М. И. РОМАКИН

Элементы линейной алгебры и линейного программирования

М. И. РОМАКИН

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов экономических
и инженерно-экономических
специальностей вузов

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
«ВЫСШАЯ ШКОЛА»
Москва—1963

Предисловие

Программа по высшей математике для студентов инженерно-экономических специальностей высших технических учебных заведений включает новый раздел «Элементы линейной алгебры и линейного программирования». Учебные планы ряда факультетов и специальностей экономических вузов также включают линейную алгебру и линейное программирование, что найдет отражение в разрабатываемой сейчас программе по этому курсу.

Отсутствие учебников и учебных пособий по линейному программированию вызвало необходимость написания настоящего руководства.

В отечественной литературе эта книга является первым учебным пособием, в котором сделана попытка дать в краткой и доступной форме систематическое изложение созданного в последние годы нового направления в прикладной математике — линейного программирования, науки о применении современной математики к вопросам экономики.

В книге рассматриваются начала линейной алгебры и линейного программирования, при этом излагаются только те вопросы, которые необходимы для понимания теории и методов линейного программирования.

Первые главы пособия посвящены математическому аппарату, на котором базируется анализ проблем линейного программирования и методика их решения.

Последующие главы посвящены собственно линейному программированию: рассматриваются методы линейного программирования, которые могут применяться при выполнении расчетов вручную (а не на электронных вычислительных машинах).

В пособии содержатся образцы решенных задач, а также упражнения и вопросы для самопроверки, что делает его пригодным для студентов-заочников. Пособие может быть использовано также инженерами, экономистами и всеми лицами, интересующимися приложениями математики в экономических исследованиях.

Учитывая основное назначение книги и ее краткий объем, автор не претендовал на исчерпывающую полноту и безупречную математическую строгость. Такие вопросы как проблема двойственности, транспортная задача, метод разрешающих множителей и другие в книге только упоминаются; ряд теорем приводится без доказательств.

Для желающих глубже изучить курс линейной алгебры и линейного программирования приводится указатель литературы, помещенный в конце книги.

Автор выражает благодарность чл.-корр. АПН РСФСР проф. И. К. Андронову, проф. В. А. Диткину и У. Х. Малкову (Вычислительный центр АН СССР) и доц. Н. П. Жидкову (МГУ) за ценные замечания и полезные советы, которые были учтены при подготовке настоящего издания. Автор признателен доц. Ю. И. Соркину за тщательное редактирование.

Все критические замечания и пожелания читателей по улучшению книги будут приняты с благодарностью.

Автор

Глава I

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Предмет линейного программирования

Линейное программирование — это новая математическая дисциплина, которая возникла в связи с решением различных планово-производственных задач на нахождение наивыгоднейшего варианта.

Возьмем, к примеру, следующую задачу. На восьми деревообрабатывающих станках нужно изготовить определенное количество изделий пяти видов. Каждое из этих изделий можно обрабатывать на любом из восьми станков, но при этом производительность станков будет разной. Как распределить работу между станками, чтобы получить возможно большее количество продукции?

Решение этой задачи путем сопоставлений различных вариантов практически неосуществимо из-за того, что даже при таком ограниченном числе объектов, как восемь станков и пять изделий, вариантов оказывается около миллиарда.

Другой пример. Существует около 5 млн. различных вариантов прикрепления 30 заказчиков-предприятий, потребляющих по одной условной единице продукции, к двум заводам-изготовителям мощностью в 20 и в 10 единиц. Перебирая эти варианты прикрепления со скоростью одного варианта в минуту, весь перебор можно закончить лишь через десять лет! При увеличении же числа потребителей до 50, а мощности заводов соответственно до 30 и 20 единиц, на подобный перебор ушло бы около 100 млн. лет!

Поставленные задачи относятся к числу таких, которые встречаются в разных отраслях народного хозяйства: промышленности, строительства, снабжения, транспорта, торговли, сельского хозяйства и др.

При планировании загрузки оборудования цеха, распределении производственного задания по предприятиям в соответствии с их расчетной мощностью, при планировании севооборота, распределении машин между видами сельскохозяйственных работ, при подборе наиболее дешевых и питательных кормовых рационов для животных, в вопросах транспортировки в большинстве случаев приходится иметь дело не с единицами, а с десятками и сотнями объектов. Поисками наивыгоднейшего варианта в этих условиях никто не занимается, так как общее число вариантов составляет многие миллиарды, а на составление каждого из них нужны часы и дни. Ограничиваются расчетом нескольких вариантов и выбирают лучший из них, который, понятно, далеко не всегда является самым лучшим из всех возможных. Это несовершенство методов планирования ведет к тому, что нередко недостаточно полно используются материальные, физические и трудовые ресурсы.

Еще в 1939 г. Л. В. Канторович по просьбе Всесоюзного фанерного треста занялся решением задачи именно с теми условиями (8 станков и 5 изделий), которые приведены выше; был найден наивыгоднейший, оптимальный вариант загрузки станков, благодаря чему удалось на 5% увеличить съем изделий по сравнению с периодом, когда действовал план распределения работы между станками, найденный подбором вариантов. Главное же состояло в том, что советский ученый создал общий математический метод для нахождения оптимальных решений, пригодных для целого класса планово-экономических задач.

В 1949—1950 гг. сотрудники Ленинградского отделения математического института АН СССР решили аналогичные задачи на отыскание наивыгоднейшего варианта раскроя древесины в лесопилении, стального листа — в машиностроении. Эти работы дали большой экономический эффект. В частности, новый, математически обоснованный вариант раскроя стального листа дал на Кировском заводе экономию в 146 *кг* металла на каждый трактор.

Проведенный расчет наиболее экономичной системы перевозок песка с 10 причалов Московского порта на 613 строек столицы дал экономию 14%, что составило более 6 млн. тонно-километров в год.

Тем же классом задач в конце 40-х годов заинтересовались и зарубежные ученые. Методика соответствующих расчетов получила в США название линейного программирования.

Метод линейного программирования тоже требует составления нескольких вариантов решения, но дает такие способы их сопоставления и улучшения, которые кратчайшим путем приводят к наивыгоднейшему варианту. Новый метод неизмеримо проще и эффективнее, чем сравнение всех возможных решений.

Грандиозные задачи, поставленные в Программе КПСС, по созданию материально-технической базы коммунизма требуют быстрого выполнения большого количества точных экономических расчетов. Помимо планирования в разрезе предприятия или небольшого района в условиях социалистического общества, линейное программирование находит все большее применение при планировании в государственном и республиканском масштабах, а также в общих вопросах планового и экономического анализа. Систематическое использование линейного программирования в различных отраслях народного хозяйства, несомненно, должно дать значительный экономический эффект.

Из большого разнообразия встречающихся на практике задач планово-производственного и экономического характера наибольшее распространение получили следующие типы задач:

1) задача производственного планирования;

2) задача на составление смесей;

3) транспортная задача.

Простейшие задачи линейного программирования обычно иллюстрируются графически, что дает возможность нагляднее представить себе решение более сложных задач линейного программирования.

Из методов решения задач линейного программирования наиболее универсальный метод, который можно использовать для решения самых разнообразных задач,—симплексный метод.

§ 2. Линейная алгебра как математический аппарат линейного программирования

Для понимания теоретических и вычислительных сторон линейного программирования необходимо знание основных понятий и методов линейной алгебры и некоторых других разделов математики.

В задачах, решаемых методами линейного программирования, имеется значительная свобода изменения параметров и ряд ограничивающих условий. Математическое решение этих задач сводится к нахождению экстремума линейной функции, подчиненной ряду ограничений — уравнений и неравенств.

Математической основой линейного программирования является система линейных неравенств, поэтому последней посвящена глава VII. В этой главе рассматриваются системы линейных неравенств в двух-, трех- и n-мерном пространствах и соответственно многоугольник, многогранник и n-мерный многогранник решений.

Теория линейных неравенств требует знания теории выпуклых множеств. Поэтому в главе VI даются основные понятия о плоских выпуклых фигурах и выпуклых многогранниках, а также о гиперплоскостях и полупространствах.

Линейные неравенства легко сводятся к линейным равенствам. Неравенство вида

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant b_1$$

может быть преобразовано в уравнение прибавлением к его левой части некоторого неизвестного неотрицательного числа $(x_{n+1} \geqslant 0)$:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1.$$

Таким образом, решение системы линейных неравенств сводится к решению соответствующей системы линейных уравнений. Поэтому, прежде чем перейти к изучению систем линейных неравенств, необходимо хорошо усвоить общую теорию систем линейных уравнений, которая рассматривается в главе V.

В основе общей теории линейных уравнений первой степени со многими переменными лежит теория определителей, с чего мы и начинаем изложение нашего курса.

Для понимания общей теории систем линейных уравнений, однако, недостаточно того аппарата, который служит при решении систем, допускающих применение правила Крамера. Помимо определителей и матриц (имеющих также самостоятельное значение при применении их в экономических расчетах), используется понятие линейного векторного пространства. Последнему отводится глава IV.

Поясним на примерах решение некоторых экономических задач.

Предприятие в единицу времени может выпускать либо 200 радиоприемников, либо 100 телевизоров. Сколько приемников и телевизоров одновременно может выпускать предприятие?

Для ответа на этот вопрос достаточно в прямоугольной системе координат на оси x_1 отложить отрезок, равный 200 (радиоприемники), на оси x_2 — отрезок, равный 100 (телевизоры), и соединить их концы отрезком. Координаты любой точки полученного отрезка будут соответствовать производственной мощности предприятия.

Теперь усложним эту задачу. Пусть производственная мощность заготовительного цеха будет 200 радиоприемников или 100 телевизоров. Производственная мощность отдела технического контроля — 170 радиоприемников или столько же телевизоров. Для того чтобы определить производственную мощность этого предприятия, необходимо, как и в первом случае, в системе координат построить прямые, изображающие производственные мощности отдельных цехов. Пересекаясь, эти прямые образуют выпуклый многоугольник, стороны которого будут соответствовать производственной мощности предприятия по выпуску одновременно телевизоров и радиоприемников.

Допустим, далее, что телевизор в полтора раза дороже радиоприемника. Какое плановое задание необходимо установить предприятию, чтобы сделать прибыль от продажи его продукции максимальной?

Прямая, отсекающая на осях отрезки, называется линейной формой. Она показывает выручку от реализации приемников и телевизоров. Перемещая эту прямую (линейную форму) параллельно самой себе, зафиксируем ее касание с многоугольником производственной мощности. Точка касания и будет соответствовать оптимальному заданию по выпуску радиоприемников и телевизоров.

Этот метод пригоден и для предприятия с более сложной структурой и с большей номенклатурой выпускаемых изделий. В этом случае его производственная мощность представляет собой многогранник в n-мерном пространстве. Для определения оптимального задания необходимо находить точку касания многогранника и линейной формы или опорной гиперплоскости (пересечение многогранника решений с опорной гиперплоскостью может быть вершиной, ребром или гранью многогранника). Экстремального значения линейная форма достигает в точках пересечения многогранника с опорной гиперплоскостью

$$f(x) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n,$$

нормальной вектору

$$\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

Рассмотрим еще пример. Для кормления подопытного животного последнему необходимо давать по меньшей мере b_1 единиц составного химического вещества B_1 (витамина или некоторой соли) и по меньшей мере b_2 единиц составного химического вещества B_2. Не имея возможности давать B_1 или B_2 в чистом виде, можно приобретать вещество A_1 по λ_1 коп. за грамм, причем каждый грамм содержит a_{11} единиц вещества B_1 и a_{21} единиц вещества B_2. Можно также приобретать вещество A_2 по λ_2 коп. за грамм, причем каждый грамм содержит a_{12} единиц вещества B_1 и a_{22} единиц вещества B_2.

Требуется решить, какие относительные количества вещества A_1 и A_2 нужно потреблять ежедневно, чтобы получить необходимое количество веществ B_1 и B_2 по минимальной стоимости.

Если будет приобретаться x_1 грамм вещества A_1 и x_2 грамм вещества A_2, то это будет стоить

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2,$$

и тогда животное получит количества веществ B_1 и B_2 соответственно

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \quad \text{и} \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2.$$

Следовательно, надо выбрать такие неотрицательные x_1 и x_2, чтобы они удовлетворяли системе неравенств

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \geqslant b_2 \end{cases}$$

и чтобы одновременно величина $f(x) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ была возможно меньше.

При данных числовых значениях параметров эту задачу можно решить простыми методами аналитической геометрии. Допустим, что

$$a_{11} = a_{22} = 1, \quad a_{12} = a_{21} = 5, \quad b_1 = b_2 = 15, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3.$$

Тогда нужно выбрать из пар чисел (x_1, x_2), удовлетворяющих условиям

$$x_1 + 5x_2 \geqslant 15$$

$$5x_1 + x_2 \geqslant 15$$

$$x_1 \geqslant 0$$

$$x_2 \geqslant 0$$

пару чисел (x_1, x_2), для которой линейная форма

$$f(x) = x_1 + 3x_2$$

имеет минимум.

Проводим прямые $x_1 + 5x_2 = 15$ и $5x_1 + x_2 = 15$, как показано на рис. 1, и заключаем, что пары (x_1, x_2), удовлетворяющие данным неравенствам, суть координаты точек заштрихованной области рисунка. Проводим также семейство параллельных прямых

$$x_1 + 3x_2 = a.$$

На рисунке изображены прямые для $a = 3, 6, 9, 12$. Очевидно, что наименьшее значение a получится при таком выборе (x_1, x_2), когда прямая

$$x_1 + 3x_2 = a$$

пройдет через A — точку пересечения прямых

$$x_1 + 5x_2 = 15,$$
$$5x_1 + x_2 = 15.$$

Решая совместно эти два уравнения, находим

$$x_1 = x_2 = \frac{5}{2}.$$

Итак, самый дешевый рацион получится в том случае, если брать по 5/2 грамм веществ A_1 и A_2; при этом необходимое количество веществ B_1 и B_2 будет получено за $\frac{5}{2} + 3 \cdot \frac{5}{2} = 10$ коп.

Заметим, что обычные способы отыскания минимума и максимума с помощью первой и второй производной мало помогают при решении подобных задач. Это

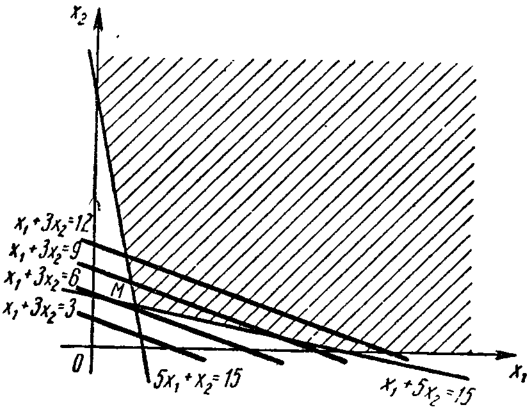

Рис. 1

объясняется тем, что минимальные или максимальные значения линейных функций достигаются в точках границы заштрихованной области, а не в тех точках, где производные равны нулю.

Применённый здесь геометрический способ решения задачи был бы чрезвычайно громоздким при решении задачи с большим числом переменных. Так, например, если бы нужно было сделать выбор из шести веществ, а не из двух, то при этом способе нужно было бы рассматривать области 6-мерного пространства. Подобного рода задачи требуют общих методов решения.

Под задачей линейного программирования понимается задача отыскания минимального или максимального значения линейной функции, когда переменные подчиняются линейным неравенствам. Общую задачу линейного программирования можно сформулировать следующим образом: выбрать среди n-мерных векторов $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ удовлетворяющих неравенствам

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geqslant b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geqslant b_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geqslant b_m,$$

такой, для которого достигается минимум или максимум линейной функции

$$f(x) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n,$$

называемой линейной формой, причем $x_j \geqslant 0$.

Таким образом, термин «линейное программирование» означает, во-первых, *линейность* исследуемой функции (линейной формы) и систем ограничений (линейных уравнений или неравенств), во-вторых, что методы отыскания оптимального решения требуют последовательного перехода от одного решения к другому, рассмотрения различных *программ.*

§ 3. Краткие исторические сведения

Понятие об определителях впервые дано Лейбницем в 1693 г. в связи с исключением переменных из системы трех линейных уравнений с двумя переменными. В 1750 г. в связи с решением системы n линейных уравнений с n переменными Крамер дал решения, которые и до сих пор носят название «правила Крамера».

Разработкой теории определителей занимались Безу, Вандермонд, Лаплас, Лагранж, Гаусс, Бинэ, Коши, Якоби. Самое название «детерминант» (определитель) ввел Гаусс (1801 г.). Коши ввел современное обозначение определителя в виде таблицы с n строками и n столбцами.

Определители в математике широко распространены, но имеют лишь вспомогательное значение. Теория определителей дает удобное обозначение в формулах при доказательствах и т. п., а также в практических расчетах при использовании определителей 2-го и 3-го порядка (вычисление определителей, начиная уже с четвертого порядка, громоздко). В настоящее время нет почти ни одной отрасли математики, в которой определители не имели бы приложений.

Матрицы впервые были введены в математику Кэли в 1857 г. Матричные обозначения компактны, удобны и весьма полезны при выполнении линейных преобразований. Интерес к теории матриц возрос после того, как в 1925 г. Гейзенберг, Борн и другие использовали ее в задачах квантовой механики.

Развитие современных цифровых вычислительных машин, легко осуществляющих основные матричные операции, сообщило дополнительный толчок широкому использованию матриц в различных областях знаний. Матрицы нашли большое применение в практических задачах, связанных с экономическими расчетами.

Теория систем линейных неравенств возникла под влиянием работ М. В. Остроградского по аналитической механике, работ П. Л. Чебышева по теории приближения функций и Г. Ф. Вороного по теории чисел. Работы М. В. Остроградского были затем продолжены специалистами по аналитической механике. Идеи Чебышева развивались в наше время Е. Я. Ремезом, В. К. Ивановым и др.

Геометрическое направление теории систем линейных неравенств (в отличие от экстремального направления) ведет свое начало от Остроградского и Вороного и посвящено изучению геометрических свойств того выпуклого многогранника n-мерного пространства, который представляет собой решение системы

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x + b_i \geqslant \qquad = 1,\ 2, \ldots, m).$$

Результаты, относящиеся к этому направлению, тесно соприкасаются, в частности, с теорией выпуклых тел в n-мерном пространстве.

Исследованием таких математических проблем, имеющих первостепенную важность для теории линейного программирования, как теория выпуклых тел, системы линейных неравенств и др., занимались многие советские математики — А. Д. Александров, С. Н. Черников и др.

Теория систем линейных неравенств и методов их решения подверглась глубокой разработке за последние десятилетия. Это объясняется тем, что системы линейных неравенств и есть тот математический аппарат, на котором базируется анализ проблем линейного программирования и методы их решения.

Линейное программирование возникло из практических потребностей в самые последние годы. Правда, отдельные работы, касающиеся частных вопросов линейного программирования, относятся еще к началу 30-х годов. Так, в 1931 г. в Венгрии была опубликована статья Эгервари «Комбинаторные свойства матриц», посвященная частному случаю транспортной задачи. На основе результатов этой статьи впоследствии был разработан метод решения транспортной задачи, называемый венгерским.

В 1939 г. Л. В. Канторович в работе «Математические методы организации и планирования производства» (изд. ЛГУ, 1939 г.) рассмотрел широкий круг вопросов организации и планирования производства, в которых из большого числа различных вариантов требуется выбрать оптимальный. Анализ этих вопросов приводит к экстремальным математическим задачам, в которых переменные подчинены линейным связям и ограничениям. В этой же работе был предложен весьма универсальный и эффективный метод решения подобных задач — метод разрешающих множителей.

В последующих работах Л. В. Канторовича и других советских ученых методы линейного программирования получают дальнейшее развитие и углубление.

К 1947—1949 гг. относится начало интенсивной разработки линейного программирования в США. Эти работы были организованы в связи с нуждами военного ведомства, но в скором времени они приняли более широкий размах. В частности, их результаты нашли применение в самых разнообразных областях цехового, заводского, внутрифирменного, торгового планирования.

Первое описание наиболее часто применяемого в практике симплексного метода, разработанного Дж. Данцигом в 1947—48 гг., опубликовано в 1951 г.

В последние годы советскими и зарубежными учеными подверглись разработке проблемы двойственности задач линейного программирования, связь последнего с теорией игр, созданы новые и продолжаются совершенствоваться вычислительные методы решения задач линейного программирования, решаются проблемы реализации методов линейного программирования на электронных вычислительных машинах.

Глава II

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

§ 4. Определители второго и третьего порядков

1. Учение об определителях возникло в связи с решением систем линейных уравнений, т. е. систем уравнений первой степени. Задача состояла в том, чтобы дать общие выражения для значений переменных, удовлетворяющих заданной системе линейных уравнений.

Известно, что уравнение первой степени относительно двух переменных x и y $ax+by=c$ геометрически изображает график прямой линии на плоскости. Такое алгебраическое уравнение первой степени называется *линейным.*

Система двух линейных уравнений относительно двух переменных изображается двумя прямыми. Решить такую систему графически значит найти точку пересечения двух прямых.

В свою очередь, чтобы найти точку пересечения двух прямых линий на плоскости с аналитической точки зрения, значит решить систему двух линейных уравнений с двумя переменными.

Решение системы уравнений первой степени приводит нас к понятию определителя. Рассмотрим систему двух уравнений с двумя переменными x_1 и x_2 вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь коэффициенты при переменных снабжены двумя индексами (значками), первый из которых указывает, в каком уравнении находится коэффициент, а второй — при каком из переменных он стоит. Так, например, a_{21} означает коэффициент из второго уравнения при переменном x_1. Иногда во избежание недоразумений индексы отделяют один от другого запятой.

