцу безнапорных грунтовых вод. Пусть водоносный пласт грунта расположен на горизонтальном водонепроницаемом подстилающем слое. При этом условии естественный уровень грунтовых вод будет занимать некоторое горизонтальное положение на расстоянии H от подстилающего слоя и будет определять толщу грунта, насыщенного водой. Величина H называется **мощностью** водоносного пласта.

Пусть, далее, этот пласт прорезан трубчатым колодцем, доходящим до подстилающего слоя, причем стенки колодца по всей их высоте водопроницаемы (фиг. 320).

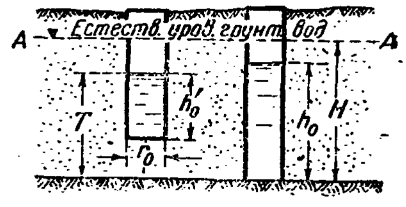
Если из такого колодца начать откачивать воду, то уровень воды как в колодце, так и вблизи его понизится, образуя так называемую **депрессионную воронку**. При **горизонтальном** подстилающем слое и **однородном** строении грунта эта воронка будет, очевидно, симметричной и будет являться поверхностью вращения кривой депрессии вокруг оси колодца. При равенстве количеств воды, поступающей в колодец и откачиваемой из него, уровень в колодце и депрессионная воронка с те-



Фиг. 320



Фиг. 321



Фиг. 322

чением времени придут в неизменное положение и таким образом движение грунтовых вод будет установившимся.

В данном случае имеем движение грунтовых вод со свободной поверхностью. Этот случай отличается от предыдущего только тем, что уравнение Лапласа (626) заменится уравнением Дюпюи-Форхгеймера (634), в котором вместо давления р стоит h^2.

Следовательно, все решения, полученные в случае притока к артезианским колодцам, применимы и к грунтовым колодцам, если заменить p через h^2.

Воспользовавшись решением задачи о симметричном притоке к артезианскому колодцу и делая указанную выше замену в (645), мы найдем уравнение кривой депрессии:

$$h^2 = \frac{H^2 - h_0^2}{\ln \frac{R}{r_0}} \ln \frac{r}{r_0} + h_0^2. \tag{651}$$

По формуле Дюпюи

$$Q = k\omega I = k2\pi rh \left(\frac{\partial h}{\partial r}\right) = \pi kr \left(\frac{\partial h^2}{\partial r}\right), \tag{652}$$

где $\omega = 2\pi rh$ — площадь живого сечения определяется как боковая поверхность цилиндра с радиусом основания r и высотой h.

Вставляя сюда h^2 из (651), получим

$$Q = \pi k \frac{H^2 - h_0^2}{\ln \frac{R}{r_0}}. \tag{653}$$

Внося (653) в уравнение (651), найдем уравнение линии депрессии в более простом виде:

$$h^2 = \frac{Q}{\pi k} \ln \frac{r}{r_0} + h_0^2.$$

При поглощающем (абсорбирующем) колодце, с помощью которого сбрасывают воду в водоносный слой, глубина в колодце h_0 будет больше мощности H водоносного пласта (фиг. 321), что обусловливает вогнутость кривой депрессии.

Применяя к решению этой задачи тот же метод, мы должны будем в формуле Дюпюи (652) заменить только знак + знаком —, так как положительным значениям ∂r будут соответствовать отрицательные для h. Это в свою очередь приведет к тому, что в формуле (653) знаки у H и h_0 также переменятся и мы будем иметь

$$Q = \pi k \frac{h_0^2 - H^2}{\ln \frac{R}{r_0}}. \tag{654}$$

Весьма часто на практике строят так называемые несовершенные или неполные колодцы, у которых дно не доходит до подстилающего слоя (фиг. 322). Форхгеймер на основании ряда опытов с несовершенными колодцами предложил такую формулу:

$$\frac{H^2 - T^2}{H^2 - h_0^2} = \sqrt{\frac{T}{h_0' + 0{,}5r_0}} \sqrt[4]{\frac{T}{2T - h'}}, \tag{655}$$

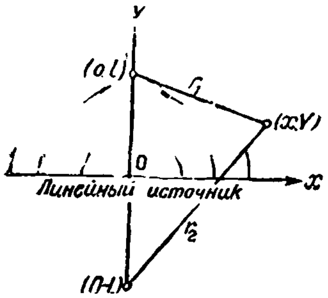
где H — мощность водоносного пласта; T — расстояние от уровня воды в колодце до подстилающего слоя; h_0' — глубина воды в колодце; r_0 — радиус колодца; h_0 — глубина воды в фиктивном совершенном колодце радиуса r_0 и с дебитом, равным дебиту рассматриваемого несовершенного колодца.

При достаточно малом r_0 по сравнению с глубиной в колодце h'_0 можно принять $r_0 = 0$.

Формула (655) позволяет определить величину h_0 и далее пользоваться расчетными уравнениями совершенного колодца.

3°. Приток к артезианскому колодцу от линейного источника. Это — случай артезианской скважины, питаемой из реки или канала, или случай подземной дрены, отводящей воду с заболоченной атмосферными осадками местности. Внешней границей здесь вместо окружности является прямая.

Направим ось X вдоль линейного источника, принимаемого нами за границу области питания колодца или дрены, причем давление на этой границе будем считать постоянным и равным p_R. Ось Y проведем через колодец с радиусом r_0 и находящийся на расстоянии l от линейного источника (фиг. 323).



Фиг. 323

Тогда в силу (645) давление в точке, находящейся на расстоянии r от колодца, будет равно

$$p=C_0 \ln \frac{r}{r_0}+p_0, \tag{656}$$

где C_0 пока будем считать неизвестной константой. Для выявления этой константы применим метод так называемых зеркальных отображений.

Возьмем в точке $(-l,\ O)$ зеркальное отображение этого колодца относительно оси X и примем его за мнимый колодец, для которого (649) принимает отрицательное значение.

Результирующее давление в точке $(x,\ y)$ от присутствия действительного и мнимого колодца на основании принципа наложения потоков будет

$$p=C_0 \ln \frac{r_1}{r_0}+p_0-C_0 \ln \frac{r_2}{r_0}-p_0=C_0 \ln \frac{r_1}{r_2}. \tag{657}$$

Для того чтобы при $r_1=r_2=l$ давление p на границе не обращалось в нуль, а принимало значение p_R, необходимо, очевидно, положить

$$p=C_0 \ln \frac{r_1}{r_2}+p_R. \tag{658}$$

Чтобы определить теперь величину C_0, положим $r_1=r_0$, тогда $r_2 \approx 2l$, и мы найдем

$$C_0=\frac{p_0-p_R}{\ln \frac{r_0}{2l}}.$$

Тогда

$$p=\frac{p_0-p_R}{\ln \frac{r_0}{2l}} \ln \frac{r_1}{r_2}+p_R=$$

$$=\frac{1}{2} \frac{p_R-p_0}{\ln \frac{2l}{r_0}} \ln \frac{x^2+(y-l)^2}{x^2+(y+l)^2}+p_R. \tag{659}$$

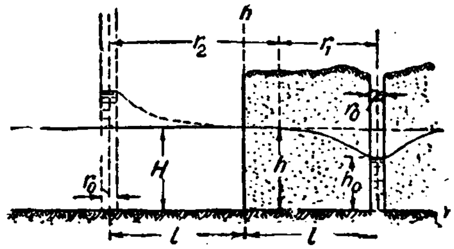
Дебит колодца или дрены, равный дебиту линейного источника, будет равен

$$q=-\frac{k}{\gamma} \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{y=0} dx=\frac{2kl(p_R-p_0)}{\gamma \ln \frac{2l}{r_0}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+l^2}=$$

$$=\frac{2\pi k(p_R-p_0)}{\gamma \ln \frac{2l}{r_0}}=\frac{2\pi k \Delta H}{\ln \frac{2l}{r_0}}, \tag{660}$$

т. е. дебит колодца, питаемого рекой, пропорционален разности уровней в реке и колодце $\Delta H=\frac{p_R-p_0}{\gamma}$ и обратно пропорционален расстоянию l колодца от реки (фиг. 323).

4°. Грунтовый колодец, питаемый рекой. Рассмотрим приток безнапорных грунтовых вод к колодцу, расположенному близ реки (фиг. 324), дно которой служит продолжением горизонтального подстилающего слоя, до которого доведен колодец. Пусть мощность однородного водоносного слоя везде одинакова и равна глубине воды в реке H. Тогда, заменив реку линейным источником, расположенным на линии пересечения вертикальной плоскости, проходящей через линию уреза воды, с плоскостью подстилающего слоя и приняв эту линию за ось X, а за ось Y перпендикулярную к ней линию, пересекающую ось колодца, в точке $(o,\ l)$ мы будем, очевидно, иметь картину, аналогичную (фиг. 323) случаю артезианского колодца, питаемого линейным источником. Заменяя p через h^2 и направив ось h вертикально вверх, мы, по формуле (659), получим уравнение депрессионной поверхности:


Фиг. 324

$$h^2=\frac{h_0^2-H^2}{\ln \frac{r_0}{2l}} \ln \frac{r_1}{r_2}+H^2, \tag{661}$$

где h_0 — глубина воды в колодце; H — глубина воды в реке; r_0 — радиус колодца; l — расстояние колодца от уреза воды; r_1 и r_2 — расстояния от оси колодца и соответственно его зеркального отображения относительно оси X до произвольной точки в плоскости XOY с соответствующей глубиной h над ней.

Описывая из центра колодца окружность радиуса r_1 и строя на ней цилиндр высотой h, найдем по формуле Дюпюи расход грунтовой воды, протекающей через стенки цилиндра:

$$Q=2\pi r_1 k h\left|\frac{\partial h}{\partial r_1}\right|=\pi r_1 k\left|\frac{\partial h^2}{\partial r_1}\right|.$$

Вставляя сюда h^2 из (661), находим уравнение депрессионной поверхности в виде

$$h^2=\frac{Q}{\pi k} \ln \frac{r_1}{r_2}+H^2, \tag{662}$$

так как

$$Q=k\pi r_1\left|\frac{\partial h^2}{\partial r_1}\right|=k\pi \frac{h_0^2-H^2}{\ln \frac{r_0}{2l}}.$$

Полагая $r_1=r_0$, где r_0 — радиус колодца, а $r_2=2l-r_0$ и имея в виду, что при этом

$h = h_0$ — глубине воды в колодце, мы найдем формулу для колодца, питаемого рекой:

$$h_0^2 - H^2 = \frac{Q}{\pi k} \ln \frac{r_0}{2l\left(1 - \frac{r_0}{2l}\right)}. \qquad (663)$$

Если пренебречь величиной r_0, очень малой обычно по сравнению с двойным расстоянием от реки $2l$, то

$$h_0^2 - H^2 = \frac{Q}{\pi k} \ln \frac{r_0}{2l} \qquad (664)$$

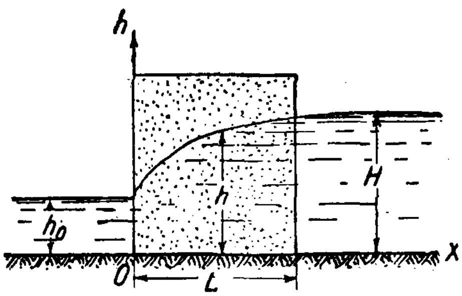
или в десятичных логарифмах

$$Q = 1{,}36k \frac{h_0^2 - H^2}{\lg \frac{r_0}{2l}}. \qquad (665)$$

Последнее уравнение при заданном h_0 и может служить для определения дебита колодца.

§ 202. Фильтрация через тело перемычки

Рассмотрим фильтрацию через тело перемычки (фиг. 325). Направим ось X вдоль горизонтального подстилающего непроницаемого слоя. Ось Oh



Фиг. 325

направим вертикально вверх. Тогда уравнение (634) дает

$$\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} = 0.$$

Интегрируя его, получаем

$$h^2 = C_1 x + C_2. \qquad (666)$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 определяем из граничных условий:

$$h = h_0 \text{ при } x = 0,$$
$$h = H \text{ при } x = L,$$

что дает

$$h_0^2 = C_2,$$
$$H^2 = C_1 L + C_2.$$

Определяя отсюда C_1 и C_2 и внося в (666), найдем

$$h^2 = h_0^2 + \frac{H^2 - h_0^2}{L} x. \qquad (667)$$

Единичный расход q притекающей воды при этом будет

$$q_3 = kh \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{k}{2} \frac{\partial h^2}{\partial x}.$$

Внося сюда h^2 по формуле (667), будем иметь

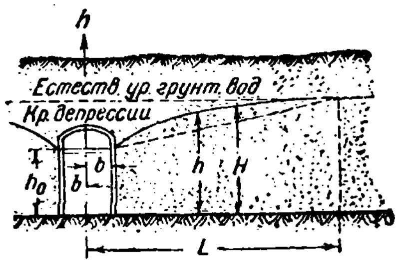
$$q = \frac{k\left(H^2 - h_0^2\right)}{2L}. \qquad (668)$$

В силу (668) формулу кривой депрессии (667) можно записать в виде

$$h^2 - h_0^2 = \frac{2qx}{k}. \qquad (669)$$

§ 203. Водосборная галерея

Пользуясь формулой (669), найдем формулу притока грунтовых вод к водосборной галерее прямоугольного сечения, дно которой доходит до горизонтального водонепроницаемого подстилающего слоя (фиг. 326). Если обозначить через q односторонний приток к галерее, приходящийся



Фиг. 326

на единицу ее длины, а ось h поместить посредине прямоугольного сечения галереи и обозначить ширину последней через $2b$, то по известным формулам преобразования координат $h = h'$, $x' = x + b$ формула (669) примет вид

$$(h')^2 - h_0^2 = \frac{2q(x' - b)}{k}.$$

При $x' = L$ и $h' = H$ получим искомую формулу:

$$q = \frac{k\left(H^2 - h_0^2\right)}{2(L - b)}. \qquad (670)$$

Б. МЕТОД СОПРЯЖЕННЫХ ФУНКЦИЙ

§ 204. Основные положения

Метод сопряженных функций основан на одном важном свойстве действительной и мнимой части аналитической функции $F(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$.

Как известно из теории функции комплексного переменного[1], любую аналитическую функцию комплексного переменного всегда можно разложить на действительную и мнимую части:

$$F(z) = F(x + iy) = F_1(x, y) + iF_2(x, y).$$

[1] См. И. И. Привалов, Введение в теорию функций комплексной переменной.

При этом действительная часть $F_1(x, y)$ и коэфициент $F_2(x, y)$ при мнимой части являются сопряженными функциями, т. е. удовлетворяют так называемым условиям Коши-Римана, а именно

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}=\frac{\partial F_2}{\partial y}; \quad \frac{\partial F_1}{\partial y}=-\frac{\partial F_2}{\partial x}. \qquad (671)$$

Диференцируя первое из записанных условий по x, а второе по y и складывая результаты, найдем, что

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2}=0. \qquad (672')$$

Диференцируя же первое из уравнений (671) по y, а второе по x и отнимая результаты, получим

$$\frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2}=0. \qquad (672'')$$

Это значит, что действительная часть F_1 и коэфициент F_2 при мнимой части аналитической функции удовлетворяют уравнению Лапласа и являются функциями гармоническими или потенциальными.

Сравнивая уравнения (672) с (629), приходим к заключению, что между действительной частью и коэфициентом мнимой части аналитической функции комплексного переменного существует точно такая же связь, как между функцией потенциала скоростей и функцией тока при плоском потенциальном движении жидкости.

Следовательно, можно утверждать, что всякая аналитическая функция комплексного переменного характеризует какую-то форму плоского потенциального движения жидкости в виде гидродинамической сетки.

При этом, поскольку F_1 и F_2, так же как и Φ и Ψ, являются функциями сопряженными, то каждая аналитическая функция комплексного переменного, приводя к одной гидродинамической сетке, отображает две схемы плоского потенциального движения жидкости.

Одна схема получится, если действительную часть $F_1(x,y)$ комплексного переменного $z=f(x+iy)$ отождествлять с функцией потенциала скоростей $\Phi(x,y)$, а компонент $F_2(x,y)$ при мнимой части — с функцией тока $\Psi(x,y)$.

Вторая схема движения получится при обратной трактовке вопроса.

Устанавливая, каким пограничным условиям удовлетворяет та или другая схема, можно определить, какому случаю потенциального движения жидкости соответствует рассматриваемая сетка.

При этом, так как фиктивная жидкость, моделирующая грунтовый поток, не имеет внутреннего трения, то любую из линий тока $\Psi=\text{const}$ можно принимать за обтекаемую граничную стенку и любую эквипотенциальную линию $\Phi=\text{const}$ можно принять за граничную с постоянным давлением.

Практическое использование изложенного метода затрудняется следующим обстоятельством.

Имея какую-либо аналитическую функцию комплексного переменного и разложив ее на действительную и мнимую части, легко определить уравнения потенциала скоростей и линии токов и, следовательно, установить всю картину движения и условия на границах.

Обратная же задача — найти такую аналитическую функцию, которая определяла бы движение жидкости применительно к заданным пограничным условиям — представляет непреодолимые трудности.

Поэтому целесообразно иметь возможно большее количество аналитических функций, разложенных на свои действительные и мнимые части, и построить для них гидродинамические сетки с тем, чтобы среди имеющихся готовых схем подбирать такие, которые отражают заданные граничные условия.

Рассмотрим несколько аналитических функций комплексного переменного, приводящих к интересным для прикладного использования схемам движения плоского потенциального потока.

§ 205. Конечный линейный источник

Пусть имеем аналитическую функцию комплексного переменного

$$F(z)=\operatorname{arch}\frac{x+iy}{c}.$$

После разделения на действительную и мнимую части эта функция должна будет принять вид

$$F(z)=F_1+iF_2=\Phi+i\Psi.$$

Запишем заданную аналитическую функцию в виде

$$\Phi+i\Psi=\operatorname{arch}\frac{x+iy}{c}$$

и будем находить значения Φ и Ψ.

Имеем

$$x+iy=c\operatorname{ch}(\Phi+i\Psi)$$

или (учитывая, что $\operatorname{ch}\Phi=\cos i\Phi$, а $\sin i\Phi=i\operatorname{sh}\Phi$),

$$x+iy=c\cos[i(\Phi+i\Psi)]=c\cos(i\Phi-\Psi)=$$
$$=c(\cos i\Phi\cos\Psi+\sin i\Phi\sin\Psi)=c\operatorname{ch}\Phi\cos\Psi+$$
$$+ci\operatorname{sh}\Phi\sin\Psi.$$

Сравнивая действительные и мнимые части, получаем

$$x=c\operatorname{ch}\Phi\cos\Psi,$$
$$y=c\operatorname{sh}\Phi\sin\Psi,$$

откуда имеем

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{(c\,\mathrm{ch}\,\Phi)^2}+\frac{y^2}{(c\,\mathrm{sh}\,\Phi)^2}=1,\\ \frac{x^2}{(c\cos\Psi)^2}-\frac{y^2}{(c\sin\Psi)^2}=1.\end{aligned}\right\} \qquad (673)$$

Уравнения эти показывают, что линии равного потенциала $\Phi=\mathrm{const}$ являются конфокальными эллипсами с фокусами в точках $x=\pm c$ и с полуосями $a_\Phi=c\,\mathrm{ch}\,\Phi$ и $b_\Phi=c\,\mathrm{sh}\,\Phi$, а линии токов $\Psi=\mathrm{const}$ — конфокальные гиперболы с полуосями $a_\Psi=c\cos\Psi$ и $b_\Psi=c\sin\Psi$.