Для отыскания решения системы (1) используем метод уравнивания коэффициентов и алгебраического сложения переменных. Умножая первое уравнение на a_{22}, а второе — на a_{12}, затем вычитая второе уравнение из первого, получим

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\,x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2. \qquad (2)$$

Аналогичным образом найдем:

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\,x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}. \qquad (2')$$

Если $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$, то из (2) и (2′) получим определенное решение системы (1):

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}};\qquad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \qquad (3)$$

Непосредственной подстановкой можно проверить, что найденные значения переменных x_1 и x_2 удовлетворяют системе (1).

Нетрудно заметить, по какому закону из коэффициентов уравнений системы (1) составлены знаменатели выражений (3). Для этого надо коэффициенты этой системы выписать в виде таблицы и составить разность произведений.

Первое произведение надо составить по *главной* диагонали, идущей от первого элемента первой строки ко второму элементу второй строки; второе произведение составляется по диагонали, идущей слева вверх направо (это *побочная* диагональ):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \qquad (4)$$

Полученное выражение называется *определителем* (или *детерминантом*) *второго порядка* *, числа (коэффициенты) a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} называются *элементами определителя* (первый индекс указывает номер строки, а второй — номер столбца); произведения $a_{11}a_{22}$ и $a_{12}a_{21}$ называются *членами определителя.*

---

* Определитель, записанный в виде таблицы, ограничивается вертикальными чертами.

Согласно определению (4) имеем:

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2; \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

Здесь мы получили также определители второго порядка, но в отличие от них определитель (4) будем называть *определителем системы.*

Теперь формулы (3) можно будет представить в виде

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}; \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{3'}$$

2. Рассмотрим систему трех уравнений с тремя переменными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

(при этом воспользуемся прежними обозначениями для коэффициентов, т. е. первый индекс обозначает номер уравнения, второй — номер переменного, при котором стоит коэффициент).

Эту систему также можно решить способом уравнивания коэффициентов. В результате решения получим

$$x_1 = \frac{D_1}{D}; \quad x_2 = \frac{D_2}{D}; \quad x_3 = \frac{D_3}{D} \quad (D \neq 0).$$

Здесь D, D_1, D_2, D_3 определяются выражениями:

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{5}$$

$$D_1 = b_1a_{22}a_{33} + a_{13}b_2a_{32} + a_{12}a_{23}b_3 - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{6}$$

$$D_2 = a_{11}b_2a_{33} + a_{13}a_{21}b_3 + b_1a_{23}a_{31} - a_{13}b_2a_{31} - a_{11}a_{23}b_3 - b_1a_{21}a_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (7)$$

$$D_3 = b_1a_{21}a_{32} + a_{12}b_2a_{31} + a_{11}a_{22}b_3 - b_1a_{22}a_{31} - a_{11}b_2a_{32} - a_{12}a_{21}b_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} \qquad (8)$$

Выражения (5), (6), (7) и (8), обозначенные через D, D_1, D_2, D_3, называются *определителями третьего порядка.*

Понятия об элементах, членах, строках, столбцах и диагоналях, данные нами для определителя второго порядка, остаются в силе и по отношению к определителям третьего порядка.

Определитель третьего порядка можно получить по так называемому *правилу Саррюса,* схематически изображенному на рис. 2

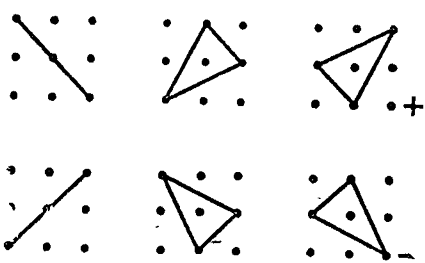

Рис. 2

Три положительных члена определителя представляют собой произведения элементов главной диагонали (т. е. a_{11}, a_{22}, a_{33}) и элементов, находящихся в вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны главной диагонали. Три отрицательных его члена суть произведения элементов побочной диагонали (т. е. a_{31}, a_{22}, a_{13}) и элементов, находящихся в вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны побочной диагонали.

Рассматривая любой из определителей (5)—(8), заключаем следующее:

а) определитель третьего порядка состоит из шести слагаемых (членов);

б) каждый член есть произведение трех сомножителей (элементов определителя);

в) элементы, стоящие в одном произведении, берутся из различных строк и столбцов. Число элементов в каждом произведении равно числу строк (столбцов) определителя. Во всяком члене определителя имеется, следовательно, по одному и только по одному элементу из каждой строки и каждого столбца.

Определитель третьего порядка, таким образом, представляет собой сумму всех его членов, взятых с надлежащими знаками:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum \pm a_{1\alpha}a_{2\beta}a_{3\gamma} \quad (\alpha,\ \beta,\ \gamma = 1,\ 2,\ 3),$$

где Σ — греческая буква сигма — знак суммирования, обозначающий сумму слагаемых.

3. Пусть дана система четырех уравнений с четырьмя переменными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4. \end{cases}$$

Для решения этой системы надо вычислить выражение, составленное из 24-х произведений. Определитель системы будет

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Тогда значения переменных с помощью определителей четвертого порядка найдем по формулам:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ b_4 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}}{D}; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & b_4 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}}{D}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & b_3 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & b_4 & a_{44} \end{vmatrix}}{D}; \quad x_4 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_4 \end{vmatrix}}{D}$$

При помощи определителей более высоких порядков находят решения систем линейных уравнений с пятью, шестью и большим числом уравнений и переменных.

Рассматривая определители второго, третьего и других (более высоких) порядков, устанавливаем, что

определитель второго порядка содержит $2^2=4$ элемента и $2=1\cdot 2=2!$ членов,

определитель третьего порядка содержит $3^2=9$ элементов и $6=1\cdot 2\cdot 3=3!$ членов,

определитель седьмого порядка содержит $7^2=49$ элементов и $5040=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7=7!$ членов,

определитель n-го порядка содержит n^2 элементов и

$$1\cdot 2\cdot 3 \ldots n = n!^{*} \text{ членов.}$$

С ростом порядка определителя число слагаемых растет очень быстро. Известно, что для вычисления определителя n-го порядка надо вычислить $n!$ произведений по n множителей в каждом и сложить их. Для отыскания значений $n+1$ таких определителей потребуется произвести $(n+1)!$ умножений. При $n=10$ это составит 39916800 умножений, что потребует более 12 лет непрерывной работы вычислителя, выполняющего одно умножение за 10 секунд. Электронная вычислительная

* Читается: эн-факториал.

машина, выполняющая, например, 2600 умножений в секунду, сможет выполнить требуемое умножение лишь в течение 4 часов. Для $n=26$ такой машине потребовалось бы $3\cdot 10^{17}$ лет. Выполнение же решений некоторых задач связано с системой в несколько тысяч уравнений, т. е. n равно 1000, 2000 и более.

Таким образом, вычисление определителей, основанное непосредственно на определении, чрезвычайно громоздко. Вычисление определителей, основанное на их свойствах, значительно облегчает нахождение результатов.

§ 5. Определители n-го порядка и их свойства

1. Из алгебры известно, что n элементов, перенумерованных при помощи n первых натуральных чисел, можно упорядочить различными способами. Всякое расположение чисел (элементов) 1, 2,..., n в некотором определенном порядке называется *перестановкой* из n чисел (или n элементов).

Число различных перестановок из n элементов равно $n!$

Если в некоторой перестановке поменяем местами какие-либо два элемента (не обязательно стоящие рядом), а все остальные элементы оставим на месте, то получим, очевидно, новую перестановку. Это преобразование перестановки называется *транспозицией*.

Будем считать расположение чисел (элементов) в перестановке в возрастающем порядке нормальным. Назовем *инверсией* (т. е. нарушением, беспорядком) в некоторой перестановке тот факт, когда два ее элемента следуют не в том порядке, в каком они стоят в основной перестановке, т. е. иначе говоря, когда большее число стоит левее меньшего.

Пример. В перестановке 1 2 3,..., n нет ни одной инверсии.

Число инверсий в перестановке 5 3 1 2 6 4 можно подсчитать следующим образом: прежде всего находим, сколько цифр стоит впереди 1 (в данном примере две); затем подсчитываем, сколько цифр стоит впереди 2, не считая 1 (две); после этого подсчитываем, сколько цифр стоит впереди 3 (одна); впереди 4 — две цифры; впереди 5 — ничего не стоит, т. е. нуль; впереди 6 тоже нет цифр. Таким образом, данная перестановка имеет $2+2+1+2+0+0=7$ инверсий.

Назовем перестановку *четной*, если она содержит четное число инверсий, и *нечетной* — в противном случае. Например, перестановка 2 3 1 является четной, так как она имеет две инверсии.

Можно доказать, что:

1) всякая транспозиция меняет четность перестановки на противоположную;

2) от одной перестановки можно перейти к любой другой с помощью ряда последовательных транспозиций;

3) число всех четных перестановок из n элементов равно числу всех нечетных перестановок из этих же n элементов.

Доказательства этих предложений здесь не приводятся.

2. Пусть n^2 элементов (чисел) a_{ij} расположены в виде квадратной таблицы, состоящей из n строк и n столбцов:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1j} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2j} \ldots a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{i1} & a_{i2} \ldots a_{ij} \ldots a_{in} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nj} \ldots a_{nn} \end{matrix}$$

Определителем n-го порядка из n^2 элементов называется алгебраическая сумма $n!$ членов, которые представляют собой всевозможные произведения n элементов, взятых по одному и только по одному в каждой строке и в каждом столбце; причем знак члена равен $(-1)^t$, где t — число инверсий в перестановке вторых индексов элементов члена, когда эти элементы расположены в порядке возрастания первых индексов.

Следовательно, член определителя имеет знак плюс при четном t и минус при нечетном.

Определитель n-го порядка принято, как и в случае определителей 2-го и 3-го порядков, обозначать символом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1j} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2j} \dots a_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} \dots a_{ij} \dots a_{in} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nj} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

При $n=2$ и $n=3$ имеем соответственно определители второго и третьего порядков, а при $n=1$ определитель равен самому элементу.

Определитель n-го порядка зависит от n^2 чисел, называемых его элементами и расположенных в n строк и n столбцов. Элементы определителя в общем виде будем обозначать одной буквой с двумя индексами (значками), например a_{ij}, из которых первый показывает номер строки, а второй — номер столбца. Таким образом, a_{ij} есть элемент, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца.

Элементы определителя могут быть какими угодно числами, как действительными, так и комплексными.

Определитель n-го порядка будем обозначать сокращенно в общем виде:

$$D = |a_{ij}| \quad (i = 1,\ 2, \dots, n; \quad j = 1,\ 2, \dots, n),$$

или

$$D = \sum (-1)^t a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n},$$

где t — число инверсий.

Знак каждого члена определителя можно определить следующим образом. Располагаем элементы данного члена так, чтобы первые индексы (номера строк) шли в натуральном порядке. Если при этом вторые индексы образуют четную перестановку, то перед членом берется знак плюс, в противном случае — знак минус. Это правило остается в силе, если поменять ролями индексы, т. е. если вторые индексы расположить в натуральном порядке, при этом по перестановке первых индексов определяют знак.

Пример. Чтобы установить знак члена $a_{21} a_{34} a_{43} a_{12}$ определителя четвертого порядка, надо расположить его элементы в натуральном порядке первых индексов $a_{12}\,a_{21}\,a_{34}\,a_{43}$, затем подсчитать число инверсий в расположении 2 1 4 3 вторых индексов. Оно оказывается равным двум, значит, член имеет знак плюс.

3. Определители применяются в разнообразных теоретических и численных расчетах. Приводимые ниже свойства определителей облегчают их вычисление. Перечислим основные свойства определителей, не останавливаясь на их подробных доказательствах.

Свойство I. Определитель не изменится от замены строк (столбцов) соответствующими по номеру столбцами (строками).

Это свойство дает возможность всякое утверждение, касающееся строк определителя, перенести на соответствующие столбцы, и наоборот. Иначе говоря, столбцы и строки определителя равноправны. Поэтому дальнейшие свойства мы будем формулировать только для столбцов.

Доказательство этого свойства основано на исследовании правила расстановки знаков членов определителя.

Свойство II. От перестановки двух столбцов определитель меняет знак на противоположный, например:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Для определителя второго и третьего порядков это свойство проверяется непосредственным вычислением. В общем случае оно доказывается на основе сформулированного нами в п. 2 правила знаков.

Следствие. Определитель, имеющий два одинаковых столбца, равен нулю.

Действительно, если определитель имеет, например, два одинаковых столбца, то при их перестановке определитель не изменяется, ибо столбцы одинаковые, но вместе с тем он в силу второго свойства меняет знак на обратный, т. е.

$$D = -D, \quad \text{откуда } 2D = 0 \quad \text{или} \quad D = 0.$$

Следовательно, такой определитель равен нулю. Пример

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 & -1 \\ -5 & -5 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Свойство III. Определитель есть линейная однородная функция* элементов какого-нибудь его столбца.

Это свойство можно выразить подробнее

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1j} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2j} \ldots a_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} \ldots a_{ij} \ldots a_{in} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nj} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \ldots + a_{ij} A_{ij} + \ldots + a_{nj} A_{nj}\text{**}, \quad (1)$$

где $A_{1j}, A_{2j}, \ldots, A_{ij}, \ldots, A_{nj}$ представляют собой выражения, не зависящие от элементов j-го столбца.

Это свойство очевидно, так как каждое слагаемое содержит по одному и только одному сомножителю из каждого, в частности j-го столбца.

Следствие 1. Общий множитель всех элементов какого-либо столбца можно вынести за знак определителя.

И, наоборот, если элементы какого-нибудь столбца определителя умножить на одно и то же число, то зна-

---

* *Линейной однородной функцией* переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется многочлен первой степени этих переменных без свободного члена, т. е. выражение вида

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n,$$

где коэффициенты a_i не зависят от x_j.

Такая функция обладает следующим свойством:

$$f(cx_1, cx_2, \ldots, cx_n) = cf(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

** Равенство (1) называется разложением определителя по элементам j-го столбца, а коэффициенты $A_{1j}, A_{2j}, \ldots, A_{nj}$ называются алгебраическими дополнениями элементов $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}$, в определителе (см. п. 4 этого параграфа).

чение определителя умножится на то же число. Это следует из линейности.

Пример. Вычислить определитель

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 8 & -9 \\ 8 & -4 & 12 \\ 4 & -12 & -6 \end{vmatrix}$$

Здесь из первого столбца можно вынести общий множитель 2, из третьего — множитель 3, из второй строки — множитель 4, из третьей — множитель 2:

$$D = 2\cdot 3\cdot 4\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -6 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 4\cdot 2\cdot 38 = 1824.$$

Следствие 2. Определитель, в котором соответствующие элементы двух столбцов пропорциональны, равен нулю.

Это доказывается на основании первого следствия свойства III, а также следствия свойства II. Достаточно вынести коэффициент пропорциональности, и мы получим определитель с двумя одинаковыми столбцами.

Следствие 3. Если один из столбцов определителя состоит только из нулей, то определитель равен нулю.

Следствие 4. Если элементы некоторого столбца суть суммы двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, в которых элементы упомянутого столбца заменены отдельными слагаемыми:

$$\begin{vmatrix} a & d & g+g' \\ b & e & h+h' \\ c & f & i+i' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & d & g' \\ b & e & h' \\ c & f & i' \end{vmatrix}$$

Это свойство вытекает из того, что все элементы данного определителя можно представить в виде суммы двух слагаемых, одно из которых является элементом первого определителя, а второе слагаемое — элементом второго.

Следствие 5. Если один из столбцов определителя есть линейная комбинация его других столбцов, то определитель равен нулю.

С л е д с т в и е 6. Определитель не меняется, если к элементам какого-либо столбца прибавить соответствующие элементы другого столбца, умноженные на какой-либо общий множитель.

Действительно, в силу линейности определитель равен сумме исходного определителя и определителя с двумя одинаковыми столбцами.

4. Прежде чем сформулировать следующее свойство, введем понятия минора и алгебраического дополнения.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя $D=|a_{ij}|$, где $i, j = 1, 2, \ldots, n$, называется такой новый определитель, который получен из данного определителя D вычеркиванием строки и столбца, проходящих через данный элемент.

Так, в определителе

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

минор M_{32} элемента a_{32} получается вычеркиванием третьей строки и второго столбца:

$$M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя называется минор M_{ij} этого элемента, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$. Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} принято обозначать через A_{ij}. Таким образом,

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Например, в определителе четвертого порядка алгебраическое дополнение будет

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Свойство IV. Если элементы некоторого столбца определителя D умножить на их алгебраические дополнения и эти произведения сложить, то получится значение определителя D.

Опуская доказательство этого свойства, заметим, что основная сущность его состоит в следующем: если сгруппировать в разложении определителя все произведения, содержащие a_{ij}, вынести из их суммы a_{ij} за скобки, то в скобках останется выражение, которое равно по абсолютной величине минору, соответствующему a_{ij}. При этом, если $i+j$ четное число, то знаки у выражения в скобках и у минора совпадают, а если $i+j$ число нечетное, то знаки у них противоположные.

Если в определителе n-го порядка элементы j-го столбца заменим новыми числами b_i $(i=1, 2, ..., n)$, то

$$D = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \ldots + b_nA_{nj};$$

т. е. полученный определитель равен сумме произведений алгебраических дополнений элементов j-го столбца первоначального определителя на соответствующие числа b_i.

Следствие. Сумма произведений элементов какого-либо столбца на алгебраические дополнения другого столбца равна нулю.

Действительно такая сумма является результатом разложения определителя с двумя одинаковыми столбцами по одному из них.

§ 6. Способы вычисления определителей

1. Определитель можно вычислить, пользуясь его определением. Например,

$$\begin{vmatrix} -5 & 17 \\ 32 & 11 \end{vmatrix} = -5\cdot11 - 32\cdot17 = -55 - 544 = -599.$$

Также нетрудно вычислить определитель третьего порядка, пользуясь правилом Саррюса или схемой (см. рис. 2). Вычисление определителей четвертого и более высоких порядков сопряжено с большими трудностями вычислительного порядка. Так, чтобы вычислить определитель шестого порядка, надо произвести более тысячи действий умножения и сложения.

К определителям того или иного вида применяются различные способы вычислений, основанные на свойствах определителей, приводящие к вычислениям более простым, т. е. содержащим меньшее число действий.

Из этих способов рассмотрим способ приведения определителя к треугольному виду и способ разложения определителя по столбцам или строкам.

2. *Способ приведения определителя к треугольному виду* состоит в таком его преобразовании, когда все элементы, лежащие по одну сторону главной диагонали, становятся нулями. Полученный определитель равен произведению элементов главной диагонали:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \ldots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\ldots a_{n-1,n-1}a_{nn}.$$

Покажем, как с помощью преобразований, вытекающих из свойств II и III (следствие 6), можно найти определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

приведя его к треугольному виду.

Если элемент $a_{ij} \neq 0$, то по свойству III (следствие 6) можно прибавить к элементам k-го столбца $k \neq j$) соответствующие элементы j-го столбца, умноженные на $\left(-\frac{a_{ik}}{a_{ij}}\right)$. Тогда i-й элемент k-го столбца станет равным нулю:

$$a_{ik} + \left(-\frac{a_{ik}}{a_{ij}}\right)a_{ij} = 0.$$

Аналогичными преобразованиями все элементы i-й строки (кроме самого элемента a_{ij}) приводим к нулю. После этого, по свойству II, переставим i-ю строку на место первой и j-й столбец на место первого (если при этом $i=1$, $j\neq 1$ или $i\neq 1$, $j=1$, то определитель будет иметь множитель -1).

Тогда получим определитель вида

$$\begin{vmatrix} a'_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2n} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} & \dots & a'_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & a'_{n3} & \dots & a'_{nn} \end{vmatrix}$$

Возьмем теперь какой-нибудь элемент $a'_{pq}\neq 0$ одного из столбцов: 2-го, 3-го,..., n-го (если таких элементов нет, то определитель уже треугольный, все элементы которого выше главной диагонали равны нулю). Аналогично, прибавляя элементы q-го столбца, умноженные соответствующим образом, ко всем остальным, начиная со второго, получим, что все элементы p-й строки (кроме самого a'_{pq}), начиная со второго, окажутся равными нулю. После этого, используя свойство II, переставляем p-ю строку на место второй и q-й столбец на место второго. Получим определитель вида:

$$\begin{vmatrix} a''_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a''_{21} & a''_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a''_{31} & a''_{32} & a''_{33} & a''_{34} & \dots & a''_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a''_{n1} & a''_{n2} & a''_{n3} & a''_{n4} & \dots & a''_{nn} \end{vmatrix}$$

Преобразуя определитель таким же образом и дальше, мы получим после $n-1$ этапов треугольный определитель, у которого все элементы, расположенные выше главной диагонали, окажутся равными нулю. Полученный определитель будет или равен исходному определителю, или отличаться от него множителем -1.

3. *Способ разложения определителя по столбцам или строкам* заключается в том, что исходный определитель выражают, преобразуя и разлагая его по столбцу (или строке) через определители того же вида, но более низкого порядка. Полученное равенство будем называть возвратным соотношением.

Затем вычисляют непосредственно по общему виду определителя столько определителей низших порядков, сколько их было в правой части возвратного соотношения. Определитель более высокого порядка вычисляется последовательно из возвратного соотношения. Если надо получить выражение для определителя любого порядка n, то, вычислив из возвратного соотношения несколько определителей низших порядков, стараются заметить общий вид искомого выражения, а затем доказывают справедливость этого выражения при любом n с помощью возвратного соотношения и метода индукции по n.

Общее выражение можно получить и другим путем. Для этого в возвратное соотношение, выражающее определитель n-го порядка, подставляют выражение определителя $(n-1)$-го порядка из того же возвратного соотношения с заменой n на $n-1$, далее подставляют аналогичное выражение определителя $(n-2)$-го порядка и т. д., пока не выяснится вид искомого общего выражения определителя n-го порядка.

Можно также комбинировать оба пути, используя второй путь для обнаружения искомого выражения и доказывая затем справедливость этого выражения индукцией по n.