Теперь определим значения Φ и Ψ по отдельности.

Учитывая, что $\mathrm{ch}^2\Phi-\mathrm{sh}^2\Phi=1$, перепишем первое уравнение (673) в таком виде:

$$c^2\mathrm{ch}^4\Phi-(x^2+y^2+c^2)\,\mathrm{ch}^2\Phi+x^2=0,$$

откуда имеем

$$\mathrm{ch}\,\Phi=\left[\frac{(x^2+y^2+c^2)+\sqrt{(x^2+y^2+c^2)^2-4x^2c^2}}{2c^2}\right]^{\frac{1}{2}}=A^1 \qquad (674)$$

или

$$\Phi=\mathrm{arch}\,A. \qquad (675)$$

Определить Φ можно непосредственно и по полуосям эллипсов.

Из самого определения осей следует

$$(c\,\mathrm{ch}\,\Phi)^2+(c\,\mathrm{sh}\,\Phi)^2=a^2+b^2,$$

откуда

$$c^2(\mathrm{ch}^2\Phi+\mathrm{sh}^2\Phi)=c^2\mathrm{ch}\,2\Phi=a^2+b^2$$

или

$$\Phi=\frac{1}{2}\,\mathrm{arch}\left(\frac{2a^2}{c^2}-1\right). \qquad (676)$$

Для определения Ψ перепишем второе из уравнений (673) так:

$$c^2\cos^4\Psi-(x^2+y^2+c^2)\cos^2\Psi+x^2=0,$$

откуда получим

$$\cos\Psi=A \qquad (677)$$

или

$$\Psi=\arccos A,$$

где A выражается уравнением (674), но со знаком — перед радикалом, так как $\cos\Psi\leqslant 1$.

Функцию тока можно определить также непосредственно по полуосям.

Имеем

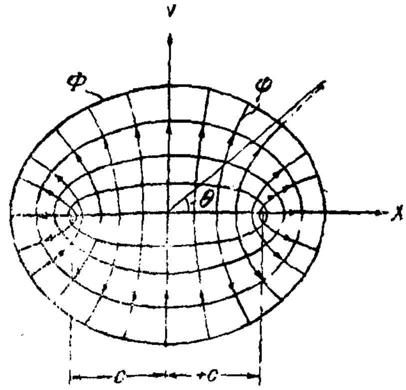
$$\frac{b}{a}=\frac{c\sin\Psi}{c\cos\Psi}=\mathrm{tg}\,\Psi,$$

откуда

$$\Psi=\mathrm{arctg}\,\frac{b}{a}=\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{c^2}{a^2}-1}. \qquad (678)$$

[1] Знак + перед радикалом взят потому, что $\mathrm{ch}\,\Phi=\frac{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}{2}\geqslant 1$.

Гидродинамическая сетка, построенная по уравнениям (673), приведена на фиг. 327.



Фиг. 327

Физический смысл этой сетки заключается в том, что она показывает распределение потенциала и линий тока в системе, ограниченной с одной стороны внешним эллиптическим контуром

$$\frac{x^2}{a_1}+\frac{y^2}{b_1}=1$$

с равномерным на нем давлением p_1, а с другой стороны — внутренним эллиптическим контуром

$$\frac{x^2}{a_0}+\frac{y^2}{b_0}=1$$

также с равномерным на нем давлением p_0.

Внутренние эллиптические контуры по мере приближения к оси OX сужаются (полуось b уменьшается). При $y=0$ полуось $b=0$, полуось $a=c$ и эллиптический контур превращается в прямую линию длиной $2c$.

Рассматривая отрезок $2c$ на гидродинамической сетке (фиг. 327), приходим к заключению, что он представляет собой линейный источник, от которого в обе стороны жидкость движется вдоль линий тока нормально к эквипотенциалям.

На эквипотенциали, совпадающей с источником, имеем $b=0$, $a=c$ и согласно (676)

$$2\Phi=\mathrm{arch}\,1,$$

а так как

$$\mathrm{arch}\,\alpha=\ln\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}\right),$$

то имеем вдоль источника (при $\alpha=1$)

$$\Phi=0.$$

Так как эквипотенциали вообще пересекают ось OX, то, применяя уравнение (675) для точек пересечения ($y=0$), получим $\Phi=\mathrm{arch}\frac{x}{c}$, ибо согласно (674) при $y=0$ имеем $A=\frac{x}{c}$.

Рассмотрим, наконец, линии тока, расходящиеся из источника. Каждая линия тока вообще определяется уравнением (677), из которого следует, что Ψ численно равно углу, тангенс которого будет $\frac{b}{a}$.

Обращаясь к фиг. 327, заключаем, что Ψ будет равно углу θ между осью абсцисс и асимптотой соответствующей гиперболы.

Так как при переходе по линии тока от одного конца источника до другого угол θ изменяется от 0 до π, то и линии тока будут иметь все промежуточные значения от $\Psi=0$ до $\Psi=\pi$. Тогда дебит источника в обе стороны от него составит

$$q=2\frac{k}{\gamma}\pi.$$

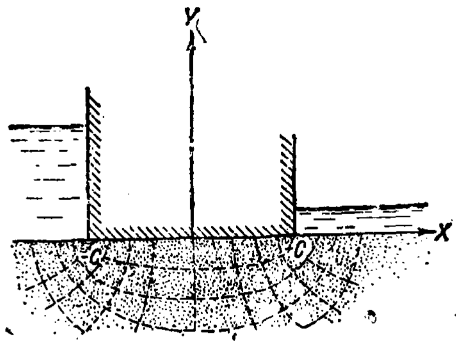
Таким образом взятая выше аналитическая функция $F(z)$ вскрыла картину линейного источника конечной длины $2c$ с постоянным вдоль него давлением, питающего пласт неограниченных размеров.

§ 206. Плоский флютбет на бесконечно глубоком водопроницаемом основании

Как уже указывалось выше, гидродинамическая сетка, вообще говоря, отражает две схемы потенциального движения жидкости в зависимости от того, какое семейство линий рассматривается как линии равного потенциала скоростей и какое — как линии тока.

Выясним, какое течение отобразит рассмотренная выше гидродинамическая сетка, если на ней принять прежние эквипотенциали за линии тока и, наоборот, прежние линии тока считать эквипотенциалями.

Анализ фиг. 328 показывает, что налицо будет картина движения грунтового потока под плоским флютбетом на бесконечно глубоком водопроницаемом основании.



Фиг. 328

Все уравнения предыдущего параграфа для Φ и Ψ остаются в силе при замене обозначения Φ на Ψ и наоборот. Фокусное расстояние $2c$ при этом соответствует ширине флютбета

$$2c=B.$$

При упомянутой замене основание флютбета соответствует линии тока $\Psi=0$, а потенциал Φ вдоль флютбета будет изменяться от $\Phi=\pi$ до $\Phi=0$.

Давление на флютбет (т. е. при $y=0$) выразится формулой

$$p=\frac{\Delta p}{\pi}\arccos\frac{x}{c}+p_1, \tag{679}$$

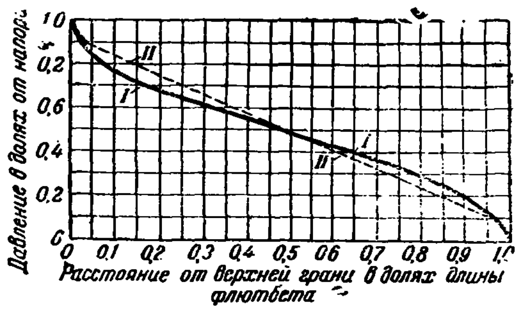
где $\Delta p=p_2-p_1$ — разность давлений в верхнем и нижнем бьефах.

Полное давление на флютбет со стороны фильтрационного потока будет равно

$$P=\int_{-c}^{+c}\left(\frac{\Delta p}{\pi}\arccos\frac{x}{c}+p_1\right)dx=c\Delta p+2p_1c=$$

$$=(p_2+p_1)c=\frac{1}{2}(p_2+p_1)B. \tag{680}$$

На фиг. 329 даны кривые распределения давления на плоский флютбет при бесконечно глубоком водопроницаемом слое и при глубинах,



Фиг. 329

равных B (кривая I) и $\frac{1}{5}B$ (кривая II). Как видим, при глубинах пласта, не меньших ширины флютбета, дальнейшее увеличение глубины не влияет на распределение давления и флютбет можно рассчитывать на основе приведенных формул.

В. МЕТОД КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

§ 207. Общие предпосылки

Решение уравнения Лапласа при расчетах фильтрации под сооружениями осложнено заданными граничными условиями.

Сложность заключается именно в том, что как сама искомая функция, так и ее производная должны удовлетворять различным условиям даже на одной и той же прямолинейной границе области фильтрации.

Так, например, в рассмотренной выше задаче о плоском флютбете по сути находилось такое распределение потенциала, которое должно удовлетворять нескольким требованиям по оси OX, а именно:

а) при $x<b$ потенциал должен иметь одно постоянное значение $\Phi=\Phi_1$;

б) при $x>b$ потенциал должен иметь другое постоянное значение $\Phi=\Phi_2$;

в) при $|x|<b$ ось OX должна соответствовать линии тока $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}=0\right)$.

Чтобы преодолеть эти затруднения, принципиально было бы целесообразно преобразовать заданную область фильтрации в более простую, у которой на каждой из границ не будет по несколько условий.

Если при таком преобразовании удалось бы обеспечить соответствие пограничных контуров в соответствующих частях обеих областей (заданной и более простой, в которую заданная преобразуется) и при этом сохранить инвариантность уравнения Лапласа, то задача была бы значительно облегчена.

Такое преобразование одной какой-либо области с заданными границами в другую может быть произведено, пользуясь некоторыми важными свойствами аналитических функций.

Отметим следующие свойства аналитических функций, являющиеся основой рассматриваемого метода[1].

1. Всякое преобразование при помощи сопряженных функций комплексного переменного оставляет уравнение Лапласа инвариантным.

Это значит, что если область комплексного переменного $z=x+iy$, для которой имеется

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=0,$$

преобразуем в другую область комплексного переменного $\zeta=\xi+i\eta=f(z)$, где $\xi=f_1(x,y)$ и $\eta=f_2(x,y)$ суть сопряженные функции, то будем иметь

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial \eta^2}=0.$$

2. Преобразование какой-либо области (изображения на ней) при помощи аналитической функции приводит к получению новой области (отображенного изображения на ней), подобной с первой в бесконечно малых элементах.

В результате при таких преобразованиях углы между какими-либо отрезками на отображаемой области остаются неизменными и после отображения этих отрезков на новую область, хотя форма самых отрезков изменится.

Так, например, прямоугольная сетка в результате конформного отображения может преобразоваться в криволинейную сетку, но при этом обязательно сохранится ортогональность сетки.

Такие преобразования называются конформными.

3. Всякая односвязная область может быть отображена конформно на полуплоскость[2]. При этом для определенности отображения необходимо, чтобы трем точкам, выбранным на контуре первой области, соответствовали на контуре второй области три определенные точки, расположенные в том же порядке[3].

Для теории фильтрации под гидротехническими сооружениями существенно важным является конформное отображение прямолинейного многоугольника на положительную полуплоскость (или наоборот).

Такое преобразование осуществляется при помощи так называемой формулы Шварца-Кристофеля

$$z=A\int_0^{\zeta}(\zeta-\zeta_1)^{\alpha_1-1}(\zeta-\zeta_2)^{\alpha_2-1}(\zeta-\zeta_3)^{\alpha_3-1}\ldots$$

$$\ldots(\zeta-\zeta_{n-1})^{\alpha_{n-1}-1}(\zeta-\zeta_n)^{\alpha_n-1}\,d\zeta+B. \quad (681)^*$$

Эта формула позволяет прямолинейный многоугольник с вершинами $z_1, z_2, z_3\ldots z_{n-1}, z_n$ в плоскости комплексного переменного $z=x+iy$ и с внутренними углами $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi,\ldots, \alpha_n\pi$ отобразить конформно на положительную полуплоскость $\zeta=\eta+i\xi$ так, что вершинам многоугольника будут соответствовать точки $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ на вещественной оси $O\eta$.

Постоянные величины A и B в формуле Шварца-Кристофеля зависят от размеров и ориентации многоугольника.

Область фильтрации в гидротехнических сооружениях в основном определяется подземным контуром сооружения в виде некоторого прямолинейного полигона.

Поэтому применение метода комформных отображений в гидротехнике состоит в том, чтобы преобразовать заданный сложный прямолинейный полигон в более простую область, для которой решение гидродинамической задачи заранее известно.

Изученной простой областью фильтрации является, например, круг. На круге концентрические окружности, описанные из центра, будут эквипотенциали, а радиусы-векторы, исходящие из этого центра, будут линии тока.

Простой изученной областью является также прямоугольник, для которого линии равного напора дают семейство прямых, параллельных одной из осей координат, а линии тока — семейство прямых, нормальное к первому.

Если изучаемая область движения не может быть преобразована непосредственно в прямоугольник, то ее отображают предварительно на некоторую вспомогательную область (в частно-

---

[1] Рассматриваемые свойства аналитических функций приводятся здесь без доказательств. Затрагиваемые вопросы детально изложены в капитальном и блестящем труде акад. Н. Н. Павловского „Теория движения грунтовых вод под гидротехническими сооружениями", 1922.

Основы конформных отображений достаточно просто изложены в работе В. С. Софронова: „Конформные преобразования и применение их в гидротехнике", 1933.

[2] Полуплоскостью называют область комплексного переменного, расположенного только по одну сторону относительно координатной оси.

[3] Одна из контурных точек может быть в каждой из областей заменена внутренней точкой.

* Если одна из вершин полигона должна отвечать на полуплоскости бесконечно удаленной точке, то число сомножителей в формуле будет на единицу меньше.

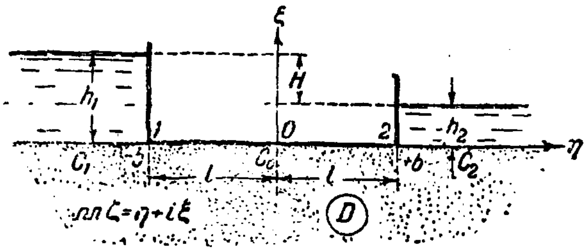
сти на полуплоскость), а уже с последней переходят на прямоугольник.

Приведенная выше формула Шварца-Кристофеля принципиально и решает такую задачу преобразования многоугольников на полуплоскость и наоборот.

Ограничиваясь приведенной краткой справкой о сущности метода конформных отображений, применим этот метод к конкретным случаям.

§ 208. Плоский флютбет без шпунта на бесконечном водопроницаемом слое

На фиг. 330 показана область фильтрации грунтовых вод через бесконечный водопроницаемый слой под плоским (непроницаемым) флютбетом.



Фиг. 330

Обозначим:

$2b$ — длина флютбета между крайними его точками 1 и 2;

h_1 и h_2 — пьезометрические высоты, отсчитываемые от плоскости флютбета;

$H=h_1-h_2$ — напор на сооружении;

C_1 — проницаемый контур, через который грунтовый поток поступает в рассматриваемую область;

C_2 — проницаемый контур, через который поток выходит из рассматриваемой области;

C_0 — непроницаемый контур подземной части самого сооружения;

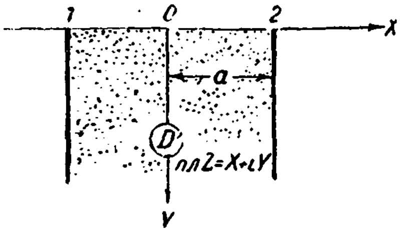
C_3 — непроницаемый контур подстилающего пласта[1].

Пограничные условия в рассматриваемом случае заключаются в том, что контуры C_1 и C_2 должны быть линиями равного потенциала с постоянным для каждого из них давлением, а контур C_0 должен совпадать с линией тока.

Рассматриваемая на фиг. 330 область течения представляет собой полуплоскость. Будем считать эту полуплоскость областью D комплексного переменного $\zeta=\eta+i\xi$ с началом координат в середине флютбета.

Для выяснения гидромеханических элементов потока преобразуем заданную область движения (полуплоскость) в прямоугольник, пользуясь формулой Шварца-Кристофеля (681). Прямоугольник будем рассматривать как область D' комплексного переменного $z=x+iy$ (фиг. 331)[2].

В рассматриваемом случае зададимся соответствием точек 1 и 2 в области D (фиг. 330) одноименно обозначенным точкам области D' (фиг. 331). Кроме того примем, что имеется соответствие точек, лежащих в обеих областях на бесконечности, для чего прямоугольник возьмем в виде бесконечной полуполосы.



Фиг. 331

Внутренние углы области D' при точках 1 и 2 равны по $\frac{1}{2}\pi$ каждый и потому, применительно к формуле Шварца-Кристофеля, имеем

$$\alpha_1=\alpha_2=\frac{1}{2}.$$

Тогда формула (681) в данных условиях примет вид

$$z=A\int_0^{\zeta}(\zeta-\zeta_1)^{-\frac{1}{2}}(\zeta-\zeta_2)^{-\frac{1}{2}}d\zeta+B. \qquad (682)$$

Обращаясь к фиг. 330, легко установить значения ζ для точек 1 и 2, а именно

$$\zeta_1=\eta_1+i\xi_1=b,$$
$$\zeta_2=\eta_2+i\xi_2=-b.$$

Подставляя значения ζ_1 и ζ_2 в формулу (682), получим

$$z=A\int_0^{\zeta}\frac{d\zeta}{b\sqrt{\left(\frac{\zeta}{b}\right)^2-1}}+B=A'\int_0^{\zeta}\frac{d\zeta}{\sqrt{1-\left(\frac{\zeta}{b}\right)^2}}+B=$$
$$=A'\arcsin\frac{\zeta}{b}+B. \qquad (683)$$

Это уравнение справедливо для любых пар соответствующих точек обеих областей.

Применив его для точек, расположенных в соответствующих началах координат, получим

$$0=A'\arcsin\left(\frac{0}{b}\right)+B$$

и, следовательно, $B=0$.

Что касается величины A', то она оказывает влияние только на масштаб прямоугольника, не имеющий в данном случае значения, и потому для простоты примем $A'=1$.

---

[1] Контур C_3 на фиг. 330 не показан как находящийся на бесконечности.

[2] Согласно теореме Шварца-Кристофеля для определенности отображения многоугольника на полуплоскость (или наоборот) необходимо обеспечить соответствие трех отдельных точек области D трем точкам области D', расположенным в том же порядке.

Тогда получим окончательно уравнения для перевода точек одной области в другую вместо (683) в таком виде:

или

$$\left.\begin{aligned} z &= \arc \sin \frac{\zeta}{b}, \\ \zeta &= b \sin z. \end{aligned}\right\} \qquad (684)$$

Теперь легко установить ширину отображенного прямоугольника, применив уравнения (684) к угловым точкам прямоугольника.

Угловая точка 1 в области D характеризуется, как это уже отмечалось выше, величиной $\zeta_1 = -b$, а соответствующая ей точка 1 в области D' — величиной $z_1 = \eta_1 + i\xi_1 = -a$ (фиг. 331).

Поэтому имеем

$$\zeta_1 = b \sin z_1 \text{ или } b = b \sin a,$$

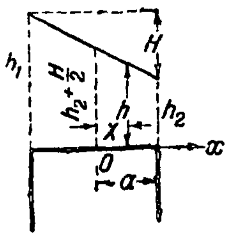
откуда находим, что полуширина прямоугольника

$$a = \frac{\pi}{2}$$

и что значения комплексного числа z по контуру C_0 области D' будут изменяться от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$.

Таким образом область фильтрации D конформно преобразована в полуполосу шириной π. Пограничные условия в области D' оставляем на каждом контуре те же, что и в области D. При этом на каждой из границ новой области будет только по одному условию.

В результате произведенного конформного преобразования можно изучать интересующие гидродинамические элементы на простой области D' и получаемые результаты относить к области D простым переводом комплексных величин z в комплексные величины ζ, пользуясь формулой (684).



Фиг. 332.

Для примера рассмотрим расчет давления грунтового потока на флютбет или иначе распределение падения напора вдоль флютбета.

Для области D' поставленный вопрос решается весьма просто применительно к пограничным условиям.

Легко видеть (фиг. 332), что напор в любой точке, определяемой абсциссой x, будет равен

$$h = h_2 + H\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2a}\right).$$

Подставляя значения $2a = \pi$ и $x = \arc \sin \frac{\eta}{b}$ согласно (684), так как на контуре C_0 имеем $z = x$ и $\zeta = \eta$, получим для области D:

$$h = h_2 + \frac{H}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \arc \sin \frac{\eta}{b}\right) = h_2 + \\ + \frac{H}{\pi} \arc \cos \frac{\eta}{b}, \qquad (685)$$

т. е. результат аналогичный (679).

Далее для выявления гидродинамической сетки в области D установим связь между системами координат x, y области D' и η, ξ области D.

Согласно (684) имеем $\zeta = b \sin z$ или $\eta + i\xi = b \sin(x + iy) = b(\sin x \cos iy + \cos x \sin iy)$ или, учитывая, что

$$\cos iy = \operatorname{ch} y, \text{ а } \sin iy = i \operatorname{sh} y,$$
$$\eta + i\xi = b(\sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y).$$

Приравнивая в последнем выражении действительные части и коэфициенты при мнимых частях, найдем

$$\eta = b \sin x \operatorname{ch} y,$$
$$\xi = b \cos x \operatorname{sh} y.$$

Наконец, возводя полученные уравнения в квадрат и учитывая, что

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \text{ а } \operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y = 1,$$

получим

$$\frac{\eta^2}{(b \operatorname{ch} y)^2} + \frac{\xi^2}{(b \operatorname{sh} y)^2} = 1, \qquad (686)$$

$$\frac{\eta^2}{(b \sin x)^2} - \frac{\xi^2}{(b \cos x)^2} = 1. \qquad (687)$$

Уравнение (686) при $y = \text{const}$ представляет собой эллипс с полуосями $b \operatorname{ch} y$ и $b \operatorname{sh} y$. Но $y = \text{const}$ это — уравнение линий тока в области D' и, следовательно (686) является уравнением линий тока в области D.

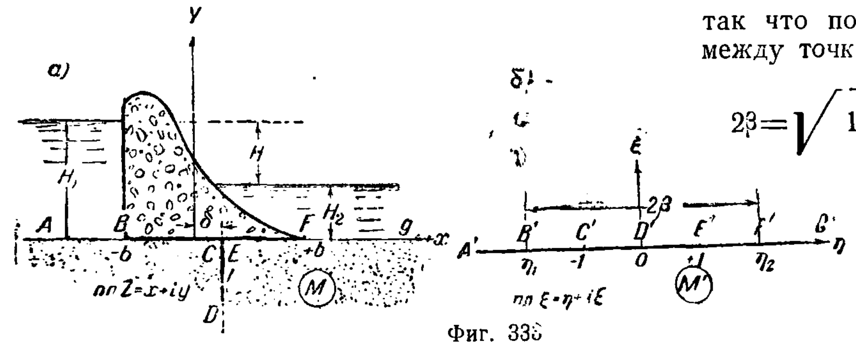
Точно так же приходим к заключению, что уравнениям равного напора $x = \text{const}$ в области D' соответствуют уравнения (687) в области D, дающие эквипотенциали в виде конфокальных гипербол с полуосями $b \sin x$ и $b \cos x$.

Рассмотренный пример показывает, как при помощи метода конформных отображений мы получаем прямое решение вопроса о фильтрации грунтовых вод под плоским флютбетом.

§ 209. Плоский флютбет со шпунтом при бесконечной глубине водопроницаемого слоя

Рассмотрим область фильтрации M для случая, изображенного на фиг. 333а, где шпунт длиной l расположен в общем случае асимметрично относительно ширины основания сооружения.

Область M в данном случае представляет собой многоугольник $ABCDEFGA$ со следующими внутренними углами: $\angle FED = \alpha_1 \pi = \frac{1}{2}\pi$;



Фиг. 335

$$\angle EDC=\alpha_2\pi=2\pi;\quad \angle DCB=\alpha_3\pi=\frac{1}{2}\pi;\ \angle BAG=0.$$

Рассматривая область M как плоскость комплексного переменного $z=x+iy$, отобразим ее на полуплоскость комплексного переменного $\zeta=\eta+i\xi$ (фиг. 335) так, чтобы вершины многоугольника расположились на вещественной оси $O\eta$.

Для определенности отображения установим следующее соответствие точек на контурах:

точка E многоугольника с $z=\delta$ должна отобразиться в точку E' полуплоскости с $\zeta=+1$, точка D многоугольника с $z=\delta-il$ должна отобразиться в точку D' полуплоскости с $\zeta=0$;

точка C многоугольника с $z=\delta$ должна отобразиться в точку C' полуплоскости с $\zeta=-1$.

Тогда согласно формуле Шварца-Кристофеля получим для отображения точек одной области в другую уравнения:

$$z=A\int\limits_0^\zeta\frac{d\zeta}{(\zeta-1)^{1/2}(\zeta-0)^{-1}(\zeta+1)^{1/2}}+B=A\int\limits_0^\zeta\frac{\zeta\,d\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}}+B=$$
$$=A\sqrt{\zeta^2-1}+B. \qquad (688)$$

Для определения постоянных A и B напишем последнее уравнение для точки E и D:

$$\delta=A\sqrt{1^2-1}+B \text{ или } B=\delta,$$
$$\delta-il=A\sqrt{0-1}+B=Ai+\delta \text{ или } A=-l.$$

Тогда уравнение (688) примет окончательно вид[1]:

$$z=\mp l\sqrt{\zeta_1^2-1}+\delta \qquad (689)$$

и будет давать отображение плоскости z на полуплоскость ζ.

В частности для крайних отображенных точек флютбета B' и F' будем иметь согласно (689)

$$\left.\begin{aligned}\eta_1&=-\sqrt{1+\left(\frac{b+\delta}{l}\right)^2},\\ \eta_2&=+\sqrt{1+\left(\frac{b-\delta}{l}\right)^2},\end{aligned}\right\} \qquad (690)$$

[1] Перед радикалом следует брать знак — при $\eta>1$ и знак + при $\eta<1$.

так что полная длина отображенного контура между точками B' и F' будет

$$2\beta=\sqrt{1+\left(\frac{b+\delta}{l}\right)^2}+\sqrt{1+\left(\frac{b-\delta}{l}\right)^2}. \qquad (690')$$

Относительно начала координат этот контур расположен несимметрично. Перенесем начало координат так, чтобы оно поместилось в середине между средними точками B' и F'.

Тогда относительно нового начала координаты точек отображенного контура будут выражаться известными из аналитической геометрии формулами

$$\eta'=\eta-\frac{\eta_1+\eta_2}{2} \text{ и } \xi'=\xi. \qquad (691)$$

Таким образом контур $BCDEF$ изучаемой области вытянулся в отрезок $B'F'$ длиной 2β на вещественной оси области M', симметрично расположенный относительно нового начала координат.

Задача, следовательно, свелась к расчету плоского флютбета без шпунта, уже рассмотренного выше.

Не повторяя известных уже нам преобразований плоского флютбета в прямоугольник, запишем аналогично (685) формулу ра:чета давления на флютбет в данном случае:

$$h=h_2+\frac{H}{\pi}\arccos\frac{\eta'}{\beta},$$

где β и η' определяются формулами (690) и (691).

Приведенными задачами, рассмотренными для выяснения сущности метода конформных отображений, мы и ограничимся. Как видно из изложенного, при несложных контурах подземной части гидротехнических сооружений решения получились достаточно простыми.

Всякие же усложнения подземного контура приводят к значительным усложнениям подинтегрального выражения в формуле Шварца-Кристофеля.

Так, например, задача на плоский флютбет без шпунта, но при конечной глубине водопроницаемого слоя уже приводит к решению в эллиптических интегралах.

Задачи же со сложным очертанием флютбетов приводят к непреодолимым трудностям при интегрировании уравнения Шварца-Кристофеля, во избежание которых применяют на практике иные методы решения вопроса, как, например, графическое построение гидродинамической сетки или методы аналогий с другими физическими явлениями.

§ 210. Графический метод решения задач на плоское движение грунтового потока

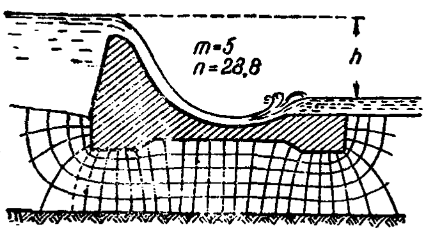
Среди многочисленных методов приближенного, неаналитического решения уравнения Лапласа[1] большим распространением в гидротехнических расчетах пользуется метод графического решения, заключающийся в геометрическом построении ортогональной сетки линий равных напоров и линий тока, удовлетворяющих заданным граничным условиям задачи.

Укажем прежде всего на прием такого решения, примененный Блазиусом и Рунге к построению гидродинамической сетки при истечении жидкости через водослив.

В основе этого приема лежат два основных свойства гидродинамической сетки: 1) ортогональность и 2) постоянство отношения отрезков, проведенных через середины сторон отдельных ячеек сетки. При построении сетки это отношение обычно принимается равным единице, т. е. сетка берется «квадратной».

На основе этих свойств можно построить сетку криволинейных квадратиков с точностью до 1%,[2] что вполне достаточно при решении практических задач по фильтрации.

Поясним прием построения гидродинамической сетки на приводимом примере флютбета с практическим очертанием подземного контура и конечной глубиной залегания водопроницаемого основания (фиг. 334).



Фиг. 334

За исходные данные здесь принимаются: 1) подземный контур сооружения — нулевая линия тока; 2) поверхность водонепроницаемого слоя, подстилающая зону движения грунтового потока — последняя, по порядку, линия тока; 3) поверхность грунта в нижнем бьефе — нулевая линия равного напора и, наконец, 4) поверхность грунта в верхнем бьефе — последняя, по порядку, линия равного напора.

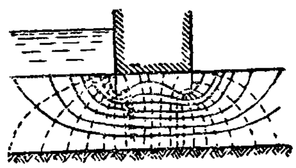
Необходимо при этом помнить, что линии равного напора составляют прямые углы с подземным контуром сооружения и с поверхностью водонепроницаемого слоя, а линии тока — с поверхностью грунта в верхнем и нижнем бьефах.

Построение сетки начинается с того, что подземный контур флютбета обводят ближайшей предполагаемой линией тока и образовавшуюся при этом полоску разбивают на криволинейные квадратики (в количестве 10—15). После этого квадратики проверяют и уточняют путем вписывания в них прямолинейных квадратиков, поставленных на «ребро» с вершинами в серединах сторон первоначальных квадратиков. Правильная форма таких квадратиков и служит проверкой соблюдения второго из вышеупомянутых свойств гидродинамической сетки.

Пользуясь построенными квадратиками, можно путем продолжения их сторон построить следующую полосу квадратиков, соответствующие стороны которых, если первая линия тока проведена была правильно, дадут следующую линию тока и т. д. Если последняя линия тока, полученная таким путем, совпадет с линией водонепроницаемого слоя, то задача считается решенной.

В противном случае построение начинают снова, учитывая при этом направление, в котором необходимо сдвинуть первую линию тока для того, чтобы сетка могла «вписаться» в зону движения грунтового потока.

На фиг. 335 приведен второй образец построенной таким путем гидродинамической сетки: случай фильтрации под плоским двухшпунтовым флютбетом[3].



Фиг. 335

Само собой разумеется, что описанный способ построения сетки требует известного опыта и интуиции, которые приобретаются в процессе самой работы, а также, как указал еще Максвелл[4], путем упражнения в черчении и изучении уже известных сеток и отбора из них наиболее подходящих для данного случая. Здесь приходится учитывать ряд правил, практических советов и указаний[5], некоторые из которых иллюстрируются на приводимых здесь фигурах.

На фиг. 336 дан пример разбивки первой полосы, линии, проведенные пунктиром — проверочные. Проверка полученных ячеек здесь сделана не при помощи квадратиков, поставленных на ребро, а путем разбивки ячеек на четыре фигуры,

[1] Обзор этих методов можно найти в статье С. Runge u. Fr. A. Willers, „Numerische und graphische Integration“ в „Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften,“ 234—244, II, 3, 1, SS. 164—171.

См. также уже цитированный труд Муската (стр. 234—244).

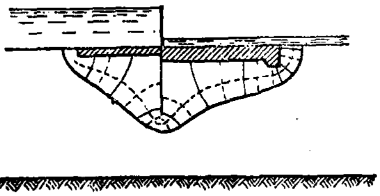
[2] L. F. Richardson, A. Freechand Graphic Way of Determining Stream Lines and Equipotentials (Philosophical Magazine VI, Ser № 86, Febr. 1908).

[3] Оба примера взяты из статьи Терцаги (Terzaghi) в журнале „Die Wasserwirtschaft“, 1930.

[4] Maxwell, Elementary Treatise Electricity and Magnetism, § 92.

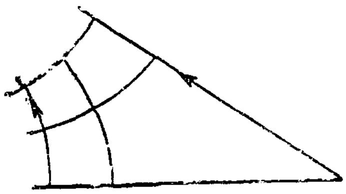
[5] См. работу доц. Н. К. Гиринского, Графическое построение гидродинамических сеток для случая фильтрации в однородных грунтах. Московский гидромелиоративный институт. Научные записки, т. VIII, вып. II. М., 1939 (изд. института).

форма которых, в случае квадратной ячейки, должна быть близкой к квадрату.



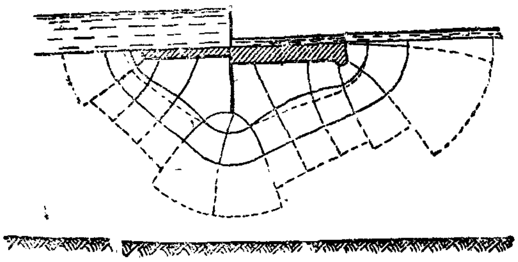
Фиг. 336

В случае ячейки более сложной формы (фиг. 337) проверку производят, следуя такому, например, критерию: разбивают проверяемую ячейку на четыре фигуры, те из них, которые близки к квадрату, отбрасывают, а остальные вновь разбивают на четыре фигуры и т. д. Необходимо, чтобы при такого рода последовательной разбивке стали выделяться фигуры, подобные только что разбитым фигурам, как это и показано на приводимой фиг. 337. На фигуре показана лишь первая по кратности проверочная разбивка ячеек.



Фиг. 337

На фиг. 338 показаны пристроенные к первой полосе вторая и третья полосы ячеек. Как видим, при черчении второй полосы образуемая ею линия тока оказалась непрерывной. Для третьей это не получилось, что указывает на необходимость подправки первой линии тока, что и выполнено на чертеже пунктиром. Смещение отдельных участков первой линии тока произведено в том направлении, в котором нужно сместить отдельные участки третьей (разорванной) линии тока для того, чтобы последняя оказалась непрерывной.



Фиг. 338

Отметим, что полоса ячеек, прилегающих к поверхности грунта в нижнем бьефе, оказалась из прямоугольников. Можно их такими и оставить, но необходимо проследить, чтобы отношение отрезков, проходящих через середины стороны этих ячеек, оставалось одним и тем же, хотя и неравным единице.

По полученной гидродинамической сетке можно произвести фильтрационный расчет флютбета, т. е. определить: 1) распределение взвешивающего давления воды на нижний контур флютбета; 2) значение скоростей выхода воды в нижнем бьефе; 3) фильтрационный расход воды под сооружением. Для примера приведем расчет фильтрационного расхода.

Если через Δs обозначить длину стороны какого-либо из построенных „квадратов“ сетки, то элементарный расход ΔQ, проходящий через сторону квадрата, идущую поперек линий тока, будет согласно физическому смыслу гидродинамической сетки равен:

$$\Delta Q = k \frac{\Delta H}{\Delta s} \Delta s,$$

где k — коэфициент фильтрации; ΔH — падение напора в квадратике; $\frac{\Delta H}{\Delta s}$ — средняя величина градиента фильтрации; $k\frac{\Delta H}{\Delta s}$ — средняя величина скорости фильтрации в том же квадратике. Если n — число квадратиков в какой-либо полоске между двумя соседними линиями тока, то $H = n\Delta H$[1], если же m — число квадратиков в полосе между соседними линиями равного напора, то $Q = m\Delta Q$, тогда

$$Q = m\Delta Q = k\frac{m}{n} H.$$

Как видим, определение расхода сводится к простому подсчету квадратиков в двух направлениях, вдоль и поперек изучаемой области фильтрации.

По примеру приведенного расчета легко найти остальные расчетные данные: распределение взвешивающего давления воды и скорости выхода воды в нижнем бьефе.

§ 211. Методы аналогий

Общие соображения. Гидродинамическая сетка может быть выявлена и путем непосредственной фиксации линий тока или линий равного давления.

Так, например, если поместить модель какого-либо гидротехнического сооружения с фильтрационной областью под ним в лоток со стеклянными стенками и обеспечить установившийся фильтрационный поток, то (вводя в верхнем бьефе красящие вещества) можно наблюдать расположение линий токов.

Однако такое непосредственное моделирование фильтрационной области трудно осуществить и само проведение эксперимента осложнено.