Пример 1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Разложим данный определитель по четвертой строке, затем по третьей.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2)(-1)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2)(-1)(-20) = -40.$$

Пример 2. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

В данном определителе нет элементов, равных нулю; преобразуем его путем вычитания из первого столбца второго и разложения по третьей строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) = -2.$$

Пример 3. В следующем определителе, вычитая из второго столбца первый, а из третьего — удвоенный первый, получаем

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & -2 & -9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -9 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-9 \quad -2) = -11.$$

Пример 4. Путем разложения по элементам какого-нибудь столбца (строки) вычислить определитель

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

Разложим данный определитель по элементам второй строки:

$$D = -\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 - 63 + 2 \cdot 21 = -24.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & b & -a \\ a & 0 & -b \end{vmatrix}$

Отв. а) -11; б) $-2ab^2$.

2. Определить число инверсий в перестановке

8, 5, 2, 7, 4, 1, 6, 3. *Отв.* 19.

3. С помощью транспозиций выполнить переход к натуральному расположению от перестановки

2, 4, 5, 3, 1, 6, 7.

4. С каким знаком в состав определителя седьмого порядка входит член

$$a_{34}\ a_{15}\ a_{26}\ a_{43}\ a_{61}\ a_{52}\ a_{77}?$$

Отв. плюс.

5. Вычислить следующие определители:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

Отв. а) -15; б) -4.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что такое инверсия?
2. Что такое транспозиция? Какое влияние оказывает она на перестановку?
3. К какому типу относится перестановка, если известно, что она получена из натурального расположения четным (нечетным) числом транспозиций?
4. Дать определение определителя n-го порядка.
5. Как определить знак, стоящий перед членом определителя?
6. Назовите свойства определителей n-го порядка.
7. Как получается алгебраическое дополнение соответствующего элемента определителя?
8. Сколько членов содержит алгебраическое дополнение, если порядок определителя равен n?
9. Как отразится на алгебраических дополнениях изменение в определителе элементов соответствующего столбца.
10. Чему равна сумма произведений элементов какого-либо столбца на алгебраические дополнения элементов другого столбца?
11. Как вычисляется определитель третьего порядка по правилу Саррюса?
12. Как найти определитель n-го порядка:
    1) способом приведения к треугольному виду,
    2) способом разложения определителя по столбцам (строкам)?

Глава III

МАТРИЦЫ

§ 7. Матрицы и их ранг

1. *Матрицей называется множество чисел, образующих прямоугольную таблицу, которая содержит m строк и n столбцов.*

Таблицу, обозначающую матрицу, будем ограничивать справа и слева двойными вертикальными чертами:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1j} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2j} \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} \dots a_{ij} \dots & a_{in} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mj} \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} \qquad (1)$$

Числа a_{ij} называются *элементами* матрицы, где первый индекс есть номер строки, а второй — номер столбца.

Заметим, что матрица есть только таблица и смешивать ее с определителем нельзя.

Матрица (1) состоит из m строк и n столбцов. Будем говорить, что эта матрица типа $m \times n$. Матрицу (1) сокращенно записывают так:

$$\| a_{ij} \|, \text{ где } i = 1, 2, \dots, m; \qquad j = 1, 2, \dots, n. \qquad (2)$$

При $m = 1$ получаем *матрицу-строку*

$$\| a_{11} a_{12} \dots a_{1n} \|. \qquad (3)$$

Такая матрица состоит из одной строки.

При $n=1$ получаем *матрицу-столбец*

$$\left\|\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{matrix}\right\| \qquad (4)$$

Такая матрица состоит из одного столбца.

Если $m \neq n$, то матрица называется *прямоугольной*; при $m>n$ имеем *укороченную*, при $m<n$ — *удлиненную* матрицу.

Если $n=m$, то имеем *квадратную* матрицу. Число строк или столбцов квадратной матрицы называется ее *порядком*. Так, квадратная матрица из n строк и n столбцов называется матрицей *n-го порядка*.

Определителем квадратной матрицы назовем такой определитель, элементы которого равны элементам матрицы. Определитель матрицы A обозначается через $|A|$.

Среди квадратных матриц отметим так называемые *диагональные* матрицы, т. е. матрицы, у которых отличны от нуля лишь элементы, стоящие вдоль главной диагонали. Диагональная матрица имеет вид

$$\left\|\begin{matrix} a_{11} & 0 & \ldots 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0 & 0 & \ldots a_{nn} \end{matrix}\right\|,$$

будем ее обозначать символом $[a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{ii}, \ldots, a_{nn}]$.

Если в диагональной матрице все числа a_{ii} равны между собой ($a_{11}=a_{22}=\ldots=a_{nn}=a$), матрица называется *скалярной* и обозначается

$$\left\|\begin{matrix} a & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & a \end{matrix}\right\|,$$

или, сокращенно,

$$\| a \|$$

Если в скалярной матрице $\| a \|$ число $a = 1$, то матрица называется *единичной*, которую будем обозначать

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{matrix} \right\|,$$

или, сокращенно, буквой E (от слова «единица»).

Комплексные, в частности действительные, числа — *скаляры* — могут рассматриваться как матрицы типа 1×1. Таким образом, числа можно рассматривать как матрицы первого порядка.

2. Две матрицы называются *равными* тогда и только тогда, когда равны друг другу соответствующие элементы этих матриц. (Элементы, имеющие одинаковые номера строк и столбцов, являются соответствующими.)

Равные матрицы обязательно имеют одинаковое строение: или обе прямоугольные типа $m \times n$, или обе квадратные одного и того же порядка n.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой* или *нуль-матрицей* и обозначается символом 0 или

$$\left\| \begin{matrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Переставив в матрице типа $m \times n$:

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{matrix} \right\|,$$

строки со столбцами, получим так называемую *транспонированную* матрицу

$$\left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{matrix}\right\|.$$

Таким образом, транспонирование матрицы сводится к перемене ролей строк и столбцов. В дальнейшем часто будем обозначать матрицу не таблицей, как сделано здесь, а одной буквой (для этого используем прописные латинские буквы). В таком случае матрица, транспонированная для матрицы A, будет обозначаться значком T сверху: A^T. В частности, если данная матрица состоит всего из одного столбца

$$X = \left\|\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix}\right\|,$$

то транспонированная матрица

$$X^T = \| x_1, \ x_2, \ldots, x_n \|$$

состоит из одной строки

3. Квадратная матрица A равна транспонированной A^T в том и только в том случае, когда она *симметрична*, т. е. если $a_{ij} = a_{ji}$ при любых i и j. Очевидно, что матрица, транспонированная со строкой, есть столбец, составленный из тех же элементов.

Квадратная матрица A называется *вырожденной* (или *особенной*), если ее определитель равен нулю ($|A| = 0$) и *невырожденной* (или *неособенной*) в случае $|A| \neq 0$.

Из матрицы типа $m \times n$ можно, вычеркивая некоторое число строк и некоторое число столбцов, различными способами образовать квадратные матрицы. Определители получаемых таким образом матриц называются *минорами матрицы* типа $m \times n$. Некоторые из этих миноров могут быть отличны от нуля, другие, наоборот, равны нулю.

При транспонировании квадратной матрицы A величина ее определителя не меняется:

$$|A^T| = |A|.$$

Рассмотрим некоторые свойства миноров матрицы. Пусть дана матрица

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{Vmatrix}.$$

Из данной матрицы можно выделить 16 миноров первого порядка:

$$a_{11},\ a_{12}, \ldots, a_{21}, \ldots, a_{34},\ a_{41}, \ldots, a_{44};$$

36 миноров второго порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix};$$

16 миноров третьего порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix},$$

и один минор четвертого порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, общее число миноров первого, второго, третьего и четвертого порядков в данной матрице составляет 69, а наибольшим порядком обладает минор четвертого порядка.

Вообще, из матрицы можно составлять миноры, порядок которых не превышает меньшее из чисел m и n.

4. *Рангом* матрицы называется максимальный порядок отличных от нуля миноров матрицы. Матрица имеет

ранг r, если по крайней мере один из ее миноров r-го порядка отличен от нуля, а все миноры более высоких порядков, если они существуют, равны нулю.

Матрица будет нулевого ранга, если все ее элементы равны нулю.

Рассмотрим способ определения ранга матрицы, который заключается в применении так называемых элементарных преобразований матрицы, не меняющих ее ранга.

Элементарным преобразованием матрицы называется любая из следующих операций;

1°) перемена местами любых двух столбцов (строк);

2°) умножение каждого элемента произвольного столбца (строки) на один и тот же отличный от нуля множитель;

3°) вычеркивание столбца (строки), целиком состоящего из нулей;

4°) прибавление к элементам произвольного столбца (строки) соответствующих элементов любого другого столбца (строки), умноженных на произвольное число λ.

Если с помощью одной из этих операций можно перейти от некоторой матрицы A к матрице B, то, очевидно, можно и обратно получить матрицу A из B с помощью одной из элементарных операций.

Две матрицы называются *эквивалентными*, если от каждой из них можно перейти к другой с помощью конечного числа элементарных преобразований.

Теорема. *Эквивалентные матрицы имеют одинаковые ранги.*

Доказательство. Преобразования 1°, 2° и 3°, очевидно, не меняют ранга матрицы, так как эти преобразования не влияют на равенство или неравенство нулю любого минора этой матрицы. Остается, таким образом, показать, что также и операция 4° оставляет ранг матрицы неизменным.

Преобразование 4° состоит в том, что к i-й строке матрицы A прибавляют j-ю строку, умноженную на λ, получая, таким образом, матрицу B. Пусть ранг матрицы A равен r, докажем прежде всего, что этот ранг элементарным преобразованием 4° не может быть повышен, т. е. что все миноры $(r+1)$-го порядка матрицы B равны нулю.

По предположению все миноры $(r+1)$-го порядка матрицы A равны нулю, и некоторые из этих миноров, очевидно, не меняются преобразованием, а именно те, которые не содержат i-й строки или которые содержат обе строки, i-ю и j-ю. Остальные миноры, содержащие i-ю строку, но не содержащие j-й, после преобразования принимают вид:

$$M_1 \pm \lambda M_2,$$

где M_1 и M_2 — миноры $(r+1)$-го порядка матрицы A ранга r, и потому $M_1 = 0$, $M_2 = 0$. Таким образом, преобразование 4° никогда не повышает ранга матрицы.

Но ранг матрицы B не может быть также меньше ранга A, ибо тогда существовало бы некоторое элементарное преобразование 4° для перехода от B к A; это преобразование должно было бы повысить ранг B, что невозможно, как мы только что в этом убедились.

Рассмотренную теорему можно применить для определения ранга матрицы, так как с помощью элементарных преобразований часто бывает нетрудно существенно упростить матрицу.

Отметим, что прямоугольная матрица имеет *диагональную* форму, если все ее элементы равны нулю, кроме элементов $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{rr}$, равных единице. Ранг этой матрицы равен r, причем r не может превышать наименьшее из чисел строк и столбцов матрицы.

Путем элементарных преобразований всякую матрицу можно привести к диагональной форме. Подсчитав в такой матрице число единиц, стоящих на главной диагонали, получим ранг матрицы.

Пример. Для нахождения ранга матрицы

$$\begin{Vmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{Vmatrix}$$

переставим в ней первый и второй столбцы, а затем умножим первую строку на $\frac{1}{2}$:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -4 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & 0 & -10 \\ 3 & 2 & 0 \end{Vmatrix}$$

Прибавим к третьему столбцу полученной матрицы удвоенный первый столбец, а затем прибавим некоторое кратное новой первой строки к каждой из остальных строк:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{Vmatrix}$$

Теперь умножим вторую строку на —1, вычтем из третьего столбца утроенный второй столбец, а затем вычтем из третьей и пятой строк некоторые кратные новой второй строки. Тогда найдем искомую диагональную форму

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Таким образом, ранг данной матрицы равен двум.

§ 8. Действия над матрицами; свойства матриц

1. *Суммой* матриц A и B n-го порядка условимся называть такую матрицу C, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B. Действие сложения матриц имеет смысл только для матриц одного порядка.

Пусть даны матрицы A и B n-го порядка:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix} \text{ и } B = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{Vmatrix}$$

Тогда сумма матриц $C = A + B$ будет

$$C = \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{Vmatrix},$$

где

$$c_{11} = a_{11} + b_{11},\ c_{12} = a_{12} + b_{12}, \dots, c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \dots, c_{nn} = a_{nn} + b_{nn}.$$

Пример.

$$\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 8 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} -6 & 3 & 21 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & -40 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -4 & 4 & 24 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & -32 \end{Vmatrix}$$

Действие сложения матриц непосредственно сводится к сложению их элементов, являющихся числами, и обладает поэтому важнейшими свойствами сложения чисел.

Пусть матрицы A, B, C одного порядка. Тогда, как это непосредственно следует из определения сложения матриц, имеют место следующие свойства:

1) коммутативный (переместительный) закон для сложения:

$$A + B = B + A$$

2) ассоциативный (сочетательный) закон для сложения:

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

Существует нулевая матрица 0, такая, что $A + 0 = A$, где A — любая матрица.

Для любой матрицы A существует *противоположная* матрица $-A$, такая, что

$$A+(-A)=0.$$

Произведением матрицы

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

на число λ *называется матрица*

$$\lambda A=\begin{Vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \ldots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \ldots & \lambda a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \ldots & \lambda a_{nn} \end{Vmatrix}$$

Действие умножения матрицы на число, как и в случае сложения матриц, непосредственно сводится к умножению на это число всех элементов матрицы.

Пример.

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{Vmatrix}\cdot 3=\begin{Vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 9 & 15 & 6 \\ 12 & 9 & 3 \end{Vmatrix}$$

Из определения произведения матрицы на число следует: 1) если все элементы матрицы имеют общий множитель, то его можно вынести за знак матрицы, например,

$$\begin{Vmatrix} 4 & 2 & 8 & 6 \\ 12 & 6 & 8 & 2 \\ 2 & 10 & 2 & 4 \end{Vmatrix}=2\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 2 \end{Vmatrix},$$

2) если какую-либо матрицу умножить на число нуль, то получим нулевую матрицу:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{Vmatrix}\cdot 0=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

2. Действие умножения матрицы на матрицу определяется более сложным образом.

Пусть даны две квадратные матрицы:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} \text{ и } B = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{Vmatrix}.$$

Произведением матриц A и B, по определению будет

$$AB = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{Vmatrix}.$$

Таким образом, чтобы получить, например, элемент первой строки и первого столбца матрицы произведения (c_{11}) достаточно умножить элементы первой строки матрицы A, т. е. a_{11} и a_{12}, соответственно на элементы первого столбца матрицы B, т. е. на b_{11} и b_{12} и полученные произведения сложить.

Вообще, элемент, стоящий на пересечении i-й строки и k-го столбца, матрицы произведения, получается подобным же образом из i-й строки матрицы A и k-го столбца матрицы B. Поэтому говорят, что матрица C получается путем умножения строк матрицы A на столбцы матрицы B.

Напишем произведение матриц третьего порядка:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{Vmatrix},$$

где $c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}$, $c_{23} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33}$,

$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}$, $c_{31} = a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31}$,

$c_{13} = a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33}$, $c_{32} = a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{23}b_{32}$,

$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31}$, $c_{33} = a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33}$

$c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}$, Пример. Найти произведение матриц A и B, где

$$A=\begin{Vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix}, \quad B=\begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$C=AB=\begin{Vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{Vmatrix}.$$

3. Укажем теперь на две особенности умножения матриц.

Во-первых, при умножении матриц коммутативный закон может не иметь места, т. е. AB не всегда равно BA. Например:

а) $$\begin{Vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} -3 & 2 \\ 11 & 6 \end{Vmatrix};$$

б) $$\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 1 & 6 \\ 7 & 2 \end{Vmatrix}.$$

Во-вторых, известно, что произведение двух чисел равно нулю в том и только в том случае, если один из сомножителей равен нулю. При умножении матриц это положение может оказаться неверным. Например:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Действительно, произведение равно нуль-матрице, хотя ни один из сомножителей не является нулевой матрицей.

Можно доказать, что *определитель матрицы-произведения AB равен произведению определителя матрицы A на определитель матрицы B.*

Так, например, произведение матриц

$$A=\begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{Vmatrix} \text{ и } B=\begin{Vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -4 \end{Vmatrix} \text{ будет } AB=\begin{Vmatrix} 4 & -10 \\ 7 & -17 \end{Vmatrix}$$

Вычислим теперь соответствующие определители:

$$|A|=\begin{vmatrix}2&1\\3&2\end{vmatrix}=1,\ |B|=\begin{vmatrix}1&-3\\2&-4\end{vmatrix}=2,\ \ |AB|=\begin{vmatrix}4&-10\\7&-17\end{vmatrix}=2,$$

т. е.

$$|A|\cdot|B|=|A\cdot B|.$$

Из определений суммы матриц, произведения матрицы на число и произведения матриц вытекают следующие свойства (проверка их предоставляется читателю):

Коммутативность:

а) $A+B=B+A$;

б) $\lambda A=A\lambda$.

Ассоциативность:

а) $A+(B+C)=(A+B)+C$;

б) $A(BC)=(AB)C$;

в) $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$;

г) $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)=\lambda(\mu A)$.

Дистрибутивность:

а) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$;

б) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$;

в) $A(B+C)=AB+AC$;

г) $(A+B)C=AC+BC$.

Во всех этих свойствах A, B и C — произвольные матрицы типа $m\times n$, λ и μ — произвольные числа (в случае умножения матрицы на матрицу $m=n$).

4. Рассмотрим действия над прямоугольными матрицами. Сложение матриц, как мы установили в п. 1, определяется только для матриц одного типа.

Действие умножения матрицы A на матрицу B имеет смысл в том и только в том случае, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк во второй матрице (не наоборот!). Можно, например, умножать матрицу A на матрицу B, если

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{Vmatrix},$$

но нельзя в этом случае умножать матрицу B на матрицу A, так как число столбцов матрицы B не равно числу строк матрицы A. В результате умножения двух матриц получаем матрицу, содержащую столько строк, сколько их содержала первая из матриц и столько столбцов, сколько их содержалось во второй матрице.

Например,

$$\begin{Vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 9 & 3 \\ 10 & 3 \\ 24 & 10 \end{Vmatrix}.$$

Рассмотрим действие умножения матриц в общем случае.

Пусть заданы матрицы A и B, причем число столбцов первой из них равно числу строк второй:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{Vmatrix}$$

тогда произведением матрицы A на B будет матрица

$$C = \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mp} \end{Vmatrix},$$

где

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

$$(i = 1,\ 2, \dots, m; \quad j = 1,\ 2, \dots,\ p).$$

Закон составления элементов матрицы C следующий. Элемент c_{ij} (из i-й строки и j-го столбца) матрицы C представляет собой сумму попарных произведений соответствующих элементов i-й строки матрицы A и j-го столбца матрицы B (заметим, что строки матрицы A имеют такое же количество элементов n, как и столбцы матрицы B). Эта матрица C и называется произведением матриц A и B.

Сформулируем правило умножения матриц.

Чтобы получить элемент c_{ij}, стоящий в i-й строке и j-м столбце произведения двух матриц, нужно элементы i-й строки первой матрицы умножить на соответственные элементы j-го столбца второй матрицы и полученные произведения сложить.

Пример 1. Найти произведение матриц

$$\begin{Vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Vmatrix}$$

Решение.

$$\begin{Vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3\cdot 1 + 2\cdot 2 + 1\cdot 3 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 2 + 2\cdot 3 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 3+4+3 \\ 0+2+6 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 10 \\ 8 \end{Vmatrix}$$

Пример 2. Найти произведение матриц

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}$$

Решение.

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{Vmatrix}$$

Пример 3. Найти произведение матриц

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Vmatrix}$$

Решение.

$$AX = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \end{Vmatrix}.$$

5. Для обозначения матриц мы уже пользовались прописными буквами латинского алфавита. Применение таких сокращенных обозначений вносит простоту в теорию матриц, охватывая в кратких формулах, напоминающих формулы обычной алгебры, сложные соотношения, связывающие элементы матриц. Так, например, совокупность линейных однородных функций

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{gathered}$$

в матричной форме можно записать кратко

$$AX,$$

где A — матрица коэффициентов при переменных, т. е.

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix},$$

X — столбец, составленный из переменных, x_1, $x_2, \ldots, x_n$, т. е.

$$X = \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} \right\|.$$

Таким образом,

$$AX = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{matrix} \right\|$$

Система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdot \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

записывается в матричной форме так:

$$AX = B,$$

где

$$A = \| a_{ij} \|, \quad X = \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} \right\|, \quad B = \left\| \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix} \right\|$$

6. Очевидно, для единичной матрицы E ее определитель равен единице, т. е. $|E| = 1$. Для любой матрицы

$$A = \|a_{ij}\| \quad \text{имеем} \quad AE = EA = A.$$

Единичная матрица играет роль единицы.

Обратной матрицей по отношению к данной называется матрица, которая, будучи умноженной как справа так и слева на данную матрицу, дает единичную матрицу.

Для матрицы A обозначим обратную ей матрицу через A^{-1}. Тогда, по определению, имеем

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E;$$

в произведении $A^{-1}A$ матрицу A^{-1} будем называть обратной к A слева, а в произведении AA^{-1} эту матрицу A^{-1} обратной к A справа.

Если существует обратная матрица A^{-1}, то матрица A называется *обратимой*. Задача численного нахождения обратной матрицы находит применение в решении систем линейных уравнений и в вычислительных методах линейного программирования.

Обращением матрицы, если она существует, называется операция вычисления A^{-1}.

Для вырожденной матрицы обратная матрица вообще не существует.

Докажем существование обратной матрицы для всякой невырожденной матрицы A и найдем ее вид.