[1] Необходимо помнить, что в случае наличия полосы, с неполными квадратами, т. е. с прямоугольниками, например у поверхности дна нижнего бьефа, n — число дробное. На фиг. 334 мы имеем как раз такой случай: $m = 5$, $n = 28,8$.

Аналогия между движением грунтового потока, распространением теплового и электрического тока и электростатики

Установившийся грунтовый поток	Установившийся тепловой поток	Электростатика	Электрический ток
Напор H (потенциал скорости)	Температура	Электростатический потенциал	Напряжение (вольтаж, потенциал)
Коэфициент фильтрации	Коэфициент теплопроводности	Диэлектрическая постоянная	Коэфициент электропроводности
Вектор скорости (Закон Дарси)	Вектор теплового тока (Закон Фурье)	Диэлектрическое смещение (Закон Максвелла о диэлектрическом смещении)	Вектор тока (Закон Ома)
Поверхность равного напора $H=\mathrm{const}$ Эквипотенциальная поверхность $\Phi=\mathrm{const}$	Изотермическая поверхность $t=\mathrm{const}$	Эквипотенциальная поверхность $\Phi=\mathrm{const}$	Эквипотенциальная поверхность $V=\mathrm{const}$
Непроницаемая граница или линия тока $\frac{\partial H}{\partial n}=0$	Изоляционная поверхность или линия теплового тока $\frac{\partial t}{\partial n}=0$	Силовая трубка или силовая линия $\frac{\partial \Phi}{\partial n}=0$	Свободная или изоляционная поверхность, трубка или линия тока $\frac{\partial V}{\partial n}=0$

Между тем во многих областях физики можно отметить явления, протекающие вполне аналогично движению грунтовых вод, но экспериментальное изучение которых может быть поставлено технически гораздо проще, чем с грунтовым потоком.

С этой точки зрения важно рассмотреть разные физические явления, закономерности которых также выражаются уравнением Лапласа, и выделить определяющие ход этих явлений факторы, между которыми может быть проведена полная аналогия.

В табл. 102 проводятся аналогии между движением грунтовых вод (потенциальный поток жидкости) и такими наиболее простыми и общеизвестными физическими процессами, как распространение теплового потока, электрического тока и электростатики.

Приведенные аналогии позволяют переносить решение вопроса о фильтрации грунтовых вод в область другого физического явления, более просто поддающегося экспериментальному изучению.

Из экспериментальных методов, основанных на аналогии физических явлений, рассмотрим метод электрогидродинамических аналогий или так называемый метод ЭГДА[1].

[1] Из других методов следует отметить метод гидродинамических аналогий. См. З а м а р и н Е. А., Движение грунтовых вод под гидротехническим сооружением, Ташкент, 1931 г.

Метод ЭГДА. Этот метод основан на полной аналогии между явлениями фильтрации и течением электрического тока, которая ясна из табл. 102.

В обоих случаях задача сводится к решению уравнения Лапласа для некоторой функции, которая в первом случае является потенциалом скорости, а во втором — электрическим потенциалом (напряжение V).

Ясно, что решение уравнения Лапласа для электрического тока будет (при соответствии граничных условий) и решением для фильтрационного потока.

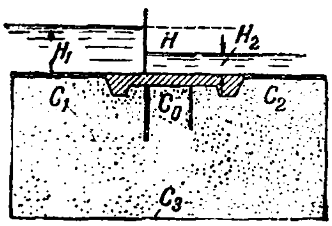
Соответствие граничных условий в обоих случаях легко установить: условию $\Phi=\mathrm{const}$ на границе выклинивания и на свободной поверхности отвечает постоянство электрического потенциала на соответствующей границе контура в поле электрического тока; условию уравнения (628) на границе водоема соответствует линейное распределение электрического потенциала и, наконец, условию $\frac{\partial \Phi}{\partial n}=0$ на непроницаемых границах и на свободной поверхности соответствует изоляция на соответствующем участке контура электрического поля.

Соблюдение на указанных границах условий геометрического подобия позволяет изучение области фильтрации заменить изучением геометрически подобной модели электропроводящей области.

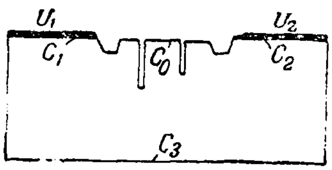
Пусть, например, требуется решить задачу фильтрации под основанием гидротехнического сооружения фиг. 339.

Моделируем это сооружение таким образом, чтобы водопроницаемая область была представлена электропроводящей средой, а водонепроницаемые контуры диэлектриком.

Возьмем в качестве электропроводящей среды проводник-пластинку, вырежем в ней геометрически подобный контур сооружения в определенном масштабе (фиг. 340) и будем поддерживать



Фиг. 339



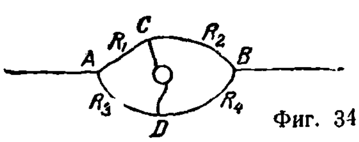
Фиг. 340

на контурах C_1 и C_2 потенциалы (напряжение) V_1 и V_2.

Разность потенциалов $E = V_1 - V_2$ будет соответствовать на основе установленной выше аналогии разности напоров $H = H_1 - H_2$ и в рассматриваемом случае электрический ток будет протекать от контура C_1 к контуру C_2 по тем же путям, что и грунтовый поток.

Распределение эквипотенциальных линий не зависит ни от коэфициента фильтрации (коэфициента электропроводимости), ни от абсолютного значения напора H (разности электрических потенциалов E), а зависит только от конфигурации области фильтрации (электропроводящей области). Поэтому падение потенциала по контуру C_0 в пластинке будет строго соответствовать падению напора по подземному контуру в натуре, а положение эквипотенциальных линий на пластинке — положению эквипотенциалей в области фильтрации под сооружением.

Задача, следовательно, сводится к нахождению на смоделированной пластинке точек, имеющих равный потенциал, и построению эквипотенциальных линий, а при необходимости и всей гидродинамической сетки.



Фиг. 341

Нахождение точек равного потенциала проводится на основе принципа мостика Уитстона.

Сущность мостика Уитстона состоит в следующем. Если две параллельных ветви проводника имеют в общих начальной и конечной точках (точки A и B фиг. 341) потенциалы V_A и V_B, то на обеих ветвях проводников можно найти точки, например, C и D, которые также будут иметь равные потенциалы.

Гальванометр, приключенный к этим двум точкам проводниками (мостиком), покажет отсутствие тока по линии CD.

В таком случае между сопротивлениями отдельных ветвей схемы будет такая зависимость:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}.$$

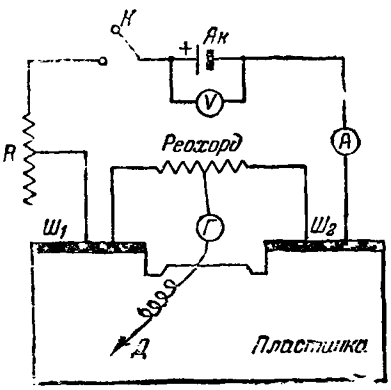
А так как $R_3 = \frac{V_A - V_D}{I}$, а $R_4 = \frac{V_D - V_B}{I}$, где I — сила тока, то $\frac{R_1}{R_2} = \frac{V_A - V_D}{V_D - V_B}$.

Значит если на одном из параллельных проводников установлено соотношение сопротивлений, то на другом можно получить такое же соотношение потенциалов.

Если верхнюю ветку ACB заменить градуированным сопротивлением, а нижнюю ветку пластинкой модели, то, выбирая соотношение сопротивлений R_1 и R_2, выражаемое в процентах или долях от общего сопротивления, мы можем найти на пластинке такую точку, в которой напряжение будет выражено в тех же процентах или долях от разности потенциалов $E = V_A - V_B$.

На этом принципе и основан метод ЭГДА. На фиг. 342 показана схема всей установки с пластинкой, в которой вырезан контур исследуемого сооружения.

В качестве источника тока обычно используется четырехвольтовый аккумулятор. Клеммы аккумулятора соединены с разветвлениями рассмотренной нами цепи. Верхняя часть сопротивления в установке представляет собой градуированное сопротивление — реохорд, а нижняя — пластинку с вырезанным контуром исследуемого сооружения.



Фиг. 342

Пластинка включается в цепь с помощью шин $Ш_1$ и $Ш_2$. Мостик с гальванометром соединяется одним концом с подвижным контактом, скользящим по обмотке реохорда, а на другом имеет стальную иглу D в эбонитовой оправе, с помощью которой зондируются точки с искомым потенциалом на пластинке.

В цепь аккумулятора включены: амперметр для измерения силы тока, реостат, регулирующий силу тока, рубильник для размыкания цепи. Параллельно цепи аккумулятора включен вольтметр для измерения напряжения в цепи.

Пластинки обычно применяют из станиоля толщиной 0,01—0,02 *мм*. Станиоль наклеивают на картон. Иногда вместо станиоля применяют бристольский картон, покрытый слоем коллоидного графита.

Шины устраивают из медных пластинок. Абсолютная величина напряжения на шинах не имеет существенного значения. Разность напряжения на шинах будет отвечать напору фильтрационного потока $H=1$. Но по длине шины напряжение должно быть одно и то же, что достигается тщательным соединением шин с пластинкой.

С помощью установки ЭГДА можно решать такие задачи:

1. Определение давления фильтрационного потока на подземный контур сооружения.

2. Построение гидродинамической сетки в области фильтрации.

3. Определение формы кривых свободной поверхности при безнапорной фильтрации.

Для определения давления на контур сооружения касаются иглой мостика к исследуемой точке контура, а подвижный контакт реохорда устанавливают так, чтобы стрелка гальванометра оставалась на нуле. Показание реохорда даст величину напора в данной точке в долях от общего напора.

Для построения линий равного напора, выраженного в определенной доле от полного напора (например $0{,}9H$, $0{,}8H$, $0{,}7H$, $0{,}6H$ и т. п.), поступают следующим образом.

Устанавливают реохорд на деление, соответствующее определенной доле от общего падения напряжения; зондируя пластинку, находят на ней точки, потенциал (напор) в которых составляет такую же долю от общего напора, как установка на реохорде.

Это будут такие точки, при прикосновении к которым иглой не наблюдается отклонения стрелки гальванометра от нуля.

Линии тока можно построить или графически, опираясь на уже полученное семейство линий равного потенциала, или непосредственно с помощью ЭГДА.

В последнем случае нужно, построив эквипотенциальные линии, переменить места шин, сделав водопроницаемые контуры исследуемой области водонепроницаемыми, а водонепроницаемые водопроницаемыми. Полученные при новых граничных условиях эквипотенциальные линии будут перпендикулярны ранее построенным и, следовательно, дадут линии тока исследуемой области.

При изучении безнапорного движения кривая депрессии находится способом последовательных приближений. Путем постепенного срезания пластинки, начиная с произвольного очертания, находят кривую, которая должна разделиться эквипотенциалями, перпендикулярными к этой кривой и проводимыми через равные интервалы, на лестницу со ступенями равной высоты. Такая кривая и будет кривой депрессии.

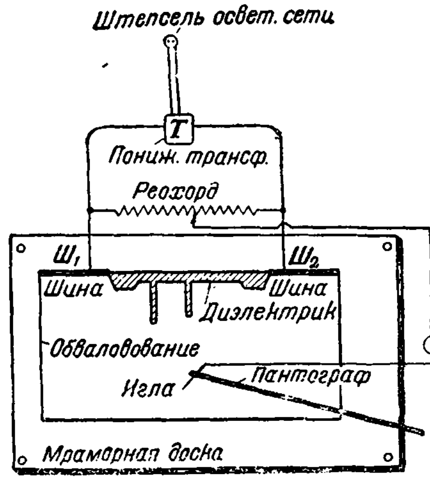
Методом ЭГДА можно решать также задачи по фильтрации в неоднородной среде. При наличии слоистых грунтов с различными коэфициентами фильтрации вместо пластинки применяется электролит (водные растворы солей). Соотношение электропроводимости электролитов на модели должно отвечать соотношению коэфициента фильтрации в натуре.

Электролит устраивается так. На горизонтальную поверхность мраморной доски наливается ровный слой жидкости толщиной не менее 1 *см*. Пограничные условия создаются с помощью шин из медных пластинок и обвалований из диэлектрика (сургуча или пластелина).

Зоны с разными растворами, соответствующими в натуре пластам с разными коэфициентами фильтрации, отделяются на модели друг от друга водонепроницаемыми, но электропроводящими перемычками (резиновые перепонки, обмотанные медной проволокой).

При замене твердой пластинки электролитом несколько изменяется схема общей установки ЭГДА. Во избежание явлений поляризации электродов применяется переменный ток. Источником может быть осветительная сеть. Вместо гальванометра в качестве воспринимающего органа применяют телефон.

Общая схема установки с электролитом показана на фиг. 343. В цепь, идущую от осветительной сети, включается понижающий трансформатор. В цепь мостика включается усилитель низкой частоты. В установке ВНИИГиМ[1] применяется в качестве усилителя радиоприемник ВЧЗ, в котором сделан добавочный ввод на сетку нити второй лампы. Мостик, как и в описанной выше схеме, одним своим концом соединяется с подвижным контактом, скользящим по реохорду, а



Фиг. 343

[1] Г. С. Сорокин, Метод электрогидродинамических аналогий. Труды ВНИИГиМ, т. XIV, 1935.

другим — с зондом, установленным на пантографе на месте металлической иглы. Зонд представляет собой стеклянную трубку с впаянной платиновой проволокой. При помощи ртутной капельки зонд соединяется через усилитель с реохордом.

Техника исследования ЭГДА с электролитом такая же, как и на установках со станиолем. Точки с нужным потенциалом выявляются при зондировании по затуханию звука в телефоне.

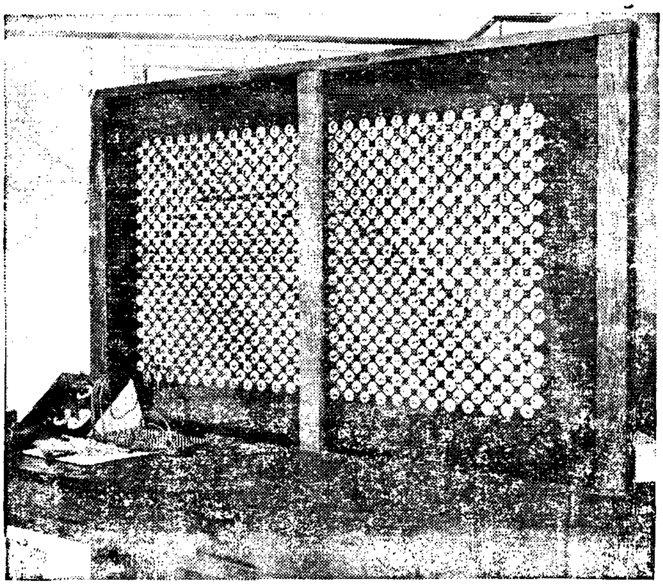
Электроинтегратор. Для решения гидромеханических задач методом ЭГДА проф. Л. И. Гутенмахер[1] предложил систему из переменных сопротивлений, названную им „электроинтегратор".

Электроинтегратор состоит из следующих трех основных частей[2]:

1) поля проводимостей;
2) источника тока с делителем напряжения;
3) измерительного устройства.

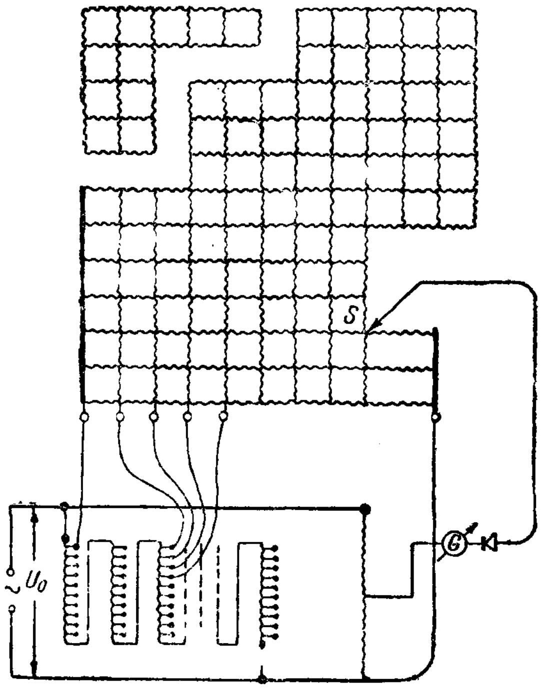
Поле проводимостей представляет собой серию круглых реостатов, соединенных в сетку[3] (фиг. 344). Каждый из реостатов плавным поворотом стрелки можно устанавливать на сопротивление от нуля до 200 *ом*. Узловые точки сетки присоединены к штепсельным гнездам. Выключая реостаты из сети, можно придавать сетке проводимостей любую конфигурацию.

Очевидно, что если в непрерывном электропроводящем поле определенное явление математически отображается некоторым диференциальным уравнением, то в рассматриваемой сетке это же явление будет отображаться уравнением в конечных разностях.



Фиг. 344

Исследования показали, что результаты решения различных краевых задач на сетке, т. е. решение уравнений в конечных разностях, мало отличается от решения тех же задач по диференциальным уравнениям, если количество узловых точек сетки достаточно велико. Так, например, при сетке в несколько сот (300—400) узловых точек погрешность решения не превышает 2—3%.



Фиг. 345

Задание произвольных по величине значений напряжения различным узловым точкам поля производится при помощи делителя напряжения, весьма простой конструкции (фиг. 345). К общему источнику тока (аккумулятору или сети переменного тока 50 *гц*) присоединяются концы последовательно соединенных двухсот равных сопротивлений по 0,01 *ом*. Точки соединения выведены к штепсельным гнездам, которые нумерованы по порядку в процентах от полного напряжения.

Измерительное устройство для определения напряжений в различных узловых точках сетки аналогично рассмотренному выше и состоит из гальванометра, приключенного с одной стороны к ползунку реохорда и с другой к игле зонда.

Включением зонда в штепсельные гнезда можно измерять напряжения в любых узловых точках в относительных величинах (%).

---

[1] Л. И. Гутенмахер, Электрическое моделирование, изд. Академии наук СССР, 1943.

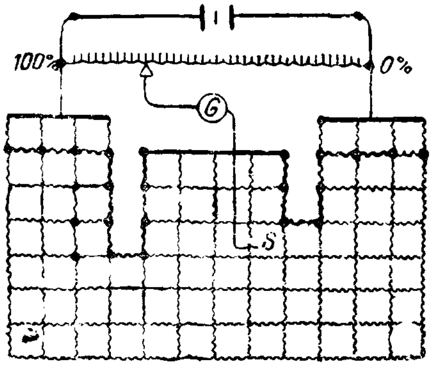
[2] Описание интегратора дается здесь только применительно к решению простейших задач. Для решения более сложных задач неустановившихся процессов или с наличием источников и стоков в изучаемой области к электроинтегратору добавляются емкости и индуктивности.

[3] Электроинтегратор в лаборатории энергетического института Академии наук СССР имеет сетку из 710 круглых реостатов.

Граничные условия на сетке задаются просто. В тех местах, где задан напор, к узловым точкам подводится напряжение, а в тех местах, где заданы водонепроницаемые границы, стороны сетки (внешние по отношению к сетке реостата) нужно оставить изолированными.

На фиг. 346 показаны необходимые соединения сетки с источником тока для случая фильтрации под плоским флютбетом со шпунтами, там же приведена и схема соединения измерительной части.

Возможность изменения сопротивления реостатов сетки позволяет легко моделировать явления фильтрации в разнородных грунтах. Для этого необходимо лишь выделить на сетке области с различными коэфициентами фильтрации и установить стрелки реостатов каждой из этих областей на соответствующее сопротивление, обратно пропорциональное коэфициентам фильтрации этих областей.



Фиг. 346

ГЛАВА XXVII
ОСНОВЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

§ 212. Моделирование гидравлических явлений. Выбор критерия подобия

Гидравлика одна из естественных наук, которые для познания явления и причин его прибегают к широкому эксперименту. В основе метода гидравлики как науки лежит синтез теории и эксперимента. Производственный опыт и эксперимент служат проверкой теории и сами обогащают ее.

В своих экспериментах гидравлика стремится воспроизвести явления, подобные натуре, прибегая к так называемым законам моделирования.

Сущность моделирования состоит в том, что интересующее явление изучается в лабораториях, будучи воспроизведено в малом масштабе.

Все построенные и строящиеся в нашем Союзе крупнейшие гидротехнические сооружения — Днепровская плотина, Беломорский канал, канал Москва-Волга, Куйбышевский гидроузел, Чирчикская ГЭС, Ферганский канал и др. исследовались на моделях в гидравлических (гидротехнических) лабораториях.

Лабораторно-модельный метод исследования обладает рядом преимуществ перед методом наблюдения в натуре: при этом методе представляется возможным изучить еще не выполненные проектирующиеся сооружения, установить влияние тех или иных факторов в сложной совокупности их, обусловливающей явление в целом, вскрыть и изучить явления, неуловимые простыми наблюдениями в натуре и, наконец, проверить теоретические и технические предпосылки, положенные в основу проектирования.

Изучение явления на модели в лаборатории позволяет вносить коррективы в теоретические формулы или установить эмпирические зависимости между отдельными элементами изучаемых явлений.

В основе моделирования лежат общие законы механического подобия, изложенные в § 53. Напомним, что

явления будут механически подобны в том случае, если в них одинаково отношение всех геометрических элементов—размеров, расстояний, перемещений, одинаково отношение всех сил, действующих в соответственных точках и направлениях.

Таким образом для полного механического подобия явлений (систем) необходимо геометрическое, кинематическое и динамическое подобие этих явлений (систем).

Геометрическое подобие служит основой для кинематического и динамического подобия.

Две системы (явления) будут геометрически подобны, если между их линейными размерами существует постоянное сооотношение

$$\frac{l_н}{l_м} = \lambda. \tag{692}$$

Здесь λ — геометрический линейный масштаб модели, показывающий, во сколько раз размеры модели уменьшены по сравнению с натурой; индексом $н$ обозначены величины, относящиеся к натуре, а индексом $м$ — величины, относящиеся к модели.

Тогда в свою очередь будем иметь отношение площадей

$$\frac{\omega_н}{\omega_м} = \lambda^2 \tag{693}$$

и отношение объемов

$$\frac{W_н}{W_м} = \lambda^3. \tag{694}$$

При исследовании законов движения жидкости приходится иметь дело с силами тяжести, давления, инерции, трения или вязкости, поверхностного натяжения, упругости.

Условия гидродинамического подобия модели и натуры требуют равенства отношения в модели и в натуре всех сил, под действием которых протекает изучаемое явление.

Из общего закона подобия вытекают как частные его выражения известные уже нам критерии подобия, отвечающие случаям проявления в изучаемой системе какой-либо одной силы.

Из основных критериев подобия были уже рассмотрены критерий Фруда, отвечающий действию только силы тяжести (гравитационной силы) и Рейнольдса, отвечающий действию сил внутреннего трения (вязкости)[1].

При одновременном проявлении всех указанных сил должны быть одинаковыми как в модели, так и в натуре числа Фруда, Рейнольдса и другие, являющиеся критериями подобия.

Равенство на модели и в натуре числа Фруда требует, чтобы существовала определенная зависимость между гидравлическими элементами модели и натуры.

Из условия

$$\mathrm{Fr}_н = \mathrm{Fr}_м$$

или

$$\frac{v^2_н}{g_н\, l_н} = \frac{v^2_м}{g_м\, l_м}, \qquad (695)$$

получим для скоростей, считая $g_н = g_м$, зависимость

$$\frac{v_н}{v_м} = \sqrt{\frac{l_н}{l_м}} = \sqrt{\lambda}. \qquad (696)$$

Расходы натуры и модели должны находиться в такой зависимости:

$$\frac{Q_н}{Q_м} = \frac{v_н \omega_н}{v_м \omega_м} = \sqrt{\lambda} \cdot \lambda^2 = \lambda^{5/2}. \qquad (697)$$

Значит, если в натуре имеется расход Q, то на модели, которая меньше натуры в λ раз, расход должен быть меньше в $\lambda^{5/2}$ раз.

Для установления зависимости между временем протекания подобных явлений выразим скорости в натуре через $v_н = \frac{l_н}{t_н}$ и на модели через $v_м = \frac{l_м}{t_м}$.

Тогда согласно формуле (696) имеем:

$$\frac{v_н}{v_м} = \frac{l_н}{t_н} : \frac{l_м}{t_м} = \sqrt{\lambda},$$

откуда

$$\frac{t_н}{t_м} = \sqrt{\lambda}. \qquad (698)$$

Обращаясь к критерию Рейнольдса, видим, что равенство на модели и в натуре чисел Рейнольдса

$$Re_н = Re_м$$

или

$$\frac{v_н\, l_н}{\nu_н} = \frac{v_м\, l_м}{\nu_м} \qquad (699)$$

требует, чтобы между скоростями существовала зависимость

$$\frac{v_н}{v_м} = \frac{\nu_н}{\nu_м} \frac{l_м}{l_н} = \frac{\nu_н}{\nu_м} \frac{1}{\lambda}, \qquad (700)$$

а при равенстве кинематических коэфициентов вязкости в натуре и в модели

$$\frac{v_н}{v_м} = \frac{1}{\lambda}. \qquad (701)$$

При этом зависимость между расходами будет

$$\frac{Q_н}{Q_м} = \frac{v_н\, \omega_н}{v_м\, \omega_м} = \frac{1}{\lambda} \lambda^2 = \lambda. \qquad (702)$$

В табл. 103 сведены условия подобия модели и натуры для одинаковой среды, вытекающие из изложенных выше критериев подобия Фруда и Рейнольдса.

Таблица 103

Наименование величины	Критерии подобия	
	Fr	Re
Скорость	$\lambda^{0,5}$	λ^{-1}
Расход	$\lambda^{2,5}$	λ
Время	$\lambda^{0,5}$	λ^2
Сила	λ^3	λ^0
Давление	λ	λ^{-2}
Работа	λ^4	λ
Мощность	$\lambda^{3,5}$	λ^{-1}

Из приведенных выше зависимостей для скоростей, расходов и других величин, показанных в табл. 103, вытекает, что

[1] Кроме названных и рассматриваемых ниже критериев подобия, в практике исследования специальных гидродинамических и гидравлических явлений прибегают к критериям Вебера, Коши, Струхаля, Буссинеска, Кармана, Слихтера и др. См. об этом М. А. Великанов, Принцип подобия и турбулентность. Известия научно-исследовательского института гидротехники, т. XIII, 1934, или Л. Г. Лойцянский, О некоторых приложениях метода подобия к теории турбулентности. Прикладная механика и математика, т. II, вып. 2, 1934.

каждая действующая по определенному закону сила требует своего критерия подобия и что если явление протекает под действием нескольких сил, а в модели применяется жидкость, одинаковая с жидкостью натуры, механическое подобие невозможно.

При двух одновременно действующих силах, например, сил тяжести и сил трения, механическое подобие возможно лишь при применении на модели жидкости, отличной от жидкости в натуре. Сопоставление в этом случае уравнения (696) и (700) приводит к зависимости

$$\frac{\nu_н}{\nu_м}=\lambda^{1,5}, \tag{703}$$

т. е. кинематический коэфициент вязкости жидкости модели должен быть в $\lambda^{1,5}$ раза меньше кинематического коэфициента жидкости в натуре.

Практически при моделировании трудно заменять воду другой жидкостью, выдерживая соотношение (703).

Из изложенного следует, что добиться полного подобия явлений при исследовании в лабораториях невозможно, так как во всех явлениях действуют силы больше, чем одной категории.

Опыт моделирования гидротехнических сооружений, однако, показывает, что обычно силы одного рода превалируют над силами другого рода. В связи с этим при моделировании исходят из критериев подобия, отвечающих действию главной силы. Например, при моделировании потоков со свободной поверхностью, моделировании водосливных плотин исходят из критерия Фруда, так как данные явления протекают под действием, главным образом, гравитационных сил. Действие других сил при этом учитывается специальным коррективом.

При исследовании на моделях сложного физического явления, для которого трудно выделить главную силу, возможна постановка опытов с использованием раздельно различных критериев подобия — обособленное рассмотрение действия отдельных сил. В таком случае искомая величина, например, какой-нибудь коэфициент сопротивления ζ, может быть представлена сначала как функция различных физических чисел: $\zeta=f_1(\mathrm{Fr})$, $\zeta=f_2(Re)$ и т. д. и затем уже окончательно как

$$\zeta=f(\mathrm{Fr}, Re \text{ и др.}).$$

В практике моделирования открытых потоков в гидравлических лабораториях чаще всего приходится прибегать к критерию Фруда. При этом надо иметь в виду границы, при которых возможно пренебрегать влиянием вязкости жидкости. Указать эти границы для всех случаев невозможно, так как они могут быть установлены только на основе специальных исследований. Если исследования ведутся за пределами этих границ, то подобие будет нарушено и в таком случае необходимо вводить поправки вследствие неполного подобия натуры и модели[1].

§ 213. Условия подобия при моделировании гидравлических явлений

Выбрав указанным выше способом критерий подобия, обращают особое внимание на выбор масштаба модели, исходя из необходимости соблюдения следующих условий подобия гидравлических явлений, вытекающих из законов подобия[2].

1. Если поток в натуре турбулентный, он должен быть турбулентным в модели ($Re>Re_{кр}$). При моделировании турбулентного потока по Фруду минимально допустимый масштаб можно определить по зависимости, предложенной Линдквистом, а также Эйснером.

Из выражения, удовлетворяющего условию

$$Re_{кр}<\frac{v_м R_м}{\nu}=\frac{1}{\nu}\frac{v_н}{\sqrt{\lambda}}\frac{R_н}{\lambda},$$

Линдквист, приняв $\nu=1{,}2\cdot10^{-6}$ $м^2/сек$, получает

$$\lambda\leqslant1{,}25\sqrt[3]{v^2_н R^2_н},$$

где $R_н$ — гидравлический радиус в натуре.

Эйснер, исходя из того же неравенства и основываясь на опытных исследованиях Крэя, получает

$$\lambda=(30\div50)\sqrt[3]{v^2_н R^2_н}.$$

В обоих приемах λ есть наименьший допустимый масштаб модели.

2. Если поток в натуре в спокойном состоянии ($\mathrm{Fr}<1$) или в бурном ($\mathrm{Fr}>1$), то он должен быть соответственно в таком же состоянии и на модели.

При моделировании по Фруду это условие всегда обеспечивается. Однако на сохранение этого условия надо обратить внимание при искажении масштаба модели. Иногда в лабораториях приходится моделировать русла значительной ширины или длины и небольшой относительно глубины. Выдержать в таком случае одинаковый масштаб для горизонтальных и вертикальных размеров не представляется возможным. Назначая различными вертикальный и горизонтальный

---

[1] См. более подробно об этом Ф. Эйснер, Экспериментальная гидравлика сооружений и открытых русел, 1937, стр. 28 и др.

[2] См. там же.

масштабы[1], надо следить за сохранением соответствующего состояния потока.

3. Должно быть выдержано подобие в отношении шероховатости стенок. Чтобы воспроизвести на модели явления, связанные с пограничным слоем, установить точное распределение скоростей в потоке, модель должна быть геометрически подобна натуре во всех деталях вплоть до геометрического подобия шероховатости. В большинстве случаев это технически неосуществимо. Чаще всего при моделировании исходят из подобия гидравлических сопротивлений в модели и натуре, подбирая на модели тип шероховатости, отвечающий этому условию. При этом исследования могут быть распространены на изучение средних гидравлических элементов (средних скоростей в сечении и т. д.). Поток на модели в этом случае должен принадлежать к той области явления, для которой силы вязкости не оказывают заметного влияния (область квадратичного сопротивления).

Если исходить из связи между скоростями модели и натуры, вытекающей из критерия Фруда, то легко показать, что шероховатость на модели должна быть такой, чтобы удовлетворялось равенство коэфициентов сопротивления потока в натуре и модели.

В условиях равномерного движения коэфициент сопротивления[2]

$$(\lambda)=\frac{8gRI}{v^2},$$

где R — гидравлический радиус;

I — уклон свободной поверхности потока или пьезометрический уклон;

v — средняя скорость потока.

Сохраняя точно такую же зависимость для (λ) в натуре и в модели, получим

$$(\lambda)_н=\frac{8gR_н I_н}{v_н^2},$$

$$(\lambda)_м=\frac{8gR_м I_м}{v_м^2}$$

или при $I_н=I_м$

$$\frac{(\lambda)_н}{(\lambda)_м}=\frac{8g}{8g}\,\frac{R_н}{R_м}\,\frac{v_м^2}{v_н^2}=\frac{\lambda}{\lambda}=1,$$

т. е.

$$(\lambda)_н=(\lambda)_м.$$

Имея в виду связь между (λ) и коэфициентом Шези C, приходим к выводу, что

$$C_н=C_м.$$

Иногда эту последнюю зависимость используют для выбора типа шероховатости на модели.

Коэфициент сопротивления (λ) является функцией числа Рейнольдса и относительной шероховатости

$$(\lambda)=f\left(Re,\frac{\Delta}{R}\right).$$

Имея ряд кривых $(\lambda)=f\left(Re,\frac{\Delta}{R}\right)$ типа кривых Никурадзе для труб можно, исходя из равенства коэфициентов сопротивления натуры и модели, подобрать требуемую шероховатость модели, вычислив предварительно число Рейнольдса $Re_м$, которое при моделировании по Фруду равно

$$Re_м=\frac{Re_н}{\lambda^{3/2}}. \tag{704}$$

Надо сказать, что не всегда удается подобрать шероховатость модели, отвечающую указанным выше требованиям. В таком случае коэфициент сопротивления в модели (λ) не будет равен коэфициенту сопротивления в натуре и зависимость между скоростями будет такая

$$\frac{v_н}{v_м}=\sqrt{\frac{(\lambda)_м}{(\lambda)_н}}\sqrt{\frac{I_н}{I_м}}\sqrt{\lambda}. \tag{705}$$

В связи с этим изменится зависимость между расходами и другими элементами потока.

Для расходов она будет иметь вид:

$$\frac{Q_н}{Q_м}=\sqrt{\frac{(\lambda)_м}{(\lambda)_н}}\sqrt{\frac{I_н}{I_м}}\sqrt{\lambda^5}, \tag{706}$$

а для уклонов

$$\frac{I_н}{I_м}=\frac{(\lambda)_н}{(\lambda)_м}\,\frac{v_н^2}{v_м^2}\,\frac{R_м}{R_н}=\frac{(\lambda)_н}{(\lambda)_м}\,\frac{1}{\lambda}\,\lambda=\frac{(\lambda)_н}{(\lambda)_м}.$$

4. Если исследование связано с изучением движения наносов, то наносы в модели должны двигаться подобно натуре. Условие это принципиально выполнимо только в случае полного подобия потока модели и натуры вплоть до геометрического подобия шероховатости и наносов и подобия количественного и гранулометрического состава наносов, влекомых и переносимых потоком. Однако практически это недостижимо.

В практике моделирования приходится часто прибегать к исследованию потоков с донными и взвешенными наносами: исследование русел с размываемым дном, размывы нижнего бьефа, исследования водозаборов с наносами, исследование отстойников и т. д. В этих случаях приходится, в силу недостижимости полного подобия, допускать ряд значительных отклонений от действительной картины протекания явления в натуре. Прежде всего, применяя несмоделирован-

[1] См. об искажении масштабов в работах: а) А. П. Зегжда, Теория подобия и методика расчета гидротехнических сооружений, стр. 118. Там же можно найти ссылки на другую литературу по данному вопросу; б) С. А. Егоров и А. Д. Халтурин, Искаженное масштабирование русловых моделей, труды ГЭИ (ВИГМ).

[2] Здесь и ниже коэфициент сопротивления для отличия от линейного масштаба обозначается (λ).

ные наносы, приходится искажать модель и в частности уклон ее, добиваясь подвижности наносов, отвечающей таковой в натуре[1].

По некоторым опытным данным песок со средним размером зерен d приходит в видимое движение на модели, если выдерживается следующая зависимость

$$R_м \geqslant (0{,}05 \div 0{,}125)\,\frac{d}{I}, \qquad (707)$$

где $R_м$ — гидравлический радиус в модели в *м*;
d — диаметр зерен песка в *м*;
I — уклон свободной поверхности равномерного движения.

Иногда в качестве наносов применяют материал примерно той же крупности, что и донные наносы[2], но с меньшим удельным весом (древесный уголь, окрашенные древесные опилки, пемзу и т. д.). В этом случае подвижность наносов обеспечивается при искажении относительной шероховатости в пределах третьего условия без искажения модели.

Вообще моделирование русел с наносами надо рассматривать, как попытку качественной оценки явления, которое в силу особой сложности и зависимости от многих факторов трудно оценимо с количественной стороны, по крайней мере при данном состоянии теории этого вопроса.

5. Если кавитация (разрыв сплошности струи) имеет место в натуре, то она должна быть осуществлена в соответственном месте в модели.

С этим условием неразрывно связан вопрос моделирования вакуума при испытании сифонных водосбросов, труб, вакуумных профилей плотин, гидромашин.

Достичь кавитации в модели, если она имеет место в натуре, можно, только смоделировав атмосферное давление, соблюдая одновременно все предыдущие условия.

Так как атмосферное давление при исследовании моделей в гидравлических лабораториях обычно не моделируется, то вместо кавитации, наблюдаемой в натуре, на модели в том же месте будет наблюдаться вакуум. Если бы в модели наблюдалась кавитация, то в натуре она наступила бы гораздо раньше.