Теорема. *Необходимым и достаточным условием существования матрицы A^{-1}, обратной A, является невырожденность матрицы A.*

Доказательство. Пусть матрица A имеет обратную A^{-1}, т. е. $AA^{-1} = E$. Определитель произведения матриц равен произведению определителей этих матриц (п. 3), т. е.

$$|AA^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}|.$$

Но $|AA^{-1}| = |E| = 1$, следовательно, $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$, и, значит, $|A| \neq 0$. Необходимое условие доказано.

Пусть матрица $A = \|a_{ij}\|$ невырожденная, т. е. ее определитель не равен нулю. Обозначим через A_{ij} алгебраическое дополнение элемента a_{ij} в определителе матрицы A, а определитель матрицы A через $D = |A|$.

Теперь рассмотрим матрицу

$$B = \begin{Vmatrix} \frac{A_{11}}{D} & \frac{A_{21}}{D} & \dots & \frac{A_{i1}}{D} & \dots & \frac{A_{n1}}{D} \\ \frac{A_{12}}{D} & \frac{A_{22}}{D} & \dots & \frac{A_{i2}}{D} & \dots & \frac{A_{n2}}{D} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1j}}{D} & \frac{A_{2j}}{D} & \dots & \frac{A_{ij}}{D} & \dots & \frac{A_{nj}}{D} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{D} & \frac{A_{2n}}{D} & \dots & \frac{A_{in}}{D} & \dots & \frac{A_{nn}}{D} \end{Vmatrix}$$

Пусть

$$AB = \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2j} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nj} & \dots & c_{nn} \end{Vmatrix}$$

Вычислим элемент, стоящий в i-й строке и j-м столбце произведения AB. Этот элемент

$$c_{ij} = a_{i1}\frac{A_{j1}}{D} + a_{i2}\frac{A_{j2}}{D} + \dots + a_{ij}\frac{A_{ji}}{D} + \dots + a_{in}\frac{A_{jn}}{D} =$$

$$= \frac{1}{D}(a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{ij}A_{ji} + \dots + a_{in}A_{jn}).$$

По свойству IV (стр. 30) о разложении определителей

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{ij}A_{ji} + \dots + a_{in}A_{jn} = 0 \text{ для } i \neq j$$

и

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{ij}A_{ji} + \dots + a_{in}A_{jn} = |A| = D$$

для $i = j$.

Таким образом, элементы матрицы $C=AB$, у которых номера строк равны номерам столбцов (т. е. элементы главной диагонали), равны 1, а все остальные элементы равны 0. Перемножив матрицу B на A, получим также E. Следовательно, B является обратной матрицей для A, что и требовалось доказать.

В принятом нами обозначении будем иметь

$$A^{-1} = \begin{Vmatrix} \frac{A_{11}}{D} & \frac{A_{21}}{D} & \dots & \frac{A_{n1}}{D} \\ \frac{A_{12}}{D} & \frac{A_{22}}{D} & \dots & \frac{A_{n2}}{D} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{D} & \frac{A_{2n}}{D} & \dots & \frac{A_{nn}}{D} \end{Vmatrix} \qquad (1)$$

Легко проверить, что $AA^{-1}=E$ и $A^{-1}A=E$.

Покажем, что для матрицы A может существовать только одна обратная ей матрица A^{-1}.

Предположим, что B и C — две обратные матрицы для A. Тогда

$$B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C.$$

Таким образом, для каждой невырожденной матрицы существует обратная матрица, притом единственная.

Укажем некоторые основные свойства обратной матрицы.

Свойство 1. Определитель обратной матрицы равен обратной величине определителя данной матрицы.

Пусть $A^{-1}A=E$.

Учитывая, что определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению определителей этих матриц, получим

$$|A^{-1}| \cdot |A| = |E| = 1.$$

Следовательно,

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}.$$

Свойство 2. Обратная матрица произведения квадратных матриц равна произведению обратных матриц сомножителей, взятому в обратном порядке: $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

Действительно,

$$AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$$

и

$$(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}EB = B^{-1}B = E$$

Таким образом, $B^{-1}A^{-1}$ есть обратная матрица для AB.

Свойство 3. Для транспонирования матрицы справедливо соотношение

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

Действительно, в левой и правой частях этого соотношения на пересечении i-й строки и k-го столбца стоит элемент, равный

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}.$$

Свойство 4. Транспонированная обратная матрица равна обратной от транспонированной данной матрицы:

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}.$$

В самом деле, транспонируя основное соотношение $A^{-1}A = E$, согласно свойству 3 будем иметь

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = E^T = E.$$

Отсюда, умножая последнее равенство на матрицу $(A^T)^{-1}$, получим

$$(A^T)^{-1}A^T(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}E$$

или

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1},$$

что и требовалось доказать.

С помощью обратной матрицы легко решаются матричные уравнения $AX = B$ и $YA = B$.

Действительно, если $|A| \neq 0$, то

$$X = A^{-1}B \quad \text{и} \quad Y = BA^{-1}.$$

Формула (1) дает возможность вычисления обратной матрицы с помощью определителей.

Пример 1. Найти матрицу, обратную матрице

$$A = \begin{Vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{Vmatrix}.$$

Определитель

$$D = |A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 5.$$

Значит, матрица A — невырожденная, и обратная ей матрица A^{-1} существует. Алгебраические дополнения

$$A_{11} = 5, \quad A_{21} = 4, \quad A_{31} = -1, \quad A_{12} = 10, \quad A_{22} = 12,$$
$$A_{32} = -3, \quad A_{13} = 0, \quad A_{23} = 1, \quad A_{33} = 1.$$

Следовательно,

$$A^{-1} = \begin{Vmatrix} \frac{5}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{10}{5} & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{0}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{Vmatrix}$$

Пример 2. Решить матричные уравнения $AX = B$, $YA = B$, где

$$A = \begin{Vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 8 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{Vmatrix}.$$

Легко видеть, что уравнения $AX = B$ и $YA = B$ имеют следующие решения:

$$X = A^{-1}B, \quad Y = BA^{-1}.$$

§ 9. Линейные преобразования

1. Часто бывает необходимо перейти от одной системы переменных, определяющих положение или состояние изучаемого объекта, к другой системе пере-

менных. Читатель уже встречался с переходом от одной системы переменных к другой в курсе аналитической геометрии. Так, при повороте осей прямоугольной си-

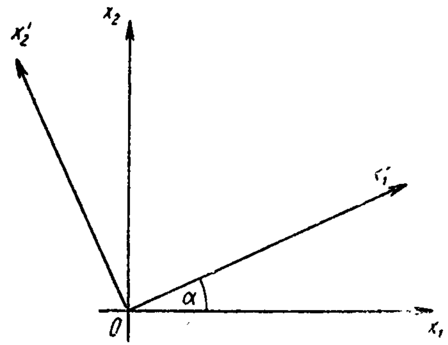

Рис. 3

стемы координат на плоскости на угол α (рис. 3) старые координаты точки x_1, x_2 выражаются через новые x_1', x_2' линейно с некоторыми числовыми коэффициентами ($\sin\alpha$, $\cos\alpha$) по формулам

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1'\cos\alpha - x_2'\sin\alpha \\ x_2 &= x_1'\sin\alpha + x_2'\cos\alpha. \end{aligned} \tag{1}$$

Другим примером замены переменных, когда старые переменные линейно выражаются через новые, является равномерное растяжение от начала координат или сжатие к началу координат. В этом случае имеем:

$$x_1 = ax_1', \quad x_2 = ax_2'.$$

Такую замену переменных называют обычно их *линейным преобразованием* (или линейной подстановкой). Окружности с центром в начале координат переходят при таком преобразовании в окружности с центром также в начале координат (рис. 4). При $a>1$ преобразование является растяжением, при $a<1$ — сжатием.

Положим в формулах (1) для выражения x_1

$$\cos\alpha = a_{11}, \quad -\sin\alpha = a_{12},$$

а для выражения x_2

$$\sin\alpha = a_{21}, \quad \cos\alpha = a_{22};$$

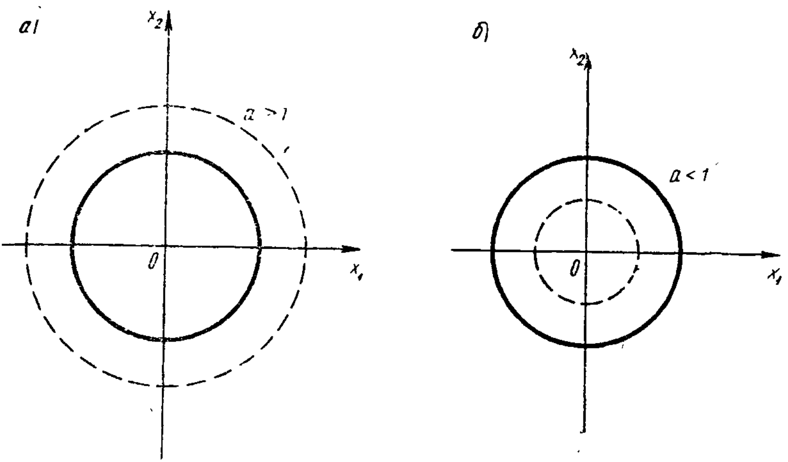

Рис. 4

тогда выражения (1) примут вид

$$x_1 = a_{11}x_1' + a_{12}x_2' \quad \text{и}$$

$$x_2 = a_{21}x_1' + a_{22}x_2'.$$

Точно так же, рассматривая преобразования координат в пространстве, будем иметь линейное преобразование, но уже не для двух, а для трех переменных:

$$x_1 = a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + a_{13}x_3',$$

$$x_2 = a_{21}x_1' + a_{22}x_2' + a_{23}x_3',$$

$$x_3 = a_{31}x_1' + a_{32}x_2' + a_{33}x_3'.$$

Вообще *линейным преобразованием переменных называется такой переход от системы n переменных x_1, $x_2, \ldots, x_n$ к системе n переменных $y_1, y_2, \ldots, y_n$, при кото-*

ром старые переменные выражаются через новые линейно с некоторыми числовыми коэффициентами:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \\
x_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_n &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n,
\end{aligned} \tag{2}
$$

где $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}$ — числовые коэффициенты.

Линейное преобразование (2) вполне характеризуется своей матрицей из коэффициентов

$$
A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{matrix} \right\|,
$$

так как два линейных преобразования с одинаковой матрицей A отличаются друг от друга лишь обозначением переменных.

Наоборот, задавая произвольную матрицу n-го порядка, можно составить определенное линейное преобразование, для которого эта матрица служит матрицей коэффициентов.

Поэтому вместо линейного преобразования можно говорить о матрице, а всякое свойство линейных преобразований можно соответствующим образом переносить на матрицы.

2. Пусть, теперь после линейного преобразования (2) выполнено линейное преобразование

$$
\begin{aligned}
y_1 &= b_{11}z_1 + b_{12}z_2 + \ldots + b_{1n}z_n, \\
y_2 &= b_{21}z_1 + b_{22}z_2 + \ldots + b_{2n}z_n, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_n &= b_{n1}z_1 + b_{n2}z_2 + \ldots + b_{nn}z_n,
\end{aligned} \tag{3}
$$

которое переводит систему переменных $y_1, y_2, \ldots, y_n$ в систему $z_1, z_2, \ldots, z_n$, обозначим матрицу этого преобразования через B.

Подставим в формулы (2) выражение для y_1, y_2, ..., y_n из (3), тогда получим линейные выражения для переменных x_1, x_2, ..., x_n через переменные z_1, z_2, ..., z_n.

Таким образом, результат последовательного выполнения двух линейных преобразований переменных снова будет линейным преобразованием. Обозначив через C матрицу линейного преобразования, являющегося результатом последовательного выполнения преобразований (2) и (3), имеем

$$C = AB.$$

т. е. матрица C есть произведение матрицы A на матрицу B. Следовательно, линейное преобразование переменных, полученное в результате последовательного выполнения двух линейных преобразований с матрицами A и B, имеет своей матрицей коэффициентов матрицу AB.

Пример. Пусть даны линейные преобразования

$$\begin{aligned} x_1 &= 3y_1 - y_2 \\ x_2 &= y_1 + 5y_2 \end{aligned} \tag{4}$$

и

$$\begin{aligned} y_1 &= z_1 + z_2 \\ y_2 &= 4z_1 + 2z_2. \end{aligned} \tag{5}$$

Результатом последовательного выполнения линейных преобразований будет линейное преобразование

$$x_1 = 3(z_1 + z_2) - (4z_1 + 2z_2) = -z_1 + z_2,$$
$$x_2 = (z_1 + z_2) + 5(4z_1 + 2z_2) = 21z_1 + 11z_2.$$

Этот результат можно получить также путем умножения матриц коэффициентов данных линейных преобразований. В самом деле, матрицы коэффициентов (4) и (5) есть

$$A = \left\| \begin{matrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{matrix} \right\|, \quad B = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{matrix} \right\|, \quad C = AB =$$

$$= \left\| \begin{matrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 3\cdot 1 + (-1)\cdot 4 & 3\cdot 1 + (-1)\cdot 2 \\ 1\cdot 1 + 5\cdot 4 & 1\cdot 1 + 5\cdot 2 \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} -1 & 1 \\ 21 & 11 \end{matrix} \right\|.$$

3. Среди всевозможных линейных преобразований выделим одно, а именно

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2, \ldots, y_n = x_n. \tag{6}$$

Его называют *тождественным* преобразованием, которое ведет себя совершенно так же, как единичная подстановка, потому что переменные $x_1, \ldots, x_n$ преобразованием (6) не изменяются. Его матрица

$$E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{Vmatrix}$$

как известно, называется единичной и ведет себя при умножении аналогично тождественному преобразованию; $AE = EA = A$ для любой матрицы A n-го порядка. В этом можно убедиться путем непосредственного перемножения матриц A и E и E и A.

В самом деле,

$$AE = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix} = A$$

$$EA = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix} = A.$$

Таким образом имеем $AE = EA = A$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Составить все определители второго порядка из матрицы

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{Vmatrix}$$

Отв. 18 определителей.

2. Найти миноры третьего порядка и определить ранг матрицы

$$\begin{Vmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & -5 & 4 & 2 & 7 \\ 1 & 5 & 2 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

Отв. Все миноры третьего порядка равны 0; ранг равен 2

3. Найти ранг матрицы

$$\begin{Vmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -5 & -6 & 1 \end{Vmatrix}$$

Отв. 3.

4. Найти сумму матриц

$$\begin{Vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

5. Вычислить произведение матрицы на число:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix} \cdot 5$$

6. Найти произведение AB матриц:

а) $A = \begin{Vmatrix} 4 & 9 \\ -1 & 3 \end{Vmatrix}$, $B = \begin{Vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{Vmatrix}$. *Отв.* $\begin{Vmatrix} -12 & -3 \\ -7 & 6 \end{Vmatrix}$

б) $A = \begin{Vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{Vmatrix}$, $B = \begin{Vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{Vmatrix}$. *Отв.* $\begin{Vmatrix} -6 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 9 \\ -12 & -3 & 14 \end{Vmatrix}$

в) $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 6 \end{Vmatrix}$, $B = \begin{Vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 1 \end{Vmatrix}$. *Отв.* $\begin{Vmatrix} 34 & 34 & 13 \\ 28 & 31 & 12 \\ 62 & 71 & 20 \end{Vmatrix}$

г) $A=\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \end{Vmatrix}$, $B=\begin{Vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 2 \\ 1 & 5 \end{Vmatrix}$. *Отв.* $\begin{Vmatrix} 20 & 20 \\ 46 & 18 \end{Vmatrix}$

д) $A=\begin{Vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 8 & 7 & 5 \\ 6 & 4 & 3 \end{Vmatrix}$, $B=\begin{Vmatrix} -2 \\ 3 \\ 9 \end{Vmatrix}$. *Отв.* $\begin{Vmatrix} 15 \\ 50 \\ 27 \end{Vmatrix}$

Перемножить указанные матрицы, переставив в них сомножители,

7. Найти матрицы, обратные данным:

а) $\begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{Vmatrix}$ б) $\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$.

Отв. а) $\begin{Vmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{Vmatrix}$ б) $\begin{Vmatrix} -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{Vmatrix}$

8. Написать линейное преобразование, соответствующее матрице

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix}$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Назовите виды матриц. Как они обозначаются?
2. Что называется диагональной матрицей? Единичной?
3. Что такое вырожденная и невырожденная матрица?
4. Что называется рангом матрицы?
5. Что такое сложение матриц?
6. Как умножить матрицу на скаляр?
7. Как составляется произведение двух матриц?
8. Чему равен определитель произведения матриц?
9. Дайте определение обратной матрицы.
10. Чему равна обратная матрица произведения квадратных матриц?
11. Каким законам подчиняются действия над матрицами?
12. В чем состоит матричная форма записи линейных функций, уравнений?
13. В чем смысл линейных преобразований?
14. Приведите примеры линейных преобразований.

Глава IV

ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 10. Понятие n-мерного пространства

1. Раньше под пространством мы подразумевали одномерное пространство (прямая линия), двухмерное пространство (плоскость) и пространство трех измерений.

Теперь расширим понятие пространства.

Можно установить взаимно однозначное соответствие между точками прямой и действительными числами, такое, что каждой точке прямой соответствует одно и только одно действительное число; каждому действительному числу соответствует одна и только одна точка прямой.

На плоскости в прямоугольной системе координат каждой точке соответствует пара действительных чисел, которые называются ее координатами. Точка с координатами a_1, a_2 обозначается символом (a_1, a_2). В этом символе существенно расположение чисел a_1 и a_2; число, стоящее первым, есть абсцисса точки, вторым — ее ордината. Таким образом, пара чисел (a_1, a_2) есть упорядоченная пара, так как числа a_1 и a_2 нельзя менять местами, не изменяя смысла.

В трехмерном пространстве точка A с координатами a_1, a_2, a_3 (рис. 5) обозначается символом (a_1, a_2, a_3). В этом знаке опять существенно расположение чисел a_1, a_2, a_3; числа по порядку слева направо являются абсциссой, ординатой и аппликатой точки. Здесь мы также имеем дело с упорядоченной совокупностью чисел, т. е. (a_1, a_2, a_3) — это упорядоченная тройка действительных чисел.

Таким образом, установлено соответствие между точками прямой и совокупностью действительных чисел; между точками плоскости и упорядоченными парами действительных чисел; наконец, между точками пространства и упорядоченными тройками действительных чисел. В силу такого соответствия совокупность действительных чисел называют также одномерным пространством, и отдельное число — точкой этого пространства; точно также называют совокупность упорядоченных пар действительных чисел двухмерным пространством, пары чисел — его точками; совокупность упорядоченных троек действительных чисел — трехмерным пространством, тройки чисел — его точками. Этот способ обозначения имеет то преимущество, что он сразу заключает в себе геометрическое истолкование.

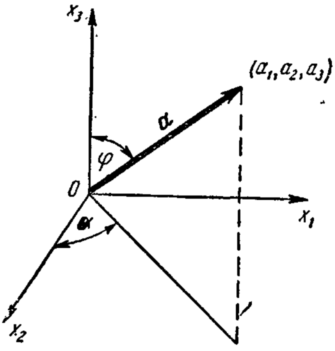

Рис. 5

В геометрии, механике, физике, экономике часто приходится изучать такие объекты, для задания которых недостаточно трех действительных чисел.

Пример 1. Совокупность шаров в трехмерном пространстве. Для того чтобы шар был полностью определен, нужно задать координаты его центра (три действительных числа) и радиус, т. е. задать упорядоченную систему четырех действительных чисел.

Пример 2. Различные положения твердого тела в пространстве. Положение тела будет вполне определено, если будут указаны координаты его центра тяжести (т. е. три действительных числа), направление некоторой фиксированной оси, проходящей через центр тяжести (два числа — два из трех направляющих косинусов) и, наконец, угол поворота вокруг этой оси. Таким образом, положение твердого тела в пространстве определяется системой из шести действительных чисел.

Пример 3. В случае, если район производит определенные промышленные и сельскохозяйственные товары, например, железнодорожные вагоны, автомашины, хлеб, молоко, спички и т. д., то для характеристики промышленного и сельскохозяйственного производства данного района требуется упорядоченная последовательность действительных чисел.

Пример 4. Количество авиационного горючего различных типов, используемых в стране, количество товаров различной номенклатуры, находящихся на данном складе, также определяется с помощью упорядоченной системы чисел.

Эти примеры указывают на целесообразность рассмотрения совокупности всевозможных упорядоченных последовательностей из n действительных чисел.

Упорядоченную систему из n чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n)$, т. е. конечную последовательность чисел, взятых в определенном порядке (в том порядке, в каком они написаны), будем называть *n-мерным вектором* (а также вектором или точкой n-мерного пространства). Числа a_i, где $i=1, 2, \ldots, n$ называются *составляющими*, или *компонентами* n-мерного вектора, а число n — *размерностью* вектора. Сам вектор $(a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n)$ обозначают полужирной строчной буквой, например, $\mathbf{a}=(a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n)$, а также прописными буквами латинского алфавита: $X, Y, Z, \ldots, P, Q$. Скаляры (числа) будем обозначать греческими буквами $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \ldots, \tau$.

В качестве примеров векторов укажем следующие:

1. Векторы — отрезки, выходящие из начала координат на плоскости или в трехмерном пространстве, будут при фиксированной системе координат соответственно двухмерными или трехмерными векторами.

2. Положение шара радиуса, равного единице, в пространстве можно определить при помощи трехмерного вектора (a, b, c), где a, b, c — координаты центра шара.

3. Коэффициенты всякого линейного уравнения с n переменными составляют n-мерный вектор.

4. Всякое решение $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n$ любой системы n линейных уравнений с n переменными также можно рассматривать как n-мерный вектор.

5. Строку или столбец определителя n-го порядка можно рассматривать как n-мерный вектор.

6. Если дана $(m \times n)$-матрица, то ее строки будут n-мерными векторами (т. е. векторы-строки матрицы), а столбцы — m-мерными векторами (векторы-столбцы матрицы).

7. Матрица $(m \times n)$ может рассматриваться так же, как mn-мерный вектор; достаточно прочесть элементы матрицы подряд, строчку за строчкой; в частности, всякая квадратная матрица порядка n может рассматриваться, как n^2-мерный вектор, причем, очевидно, всякий n^2-мерный вектор может быть получен этим путем из некоторой матрицы порядка n.

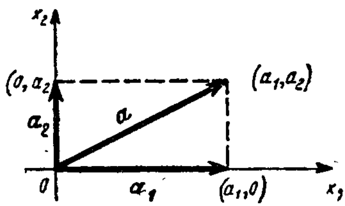

Рис. 6

Таким образом, векторами могут быть объекты различной физической или математической природы, однако для нас важна не природа этих объектов, а только те математические операции, которые можно производить над векторами и свойства которых не меняются, независимо от конкретного физического или геометрического смысла рассматриваемых векторов. Такими операциями являются, в первую очередь, сложение векторов и умножение векторов на числа.

2. Таким образом, в прямоугольной системе координат каждая точка плоскости может быть задана не только направленным отрезком (вектором **a**), но также и упорядоченной парой чисел (a_1, a_2), также называемой вектором (рис. 6); каждая точка в трехмерном пространстве — упорядоченной тройкой чисел (a_1, a_2, a_3). Координаты этих точек называют *составляющими* или *компонентами вектора*.

В двухмерном и трехмерном пространствах под равными векторами понимают такие, которые имеют одинаковую длину и одно и то же направление (рис. 7). Если векторы заданы своими компонентами, то два вектора $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ и $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ равны, когда $a_1 = b_1$ и $a_2 = b_2$; два вектора $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ равны, когда $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ и $a_3 = b_3$.

Два n-мерных вектора $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_i, ..., a_n)$ и $\mathbf{b} = (b_1, b_2, ..., b_i, ..., b_n)$ будут считаться *равными* тогда и только тогда, когда совпадают их компоненты, стоящие на одинаковых местах, т. е. когда $a_1=b_1$, $a_2=b_2$, ..., $a_n=b_n$, вообще, если $a_i=b_i$ при $i=1, 2, ..., n$.

Действие сложения векторов определяется по правилу параллелограмма. Пусть на плоскости даны векторы $\mathbf{x}=(x_1, x_2)$ и $\mathbf{y}=(y_1, y_2)$. *Суммой* этих векторов будет вектор $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ (рис. 8); его алгебраическое выражение:

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}=(x_1+y_1, \quad x_2+y_2).$$

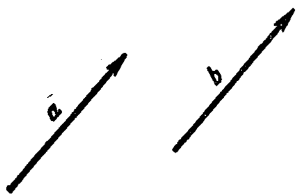

Рис. 7

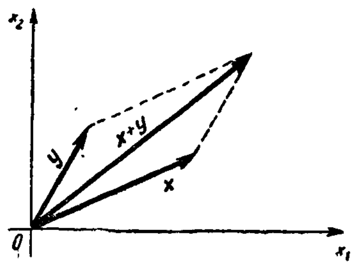

Рис. 8

Аналитически *умножение* вектора на число в обычном пространстве означает получение вектора, компоненты которого получаются из компонент первоначального вектора умножением их на это число.

Вектор $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)$ можно умножать на любое вещественное число λ. В этом случе $\lambda\mathbf{x}$ обозначает вектор, координаты которого λx_1, λx_2, λx_3. Если вектор умножить на -1, то вектор меняет свое направление на обратное.

В геометрии двухмерного и трехмерного пространства вводят понятие скалярного произведения двух векторов. *Скалярным произведением* векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется число, равное произведению их длин, умноженному на косинус угла между ними:

$$(\mathbf{ab})=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\widehat{ab})$$

В прямоугольной системе координат, в которой $\mathbf{a}=(a_1, a_2, a_3)$ и $\mathbf{b}=(b_1, b_2, b_3)$, скалярное произведение векторов будет

$$(\mathbf{ab}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3;$$

в частности, $(\mathbf{aa}) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$.

Длина вектора $\mathbf{a}$ равна $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$, или $\sqrt{(\mathbf{aa})}$. Если $(\mathbf{ab}) = 0$, то будем говорить, что $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ *ортогональны.*

Введем теперь операции сложения n-мерных векторов и умножения n-мерного вектора на число.

Суммой $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ *двух n-мерных векторов* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *будем называть n-мерный вектор* $\mathbf{a}+\mathbf{b} = (a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_n+b_n)$, *компоненты которого представляют собой суммы соответствующих компонент слагаемых векторов.*

Исходя из определения сложения, нельзя говорить о сумме векторов различной размерности. Если речь будет идти о сумме векторов без указания их размерности, то само собой будет подразумеваться, что размерность векторов одинакова.

Сложение векторов подчиняется коммутативному и ассоциативному законам сложения, т. е.

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}; \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}).$$

Разность двух векторов можно представить следующим образом

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1 - b_1, \ a_2 - b_2, \ldots, a_n - b_n).$$

Разность $\mathbf{a}-\mathbf{a}$ двух одинаковых векторов равна вектору $(0, 0, \ldots, 0)$, у которого все компоненты равны нулю. Вектор $(0, 0, \ldots, 0)$ обычно обозначается через $\mathbf{0}$ и называется *нулевым вектором.*

Разность $\mathbf{0}-\mathbf{a}$ обозначается через $-\mathbf{a}$ и называется вектором, противоположным вектору $\mathbf{a}$, т. е. вектор $-\mathbf{a} = (-a_1, -a_2, \ldots, -a_n)$.

Произведением вектора $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *на число* λ *называется вектор* $\lambda\mathbf{a} = \mathbf{a}\lambda = (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n)$, *компоненты которого равны произведению на* λ *соответствующих компонентов вектора* $\mathbf{a}$.

Умножение вектора на число подчиняется:

дистрибутивным законам $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$; $(\lambda_1 + \lambda_2)\mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{a}$ для любых чисел λ_1 и λ_2 и любых n-мерных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$;

коммутативному закону $\lambda\mathbf{a} = \mathbf{a}\lambda$ для любого числа λ и вектора $\mathbf{a}$.

Отметим еще следующие свойства:

а) $\lambda_1(\lambda_2\mathbf{a}) = (\lambda_1\lambda_2)\mathbf{a}$;

б) $\lambda(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} - \lambda\mathbf{b}$,
$(\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{a} - \lambda_2\mathbf{a}$;

в) $1\cdot\mathbf{a} = \mathbf{a}$, $0\cdot\mathbf{a} = 0$,
$(-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}$, $\lambda\cdot 0 = 0$;

г) если $\lambda\mathbf{a} = 0$, $\mathbf{a} \neq 0$, то $\lambda = 0$.

Обобщим понятие скалярного произведения двух векторов на n-мерное пространство. *Скалярным произведением двух векторов*

$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *называется выражение*

$$(\mathbf{ab}) = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n, \tag{1}$$

Для скалярного произведения имеют место следующие свойства:

$$(\mathbf{ab}) = (\mathbf{ba})$$

$$(\lambda\mathbf{a})\,\mathbf{b} = \lambda\,(\mathbf{ab})$$

Полагая в формуле (1) $\mathbf{b}=\mathbf{a}$, найдем:

$$(\mathbf{aa}) = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \tag{2}$$

Так как $a_1, a_2, \ldots, a_n$ по условию — числа действительные, то выражение (2) не может быть отрицательным.

Положительное значение корня квадратного из этого выражения будет *длиной вектора* $\mathbf{a}$:

$$\sqrt{(\mathbf{aa})} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}\;;$$

таким образом:

$$(\mathbf{aa}) = a^2$$

Если $(\mathbf{ab}) = 0$, то по аналогии с трехмерным пространством будем говорить, что $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ *ортогональны.*

3. Итак, два вектора определяют плоскость, или двухмерное пространство; три вектора определяют трехмерное пространство. Мы знаем также определение n-мерного вектора и операции над n-мерными векторами, в частности сложение векторов и умножение вектора на число. Теперь дадим понятие линейного векторного

пространства: *n-мерным векторным пространством* называется любая совокупность всех n-мерных векторов, для которых введены понятия сложения векторов и умножения вектора на число.

Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ — совокупность векторов в пространстве R_k. Тогда вектор $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{a}_k$ называется *линейной комбинацией векторов*.

Пусть векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — две линейные комбинации:

$$\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \alpha_k\mathbf{a}_k,$$

$$\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{a}_1 + \beta_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \beta_k\mathbf{a}_k.$$

Тогда

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (\alpha_1 + \beta_1)\,\mathbf{a}_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\,\mathbf{a}_2 + \ldots + (\alpha_k + \beta_k)\,\mathbf{a}_k$$

и

$$\lambda\mathbf{a} = (\lambda\alpha_1)\,\mathbf{a}_1 + (\lambda\alpha_2)\,\mathbf{a}_2 + \ldots + (\lambda\alpha_k)\,\mathbf{a}_k$$

есть также линейные комбинации векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$.

Таким образом, на векторное пространство переносятся основные свойства векторов двухмерного и трехмерного пространства.

§ 11. Линейная независимость векторов

1. Для линейных уравнений, векторов в трехмерном пространстве и на плоскости, для n-мерного векторного пространства и т. д. важную роль играет понятие *линейной независимости.*

При решении систем уравнений часто приходится либо умножать обе части уравнения на один и тот же множитель, либо почленно складывать уравнения, либо последовательно выполнять обе эти операции. Будем называть *линейной комбинацией уравнений* всякое уравнение, которое можно получить из данных уравнений умножением обеих частей каждого из них на некоторый множитель и последующим почленным сложением их.

Совокупность векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ (при $n \geqslant 2$) называется *линейно зависимой*, если хотя бы один из этих векторов является линейной комбинацией остальных векторов этой совокупности. В частности, на плоскости любые три вектора линейно зависимы, так как один из них можно записать как линейную комбинацию двух других (рис. 9). Если же ни один из векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ не является линейной комбинацией остальных, то эти векторы называются *линейно независимыми*.

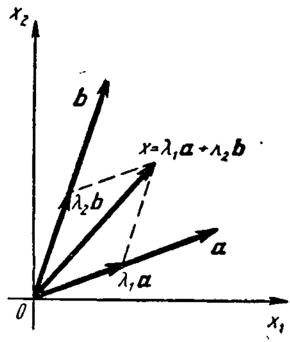

Рис. 9

Для линейной независимости векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ необходимо и достаточно, чтобы соотношение $\lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2+\ldots+\lambda_n\mathbf{a}_n=0$ выполнялось только при $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$. И наоборот, совокупность векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ линейно зависима тогда и только тогда, когда существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ не все равные нулю, что имеет место равенство

$$\lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2+\ldots+\lambda_n\mathbf{a}_n=0.$$

Пример 1. Система векторов $\mathbf{a}_1=(5, 2, 1)$, $\mathbf{a}_2=(-1, 3, 3)$, $\mathbf{a}_3=(9, 7, 5)$ и $\mathbf{a}_4=(3, 8, 7)$ линейно зависима, так как векторы связаны соотношением

$$4\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2-3\mathbf{a}_3+2\mathbf{a}_4=0, \quad \text{причем } \lambda_1=4,\ \lambda_2=-1,$$

$$\lambda_3=-3,\ \lambda_4=2.$$

В этом соотношении все коэффициенты отличны от нуля. Между векторами существуют, однако, и другие линейные зависимости, в которых некоторые из коэффициентов равны нулю, например,

$$2\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_3=0; \quad 3\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3-2\mathbf{a}_4=0.$$

Пример 2. Векторы $\mathbf{a}_1=(2, 1, 0)$, $\mathbf{a}_2=(0, 1, 1)$ и $\mathbf{a}_3=(4, 5, 3)$ линейно зависимы, так как $2\mathbf{a}_1+3\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_3=0$.

В самом деле,

$$2(2, 1, 0)+3(0, 1, 1)-(4, 5, 3)=(4, 2, 0)+$$

$$+(0, 3, 3)+(-4, -5, -3)=(4-4, 2+3-5, 3-3)=$$

$$=(0, 0, 0)=0.$$

Пример 3. Векторы $\mathbf{b}_1=(1, 0, 0)$, $\mathbf{b}_2=(0, 12, 0)$ и $\mathbf{b}_3=(0, 0, 72)$ линейно независимы.

Действительно,

$$\lambda_1\mathbf{b}_1+\lambda_2\mathbf{b}_2+\lambda_3\mathbf{b}_3=0,$$

$$\lambda_1(1, 0, 0)+\lambda_2(0, 12, 0)+\lambda_3(0, 0, 72)=(\lambda_1, 12\lambda_2, 72\lambda_3).$$

Вектор $(\lambda_1, 12\lambda_2, 72\lambda_3)$ будет нулевым только в том случае, если $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$.

Пример. 4. Пусть $\mathbf{a}_1=(2, 4, 1, -1)$, $\mathbf{a}_2=(-2, 0, 3, 0)$, $\mathbf{a}_3=(4, 1, 2, 0)$ — три четырехмерных вектора.

Вектор $\mathbf{b}=2\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_3+3\mathbf{a}_3$ является линейной комбинацией вектора $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$.

Найдем составляющие (компоненты) вектора $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{b}=2(2, 4, 1, -1)-(-2, 0, 3, 0)+3(4, 1, 2, 0)=$$
$$=(4, 8, 2-2)+(2, 0,-3, 0)+(12, 3, 6, 0)=(18, 11, 5, -2)$$

Пример 5. Найдем все значения λ_1, λ_2, λ_3, при которых выполняется равенство

$$\lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2+\lambda_3\mathbf{a}_3=0 \tag{1}$$

где

$$\mathbf{a}_1=(2, 1, 0), \quad \mathbf{a}_2=(0, -2, 1), \quad \mathbf{a}_3=(1, 2, -1).$$

Подставив в равенство (1) компоненты векторов, получим

$$\lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2+\lambda_3\mathbf{a}_3=\lambda_1(2, 1, 0)+\lambda_2(0, -2, 1)+$$
$$+\lambda_3(1, 2, -1)=(2\lambda_1, \lambda_1, 0)+(0, -2\lambda_2, \lambda_2)+$$
$$+(\lambda_3, 2\lambda_3, -\lambda_3)=(2\lambda_1+\lambda_3, \lambda_1-2\lambda_2+2\lambda_3, \lambda_2-\lambda_3).$$

По определению два вектора равны, если равны их составляющие, стоящие на одинаковых местах, т. е. из векторного равенства

$$(2\lambda_1+\lambda_3, \lambda_1-2\lambda_2+2\lambda_2, \lambda_2-\lambda_3)=(0, 0, 0)$$

следует, что

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 \qquad\quad + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1-2\lambda_2+2\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2-\lambda_3 &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Очевидно, что система уравнений (2) имеет нулевое решение:

$$\lambda_1 = 0; \quad \lambda_2 = 0; \quad \lambda_3 = 0.$$

Число уравнений системы (2) равно числу переменных, а определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

Следовательно, система (2) имеет единственное решение:

$$\lambda_1 = 0; \quad \lambda_2 = 0; \quad \lambda_3 = 0.$$

Итак, линейная комбинация векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ равна нулевому вектору только тогда, если $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$.

Пример 6. Показать, что существуют числа λ_1, λ_2, λ_3 не все равные нулю, такие, что

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3 = 0,$$

где

$$\mathbf{a}_1 = (1, 2, 0), \quad \mathbf{a}_2 = (2, 1, 3), \quad \mathbf{a}_3 = (0, 3 - 3).$$

Решение.

$$2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3 = 2(1, 2, 0) - (2, 1, 3) - (0, 3 - 3) =$$
$$= (2, 4, 0) + (-2, -1, -3) + (0, -3, 3) = (0, 0, 0).$$

Таким образом, существуют числа, не равные нулю,

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = -1,$$

такие, что линейная комбинация

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3 = 0,$$

где 0 — нулевой вектор.

Рассмотренные примеры показывают, что для некоторых векторов равенство

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3 + \ldots + \lambda_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0} \qquad (3)$$

выполняется только тогда, когда

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$$

и существуют такие векторы, что равенство (3) выполняется для них не только при

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

2. Для векторов в обычном трехмерном пространстве понятия линейной зависимости и независимости имеют простой геометрический смысл.

Пусть имеются два линейно зависимых вектора $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$; один из векторов является линейной комбинацией

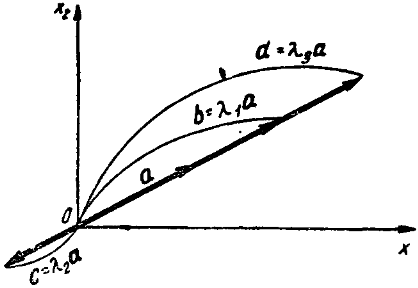

Рис. 10

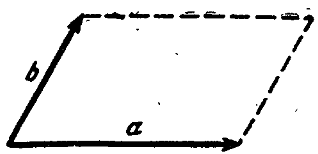

Рис. 11

второго, т. е. просто отличается от него численным множителем. Геометрически это означает, что оба вектора находятся на общей прямой; они могут иметь одинаковое или противоположное направление. На рис. 10 изображены векторы $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$, каждый из которых выражается как произведение чисел λ_1, λ_2 и λ_3 на вектор $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{b} = \lambda_1 \mathbf{a}, \quad \mathbf{c} = \lambda_2 \mathbf{a}, \quad \mathbf{d} = \lambda_3 \mathbf{a}.$$

Два вектора называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Если же два вектора расположены под углом друг к другу, как например $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ (рис. 11), то в этом случае нельзя получить один из них умножением другого на число. Такие векторы будут линейно независимы. Следовательно, линейная независимость двух векторов **a** и **b** означает, что эти векторы не могут быть уложены на одну прямую; их направления существенно различны. Любой третий вектор на плоскости можно представить лишь как линейную комбинацию этих векторов.

На плоскости двум линейно независимым векторам $\mathbf{a}=(a_{11}, a_{21})$ и $\mathbf{b}=(a_{12}, a_{22})$ соответствует определитель $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, не равный нулю. Абсолютное значение этого определителя равно площади параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b**.

Рассмотрим теперь, что означает линейная зависимость и независимость трех векторов. Допустим, что векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ и $\mathbf{a}_3$ линейно зависимы и положим, для определенности, что вектор $\mathbf{a}_3$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$, т. е. $\mathbf{a}_3$ расположен в плоскости, содержащей векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$.

Таким образом, векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ находятся в одной плоскости.

И наоборот, если векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ лежат в одной плоскости, то они линейно зависимы.

Действительно, если векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ не лежат на одной прямой, то $\mathbf{a}_3$ можно разложить по $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$, т. е. представить $\mathbf{a}_3$ в виде линейной комбинации векторов $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$. Если же векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ лежат на одной прямой, то они линейно зависимы.

Итак, линейная зависимость трех векторов равносильна тому, что они лежат в одной плоскости или параллельны некоторой плоскости. Векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ линейно независимы в том и только в том случае, если они не лежат на одной плоскости.

В трехмерном пространстве три линейно независимых вектора $\mathbf{a} = (a_{11}, a_{21}, a_{31})$, $\mathbf{b} = (a_{12}, a_{22}, a_{32})$ и $\mathbf{c} = (a_{13}, a_{23}, a_{33})$, образуют параллелепипед (рис. 12). В этом случае абсолютная величина определителя $\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix}$ отлична от нуля и равна объему параллелепипеда.

Если в трехмерном пространстве заданы три вектора, выходящие из начала координат и не лежащие на одной плоскости, то любой четвертый вектор этого пространства выражается как линейная комбинация данных векторов. Четыре вектора в трехмерном пространстве всегда линейно зависимы. Действительно, если векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ линейно зависимы, то при любом $\mathbf{a}_4$ векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$ тоже линейно зависимы. Если же $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ линейно независимы, то они не лежат в одной плоскости, и любой вектор можно разложить по $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, т. е. представить в виде их линейной комбинации.

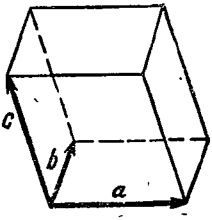

Рис. 12

Проведенные рассуждения можно обобщить следующим образом:

В n-мерном пространстве векторы

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$$

линейно зависимы в том и только в том случае, если они лежат в пространстве с размерностью*, меньшей n.

Отметим, что если часть векторов линейно зависима, то вся совокупность векторов также линейно зависима.

Теорема. *Если векторы* $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_l$ *являются линейными комбинациями векторов* $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b}_k$ и $l>k$, *то векторы* $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_l$ *линейно зависимы.*

Для $k=1$ теорема очевидна. Для $k>1$ теорема доказывается методом математической индукции.

3. Векторы, направленные по координатным осям и имеющие длины, равные единице, называются *единичными векторами* или *ортами.* Условимся обозначать единичный вектор через $\mathbf{e}_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$.

В n-мерном пространстве единичные векторы можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0) \\ \mathbf{e}_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{e}_n &= (0, 0, 0, \ldots, 1) \end{aligned} \tag{4}$$

* Размерностью векторного пространства называется число элементов в максимальной линейно независимой системе векторов этого пространства.

Приведем теперь без доказательства следующую теорему.

Теорема. *Всякий $n+1$ вектор n-мерного пространства составляет линейно зависимую систему.*

Если вектор $\mathbf{b}$ является комбинацией векторов

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ \ldots \ , \mathbf{a}_m, \tag{5}$$

то часто говорят, что $\mathbf{b}$ линейно выражается через систему (5). Понятно, что если вектор $\mathbf{b}$ линейно выражается через часть этой системы, то он будет линейно выражаться и через систему (5), для чего достаточно остальные векторы системы взять с коэффициентами, равными нулю. Обобщая эту терминологию, говорят, что система векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ линейно выражается через систему (5), если всякий вектор $\mathbf{b}_i$, $i=1, 2, \ldots, n$ является линейной комбинацией векторов системы (5).

Две системы векторов называются *эквивалентными*, если каждая из них линейно выражается через другую.