Подобие модели с натурой будет сохраняться до тех пор, пока в натуре вакуум не достигает предельного значения, т. е. пока не наступит разрыв сплошности струи. За этим пределом подобие без моделирования атмосферного давления невозможно.

Поэтому переносить в натуру результаты модельных испытаний, полученные в гидравлических лабораториях без моделирования атмосферного давления, можно лишь до тех пор, пока вакуум в натуре, получаемый в результате пересчета вакуума модели в соответствии с принятым масштабом, не достигнет предельного значения.

6. Влияние поверхностного натяжения должно быть относительно настолько малым, чтобы оно не мешало образованию волн. Это условие преследует цель свести к минимуму влияние сил поверхностного натяжения при исследовании вопросов обтекания бычков, береговых устоев, струенаправляющих дамб и т. д., которые моделируются по Фруду. Для выполнения этого условия необходимо, чтобы скорость потока со свободной поверхностью в модели была больше 0,23 м/сек. В противном случае надо увеличить масштаб модели, так как подобие не будет достигнуто.

§ 214. Дополнительные замечания. Примеры моделирования

Плоские модели применяются в тех случаях, если поток в натуре изменяется лишь вдоль по течению, оставаясь идентичным в параллельных друг другу продольных плоскостях, например, при переливе через прямолинейную в плане плотину значительной длины. Пространственные же модели применяются при необходимости исследования речных потоков, компановки узлов сооружений на этих потоках, режима наносов при водозаборе и т. д.

Пространственная модель узла сооружений должна включать также русло перед и за сооружением. При этом условия подхода потока к сооружениям (верхний бьеф) и поток за сооружением (нижний бьеф) должны быть подобны натуре.

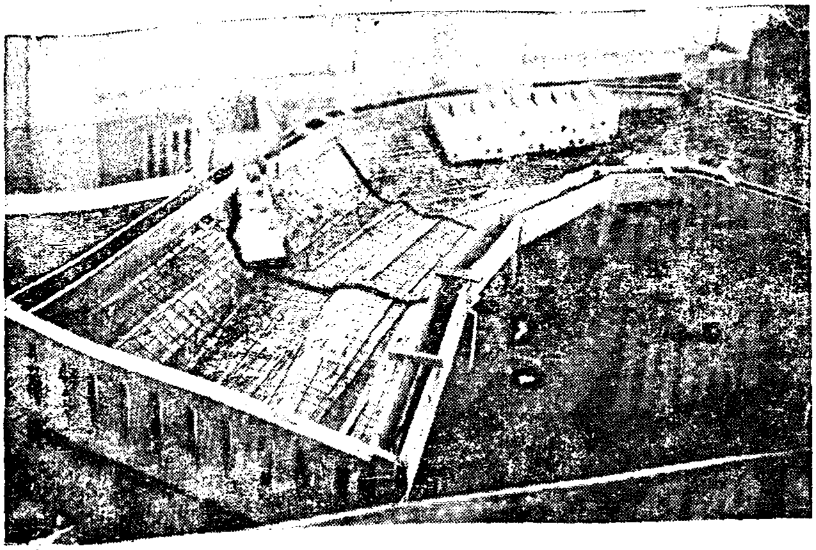
Модели должны выполняться строго в соответствии с рабочими чертежами, составляемыми на основе проектных рабочих чертежей для натуры.

Модели делают обычно из бетона, железобетона, дерева, парафина и других материалов. На фиг. 347, 348 показана в процессе постройки модель реки Лохма с водозабором для насосной станции.

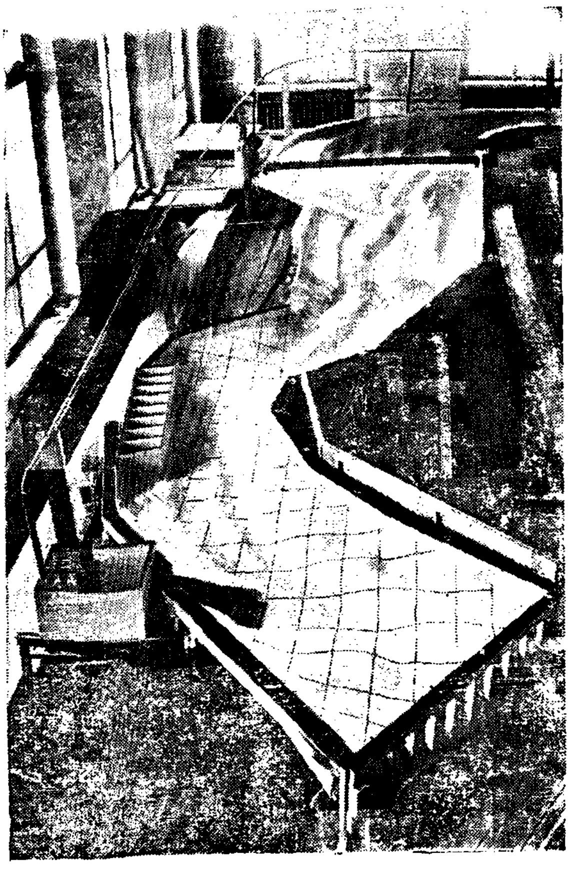
Обычный масштаб для моделей $\lambda = 10-100$.

[1] См. об этом работы:
H. Vogel, Practical River Laboratory Hydraulics, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Nov. 1933.
М. З. Абрамов, Моделирование рек, несущих наносы. IV гидрологическая конференция Балтийских стран, вып. 30, 1933.
И. В. Егиазаров, Экспериментальное исследование головных узлов и водоприемных сооружений гидроэлектрических установок на реках, несущих наносы, и работы гидроэлектрической лаборатории по Дзорагетской, Аджарис-Цхальской и Канакирской установкам. Известия НИИГ, т. IX, 1933.

[2] В практике лабораторных исследований не прибегают к моделированию взвешенных наносов вследствие невозможности осуществления его даже в грубом приближении. Обычно при изучении законов движения взвешенных наносов в лаборатории создают условия, близкие к натуре.



Фиг. 347



Фиг. 348

Выбор масштаба определяется изложенными выше условиями подобия и принимается, придерживаясь этих условий, в зависимости от производительности насосных установок лаборатории и размеров последних. Крупнейшие объекты моделируются обычно на открытых площадках вне лабораторий.

Для измерения на моделях, скоростей, давления и других гидравлических элементов применяется специальная измерительная аппаратура[1].

Задача 125. Проектируется водосливная плотина высотой $p = 12$ *м*. Напор перед плотиной $H = 3$ *м*. Глубина в нижнем бьефе $h_б = 4$ *м*. Профиль плотины очерчен по координатам Кригера. В проекте принят коэфициент расхода $m = 0{,}48$. Для сопряжения с надвинутым прыжком запроектирован водобойный колодец глубиной $d = 2{,}5$ *м*, длиной $l = 16$ м. Требуется проверить работу этой плотины на модели. Плотина проектируется значительной длины, поэтому исследовать можно не всю плотину, а часть ее на единице ширины потока (плоская модель).

Проектный расход на единицу ширины при скорости подхода $v \approx 0$ равен

$$q_н = m\sqrt{2g}\,H_{0н}^{3/2} = 0{,}48\cdot 4{,}43\cdot 3^{3/2} = 11{,}2 \ м^3/сек.$$

Принимаем масштаб для модели $\lambda = 10$. Делаем модель из бетона, причем железним сливную поверхность профиля для приближения к подобию шероховатости модели и натуры.

Геометрические размеры модели плотины будут такие: высота модели плотины

$$p_м = \frac{p_н}{\lambda} = \frac{12}{10} = 1{,}20 \ м,$$

ширина модели плотины

$$b_м = \frac{b_н}{\lambda} = \frac{1}{10} = 0{,}1 \ м,$$

глубина модели колодца

$$d_м = \frac{d_н}{\lambda} = \frac{2{,}5}{10} = 0{,}25 \ м,$$

длина модели колодца

$$l_м = \frac{l_н}{\lambda} = \frac{16}{10} = 1{,}6 \ м,$$

напор перед моделью плотины

$$H_м = \frac{H_н}{\lambda} = \frac{3}{10} = 0{,}30 \ м.$$

Профиль очерчиваем по координатам Кригера при напоре $H = 0{,}30$ *м*.

Моделируем по Фруду, так как главной силой, под действием которой протекает моделируемое явление, является сила тяжести.

Тогда расход модели должен быть равен

$$q_м = \frac{q_н}{\lambda^{5/2}} = \frac{11{,}2}{10^{5/2}} = \frac{11\,200}{317} = 35{,}4 \ л/сек.$$

Для ослабления влияния боковых стенок лотка, в котором устанавливается модель, строим модель плотины шириной 0,50 *м* и потому принимаем расход модели

$$q_м = 35{,}4\cdot 5 = 177 \ л/сек$$

[1] См. описание аппаратуры в книге Ф. Эйснер, Экспериментальная гидравлика сооружений и открытых русел, 1937.

(в натуре ему будет соответствовать расход, протекающий через отрезок плотины шириной 5 *м*).

Глубину в нижнем бьефе модели надо создать

$$h_{бм} = \frac{h_{бм}}{\lambda} = \frac{4}{10} = 0{,}40 \text{ м},$$

а в верхнем бьефе условия, обеспечивающие скорости подхода, подобные натуре.

Положив в основу моделирования критерий Фруда, установим зависимость между коэфициентами расхода модели и натуры.

Имеем для натуры

$$Q_н = m_н b_н \sqrt{2g} H_{0н}^{3/2}.$$

а для модели

$$Q_м = m_м b_м \sqrt{2g} H_{0м}^{3/2}.$$

Из соотношения

$$\frac{Q_н}{Q_м} = \frac{m_н b_н \sqrt{2g} H_{0н}^{3/2}}{m_м b_м \sqrt{2g} H_{0м}^{3/2}} = \lambda^{5/2}$$

находим

$$\frac{m_н}{m_м} \lambda\lambda^{3/2} = \lambda^{5/2}$$

или

$$m_н = m_м.$$

Тем самым, экспериментируя с моделью, можно установить действительный (с практической точки зрения) коэфициент расхода проектируемой плотины.

Изучив в лаборатории работу модели и имея в результате интересующие величины для модели (коэфициент расхода, высота прыжка, длина колодца, скорости в разных сечениях и т. п.), можно на основе установленных выше зависимостей между моделью и натурой получить представление о работе самого проектируемого сооружения.

Задача 126. Требуется исследовать на модели участок реки с целью выбора места для плотины с водозабором. Имеется план реки в горизонталях, продольный профиль свободной поверхности в реке при расчетном расходе $Q_н = 1\,500$ *м³/сек*. Русло реки сложено из песка средней крупности $d_н = 0{,}6$ *мм*. Средняя площадь живого сечения на моделируемом участке реки $\omega_н = 1\,870$ *м²*. Средний гидравлический радиус на участке $R_н = 4{,}45$ *м*. Средний уклон свободной поверхности на участке $I_н = 0{,}004$.

Прежде всего выясним режим потока в реке. Имеем число Рейнольдса при средней скорости

$$v_н = \frac{Q_н}{\omega_н} = 0{,}80 \text{ м/сек},$$

$$Re_н = \frac{v_н R_н}{\nu} = \frac{0{,}80 \cdot 4{,}45}{0{,}013} = 2\,740\,000;$$

и, следовательно, режим в натуре турбулентный.

Число Фруда

$$Fr_н = \frac{v_н^3}{gR_н} = \frac{0{,}80^3}{0{,}81 \cdot 4{,}45} = 0{,}01 < 1$$

и, следовательно, поток в натуре спокойный.

Моделируя по Фруду и выбирая геометрический масштаб $\lambda = 100$, получим по зависимости (704)

$$Re_м = \frac{Re_н}{\lambda^{1,5}} = \frac{2\,740\,000}{100^{1,5}} = 2\,740.$$

Полученное $Re_м > Re_{кр}$, поэтому режим на модели сохранится турбулентным.

Выясним, будут ли передвигаться в модели наносы при уклоне на модели, равном уклону в натуре и среднем диаметре зерен песка модели $d = 0{,}15$ *мм*.

Пользуясь зависимостью (707), находим

$$R_м = \frac{R_н}{\lambda} = \frac{4{,}45}{100} = 0{,}0445 \text{ м},$$

$$R_м > 0{,}05 \frac{d_м}{I_м} = 0{,}05 \frac{0{,}00015}{0{,}004} = 0{,}0188.$$

Как видим, при данном уклоне движение наносов на модели обеспечивается.

Скорость на модели будет

$$v_м = \frac{v_н}{\sqrt{\lambda}} = \frac{0{,}80}{\sqrt{100}} = 0{,}08 \text{ м/сек}.$$

Расход на модели

$$Q_м = \frac{Q_н}{\lambda^{5/2}} = \frac{1\,500}{100^{5/2}} = 0{,}015 \text{ м}^3/\text{сек} = 15 \text{ л/сек}.$$

Полученная скорость меньше 0,23 *м/сек*. Поэтому может быть ощутительным влияние сил поверхностного натяжения при перенесении в натуру картины свободной поверхности. Для увеличения скорости в модели следовало бы принять искаженную модель. Например, если задаться скоростью $v_м = 0{,}25$ *м*, то, сохраняя горизонтальный масштаб $\lambda = 100$, для вертикального масштаба получим такое значение

$$\lambda_{верт} = \left(\frac{v_н}{v_м}\right)^2 = \left(\frac{0{,}80}{0{,}25}\right)^2 \approx 10.$$

Такое сильное искажение не рекомендуется. Поэтому пришлось бы итти на искажение уклона.

В рассматриваемом случае, однако, главным объектом исследования является режим движения наносов, поэтому вопросам поверхностного натяжения можно не уделять внимания и не добиваться скоростей, больших 0,23 *м/сек*.

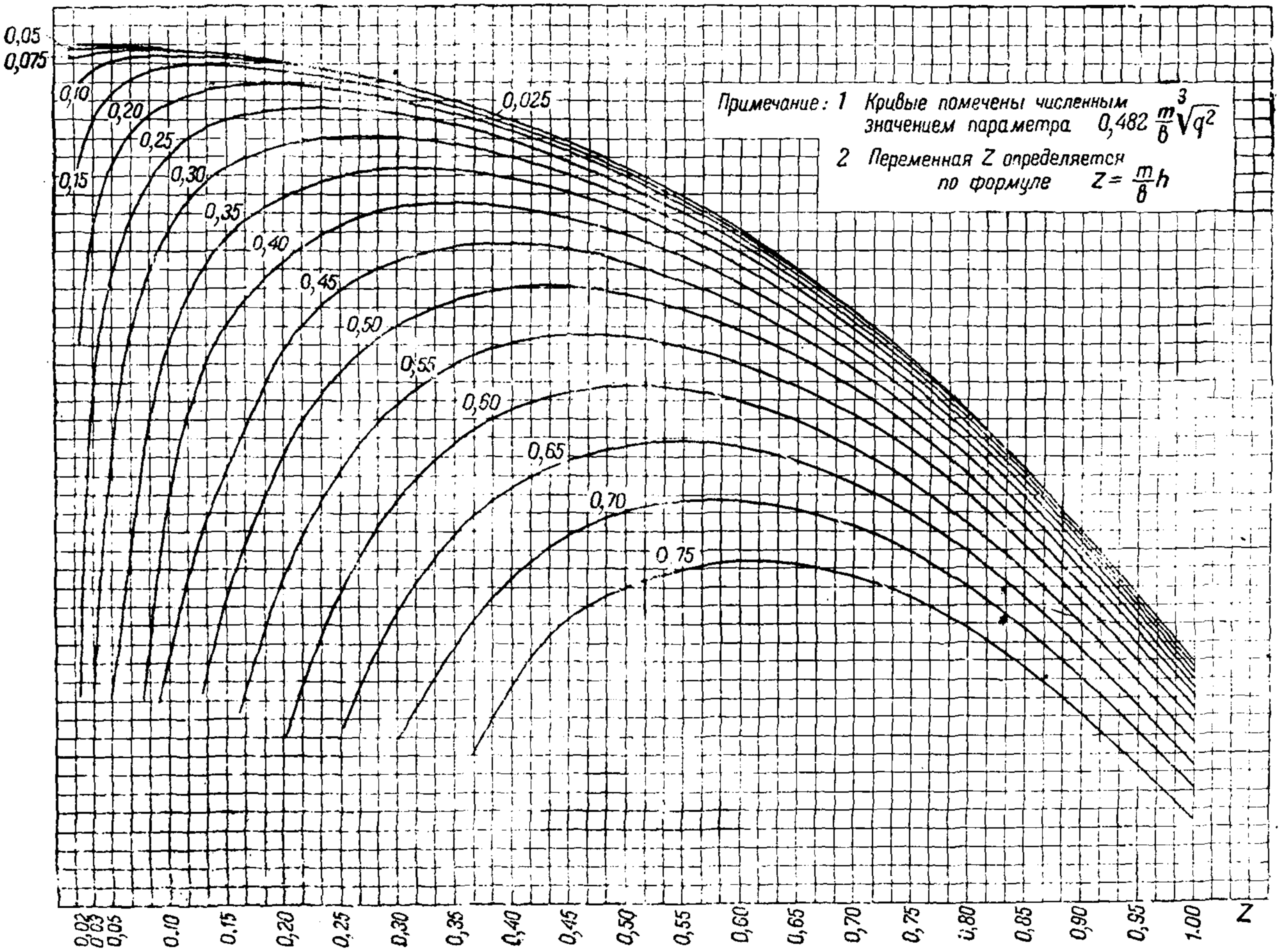


График при параметре кривых от 0,05 до 0,75

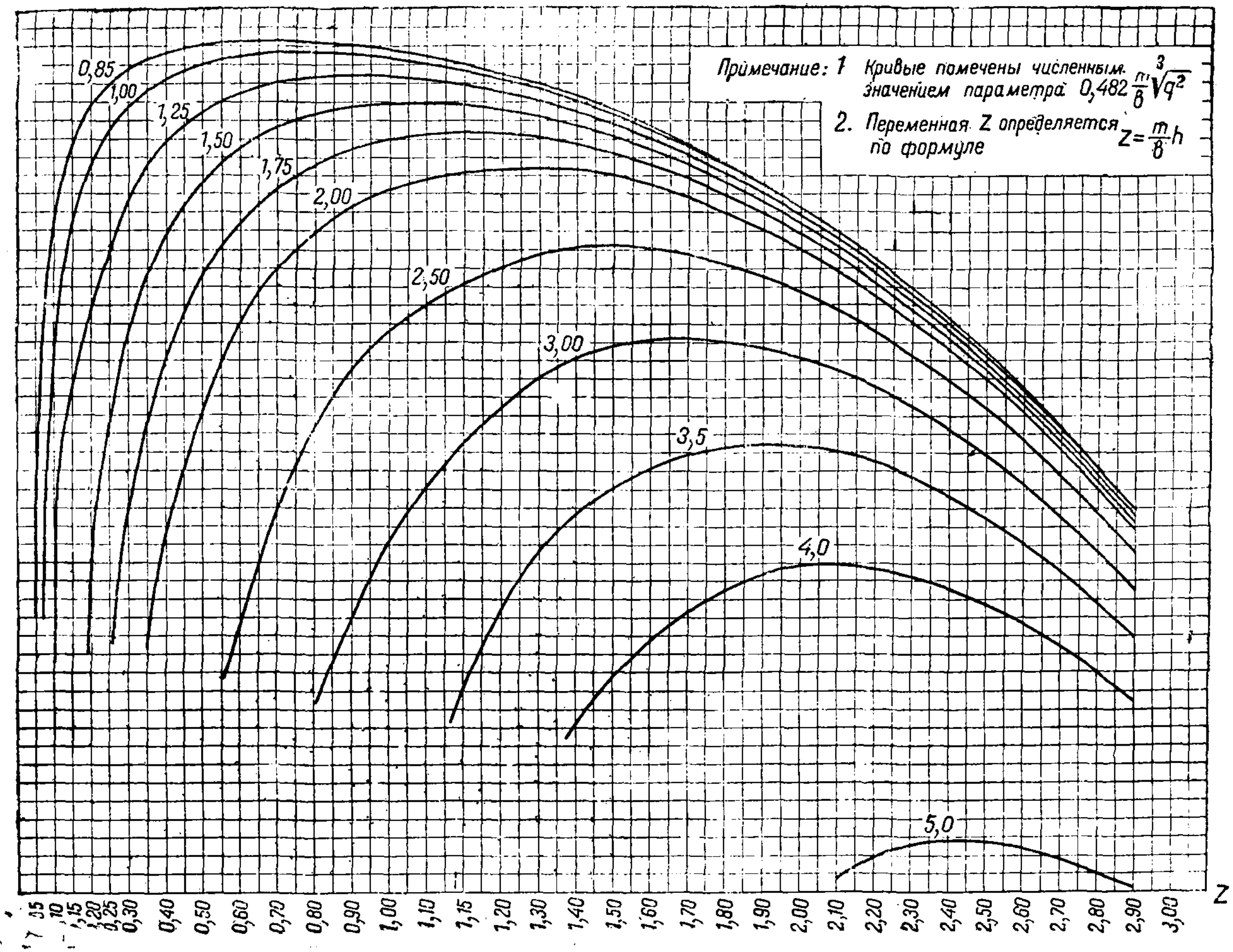


График при параметре кривых от 0,85 до 5,0

Фиг. 349. График для определения взаимных глубин в трапецоидальных призматических руслах.

ТАБЛИЦА ФУНКЦИЙ ДЛЯ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО РАСЧЕТА НИЖНЕГО БЬЕФА ВОДОСЛИВНЫХ СООРУЖЕНИЙ

φ		0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
$\frac{\sqrt{\alpha}}{\varphi}$	$\alpha = 1,0$	1,250	1,176	1,111	1,053	1,000
	$\alpha = 1,1$	1,317	1,239	1,171	1,109	1,054

$\Phi(\tau_c)$	τ_c	τ''_c					$\Phi(\tau_c)$	τ_c	τ''_c				
		$\varphi=0,80$	$\varphi=0,85$	$\varphi=0,90$	$\varphi=0,95$	$\varphi=1,00$			$\varphi=0,80$	$\varphi=0,85$	$\varphi=0,90$	$\varphi=0,95$	$\varphi=1,00$
0,0044	0,001	0,0501	0,0532	0,0564	0,0596	0,0627	1,0825	290	5954	6399	6845	7293	7740
0089	002	0705	0740	0794	0839	0884	1120	300	5984	6434	6884	7335	7787
0133	003	0861	0916	0971	1026	1081	1408	310	6010	6463	6918	7373	7829
0177	004	0990	1053	1116	1179	1242	1690	320	6033	6490	6948	7406	7866
0221	005	1104	1174	1245	1315	1386	1966	330	6052	6512	6973	7435	7898
0265	006	1206	1283	1360	1438	1535	2236	340	6068	6530	6994	7460	7926
0309	007	1299	1383	1466	1549	1633	2500	350	6080	6545	7012	7480	7949
0353	008	1386	1475	1564	1653	1742	2758	360	6088	6556	7025	7496	7967
0397	009	1467	1541	1636	1750	1844	3010	370	6093	6563	7035	7508	7981
0441	010	1543	1642	1742	1841	1941	3255	380	6095	6568	7041	7516	7992
0550	0125	1716	1827	1938	2049	2160	3278	381	6095	6568	7042	7516	7992
0660	0150	1871	1993	2114	2236	2357	3389	386	6095	6568	7043	7519	7996
0768	0175	2012	2143	2274	2405	2536	3493	390	6094	6568	7043	7520	7998
0877	0200	2142	2282	2422	2562	2702	3518	391	6094	6568	7031	7520	7998
0985	0225	2263	2411	2559	2707	2856	3634	396	6092	6566	7043	7521	8000
1094	0250	2376	2532	2688	2844	3000	3726	400	6090	6565	7042	7520	8000
1201	0275	2483	2646	2809	2973	3136	3951	410	6082	6559	7037	7517	7998
1309	030	2584	2754	2924	3095	3265	4170	420	6072	6549	7029	7510	7992
1523	035	2771	2954	3138	3321	3505	4382	430	6058	6536	7017	7499	7982
1736	040	2942	3137	3334	3529	3724	4585	440	6041	6521	7002	7484	7968
1948	045	3100	3306	3513	3720	3927	4784	450	6022	6502	6983	7466	7951
2159	050	3246	3464	3681	3899	4116	4974	460	5999	6479	6961	7445	7930
2369	055	3383	3610	3838	4065	4293	5158	470	5974	6454	6936	7420	7905
2577	060	3511	3748	3985	4222	4459	5333	480	5946	6426	6908	7391	7876
2784	065	3633	3879	4124	4370	4616	5501	490	5915	6395	6876	7359	7844
2991	070	3747	4002	4256	4510	4765	5662	500	5882	6360	6841	7324	7808
3196	075	3856	4118	4381	4643	4906	5815	510	5845	6322	6802	7284	7768
3399	080	3959	4229	4500	4770	5041	5959	520	5806	6282	6761	7242	7725
3602	085	4057	4335	4613	4891	5169	6097	530	5764	6239	6717	7196	7678
3804	090	4151	4436	4721	5006	5291	6224	540	5719	6193	6668	7147	7627
4004	095	4240	4532	4824	5116	5409	1,6344	0,550	0,5672	0,6145	0,6619	0,7097	0,7576
4203	100	4326	4625	4923	5242	5521	6455	560	5621	6091	6563	7038	7515
4597	110	4486	4798	5109	5420	5732	6467	561	6516	6086	6558	7032	7509
4987	120	4634	4957	5280	5603	5927	6557	570		6036	6506	6979	7453
5371	130	4770	5104	5438	5773	6107	6265	580		5977	6446	6916	7388
5752	140	4896	5240	5585	5930	6275	6736	590		5917	6381	6849	7320
6127	150	5012	5366	5721	6076	6431	6743	591		5910	6375	6843	7312
6496	160	5120	5484	5847	6211	6576	6812	600			6314	6779	7247
6861	170	5220	5592	5965	6337	6710	6876	610			6244	6706	7171
7220	180	5312	5693	6074	6455	6836	6922	618			6186	6645	7107
0,7575	0,190	0,5398	0,5786	0,6175	0,6564	0,6953	1,6930	0,620				0,6629	0,7091
7924	200	5478	5873	6269	6666	7062	6977	630				6549	7007
8268	210	5551	5954	6356	6760	7164	7011	640				6465	6919
8608	220	5619	6028	6437	6847	7258	7020	643				6442	6894
8941	230	5681	6096	6512	6928	7345	7035	650					6828
9269	240	5738	6159	6581	7003	7446	7049	660					6733
9591	250	5790	6217	6644	7072	7500	7052	667					6663
9908	260	5838	6270	6702	7135	7569	7052	670					6633
1,0219	270	5880	6317	6755	7193	7631							
0525	280	5919	6360	6802	7215	7689							

ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИЙ ДЛЯ РАСЧЕТА ТРАПЕЦОИДАЛЬНЫХ РУСЕЛ[1]

η	$f_1(\eta)$	$\theta(\eta)$	$f_2(\eta)$	$\Psi(\eta_0)$	$\Psi(\eta_{кр})$	η
			$m=0{,}50$			
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
0,025	63 204	289 577	0,2183	2,7309	—1,9252	0,025
0,030	36 482	156 772	2327	5976	8059	0,030
0,035	22 917	93 409	2453	4852	7049	0,035
0,040	15 313	59 681	2566	3879	6174	0,040
0,045	10 728	40 228	2667	3023	5401	0,045
0,050	7 800,2	28 280	2758	2257	4719	0,050
0,055	5 845,6	20 573	2842	1566	4183	0,055
0,060	4 491,0	15 388	2918	0936	3510	0,060
0,065	3 523,3	11 786	2989	2,0357	2983	0,065
0,070	2 813,6	9 210,5	3055	1,9821	2495	0,070
0,075	2 281,7	7 323,2	3116	9324	2040	0,075
0,080	1 875,2	5 910,7	3173	8858	1614	0,080
0,085	1 559,4	4 834 2	3226	8422	1213	0,080
0,090	1 310,2	4 000,0	3276	8010	0835	0,095
0,095	1 111,2	3 344,5	3322	7622	0477	0,095
0,100	950,22	2 822,6	3366	7253	—1,0138	0,100
0,105	818,71	2 402,5	3408	6903	0,9814	0,105
0,110	710,21	2 060,2	3447	6570	9505	0,110
0,115	619,94	1 779,2	3484	6251	9210	0,115
0,120	544,20	1 546,2	3520	5946	8927	0,120
0,125	480,22	1 351,7	0,3553	1,5654	—0,8656	0,125
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
			$m=1{,}00$			
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
0,100	901,57	2 563,9	0,3503	1,7053	—1,0024	0,100
0,105	774,59	2 185,8	3544	6698	—0,9694	0,105
0,110	670,21	1 870,0	3584	6359	9380	0,110
0,115	573,42	1 599,9	3646	6020	9078	0,115
0,120	510,77	1 383,8	3691	5705	8790	0,120
0,125	448,97	1 204,9	3725	5420	8509	0,125
0,130	397,47	1 051,1	3774	5112	8245	0,130
0,135	353,03	925,76	3813	4831	7988	0,135
0,140	314,85	817,33	3852	4512	7739	0,140
0,145	281,88	725,02	3888	2302	7499	0,145
0,150	253,26	645,53	3923	4050	7266	0,150
0,155	228,31	576,90	3958	3805	7041	0,155
0,160	206,46	517,35	3991	3569	6823	0,160
0,165	187,16	465,22	4023	3338	6610	0,165
0,170	170,29	420,07	4054	3117	6404	0,170
0,175	155,28	379,87	4088	2898	6204	0,175
0,180	141,98	345,03	4115	2689	6010	0,180
0,185	130,03	313,92	4142	2484	5819	0,185
0,190	119,39	286,97	4160	2289	5633	0,190
0,195	109,84	261,72	4197	2089	5452	0,195
0,200	101,27	239,79	4223	1899	5276	0,200
0,205	93,540	220,07	4250	1713	5134	0,205
0,210	86,551	202,50	4274	1532	4935	0,210
0,215	80,785	188,10	4304	1372	4785	0,215
0,220	74,476	172,29	4323	1181	4609	0,220
0,225	69,248	159,34	4346	1012	4451	0,225
0,230	64,484	147,60	4369	0845	4296	0,230
0,235	60,132	136,95	4390	0683	4144	0,235
0,240	56,151	127,23	4413	0523	3995	0,240
0,245	52,502	118,39	4435	0367	3849	0,245
0,250	49,152	110,31	4456	0213	3705	0,250
0,255	46,070	102,92	4476	1,0063	3566	0,255
0,260	43,232	96,118	0,4498	0,9914	—0,3428	0,260

η	$f_2(\eta)$	$\theta(\eta)$	$f_2(\eta)$	$\Psi(\eta_0)$	$\Psi(\eta_{кр})$	η
0,265	40,446	89,509	0,4519	0,9759	—0,3283	0,265
0,270	38,196	84,213	4536	9677	3159	0,270
0,275	35,958	78,947	4555	9487	3028	0,275
0,280	33,886	74,091	4573	9349	2899	0,280
0,285	31,963	69,618	4591	9214	2778	0,285
0,290	30,178	65,611	4610	9085	2647	0,290
0,295	28,518	61,622	4628	8949	2523	0,295
0,300	26,973	58,063	4645	8820	2403	0,300
0,305	25,532	54,758	4663	8692	2284	0,305
0,310	24,013	51,700	4678	8567	2162	0,310
0,315	22,934	48,832	4696	8444	2051	0,315
0,320	21,760	46,172	4713	8322	1937	0,320
0,325	20,662	43,591	4730	8197	1824	0,325
0,330	19,634	41,376	4745	8084	1714	0,330
0,335	18,669	39,214	4761	7967	1604	0,335
0,340	17,764	37,200	4775	7853	1496	0,340
0,345	16,914	35,298	4792	7739	1390	0,345
0,350	16,115	33,524	4807	7627	1285	0,350
0,355	15,363	31,935	4822	7521	1181	0,355
0,360	14,655	30,370	4835	7412	1080	0,360
0,365	13,988	28,834	4851	7100	0977	0,365
0,370	13,359	27,520	4966	7198	0877	0,370
0,375	12,765	26,159	4880	7088	0,0779	0,375
0,380	12,204	24,935	4894	6984	0,0681	0,380
0,385	11,674	23,788	4998	6882	0585	0,385
0,390	11,173	22,703	4922	6780	0489	0,390
0,395	10,698	21,675	4936	6680	0395	0,395
0,400	10,249	20,712	4948	6576	0302	0,400
0,405	9,8239	19,794	4962	6483	0210	0,405
0,410	4202	18,935	4975	6386	0119	0,410
0,415	9,0456	18,118	4992	6291	—0,0031	0,415
0,420	8,6737	17,344	5001	6196	+0,0060	0,420
0,425	3283	16,612	5013	6102	0149	0,425
0,430	8,0002	15,917	5026	6009	0236	0,430
0,435	7,6863	15,255	5038	5917	0323	0,435
0,440	3911	14,633	5051	5827	0408	0,440
0,445	7,1085	14,004	5063	5737	0493	0,445
0,450	6,8398	13,476	5075	5649	0576	0,450
0,455	5228	12,939	5087	5560	0659	0,455
0,460	3382	12,430	5099	5472	0742	0,460
0,465	6,1050	11,945	5111	5386	0823	0,465
0,470	5,8824	11,483	5123	5300	0904	0,470
0,475	6699	11,043	5134	5216	0984	0,475
0,480	4795	10,649	5146	5137	1058	0,480
0,485	2730	10,222	5158	5048	1141	0,485
0,490	5,0876	9,8439	5168	4966	2119	0,490
0,495	4,9058	4698	5180	4882	1298	0,495
0,500	4,7407	9,1334	5191	4803	1372	0,500
0,505	4,5783	8,8017	5202	4723	1448	0,505
0,510	4229	4850	5213	4643	1523	0,510
0,515	2740	8,1823	5223	4564	1597	0,515
0,520	4,1313	7,8928	5234	4481	1671	0,520
0,525	3,9945	6160	5245	4409	1744	0,525
0,530	8633	3510	5256	4332	1817	0,530
0,535	7388	7,1002	5266	4256	1888	0,535
0,540	6167	6,8544	5277	4180	1960	0,540
0,545	5008	6216	5286	4105	2031	0,545
0,550	3,3895	6,3993	0,5297	0,4031	+0,2101	0,550
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

[1] Здесь приводятся выдержки из таблиц функций трапецоидальных каналов. Таблицы полностью для разных откосов будут изданы отдельным выпуском. *Издательство*

$m=1,25$

η	$f_1(\eta)$	$\theta(\eta)$	$f_2(\eta)$	$\Psi(\eta_0)$	$\Psi(\eta_{кр})$	η	η	$f_1(\eta)$	$\theta(\eta)$	$f_2(\eta)$	$\Psi(\eta_0)$	$\Psi(\eta_{кр})$	η
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
0,050	7 502,8	26 563	0,2825	2,2121	—1,4625	0,050	0,090	1 220,4	3 566,5	0,3423	1,7761	—1,0681	0,090
0,055	5 600,7	19 196	2918	1416	3990	0,055	0,095	1 052,4	2 961,6	3481	7358	0364	0,095
0,060	4 285,7	14 267	3004	0772	3409	0,060	0,100	877,92	2 483,0	3536	6975	—0,9966	0,100
0,065	3 348,7	10 857	3084	2,0179	2873	0,065	0,105	753,34	2 099,4	3588	6610	9633	0,105
0,070	2 663,5	8 428,9	3160	1,9629	2376	0,070	0,110	650,85	1 788,5	3639	6262	9316	0,110
0,075	2 151,3	6 657,9	3231	9117	1912	0,075	0,115	565,80	1 534,3	3688	5930	9012	0,115
0,080	1 760,9	5 338,5	3298	8637	1477	0,080	0,120	494,66	1 324,7	3734	5611	8720	0,120
0,085	1 458,4	4 337,5	0,3362	1,8186	—1,1068	0,085	0,125	434,73	1 150,3	0,3779	1,5304	—0,8440	0,125
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

ОСНОВНАЯ ТЕРМИНОЛОГИЯ КУРСА*

1. **Бурное состояние потока** (нерекомендуемый термин: стремнина) — состояние потока, при котором глубины меньше критических.
2. **Вакуумметрическое давление** (дефицит давления) — разность между атмосферным давлением и давлением в жидкости, если первое больше второго.
3. **Ватерлиния** — линия пересечения свободной поверхности (плоскости плавания) с поверхностью плавающего тела.
4. **Вихревая линия** — линия, в каждой точке которой в данный момент вектор угловой скорости жидкости к ней касателен.
5. **Вихревая область** — область, сплошь заполненная вихрями.
6. **Вихревая скорость** — мгновенная угловая скорость бесконечно малой жидкой частицы, определенная как мгновенная угловая скорость трехгранного угла, составленного осями деформаций.
7. **Вихревое движение** — движение жидкости с угловыми скоростями, не равными нулю.
8. **Вихревой слой** — тонкий слой жидкости, при переходе через который составляющая скорости, касательная к поверхности слоя, изменяется на конечную величину.
9. **Водоизмещение** (тоннаж) — вес воды, вытесняемой плавающим телом.
10. **Водослив** — преграда на пути потока жидкости, через которую последняя переливается.

    Примечание. Для иных жидкостей кроме воды вместо термина «водослив» применяется термин «слив» с соответствующим указанием жидкости, например, «нефтеслив», «газослив» и т. д.

11. **Вязкая жидкость** — жидкость, в которой при движении возникают кроме нормальных напряжений и касательные напряжения.
12. **Гидравлический прыжок** — резкое повышение свободной поверхности потока при переходе его из бурного состояния в спокойное.
13. **Гидравлический радиус** — отношение площади живого сечения к смоченному периметру.
14. **Гидравлический уклон** (нерекомендуемый термин: гидравлический градиент) — падение (уменьшение) удельной энергии потока, отнесенное к единице его длины.