Заметим далее, что, если две системы векторов эквивалентны и если некоторый вектор линейно выражается через одну из этих систем, то он будет линейно выражаться и через другую.

Нельзя утверждать, что если одна из двух эквивалентных между собой систем векторов линейно независима, то этим же свойством обладает и другая система.

Приведем (без доказательства) следующую теорему.

Теорема. *Если в n-мерном векторном пространстве даны две системы векторов:*

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ \ldots \ , \mathbf{a}_m$$

$$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ \ldots \ , \mathbf{b}_n,$$

из которых первая линейно независима и линейно выражается через вторую, то число векторов в первой системе не больше, чем во второй, т. е. $m \leqslant n$.

Из этой теоремы вытекает следующий результат: всякие две эквивалентные линейно независимые системы векторов содержат равное число векторов.

Следствием этого результата будет такое утверждение: если в данной линейно зависимой системе векторов взяты две максимальные линейно независимые подсистемы, т. е. такие подсистемы, к которым нельзя присоединить ни одного вектора данной системы, не нарушая линейной независимости, то эти подсистемы содержат равное число векторов.

4. Пользуясь матрицами, выясним, будет ли данная система векторов линейно зависимой или нет.

Теорема. *Максимальное число линейно независимых строк всякой матрицы равно максимальному числу ее линейно независимых столбцов, т. е. равно рангу матрицы.*

Для доказательства сделаем строки матрицы ее столбцами, сохраняя их нумерацию. При этом максимальный порядок отличных от нуля миноров матрицы не может измениться, так как замена строк столбцами не меняет определителя, а для всякого минора исходной матрицы минор, полученный из него этой заменой, содержится в новой матрице (обратное утверждение также верно). Отсюда следует, что ранг новой матрицы равен рангу исходной матрицы, он равен, вместе с тем, максимальному числу линейно независимых столбцов исходной матрицы, т. е. максимальному числу линейно независимых строк исходной матрицы.

§ 12. Базис векторного пространства

1. В трехмерном пространстве любые три вектора $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, не лежащие в одной плоскости (т. е. линейно независимые), образуют *базис* этого пространства. Это означает, что любой вектор пространства может быть разложен по векторам $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, т. е. представлен в виде их линейной комбинации. В трехмерном пространстве существует сколько угодно троек линейно независимых векторов, но любые четыре вектора уже линейно зависимы.

Пространство всех n-членных столбцов n-мерно в смысле данного определения. Действительно, в таком пространстве существует n линейно независимых векторов, например, векторы

$$\mathbf{e}_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad \ldots, \quad \mathbf{e}^n = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{Vmatrix}. \qquad (1)$$

но всякий вектор $\begin{Vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_n \end{Vmatrix}$ этого пространства является их линейной комбинацией, именно $\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{e}_n$. Следовательно, в силу теоремы о линейной зависимости линейных комбинаций любые векторы с числом, большим n, линейно зависимы.

2. Введем теперь понятие базиса для n-мерного пространства. *Базисом* называется такая совокупность линейно независимых векторов пространства, при которой любой вектор пространства является линейной комбинацией векторов этой совокупности. Так, в пространстве столбцов базисом является, например, совокупность векторов (1).

В n-мерном линейном пространстве любая совокупность из n линейно независимых векторов образует базис пространства. Действительно, пусть

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$$

линейно независимые векторы n-мерного линейного пространства и $\mathbf{A}$ какой-либо вектор пространства. Тогда векторы

$$\mathbf{A}, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$$

линейно зависимы (ибо их число больше n), т. е. найдутся числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \lambda$ не равные нулю одновременно, такие, что

$$\lambda\mathbf{A} + \lambda_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \lambda_n\mathbf{e}_n = 0.$$

При этом $\lambda \neq 0$, ибо, если бы $\lambda = 0$, векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, были бы линейно зависимы. Следовательно,

$$\mathbf{A} = -\frac{\lambda_1}{\lambda}\mathbf{e}_1 - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda}\mathbf{e}_n,$$

т. е. любой вектор пространства есть линейная комбинация векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$.

Любой базис n-мерного линейного пространства состоит ровно из n векторов. Действительно, векторы базиса линейно независимы, и потому число их не может быть больше n.

3. Введем теперь понятие компоненты вектора относительно данного базиса

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n,$$

Как уже было сказано выше, любой вектор $\mathbf{A}$ является линейной комбинацией векторов базиса. Такое представление единственно. Действительно, пусть вектор $\mathbf{A}$ выражается через базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ двумя способами:

$$\mathbf{A} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \ldots + a_n\mathbf{e}_n$$

и

$$\mathbf{A} = a_1'\mathbf{e}_1 + a_2'\mathbf{e}_2 + \ldots + a_n'\mathbf{e}_n.$$

Тогда $(a_1 - a_1')\,\mathbf{e}_1 + (a_2 - a_2')\,\mathbf{e}_2 + \ldots + (a_n - a_n')\,\mathbf{e}_n = 0$ откуда, в силу линейной независимости векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, следует, что

$$a_1 = a_1', \quad \ldots, \quad a_n = a_n'$$

Коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ в разложении произвольного вектора $\mathbf{A}$ по векторам базиса называются *компонентами* вектора $\mathbf{A}$ в этом базисе. Таким образом, любому вектору, если только выбран базис пространства, сопоставляется строка (столбец) из его компонент и обратно: любая строка (столбец) из n чисел может рассматриваться как совокупность компонент некоторого вектора.

Действиям сложения векторов и умножения вектора на число соответствуют одноименные действия над строками (столбцами) их компонент. Поэтому любое n-мерное линейное пространство, независимо от природы его элементов, по отношению к этим действиям ничем не отличается от пространства строк (столбцов).

4. Рассмотрим соотношение компонент векторов двух различных базисов. Пусть вектор

$$\mathbf{A} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

задан в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, т. е.

$$\mathbf{A} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \ldots + a_n\mathbf{e}_n \tag{2}$$

Пусть теперь совокупность векторов $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$ образует другой базис и в этом базисе вектор $\mathbf{A}$ имеет компоненты $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$.

Положим, что векторы двух базисов связаны следующими соотношениями:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= \lambda_{11}\mathbf{e}'_1 + \lambda_{12}\mathbf{e}'_2 + \ldots + \lambda_{1n}\mathbf{e}'_n \\
\mathbf{e}_2 &= \lambda_{21}\mathbf{e}'_1 + \lambda_{22}\mathbf{e}'_2 + \ldots + \lambda_{2n}\mathbf{e}'_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mathbf{e}_n &= \lambda_{n1}\mathbf{e}'_1 + \lambda_{n2}\mathbf{e}'_2 + \ldots + \lambda_{nn}\mathbf{e}'_n.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Найдем соотношение компонент векторов первого и второго базисов. Подставим в (2) значения $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ из (3) и, сделав соответствующие преобразования, получим

$$\mathbf{A} = a'_1\mathbf{e}'_1 + a'_2\mathbf{e}'_2 + \ldots + a'_n\mathbf{e}'_n,$$

откуда

$$
\begin{aligned}
a'_1 &= \lambda_{11}a_1 + \lambda_{21}a_2 + \ldots + \lambda_{n1}a_n \\
a'_2 &= \lambda_{12}a_1 + \lambda_{22}a_2 + \ldots + \lambda_{n2}a_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a'_n &= \lambda_{1n}a_1 + \lambda_{2n}a_2 + \ldots + \lambda_{nn}a_n
\end{aligned}
$$

или в матричной записи

$$
\begin{Vmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a'_n \end{Vmatrix}
=
\begin{Vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{21} & \ldots & \lambda_{n1} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \ldots & \lambda_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{1n} & \lambda_{2n} & \ldots & \lambda_{nn} \end{Vmatrix}
\cdot
\begin{Vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{Vmatrix}
$$

Таким образом, если базисы

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n \quad \text{и} \quad \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$$

связаны равенством

$$\begin{Vmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{e}_n \end{Vmatrix} = L \begin{Vmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{e}'_n \end{Vmatrix}, \text{ где } L = \begin{Vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nn} \end{Vmatrix}$$

то

$$(a_1, a_2, \dots a_n) \text{ и } (a'_1, a'_2, \dots, a'_n)$$

являются соответственно компонентами одного и того же вектора в данных базисах и

$$\begin{Vmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a'_n \end{Vmatrix} = L^T \begin{Vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{Vmatrix},$$

где L^T — матрица, транспонированная к матрице L.

5. Для тождественных преобразований систем линейных уравнений и, значит, решения задач линейного программирования необходимо уметь переходить от одного базиса к другому.

Пусть векторы $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_j, \dots, \mathbf{A}_m$ образуют базис пространства R_m. В силу линейной независимости любой вектор $\mathbf{A}$ этого пространства можно представить в виде линейной комбинации векторов $\mathbf{A}_j$ $(j=1, 2, \dots, m)$. Все базисы векторного пространства имеют одно и то же число векторов.

Возьмем какой-либо вектор $\mathbf{B}$, не принадлежащий базису

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_j, \dots, \mathbf{A}_m.$$

При $\mathbf{B} \neq 0$ в линейной комбинации

$$\mathbf{B} = \lambda_1\mathbf{A}_1 + \lambda_2\mathbf{A}_2 + \dots + \lambda_j\mathbf{A}_j + \dots + \lambda_m\mathbf{A}_m$$

найдется хотя бы одно число $\lambda \neq 0$. Допустим, что $\lambda_j \neq 0$, тогда

$$\mathbf{A}_j = \frac{1}{\lambda_j}\mathbf{B} - \frac{\lambda_1}{\lambda_j}\mathbf{A}_1 - \dots - \frac{\lambda_m}{\lambda_j}\mathbf{A}_m.$$

Заменим в данном базисе вектор $\mathbf{A}_j$ на вектор $\mathbf{B}$. Совокупность векторов

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}_m$$

снова будет базисом, так как вектор $\mathbf{B}$ нельзя представить в виде линейной комбинации оставшихся векторов. Таким образом, совокупность векторов $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}_m$ является линейно независимой и образует другой базис.

Пусть в m-мерном пространстве дано $n+1$ векторов $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_j, \dots, \mathbf{A}_n$, имеющих в базисе $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_m$ следующие разложения:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_0 &= a_{10}\mathbf{B}_1 + a_{20}\mathbf{B}_2 + \dots + a_{m0}\mathbf{B}_m \\
\mathbf{A}_1 &= a_{11}\mathbf{B}_1 + a_{21}\mathbf{B}_2 + \dots + a_{m1}\mathbf{B}_m \\
\mathbf{A}_2 &= a_{12}\mathbf{B}_1 + a_{22}\mathbf{B}_2 + \dots + a_{m2}\mathbf{B}_m \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\mathbf{A}_j &= a_{1j}\mathbf{B}_1 + a_{2j}\mathbf{B}_2 + \dots + a_{mj}\mathbf{B}_m \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\mathbf{A}_n &= a_{1n}\mathbf{B}_1 + a_{2n}\mathbf{B}_2 + \dots + a_{mn}\mathbf{B}_m
\end{aligned} \qquad (4)$$

Из компонент разложения (4) составим матрицу

$$\begin{Vmatrix}
a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\
a_{20} & a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{i0} & a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{m0} & a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn}
\end{Vmatrix}. \qquad (5)$$

Предположим что векторы $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m$ образуют новый базис в пространстве R_m. Пусть эти векторы имеют в базисе $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_m$ следующие разложения:

$$\mathbf{b}_1 = b_{11}\mathbf{B}_1 + b_{21}\mathbf{B}_2 + \ldots + b_{m1}\mathbf{B}_m$$

$$\mathbf{b}_2 = b_{12}\mathbf{B}_1 + b_{22}\mathbf{B}_2 + \ldots + b_{m2}\mathbf{B}_m$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathbf{b}_m = b_{1m}\mathbf{B}_1 + b_{2m}\mathbf{B}_2 + \ldots + b_{mm}\mathbf{B}_m$$

В силу линейной независимости векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m$, образующих по предположению базис, определитель

$$D = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mm} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (6)$$

Перейдем от базиса $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_m$ к базису $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m$. Векторы $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ будут иметь в базисе $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m$ компоненты разложения, не все равные компонентам в базисе $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_m$:

$$\mathbf{A}_0 = a'_{10}\mathbf{b}_1 + a'_{20}\mathbf{b}_2 + \ldots + a'_{m0}\mathbf{b}_m$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathbf{A}_j = a'_{1j}\mathbf{b}_1 + a'_{2j}\mathbf{b}_2 + \ldots + a'_{mj}\mathbf{b}_m$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathbf{A}_n = a'_{1n}\mathbf{b}_1 + a'_{2n}\mathbf{b}_2 + \ldots + a'_{mn}\mathbf{b}_m.$$

Матрица этого разложения

$$\begin{Vmatrix} a'_{10} & a'_{11} & \ldots & a'_{1j} & \ldots & a'_{1n} \\ a'_{20} & a'_{21} & \ldots & a'_{2j} & \ldots & a'_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a'_{i0} & a'_{i1} & \ldots & a'_{ij} & & a'_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a'_{m0} & a'_{m1} & \ldots & a'_{mj} & \ldots & a'_{mn} \end{Vmatrix} \qquad (7)$$

Зная матрицу (5) и определитель (6), можно найти элементы матрицы (7) по формулам

$$a'_{10}=\frac{D_{10}}{D};\ \ldots;\ a'_{i0}=\frac{D_{i0}}{D};\ \ldots;\ a'_{m0}=\frac{D_{m0}}{D}$$

$$a'_{1j}=\frac{D_{1j}}{D};\ \ldots;\ a'_{ij}=\frac{D_{ij}}{D};\ \ldots;\ a'_{mn}=\frac{D_{mn}}{D},$$

где, например,

$$D_{i0}=\begin{vmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1,i-1} & a_{10} & b_{1,i+1} & \ldots & b_{1m} \\ b_{21} & \ldots & b_{2,i-1} & a_{20} & b_{2,i+1} & \ldots & b_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m1} & \ldots & b_{m,i-1} & a_{m0} & b_{m,i+1} & \ldots & b_{nm} \end{vmatrix};\ \ldots;$$

$$D_{ij}=\begin{vmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1,i-1} & a_{1j} & b_{1,i+1} & \ldots & b_{1m} \\ b_{21} & \ldots & b_{2,i-1} & a_{2j} & b_{2,i+1} & \ldots & b_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m1} & \ldots & b_{m,i-1} & a_{mj} & b_{m,i+1} & \ldots & b_{mm} \end{vmatrix}.$$

Базисное обозначение данных определителей будет следующее:

$$D_{i0}=(\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2,\ \ldots,\ \mathbf{b}_{i-1},\ \mathbf{A}_0,\ \mathbf{b}_{i+1},\ \ldots,\ \mathbf{b}_m),$$

$$D_{ij}=(\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2,\ \ldots,\ \mathbf{b}_{i-1},\mathbf{A}_j,\ \mathbf{b}_{i+1},\ \ldots,\ \mathbf{b}_m).$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти скалярное произведение, длину векторов и угол между векторами $\mathbf{a}=(1,\ 0,\ 0,\ -1)$ и $\mathbf{b}=(2,\ 7,\ -1,\ 3)$.

Отв. $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})=-1;\quad \widehat{\mathbf{ab}}=\arccos\left(-\frac{1}{3\sqrt{14}}\right).$

2. Показать, что векторы $\mathbf{a}_1=(2,\ 4,\ -1,\ 3)$, $\mathbf{a}_2=(0,\ 1,\ 2,\ 3)$, $\mathbf{a}_3=(-1,\ 0,\ 1,\ 1)$ линейно независимы.

3. Написать три линейно зависимых четырехмерных вектора так. чтобы два из них были независимыми.

4. Показать, что система векторов

$$\mathbf{a}_1=(5,\ 2,\ 1),\quad \mathbf{a}_2=(-1,\ 3,\ 3),\quad \mathbf{a}_3=(9,\ 7,\ 5),\quad \mathbf{a}_4=(3,\ 8,\ 7)$$

линейно зависима.

5. Пусть даны две системы векторов:

$$\mathbf{e}_1=(3,\ 1,\ 4);\quad \mathbf{e}_2=(5,\ 2,\ 3);\quad \mathbf{e}_3=(1,\ 1,\ -6)$$

в

$$\mathbf{e}'_1=(1,\ 2,\ 1);\quad \mathbf{e}'_2=(2,\ 3,\ 3);\quad \mathbf{e}'_3=(3,\ 7,\ 1);$$

Показать, что каждая из этих систем является базисом. Выразить разложение вектора одной системы через векторы другой.

6. Пусть дан базис, состоящий из векторов

$$\mathbf{A}_1 = \left\| \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right\| \quad \mathbf{A}_2 = \left\| \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \right\| \quad \mathbf{A}_3 = \left\| \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \right\|.$$

Найти матрицу, обратную матрице, составленной из векторов этого базиса и определить разложение по базису вектора

$$\mathbf{A}_4 = \left\| \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \right\|$$

Отв. Если $\mathbf{A} = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right\|$, то $\mathbf{A}^{-1} = \left\| \begin{matrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{matrix} \right\|$;

$$\mathbf{A}_4 = \mathbf{A}_1 + 6\mathbf{A}_2 - 3\mathbf{A}_3$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какими двумя способами задается точка на плоскости?
2. Как построить вектор?
3. Что называется суммой векторов и умножением вектора на число?
4. Что называется n-мерным вектором?
5. Приведите примеры векторов.
6. Назовите свойства сложения векторов и умножения вектора на число.
7. Что называется скалярным произведением векторов? Длиной вектора?
8. Что называется линейным векторным пространством?
9. Какие векторы называются линейно независимыми?
10. Как определить максимальное число линейно независимых векторов в системе векторов?
11. Что такое единичный вектор (орт)? Его обозначение?
12. Что называется линейной комбинацией?
13. Что называется базисом векторного пространства?
14. Как осуществляется переход от одного базиса к другому?

Глава V

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 13. Системы n линейных уравнений с n переменными

Правило Крамера

1. Простейшей системой линейных уравнений является, как известно, система линейных уравнений, состоящая из двух уравнений с двумя переменными. Она может быть записана в виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1}$$

Способы решения (подстановки и уравнивания коэффициентов) такой системы известны из курса элементарной алгебры (см. также стр. 17—18).

С помощью определителей второго порядка значения переменных x_1 и x_2, если они существуют, можно выразить так:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

В любой из систем двух линейных уравнений с двумя переменными встречается один из следующих трех случаев:

1) Если определитель системы (1) отличен от нуля, то система *определенная* и имеет единственное решение.

2) Если определитель системы равен нулю, а

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ или } \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

то система является *противоречивой* или *несовместной.*

3) Если определитель системы равен нулю и

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = 0, \text{ и } \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = 0,$$

то система является *неопределенной.*

Системы определенные и неопределенные (случаи первый и третий) носят также общее название *совместных* систем.

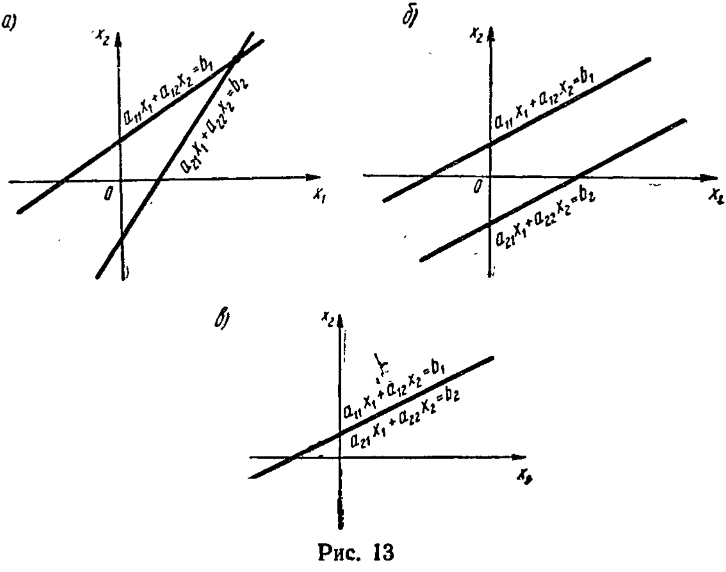

Рис. 13

Дадим геометрическое истолкование указанных результатов. Решением системы линейных уравнений (1) являются декартовы координаты точки пересечения прямых, являющихся изображениями этих уравнений (рис. 13*а*). Случаи 2) и 3) иллюстрируются соответственно рисунками 13*б* и 13*в*.

2. Решение системы:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (2)$$

будет следующее:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{D}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{D},$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{D},$$

где D — определитель системы (2), отличный от нуля.

Рассмотренные выше для системы двух уравнений с двумя переменными три случая (определенность, противоречивость и неопределенность системы) распространяются и на систему трех линейных уравнений с тремя переменными.

Напомним некоторые понятия, относящиеся к решению системы. Если некоторая совокупность значений переменных, входящих в данную систему, удовлетворяет каждому из уравнений этой системы, то эти значения образуют решение данной системы уравнений. Эта совокупность значений (т. е. решение), будучи подставлена вместо переменных в уравнения системы, обращает каждое из них в числовое равенство или тождество (если уравнения содержат параметры)

В совокупность значений переменных, дающую решение системы, входит столько чисел (выражений), сколько имеется переменных ($n \geqslant 2$). Однако такая совокупность принимается за одно решение. Эту совокупность называют также вектором решений.

Пример. Система трех линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 13x_2 + 5x_3 = 13 \end{cases}$$

имеет одну совокупность чисел $x_1=2$, $x_2=-1$, $x_3=4$ [или вектор решений $x=(2, -1, 4)$], являющихся одним решением данной системы и другую совокупность чисел $x_1=3$, $x_2=3$, $x_3=-7$ [или вектор решений $x=(3, 3, -7)$], также являющихся решением данной системы.