    Примечание. В неравномерном движении гидравлический уклон определяется по формуле

    $$= -\frac{dE}{dL},$$

    т. е. как производная (со знаком минус) по длине потока — L от удельной энергии E.

15. **Гидродинамика** — отдел гидромеханики, изучающий движение жидкостей и тел, вполне или частично погруженных в жидкость, в связи с действующими на них силами.
16. **Гидростатика** — отдел гидромеханики, изучающий равновесие жидких, а также твердых тел, вполне или частично погруженных в жидкость.
17. **Глубина потока** (нерекомендуемый термин: наполнение потока) — расстояние по вертикали от низшей точки живого сечения до свободной поверхности.
18. **Диполь** (нерекомендуемый термин: источник пара) — совокупность источника и стока с одинаковыми по абсолютной величине расходами в предположении, что расстояние (l) между ними бесконечно мало, расход (Q) бесконечно велик и $\lim\limits_{l \to 0} (Ql)$ есть конечная величина.
19. **Живое сечение** — поверхность, проведенная в пределах потока жидкости, нормальная в каждой своей точке к осредненной местности скорости в этой точке (см. термин 63).

    Примечание. В частном случае плавно-изменяющегося движения плоскость, проведенная в пределах потока и нормальная к направлению движения.

20. **Жидкость** — непрерывная среда, имеющая всюду конечную определенную плотность и в которой при состоянии покоя силы взаимодействия между соприкасающимися элементарными частями направлены только по внутренним нормалям к площадкам соприкосновения.
21. **Идеальная (невязкая) жидкость** — жидкость, в которой напряжения и при движении остаются нормальными.
22. **Источник** (нерекомендуемые термины: источник-точка выбрасывающий источник) — точка, из которой непрерывно выделяется жидкость, находящаяся в установившемся невихревом движении и растекающаяся радиально во все стороны.
23. **Капельная жидкость** (жидкость) — мало сжимаемая жидкость, изменение объема которой практически несущественно.

* Приводимая здесь терминология принята Комитетом технической терминологии Академии наук СССР.

24. **Кинематический коэфициент вязкости** (нерекомендуемый термин: кинематическая вязкость) — отношение коэфициента вязкости к плотности.

25. **Комплексный потенциал** (нерекомендуемые термины: функция течения; характеристическая функция) — в плоскопараллельном потенциальном движении несжимаемой однородной жидкости аналитическая функция комплексного переменного $Z = \Phi + i\,\Psi$, где Φ — потенциал скоростей, а Ψ — функция тока.

26. **Коэфициент вязкости** (нерекомендуемый термин: коэфициент абсолютной вязкости) — коэфициент пропорциональности μ, входящий в выражение закона трения Ньютона $\left(\tau = \mu \dfrac{du}{dn}\right)$ и учитывающий физические свойства жидкости.

27. **Коэфициент Дарси** — безразмерный коэфициент λ в формуле Дарси-Вейсбаха, учитывающий влияние средней скорости, размеров потока, вязкости жидкости и шероховатости стенок на величину потери напора по длине потока.

28. **Коэфициент Кориолиса** — отношение живой силы потока к живой силе, вычисляемой в предположении, что скорости во всех точках живого сечения равны средней скорости.

Примечание. Коэфициент Кориолиса (α) в выражении удельной кинетической энергии через среднюю скорость потока учитывает влияние неравномерности распределения скоростей по живому сечению потока.

29. **Коэфициент расхода** — произведение коэфициента сжатия на коэфициент скорости.

Примечание. Коэфициент расхода ($\mu < 1$) учитывает влияние всех сопротивлений движению, неравномерность распределения скоростей в сжатом сечении и сжатие струи на расход при истечении реальной жидкости из отверстия.

30. **Коэфициент сжатия** — отношение площади сжатого сечения струи к площади сечения отверстия.

31. **Коэфициент скорости** — отношение средней скорости истечения данной жидкости из отверстия к средней скорости истечения идеальной жидкости из того же отверстия.

Примечание. Коэфициент скорости ($\varphi < 1$) учитывает влияние на величину средней скорости истечения всех сопротивлений движению жидкости и неравномерность распределения скоростей в сжатом сечении.

32. **Коэфициент сопротивления** — отношение соответственной потери напора к скоростному напору.

33. **Коэфициент фильтрации** — скорость фильтрации при гидравлическом уклоне, равном единице.

34. **Коэфициент Шези** — множитель C (размерный) в формуле Шези, учитывающий влияние шероховатости стенок русла, размеров и формы живого сечения на величину средней скорости потока.

35. **Кривая подпора** — кривая свободной поверхности потока, в котором глубина возрастает в направлении движения.

36. **Кривая спада** — кривая свободной поверхности потока, в котором глубина убывает в направлении движения.

37. **Критическая глубина** — глубина потока, при которой удельная энергия сечения для заданного расхода достигает минимального значения.

38. **Критическая скорость Рейнольдса** — величина средней скорости потока, соответствующая критическому числу Рейнольдса при данных условиях.

39. **Критический уклон** — гидравлический уклон, при котором нормальная глубина равна критической глубине.

40. **Критическое состояние потока** — состояние потока, при котором глубина равна критической.

41. **Критическое число Рейнольдса** — число Рейнольдса, соответствующее при данных условиях моменту перехода турбулентного режима в ламинарный и обратно.

Примечание. В случае необходимости подчеркнуть, имеет ли место переход из турбулентного движения в ламинарное или обратно, применяются соответственно термины: „нижнее критическое число Рейнольдса" и „верхнее критическое число Рейнольдса".

42. **Ламинарное движение** (нерекомендуемые термины: параллельное движение; струйчатое движение; телескопическое движение; параллельноструйное движение; невихревое движение) — движение жидкости без пульсации скоростей, приводящей к перемешиванию частиц.

43. **Линия тока** — линия, в каждой точке которой в данный момент вектор скорости жидкости к ней касателен.

Примечание. В случае установившегося движения линия тока является траекторией лежащих на ней частиц жидкости.

44. **Линия энергии** (нерекомендуемый термин: линия напоров) — линия, изображающая значение удельной энергии частицы по ее траектории или потока по его длине.

45. **Манометрическое давление** (избыток давления) — разность между давлением в жидкости и атмосферным давлением, если первое больше второго.

46. **Местная потеря напора** — потери удельной энергии потока на преодоление местных сопротивлений.

47. **Местная скорость** — мгновенная скорость в данной точке.

48. **Местное сопротивление** — сопротивление движению потока, вызываемое местным изменением конфигурации русла, нарушающим плавную изменяемость движения.

Примечание. В настоящее время в справочных сведениях в местное сопротивление включается и соответствующая часть сопротивлений по длине потока.

49. **Метацентр** — центр кривизны нормальных сечений поверхности центров.

50. **Метацентрическая высота** — расстояние между метацентром и центром тяжести плавающего тела.

51. **Момент диполя** — предел произведения расхода источника на расстояние между источником и стоком, составляющими диполь (если расстояние стремится к нулю).

52. **Напряжение вихревой нити** (напряжение вихря) (нерекомендуемый термин: интенсивность вихревой нити) — удвоенное произведение величины вихревой скорости в какой-нибудь точке вихря на площадь поперечного сечения нити в этой точке.

53. **Напряжения в жидкости** — сила взаимодействия между соприкасающимися элементарными частями жидкости, отнесенная к единице площади их соприкосновения.

Примечание. Различают нормальные напряжения и касательные.

54. **Начальный участок** — участок потока, на котором происходит установление постоянного распределения скоростей в поперечном сечении.

55. **Невихревое движение** (потенциальное движение) — движение той части жидкости, где нет вихрей (иначе — движение той части жидкости, во всех точках которой угловая скорость равна нулю).

56. **Неравномерное движение** — движение жидкости, при котором скорости в соответствующих точках живых сечений потока изменяются по длине последнего.

57. **Несжимаемая жидкость** — жидкость, плотность которой не зависит от температуры и давления.

Примечание. Жидкость, не удовлетворяющая указанным в определении условиям, носит наименование „сжимаемая жидкость".

58. **Неустановившееся движение** — движение, при котором гидромеханические параметры жидкости во всем или в части занятого ей пространства изменяются с течением времени (иначе — движение, при котором гидромеханические параметры, выраженные в переменных Эйлерах, суть функции координат и времени).

59. **Нормальная глубина** — глубина потока при равномерном движении.

60. **Объемное водоизмещение** — объем воды, вытесняемой плавающим телом.

61. **Объемный вес** — вес единицы объема рассматриваемого тела.

62. **Однородная жидкость** — жидкость, плотность которой при одинаковых условиях во всех точках одна и та же.

Примечание. Жидкость, не удовлетворяющая указанным в определении условиям, носит наименование „неоднородная жидкость".

63. **Осредненная местная скорость** — средняя скорость в данной точке, определяемая за достаточный промежуток времени.

64. **Остойчивость** — способность плавающего тела при отклонении в известных пределах от состояния равновесия возвращаться после прекращения действия отклоняющих сил в это состояние равновесия или двигаться вблизи его.

65. **Ось диполя** — предельное положение прямой линии, соединяющей в диполе сток с источником и направленной от стока к источнику.

66. **Ось плавания** — прямая, проходящая через центр тяжести плавающего тела и центр водоизмещения.

67. **Относительный вес** (нерекомендуемый термин: удельный вес) — отношение веса тела к весу дистиллированной воды, взятой в том же объеме при 4°C.

68. **Переменные Лагранжа** — время (t) и постоянные параметры (a, b, c) частицы жидкости, соответствующие начальному моменту.

69. **Переменные Эйлера** — время (t) и декартовы координаты (x, y, z) точки пространства, занятого движущейся жидкостью.

70. **Плавно-изменяющееся движение** (нерекомендуемый термин: медленно изменяющееся движение) — неравномерное движение, характеризующееся плавностью изменений живых сечений и направления потока, при которых живые сечения практически можно считать плоскими.

71. **Плоскопараллельное движение** (плоское движение) (нерекомендуемый термин: движение в двух измерениях) — движение, при котором частицы жидкости движутся параллельно некоторой неподвижной плоскости со скоростями, не зависящими от расстояния частиц до этой плоскости.

72. **Плоскость плавания** — плоскость сечения плавающего тела, совпадающая со свободной поверхностью жидкости.

73. **Плотность** — отношение массы тела к его объему.

74. **Поверхность равного давления** (изобарическая поверхность) (нерекомендуемый термин: эквипотенциальная поверхность) — геометрическое место точек, в которых давление одинаково.

75. **Поверхность тока** — поверхность, в каждой точке которой в данный момент вектор скорости жидкости в ней касателен.

76. **Поддерживающая сила** (нерекомендуемые термины: подъемная сила; выпирающая сила; сила пловучести; сила поддержания) — вертикальная составляющая суммы сил давления жидкости, действующих на поверхность тела, полностью или частично погруженного в жидкость.

Примечание. В случае, если рассматриваемая сила является гидростатической силой, поддерживающая сила может называться „Архимедова сила".

77. **Потенциал скоростей** — функция переменных Эйлера, частные производные которой по координатам, взятые с обратным знаком, равны соответствующим составляющим скорости жидкости.

78. **Потери напора по длине** — потеря удельной энергии, вызываемая сопротивлением по длине потока.

79. **Приведенная высота** — высота столба весомой жидкости, который при давлении, равном нулю на его свободной поверхности, создает при своем основании давление, равное давлению в данной точке жидкости.

80. **Пульсация скорости** — разность между местной скоростью и осредненной местной скоростью.

Примечание. Явление колебания (по времени) местной скорости по величине и направлению называется пульсацией.

81. **Пьезометрическая высота** (нерекомендуемый термин: высота давления) — высота столба весомой жидкости, который при давлении, равном атмосферному давлению на его свободной поверхности, создает при своем основании давление, равное давлению в данной точке жидкости.

82. **Пьезометрическая линия** — линия, изображающая изменение значения удельной потенциальной энергии частицы по ее траектории или потока по его длине.

83. **Пьезометрический уклон** — падение потенциальной энергии потока, отнесенное к единице его длины.

84. **Равномерное движение** — установившееся движение жидкости, при котором скорости в соответственных точках любых живых сечений одинаковы.

85. **Разрывное движение** — движение, при котором составляющие скорости, оставаясь конечными, изменяются скачками при переходе через некоторые поверхности.

86. **Расход** — объем жидкости, протекающей через поперечное сечение потока в единицу времени.

87. **Расход источника** (эффективность источника) — объем жидкости, протекающей в единицу времени через замкнутую поверхность, окружающую источник и не захватывающую другие источники и стоки, если таковые имеются.

88. **Расходная характеристика** (модуль расхода) — расход в русле заданного живого сечения при гидравлическом уклоне, равном единице.

89. **Свободная поверхность жидкости** (нерекомендуемый термин: уровень жидкости) — поверхность раздела между капельной жидкостью и газообразной средой или граница жидкости с пустотой.

90. **Сжатое сечение** — ближайшее к отверстию живое сечение струи, в котором движение можно рассматривать параллельноструйным с давлением по всему поперечному сечению, равным атмосферному.

91. **Скоростная характеристика** — средняя скорость потока в русле заданного живого сечения при гидравлическом уклоне, равном единице.

92. **Скорость фильтрации** — отношение расхода потока через замкнутый элементарный контур, выделенный из фильтрующей части поперечного сечения пористой среды, к площади, ограниченной этим контуром.

93. **Смоченный периметр** — часть периметра (или периметр) поперечного сечения русла, соприкасающаяся с жидкостью потока.

94. **Сопротивление по длине потока** — сопротивление движению потока, вызываемое вязкостью и турбулентностью на участке с плавно-изменяющимся движением.

95. **Сопряженные глубины** — глубины потока до и после прыжка, характеризующиеся равенством их прыжковых функций.

96. **Спокойное состояние потока** (нерекомендуемый термин: река) — состояние потока, при котором глубины больше критических.

97. **Среднее давление в точке вязкой жидкости** (давление) — взятая с обратным знаком средняя арифметическая нормальных составляющих напряжений на три взаимно перпендикулярные площадки, проведенные в рассматриваемой точке.

98. **Среднее давление в точке невязкой жидкости** (давление) — величина напряжения в точке идеальной жидкости.

99. **Средняя глубина потока** — величина, равная отношению площади данного живого сечения к его ширине на уровне свободной поверхности.

100. **Средняя скорость потока** — скорость, с которой должны были бы двигаться все частицы жидкости через живое сечение потока так, чтобы сохранялся расход, соответствующий действительному распределению скоростей.

Примечание. В случае истечения жидкости через отверстия применяется термин „средняя скорость истечения" („скорость истечения"), причем эта скорость определяется в сжатом сечении.

101. **Сток** — точка, которая непрерывно поглощает жидкость, находящуюся в установившемся невихревом движении и притекающую к этой точке радиально со всех сторон.

102. **Струйное движение** (нерекомендуемый термин: струя) — движение жидкости, в котором при переходе через некоторые поверхности составляющие скорости, касательные к этой поверхности, оставаясь конечными, изменяются скачком по абсолютной величине (модуль).

103. **Струя** — движущиеся части жидкости в струйном движении, выделенные поверхностями разрыва скоростей.

104. **Турбулентное движение** (нерекомендуемые термины: вихревое движение, беспорядочное движение) — движение жидкости с пульсацией скоростей, приводящей к перемешиванию ее частиц.

105. **Удельная кинетическая энергия потока** (скоростной напор) — часть удельной энергии потока, зависящая только от скоростей в данном живом сечении.

106. **Удельная кинетическая энергия частицы** — часть удельной энергии частицы жидкости, зависящая только от ее скорости.

107. **Удельная потенциальная энергия частицы** — сумма удельных энергий давления и положения частицы.

108. **Удельная энергия положения частицы** — часть удельной энергии частицы жидкости, зависящая только от ее положения.

109. **Удельная энергия потока** (полный напор) — энергия массы жидкости, протекающей в единицу времени через избранное живое сечение потока, отнесенная к единице веса и определяемая относительно условной горизонтальной плоскости.

110. **Удельная энергия сечения** — удельная энергия в данном живом сечении свободного потока относительно горизонтальной плоскости, проходящей через низшую точку этого сечения, за вычетом удельной энергии, соответствующей атмосферному давлению.

111. **Удельная энергия частицы** — энергия движущейся частицы жидкости, отнесенная к единице ее веса и вычисленная относительно условной горизонтальной плоскости.

112. **Уравнение состояния** — уравнение, выражающее зависимость между плотностью, давлением и температурой жидкости.

113. **Установившееся движение** (нерекомендуемый термин: стационарное движение) — движение, при котором гидромеханические параметры жидкости в каждой точке занятого ею пространства остаются неизменными с течением времени (иначе — движение, при котором гидромеханические параметры, выраженные в переменных Эйлера, зависят только от координат).

114. **Фильтрация** — движение жидкости через пористую среду.

115. **Функция тока** (нерекомендуемый термин: функция течения) — в плоскопараллельном движении несжимаемой жидкости функция (Ψ) переменных Эйлера, связанная с составляющими скорости следующими зависимостями:

$$u_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}; \; u_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

Примечание. Абсолютная величина числового значения этой функции в любой точке равна расходу между линией тока проходящей через эту точку, и линией тока с $\psi = 0$.

116. **Центр водоизмещения** (нерекомендуемые термины: центр тяжести водоизмещения; центр величины) — центр тяжести объема погруженной части плавающего тела, отсекаемой плоскостью плавания.

117. **Центр давления** — точка пересечения равнодействующей сил давления, действующих на рассматриваемую поверхность тела, с этой поверхностью.

118. **Число Рейнольдса** — безразмерная величина, представляющая собой отношение произведения скорости (v) и длины (l), характерных для данной задачи, к кинематическому коэфициенту вязкости (ν):

$$\mathrm{Re} = \frac{v \cdot l}{\nu}.$$

119. **Число Фруда** — безразмерная величина, представляющая собой отношение квадрата характерной для данной задачи скорости (v) к произведению характерной для нее длины (l) на ускорение силы тяжести (g):

$$\mathrm{Fr} = \frac{v^2}{gl}.$$

120. **Элементарная вихревая трубка** (вихревая нить) — часть жидкости, ограниченная вихревыми линиями, проведенными через все точки какого-нибудь бесконечно малого простого замкнутого контура, находящегося в области, занятой жидкостью.

121. **Элементарная трубка тока** (струйка) — часть жидкости, ограниченная линиями тока, проведенными через все точки любого бесконечно малого простого замкнутого контура, находящегося в области, занятой жидкостью.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Редактор ***Ф. Ф. Губин***

Объем 41½ п. л. Уч. авт. л. 48,5 Подписано к печати 27/XII-1944 г.
А 13921 Заказ № 131 Цена в переплете 35 руб. Тираж 5000 экз.

П. 53 г.

56

07

Цена 35 руб.

2