Решение в общем виде обозначают теми же буквами, что и переменные, но с черточкой наверху. Так, если переменные системы были обозначены через

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \text{ то } \bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$$

означают одно определенное решение системы.

Две системы называются *эквивалентными* (или *равносильными*), если любое решение первой системы является также решением второй системы, и обратно: всякое решение второй системы будет также решением первой системы.

3. Рассматривая систему четырех линейных уравнений с четырьмя переменными, легко убедиться в том, что прежними методами решить ее гораздо сложнее. Систему n линейных уравнений с n переменными будем записывать следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nj}x_j + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (3)$$

Эту систему можно представить также кратко:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i,$$

где $1 \leqslant i \leqslant n$ и $1 \leqslant j \leqslant n$ показывают, что система состоит из n уравнений с n переменными, или

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

т. е. в каждом уравнении имеются n произведений вида $a_{ij}x_j$

от $j=1$ до $j=n$, а запись $i=1, 2, \ldots, n$ или, как обозначали раньше, $1 \leqslant i \leqslant n$ показывает, что таких уравнений n.

Замечание. В коэффициенте общего вида a_{ij} первый индекс указывает номер уравнения, второй номер переменного, при котором стоит коэффициент, т. е. a_{ij} есть коэффициент при переменном x_j, стоящий в i-й строке.

4. Рассмотрим *правило Крамера* о решении уравнений.

Правило. *Система n уравнений с n переменными, определитель которой отличен от нуля, всегда имеет решение и притом единственное, определяемое следующим правилом: значение каждого из переменных равно дроби, знаменателем которой является определитель системы, а числитель получается из определителя системы заменой столбца коэффициентов при искомом переменном столбцом свободных членов.*

Доказательство. Пусть дана система n линейных уравнений с n переменными (3), в сокращенной записи:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Покажем, что система (3) равносильна системе

$$D_i = Dx_i, \qquad (i=1, 2, \ldots, n), \tag{3'}$$

где

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

определитель системы (3), а D_i — определитель, полученный из определителя D заменой в нем i-го столбца столбцом свободных членов $b_1, b_2, \ldots, b_n$ системы (3).

Пусть

$$x_1 = \bar{x}_1, \ x_2 = \bar{x}_2, \ldots, x_n = \bar{x}_n \tag{4}$$

является решением системы (3). Покажем, что оно будет и решением системы (3'). То обстоятельство, что

(4) есть решение системы (3), означает, что при подстановке чисел $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ вместо переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в систему (3) получим верные числовые равенства

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{x}_j = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

Умножим каждое из равенств (3) на соответствующие алгебраические дополнения j-го столбца определителя, составленного из коэффициентов при переменных в этой системе, т. е. на A_{1j}, A_{2j}, ..., A_{nj}, и сложим полученные уравнения почленно. В результате получим

$$\begin{gathered}(a_{11}A_{1j} + a_{21}A_{2j} + \ldots + a_{n1}A_{nj})\bar{x}_1 + \\ + (a_{12}A_{1j} + a_{22}A_{2j} + \ldots + a_{n2}A_{nj})\bar{x}_2 + \ldots \\ \ldots + (a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj})\bar{x}_j + \ldots \\ \ldots + (a_{1n}A_{1j} + a_{2n}A_{2j} + \ldots + a_{nn}A_{nj})\bar{x}_n = \\ = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \ldots + b_nA_{nj}.\end{gathered}$$

Коэффициент при x_j равен определителю, составленному из коэффициентов при переменных данной системы:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}.$$

Коэффициенты при всех остальных $\bar{x}_i$ $(i \neq j)$ обращаются в нуль, так как сумма произведений элементов какой-либо строки на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки равна нулю.

Свободный член представляет собой определитель, получающийся из определителя системы заменой в нем j-го столбца столбцом свободных членов в системе (3).

Действительно,

$$\begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \dots + b_nA_{nj}.$$

Таким образом, получаем равенства

$$D\bar{x}_j = D_j \qquad (j = 1,\ 2,\ \dots,\ n),$$

т. е. всякое решение системы (3) является решением системы (3′).

Покажем теперь, что всякое решение системы (3′) является решением системы (3).

Ясно, что система (3′) имеет единственное решение:

$$\bar{x}_j = \frac{D_j}{D}. \tag{6}$$

Подставим в систему (5)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{D_j}{D} = b_i \qquad (i = 1,\ 2,\ \dots,\ n).$$

Каждый определитель D_j разложим по элементам j-го столбца и после соответствующих преобразований получим

$$\frac{1}{D}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}D_j = b_i.$$

Таким образом, доказано, что системы (3) и (3′) равносильны и имеют единственное решение. Формулы (6) называются *формулами Крамера*.

Пример. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

Определитель этой системы $D=27$ отличен от нуля, поэтому к системе применимо правило Крамера. Значения переменных будут иметь числителями определители $D_1=81$, $D_2=-108$, $D_3=-27$, $D_4=27$. Таким образом, $x_1=3$, $x_2=-4$, $x_3=-1$, $x_4=1$ будет решением данной системы.

§ 14. Произвольные системы линейных уравнений. Теорема Кронекера — Капелли

1. Пусть дана произвольная система m линейных уравнений с n переменными, где m не обязательно равно n:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

Представим эту систему в виде

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

В зависимости от значений коэффициентов и свободных членов такая система может совсем не иметь решений, иметь одно решение или иметь бесчисленное множество решений.

Рассмотрим матрицу коэффициентов данных уравнений

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{matrix} \right\|$$

Назовем ее *основной матрицей* системы (1).

Припишем к матрице A еще столбец свободных членов уравнений системы (1); получим *расширенную матрицу*

$$B = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{matrix} \right\|$$

Если r — ранг матрицы A, то ранг матрицы B равен или r, или $r+1$.

2. Теорема Кронекера — Капелли (основная теорема о совместности системы линейных уравнений). *Система линейных уравнений имеет решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы этой системы равен рангу ее расширенной матрицы.*

Доказательство. 1. Пусть система (1) совместна, т. е. имеет решение. Пусть совокупность чисел $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ является решением системы (1). Подставив эти числа вместо переменных в систему (1), получим тождества:

$$\begin{cases} a_{11}\bar{x}_1 + a_{12}\bar{x}_2 + \dots + a_{1n}\bar{x}_n = b_1 \\ a_{21}\bar{x}_1 + a_{22}\bar{x}_2 + \dots + a_{2n}\bar{x}_n = b_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}\bar{x}_1 + a_{m2}\bar{x}_2 + \dots + a_{mn}\bar{x}_n = b_m \end{cases} \tag{2}$$

Эти тождества показывают, что последний вектор-столбец матрицы B есть линейная комбинация остальных вектор-столбцов этой матрицы, умноженных соответственно на числа $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$. Отсюда следует, что системы столбцов-матриц A и B эквивалентны между собой, а поэтому обе эти системы m-мерных векторов имеют один и тот же ранг, т. е. ранг матрицы A равен рангу матрицы B (ранг матриц рассматриваем по столбцам).

2. Пусть ранг матрицы A равен рангу матрицы B. Из этого следует, что любая максимальная линейно независимая система столбцов матрицы A остается максимальной линейно независимой системой и в матри-

це B. Поэтому, через эту систему, а, следовательно, и вообще через систему вектор-столбцов матрицы A, линейно выражается последний столбец матрицы B. В частности, существуют такие коэффициенты $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$, что если умножить первый столбец матрицы B на $\bar{x}_1$, второй — на $\bar{x}_2, \dots$, n-й — на $\bar{x}_n$ и все сложить, то получим столбец свободных членов.

Таким образом, числа $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ являются решением системы (1), т. е. система уравнений (1) совместна.

3. Доказанная теорема устанавливает общее условие совместности линейной системы, но не дает способа решения этой системы. Выведем формулу, заключающую в себе общее решение линейной системы.

Пусть дана совместная линейная система (1) с основной матрицей $A = \|a_{ij}\|$ ранга $m<n$; тогда $r \leqslant m$.

Рассмотрим первые r уравнений системы (1), перенеся в этих уравнениях вправо все члены, содержащие переменные с номерами большими, чем r. Предположим, что первые r строк и r столбцов линейно независимы. Тогда будем иметь:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - \dots - a_{2n}x_n \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (3) \\
&a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r,\,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{2n}x_n.
\end{aligned}
$$

Придадим переменным $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ совершенно произвольные значения $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \dots, \alpha_n$. Тогда система (3) превращается в систему r уравнений для r переменных $x_1, x_2, \dots, x_r$ с определителем системы, отличным от нуля. Эта система может быть разрешена по правилу Крамера.

Пусть теперь дана совместная система линейных уравнений (1) и пусть матрица A имеет ранг r. Выбираем в этой матрице r линейно независимых строк и оставляем в системе (1) лишь уравнения, коэффициенты которых вошли в выбранные строки. В этих уравнениях оставляем в левых частях такие r переменных, чтобы определитель из коэффициентов при них отличался от нуля, а остальные переменные считаем свободными и переносим в правые части уравнений. Давая свободным переменным произвольные числовые значения и вычисляя значения остальных переменных по правилу Крамера, получаем все решения системы (3).

§ 15. Линейные однородные уравнения

1. Среди систем линейных уравнений особое место занимают системы линейных однородных уравнений, являющиеся частным случаем общих систем линейных уравнений.

Системой линейных *однородных* уравнений называется система уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{jn}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Как видим, у однородных линейных уравнений свободные члены (b_i) равны нулю.

Такая система всегда разрешима; очевидно, она обладает следующим решением:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \ldots, x_n = 0.$$

Это решение называется *нулевым* или *тривиальным*.

Для решения этой системы можно воспользоваться и теоремой Кронекера—Капелли: система (1) всегда совместна, так как добавление столбца из нулей не может повысить ранга матрицы.

2. Во многих вопросах представляет интерес существование ненулевого решения, т. е. такого решения, в котором хотя бы некоторые из переменных имеют значения, отличные от нуля.

Пусть дана однородная линейная система уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \qquad (1')$$

Если ранг матрицы коэффициентов равен числу переменных ($r=n$), то система (1) имеет одно решение, именно нулевое решение.

Если ранг матрицы меньше числа переменных ($r<n$), то система имеет бесчисленное множество решений.

Рассмотрим, в частности, систему n однородных уравнений с n переменными:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0. \tag{2}$$

Если определитель этой системы

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots . \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то система удовлетворяет условиям правила Крамера и имеет единственное решение — нулевое. Если этот определитель равен нулю, то система (2) имеет бесчисленное множество решений.

Для того чтобы система n однородных уравнений с n переменными имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель равнялся нулю. Исходя из этого свойства, можно утверждать, что определитель системы будет равен нулю, если выяснится, что система (2) имеет решение и хотя бы одно из переменных отлично от нуля.

Пусть теперь дана однородная система

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ \dots, m).$$

Составим матрицу из коэффициентов при переменных:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

Обозначим через r ранг матрицы A ($r \leqslant \min\{m, n\}$). Тогда матрица A содержит хотя бы один минор r-го порядка, отличный от нуля. Не уменьшая общности, можно считать, что этот минор стоит в левом верхнем углу:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Выпишем r уравнений, соответствующих этому определителю:

$$\sum_{j=1}^{r} a_{ij}x_j + \sum_{j=r+1}^{n} a_{ij}x_j = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r). \tag{3}$$

Перенесем члены, содержащие переменные с номерами, большими r, вправо:

$$\sum_{j=1}^{r} a_{ij}x_j = -\sum_{j=r+1}^{n} a_{ij}x_j, \qquad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

Давая произвольные значения для $x_{r+1}, \ldots, x_n$, можно решить эту систему по формулам Крамера. Следовательно, система имеет ненулевые решения, когда ранг матрицы коэффициентов при переменных меньше числа переменных.

3. Всякое решение системы уравнений с n переменными можно рассматривать как вектор в n-мерном пространстве.

Решения системы линейных однородных уравнений обладают следующими свойствами:

1. Если вектор $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ является решением системы (1), то при любом λ вектор $\lambda\overline{x}_1, \lambda\overline{x}_2, \ldots, \lambda\overline{x}_n$ также будет решением этой системы. Это проверяется непосредственной подстановкой в любое из уравнений (1).

2. Если вектор $(\overline{x}'_1; \overline{x}'_2, \ldots, \overline{x}'_n)$ представляет еще одно решение системы (1), то для этой системы служит решением также вектор

$$(\overline{x}_1 + \overline{x}'_1, \overline{x}_2 + \overline{x}'_2, \ldots, \overline{x}_n + \overline{x}'_n). \tag{4}$$

Поставив (4) в систему (1'), получим

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\overline{x}_j + \overline{x}'_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{x}_j + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{x}'_j = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \quad (5)$$

Это показывает, что всякая линейная комбинация решений системы (1) является также решением этой системы. Действительно, в силу первого свойства каждое слагаемое линейной комбинации есть решение, а в силу второго свойства их сумма есть также решение.

Как известно (§ 11), всякая система n-мерных векторов, состоящая более чем из n векторов, будет линейно зависимой. Отсюда следует, что из числа решений однородной системы (1), являющихся n-мерными векторами, можно выбрать конечную максимальную линейно независимую систему, максимальную в том смысле, что всякое другое решение системы (1) будет линейной комбинацией решений, входящих в эту выбранную систему. Всякая максимальная линейно независимая система решений однородной системы уравнений (1) называется ее *фундаментальной* системой решений.

Следовательно, n-мерный вектор тогда и только тогда будет решением системы (1), если он является линейной комбинацией векторов, составляющих данную фундаментальную систему.

4. Установим связь между решениями линейных неоднородных и однородных систем уравнений.

Пусть дана линейная неоднородная система уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Заменив в ней свободные члены (b_i) нулями, получим линейную однородную систему

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

которую будем называть *приведенной* по отношению к первой.

Можно показать, что:

1) всякое решение неоднородной системы можно представить в виде суммы некоторого частного решения этой системы и некоторого решения приведенной однородной системы;

2) любое частное решение неоднородной системы можно получить из общего, если выбрать надлежащим образом значения $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ в неоднородной системе.

§ 16. Матричное решение линейных уравнений Метод Гаусса

1. Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = l_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = l_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = l_n \end{cases} \tag{1}$$

Метод последовательного исключения переменных системы (метод Гаусса) состоит в следующем. Система уравнений (1) приводится к эквивалентной ей системе с треугольной матрицей (*прямой ход исключений*). Из полученной таким образом системы переменные находятся последовательными подстановками (*обратный ход исключений*). Прямой ход исключений осуществляется следующим образом.

Первый шаг. Допустим, что коэффициент $a_{11} \neq 0$. Это не ограничивает общности, так как в противном случае достаточно было бы изменить нумерацию уравнений, для чего уравнения системы переписывают так, чтобы по диагонали $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ стояли по возможности наибольшие по абсолютной величине коэффициенты, причем a_{11} был бы самым большим. Разделим коэффициенты первого уравнения системы (1) (включая и свободный член) на коэффициент a_{11} (этот коэффициент будем называть *ведущим элементом* первого шага) и, введя обозначения

$$b_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}, \quad s_1 = \frac{l_1}{a_{11}} \ (j > 1),$$

получим новое уравнение

$$x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n = s_1. \tag{2}$$

Исключим теперь переменное x_1 из всех уравнений (1), начиная со второго, посредством вычитания из этих уравнений уравнения (2), умноженного соответственно на числа $a_{21}, a_{31}, \dots, a_{n1}$:

$$\begin{cases} a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = l_2^{(1)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{nn}^{(1)}x_n = l_n^{(1)} \end{cases} \tag{3}$$

где

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1}b_{1j}, \quad l_i^{(1)} = l_i - a_{i1}s_1 \qquad (i, \ j \geqslant 2)$$

Второй шаг. Разделим коэффициенты первого из преобразованных уравнений системы (3) на ведущий элемент второго шага $a_{22}^{(1)}$, который будем считать отличным от нуля:

$$x_2 + b_{23}x_3 + \dots + b_{2n}x_n = s_2, \tag{4}$$

где

$$b_{2j} = \frac{a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \quad s_2 = \frac{l_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \ (j > 2).$$

Исключая переменное x_2 из уравнений (4), начиная со второго, придем к уравнениям

$$\begin{cases} a_{33}^{(2)}x_3 + \dots + a_{3n}^{(2)}x_n = l_3^{(2)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n3}^{(2)}x_3 + \dots + a_{nn}^{(2)}x_n = l_n^{(2)}, \end{cases} \tag{5}$$

где

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{i2}^{(1)}b_{2j} \ \ l_i^{(2)} = l_i^{(1)} - a_{i2}^{(1)}\, s_2 \qquad (i, \ j \geqslant 3)$$

m-й шаг. Продолжая этот процесс по той же схеме в конце концов, на m-м шагу получим уравнения

$$x_m + b_{mm+1} x_{m+1} + \ldots + b_{mn}x_n = s_m \tag{6}$$

и

$$\begin{cases} a^{(m)}_{m+1m+1}x_{m+1} + \ldots a^{(m)}_{m+1n}x_n = l^{(m)}_{m+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a^{(m)}_{nm+1}x_{m+1} + \ldots + a^{(m)}_{nn}x_n = l^{(m)}_n, \end{cases} \tag{7}$$

где

$$b_{mj} = \frac{a^{(m-1)}_{mj}}{a^{(m-1)}_{mm}}, \quad s_m = \frac{l^{(m-1)}_m}{a^{(m-1)}_{mm}}, \quad a^{(m)}_{ij} = a^{(m-1)}_{ij} - a^{(m-1)}_{im}b_{mj},$$

$$l^{(m)}_i = l^{(m-1)}_i - a^{(m-1)}_{im}s_m, \qquad (i,\ j \geqslant m+1).$$

Объединив все первые уравнения каждого шага, получим искомую систему уравнений с треугольной матрицей:

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + \ldots + b_{1n}x_n = s_1 \\ \qquad x_2 + b_{23}x_3 + \ldots + b_{2n}x_n = s_2 \\ \qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad x_{n-1} + b_{n-1}x_n = s_{n-1} \\ \qquad\qquad\qquad x_n = s_n. \end{cases} \tag{8}$$

Эта система эквивалентна исходной системе. Отметим, что описанный процесс возможен только при условии неравенства нулю всех ведущих элементов a^{m-1}_{mm}, так как по ходу процесса на них приходится производить деление. Приведенная здесь схема исключений носит название *схемы единственного деления.*

2. Обратный ход исключений состоит в следующем. Из системы (8) значения для переменных находим последовательно от x_n к x_1 по формулам

$$x_m = s_m - b_{mm+1}x_{m+1} - \ldots - b_{mn}x_n.$$

Таким образом, для решения данной системы по схеме единственного деления сначала строим вспомогательную треугольную систему, а затем решаем ее.

Решение систем методом Гаусса можно представить в виде схем единственного деления:

Для системы трех уравнений

Коэффициенты при переменных			Свободные члены
x_1	x_2	x_3	
a_{11}	a_{12}	a_{13}	l_1
a_{21}	a_{22}	a_{23}	l_2
a_{31}	a_{32}	a_{33}	l_3
1	b_{12}	b_{13}	s_1
—	$a_{22}^{(1)}$	$a_{23}^{(1)}$	$l_2^{(1)}$
—	$a_{32}^{(1)}$	$a_{33}^{(1)}$	$l_3^{(1)}$
—	1	$b_{23}^{(1)}$	s_2
—	—	$a_{33}^{(1)}$	$l_3^{(2)}$
—	—	1	$\bar{x}_3$
—	1	—	$\bar{x}_2$
1	—	—	$\bar{x}_1$

Для системы четырех уравнений

Коэффициенты при переменных				Свободные члены
x_1	x_2	x_3	x_4	
a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	l_1
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	l_2
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	l_3
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	l_4
1	b_{12}	b_{13}	b_{14}	s_1
—	$a_{22}^{(1)}$	$a_{23}^{(1)}$	$a_{24}^{(1)}$	$l_2^{(1)}$
—	$a_{32}^{(1)}$	$a_{33}^{(1)}$	$a_{34}^{(1)}$	$l_3^{(1)}$
—	$a_{42}^{(1)}$	$a_{43}^{(1)}$	$a_{44}^{(1)}$	$l_4^{(1)}$
—	1	b_{23}	b_{24}	s_2
—	—	$a_{33}^{(2)}$	$a_{34}^{(2)}$	$l_3^{(2)}$
—	—	$a_{43}^{(2)}$	$a_{44}^{(2)}$	$l_4^{(2)}$
—	—	1	b_{34}	s_3
—	—	—	$a_{44}^{(3)}$	$l_4^{(3)}$
—	—	—	1	$\overline{x}_4$
—	—	1	—	$\overline{x}_3$
—	1	—	—	$\overline{x}_2$
1	—	—	—	$\overline{x}_1$

3. Наряду с методом Гаусса часто удобно применять матричный метод. Систему (1) запишем в матричной форме $AX = B$. Тогда, если A — невырожденная матрица, то $X = A^{-1}B$.

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

Решение. Составим матрицу коэффициентов

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

Эта матрица невырожденная, так как ее определитель

$$|A| = 6 \neq 0.$$

Данную систему запишем в матричном виде:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{Vmatrix}$$

или

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 = B,$$

где

$$A_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad A_2 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad A_3 = \begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

Так как матрица A невырожденная, то система векторов A_1, A_2, A_3 линейно независима и, следовательно, образует базис в трехмерном пространстве. Для решения данной системы необходимо найти коэффициенты единственной линейной комбинации векторов A_1, A_2 и A_3 (т. е. числа x_1, x_2, x_3), совпадающей с вектором B.

Первый шаг. Так как матрица A системы невырожденная, запишем эту систему так, чтобы коэффициент при первом переменном в первом уравнении был отличен от нуля. Это можно получить путем перенумерации уравнений (переменных).

В данном примере ведущий элемент $a_{11}=1$. Для исключения x_1 из второго уравнения умножаем первое уравнение на 2 и складываем полученное уравнение со вторым:

$$3x_2 - x_3 = 7.$$

Для исключения первого переменного из третьего уравнения умножаем первое уравнение на —1 и складываем его с третьим:

$$2x_3 = 4,$$

В результате пришли к системе

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ \quad 3x_2 - x_3 = 7 \\ \qquad 2x_3 = 4. \end{cases}$$

Второй шаг. Исключаем теперь вторую переменную из всех уравнений, полученных в результате первого шага, кроме второго уравнения. Уравнения снова могут быть расположены таким образом, чтобы коэффициент при x_2 во втором уравнении не был равен нулю, причем, чтобы этот коэффициент был равен 1, делим второе уравнение на 3. Коэффициент 3 является здесь ведущим элементом. Получим

$$x_2 - \frac{1}{3}x_3 = \frac{7}{3}.$$

Умножая затем преобразованное второе уравнение на —1 и складывая его с первым, получаем

$$x_1 - \frac{2}{3}x_3 = -\frac{1}{3}.$$

В результате получаем систему

$$\begin{cases} x_1 - \frac{2}{3} x_3 = -\frac{1}{3} \\ x_2 - \frac{1}{3} x_3 = \frac{7}{3} \\ 2x_3 = 4. \end{cases}$$

Третий шаг. Ведущим элементом является здесь 2. Разделив на 2 третье уравнение, полученное после второго шага, и умножив результат на $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{3}$, сложим полученные уравнения с первым и вторым соответственно; данная система приводится к виду

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad = 1 \\ \quad x_2 \qquad = 3 \\ \qquad\quad x_3 = 2, \end{cases}$$

определяющему ее решение.

Пример 2. Решить систему

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \qquad\quad = 5 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{Vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{Vmatrix}$$

Обозначим матрицу коэффициентов первой части данной системы уравнений через A. Тогда определитель матрицы A будет

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 5 \neq 0.$$

Найдем алгебраические дополнения каждого элемента матрицы A:

$$A_{11}=5 \quad A_{21}=4 \quad A_{31}=-1$$
$$A_{12}=10 \quad A_{22}=12 \quad A_{32}=-3$$
$$A_{13}=0 \quad A_{23}=1 \quad A_{33}=3$$

Вычислим матрицу A^{-1}:

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{Vmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{Vmatrix}$$

Имеем:

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{Vmatrix}=$$

$$=\begin{Vmatrix} 1\cdot 5+\frac{4}{5}\cdot 0+\left(-\frac{1}{5}\right)15 \\ 2\cdot 5+\frac{12}{5}\cdot 0+\left(-\frac{3}{5}\right)15 \\ 0\cdot 5+\frac{1}{5}\cdot 0+\frac{1}{5}\cdot 15 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 5-3 \\ 10-9 \\ 3 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{Vmatrix}$$

Значит, $x_1=2;\quad x_2=1;\quad x_3=3,$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Определить максимальное число линейно независимых уравнений системы

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3-x_4=1 \\ -x_1-2x_2+x_3-2x_4=0 \\ 5x_1+x_2-2x_3-5x_4=3, \end{cases}$$

Отв. 2.

В системе уравнения

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 5x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$$

найти линейно независимые уравнения, в виде линейных комбинаций которых выражаются все остальные уравнения системы.

Отв. Первые два уравнения линейно независимы; третье получается как удвоенное первое минус второе.

3. Определить линейно независимые решения системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 0. \\ 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0. \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$$

4. Дана система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Решить эту систему методом Гаусса и вывести общие формулы (по которым осуществляются преобразования на каждом шаге), полагая, что матрица коэффициентов $\| a_{ij} \|$ — невырожденная.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 3, \end{cases}$$

пользуясь формулами, полученными в упражнении 4. Найти также A^{-1} и проверить результат подсчетом $AA^{-1} = E$ (A — матрица системы и E — единичная матрица).

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. В каком случае система n линейных уравнений с n переменными имеет одно определенное решение? Как получается это решение?
2. Как получить решения системы m линейных уравнений с n переменными, если ранг матрицы коэффициентов равен m? Можно ли решить такую систему относительно любых m переменных?
3. Сформулируйте правило Крамера.
4. В чем заключаются необходимые и достаточные признаки разрешимости системы линейных уравнений?
5. При каком условии система m линейных уравнений с n переменными имеет одно определенное решение?

6. Если дана система линейных форм, то как определить максимальное число линейно независимых форм в этой системе?
7. В чем состоит необходимое условие разрешимости системы $n+1$ уравнений с n переменными? В каком случае это условие будет и достаточным?
8. При каком условии система n однородных уравнений с переменными имеет ненулевые решения?
9. Как получаются решения системы n однородных уравнений с n переменными в том случае, когда ранг матрицы коэффициентов равен $n-1$?
10. Сколько линейно независимых решений может иметь система линейных однородных уравнений?
11. Сформулируйте теорему Кронекера — Капелли.
12. В чем заключается сущность матричного метода? Метода Гаусса?

Глава VI

ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА

§ 17. Понятие выпуклых множеств

1. Плоская фигура называется *выпуклой*, если она содержит целиком всякий прямолинейный отрезок, соединяющий любые две принадлежащие ей точки. К выпуклым плоским фигурам относятся многоугольник, круг, полукруг, эллипс, треугольник и другие фигуры (рис. 14).

Сама плоскость выпуклая фигура. Прямая делит плоскость на две *полуплоскости*, каждая из которых является также выпуклой фигурой.

Прямая является выпуклой фигурой, так как она вместе с любыми своими точками A и B содержит и весь отрезок AB. Точно так же любой луч и любой отрезок прямой являются выпуклыми фигурами. Прямая, луч и отрезок называются *одномерными* выпуклыми фигурами.

Плоские выпуклые фигуры, не лежащие на одной прямой, называются *двухмерными*.

Будем считать одну точку тоже выпуклой фигурой и называть ее *нульмерной* выпуклой фигурой.

На плоскости возможны три случая взаимного расположения прямой и выпуклой фигуры: 1) прямая и фигура не имеют общих точек, 2) прямая и фигура имеют одну общую точку, 3) прямая и фигура имеют общий отрезок. В случаях, когда вся фигура лежит по одну сторону от прямой и прямая имеет с фигурой одну общую точку или общий отрезок, такая прямая называется *опорной прямой* (рис. 15).

Выпуклым многоугольником называется выпуклая фигура, ограниченная несколькими отрезками, называемыми сторонами многоугольника; точки, в которых сходятся концы двух соседних сторон, называются *вершинами многоугольника*, или его *угловыми точками*; каж-

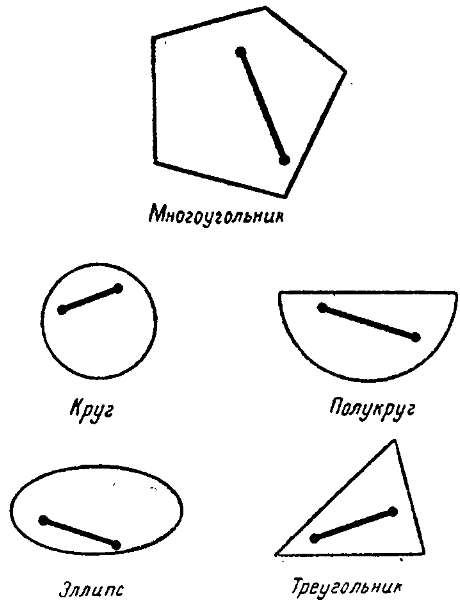

Рис. 14

дая сторона выпуклого многоугольника является опорной прямой.

В трехмерном пространстве наряду с нульмерными, одномерными и двухмерными фигурами существуют выпуклые фигуры, не помещающиеся в одной плоскости. Такие фигуры называются *трехмерными* выпуклыми фигурами или *выпуклыми телами*.

Примерами выпуклых тел служат шар, параллелепипед и призма, в основании которой лежит выпуклый многоугольник, и другие (рис. 16). Тетраэдр — треугольная пирамида — есть выпуклое тело с четырьмя вершинами.

Определение выпуклого тела в пространстве аналогично определению выпуклой фигуры на плоскости: *выпуклым телом* назовем такое тело, которое вместе с любыми двумя своими точками содержит и весь соединяющий их отрезок.

Точка фигуры называется *граничной*, если, какой бы круг с центром в данной точке ни построить, он всегда будет содержать как точки, принадлежащие фигуре, так и точки, не принадлежащие ей. Граничные точки тела образуют его *границу*. Граница выпуклого тела называется выпуклой поверхностью. Если выпуклое тело составлено из плоских многоугольников, то мы имеем *выпуклый многогранник*.

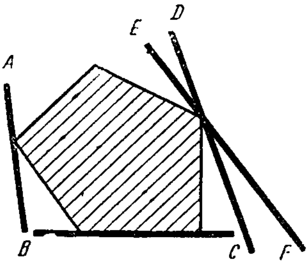

Рис. 15

Для пространственных (выпуклых) тел вместо опорных прямых рассматриваются опорные плоскости. *Опорной плоскостью* выпуклого многогранника называется плоскость, имеющая с многогранником по меньшей ме-

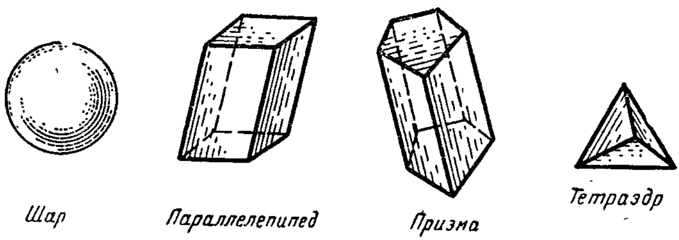

Рис. 16

ре одну общую точку, и такая, что весь многогранник расположен по одну сторону от этой плоскости.

Возможны три случая взаимного расположения выпуклого многогранника и опорной плоскости (если они имеют общую часть):

1) общая часть состоит из одной точки, называемой *вершиной многогранника;* 2) общая часть состоит из отрезка, называемого ребром; 3) общая часть состоит из многоугольника, называемого гранью. Через каждую вершину и ребро многогранника можно провести беско-

нечное множество опорных плоскостей; через любую грань проходит только одна опорная плоскость.

Примерами опорных плоскостей служат: для шара — его касательные плоскости; для выпуклого многогранника — плоскость, в которой лежит его грань.

Общая часть выпуклых тел является выпуклым телом, общая часть нескольких многогранников есть выпуклое тело. Пересечение многогранника с плоскостью есть выпуклая фигура и представляет собой точку, отрезок или выпуклый многоугольник.

2. В настоящей главе рассматриваются множества точек (множества). *Множество* точек на плоскости называется *выпуклым*, если прямолинейный отрезок, соединяющий две любые точки множества, также лежит в этом множестве.

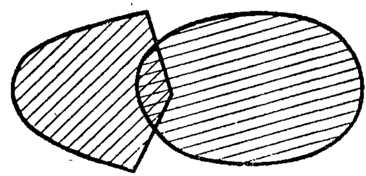

Рис. 17

Пересечение любых выпуклых множеств есть выпуклое множество (рис. 17).

Крайними (или *угловыми*) точками выпуклого множества называются точки, которые не лежат внутри отрезков, соединяющих какие бы то ни было точки множества. Крайние точки называют также *экстремальными.*

Выпуклое множество может иметь конечное или бесконечное число крайних точек. Для квадрата или параллелепипеда крайними точками являются их вершины; для шара все точки его поверхности являются крайними точками; прямая и плоскость не имеют ни одной крайней точки.

Выпуклым многогранником будем называть замкнутое ограниченное выпуклое множество, если совокупность его крайних точек конечна. Под замкнутым множеством понимают множество, содержащее все свои граничные точки.

3. *Выпуклые линейные комбинации* являются особым случаем линейных комбинаций. Чтобы результат комбинации данных экстремальных точек давал точку, лежащую на соединяющей их линии, необходимо обеспечить соблюдение следующих условий:

1°) коэффициенты у комбинируемых точек должны быть положительными;

2°) сумма этих коэффициентов должна быть равна единице.

Пусть λ, $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$ делит отрезок AB в отношении $\lambda : (1-\lambda)$ и конечная точка вектора $\lambda\mathbf{a}+(1-\lambda)\mathbf{b}$ перемещается от A до B.

Тогда, взяв любые две отличные друг от друга точки (x_1, x_2) и (y_1, y_2), лежащие на прямой, и определив множество всех сумм произведений векторов $\mathbf{a}=(x_1, x_2)$ и $\mathbf{b}=(y_1, y_2)$ на различные значения λ, где $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, получим линейные комбинации вида

$$\lambda\mathbf{a}+(1-\lambda)\mathbf{b}.$$

Эти простые геометрические соображения имеют важное значение в теории выпуклых множеств.

Пример 1. Пусіь для крайних точек $M_1(8,0)$ и $M_2(0,10)$

$$\lambda_1 > 0 \quad \text{и} \quad \lambda_2 > 0,$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \lambda_2 = \frac{1}{2},$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

т. е. выполнены условия положительности коэффициентов и то, что сумма их равна единице (рис. 18).

Тогда точка, образованная выпуклой комбинацией

$$\lambda_1 M_2 + \lambda_2 M_2,$$

должна лежать на прямой, соединяющей данные точки.

Точка M_n, образованная в результате выпуклой комбинации крайних точек M_1 и M_2, имеет координаты:

$$\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 = M_n, \quad \frac{1}{2}(8,0) + \frac{1}{2}(0,10) = (4,5),$$

т. е. действительно лежит на соединяющей их прямой.

Если $\lambda_1 = \frac{1}{4}$, $\lambda_2 = \frac{3}{4}$, то

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 \text{ и } \lambda_1 > 0, \ \lambda_2 > 0.$$

$$\frac{1}{4}M_1 + \frac{3}{4}M_2 = M_p, \ \frac{1}{4}(8,0) + \frac{3}{4}(0,10) = \left(2,\ \frac{15}{2}\right).$$

Для $\lambda_1 = \frac{3}{4}$, $\lambda_2 = \frac{1}{4}$ выпуклой комбинацией является точка $M_q\left(6;\ \frac{5}{2}\right)$ и т. д.

Крайние точки не должны обязательно лежать непосредственно на осях x_1 или x_2. Одна или обе точки могут лежать и за их пределами. В этих случаях достаточно придерживаться условия положительности коэффициентов и суммы, равной единице. При этом новая точка обязательно будет лежать на прямой, соединяющей обе крайние точки.

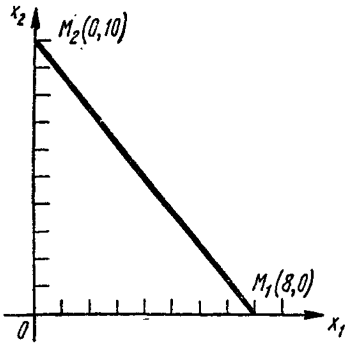

Рис. 18

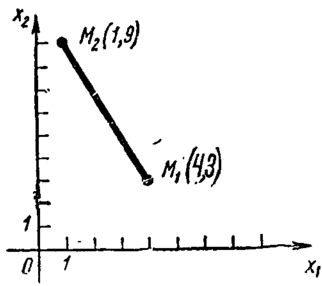

Рис. 19

Пример 2. Выберем $\lambda_1 = \frac{2}{3}$, $\lambda_2 = \frac{1}{3}$, тогда можно получить выпуклую комбинацию крайних точек M_1 (4, 3) и M_2 (1,9) и точки $M_r = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 = (3,5)$, которая лежит на прямой (рис. 19), соединяющей обе точки.

Если же мы хотим определить, является ли точка M_s выпуклой комбинацией, то мы можем это сделать вычислением обоих коэффициентов:

$$\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 = M_s.$$

В этом случае имеем:

$$x_1(4,3) + x_2(1,9) = (2,7),$$

Таким образом, вопрос сводится к решению системы:

$$\begin{cases} 4x_1 + \ \ x_2 = 2 \\ 3x_1 + 9x_2 = 7. \end{cases}$$

Ранее было установлено, что множество всех линейных комбинаций вида $\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2$ двух линейно независимых векторов составляет двухмерное пространство. Коэффициенты в этих комбинациях могут быть любыми действительными числами: положительными, отрицательными или нулями.

Допустим, что комбинации имеют только неотрицательные коэффициенты, т. е.

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2, \quad \lambda_1 \geqslant 0, \quad \lambda_2 \geqslant 0.$$

Тогда множество точек, в котором для любой его точки $\mathbf{a}$ и любого действительного числа $\lambda \geqslant 0$ точка $\lambda \mathbf{a}$ также принадлежит этому множеству, называется *конусом*. На плоскости это будет угол. В трехмерном пространстве под конусом понимают трехгранный угол.

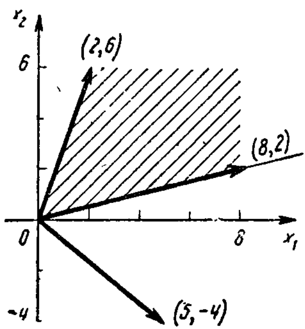

Рис. 20

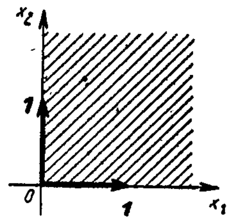

Рис. 21

Пусть, например, $\mathbf{a}_1 = (8,2)$ и $\mathbf{a}_2 = (2,6)$. Если $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 > 0$, то имеем луч (рис. 20), идущий из начала координат через точку (2,6).

Если $\lambda_1 \geqslant 0$ и $\lambda_2 = 0$, то луч проходит через конечную точку вектора $\mathbf{a}_2 = (8,2)$.

Для всех других допустимых значений λ_1 и λ_2 векторы будут лежать в конусе, т. е. в углу, ограниченном двумя лучами.

Для вектора $\mathbf{a}_3=(5, -4)$ при данных векторах $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ луч проходит через точку $(5, -4)$.

Допустим, что даны единичные векторы $\mathbf{e}_1=(1, 0)$ и $\mathbf{e}_2=(0, 1)$. В этом случае конус представляет собой первый квадрант (рис. 21).

Теперь, кроме неотрицательности коэффициентов, наложим на них дополнительные ограничения, а именно: пусть их сумма будет равна 1, т. е.

$$\lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2; \quad \lambda_1 \geqslant 0, \quad \lambda_2 \geqslant 0;$$

$$\lambda_1+\lambda_2=1$$

или

$$\lambda_2=1-\lambda_1.$$

Тогда можно записать соотношение

$$\lambda_1\mathbf{a}_1+(1-\lambda_1)\mathbf{a}_2, \quad 0 \leqslant \lambda_1 \leqslant 1,$$

которое называется *выпуклой линейной комбинацией*.

Множество всех выпуклых комбинаций векторов $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ представляет собой прямолинейный отрезок, содержащий конечные точки векторов (рис. 22).

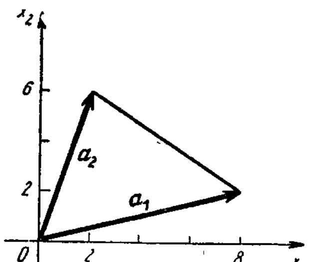

Рис. 22

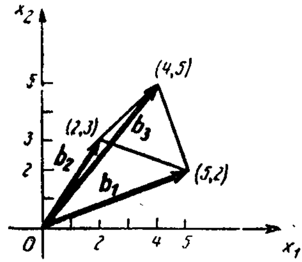

Рис. 23

Если $\mathbf{b}_1=(5, 2)$, $\mathbf{b}_2=(2, 3)$, $\mathbf{b}_3=(4, 5)$, то множество всех выпуклых комбинаций

$$\lambda_1\mathbf{b}_1+\lambda_2\mathbf{b}_2+\lambda_3\mathbf{b}_3$$

данных векторов есть треугольник (рис. 23).

Если $\lambda_3=0$, то выпуклые линейные комбинации вида $\lambda_1\mathbf{b}_1+\lambda_2\mathbf{b}_2$ составляют отрезок прямой линии, включающих точки $(2, 3)$ и $(5, 2)$.

Если $\lambda_2=0$, то выпуклые комбинации вида $\lambda_1 \mathbf{b}_1+\lambda_3 \mathbf{b}_3$ представляют собой сторону треугольника, содержащую конечные точки векторов $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$.

Наконец, если $\lambda_1=0$, то выпуклые комбинации $\lambda_2 \mathbf{b}_2+\lambda_3 \mathbf{b}_3$ составляют сторону треугольника с конечными точками векторов $\mathbf{b}_2$ и $\mathbf{b}_3$.

Точки внутри треугольника получаются при $\lambda_i \geqslant 0$, где $i=1, 2, 3$.

Сделаем теперь обобщение на случай n векторов. Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \ldots, \mathbf{a}_n$ — множество векторов и $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ — действительные числа.

Тогда неотрицательной линейной комбинацией этих векторов является вектор

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_n \mathbf{a}_n,$$

где

$$\lambda_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Аналогично выпуклая линейная комбинация этих векторов есть вектор

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_n \mathbf{a}_n,$$

где

$$\lambda_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

и

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1.$$

Приведенные выше рассуждения показывают, что любая точка отрезка, соединяющего две его конечные точки в n-мерном пространстве, есть выпуклая линейная комбинация точек (векторов) и что любая точка может быть определена как выпуклая линейная комбинация двух точек. Выпуклый конус можно определить также как множество всех неотрицательных линейных комбинаций конечного множества векторов.

Множество K выпукло, если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — векторы (точки), принадлежащие K, и $\lambda \mathbf{a}+(1-\lambda)\mathbf{b}$ также принадлежит K, причем $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

§ 18. Гиперплоскость. Полупространство. Линейная форма

1. Общее уравнение плоскости $A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3=B$ (1) после соответствующих преобразований (если $B\neq 0$) можно привести к виду

$$\frac{x_1}{a_1}+\frac{x_2}{a_2}+\frac{x_3}{a_3}=1, \tag{2}$$

которое называется уравнением плоскости в отрезках (рис. 24).

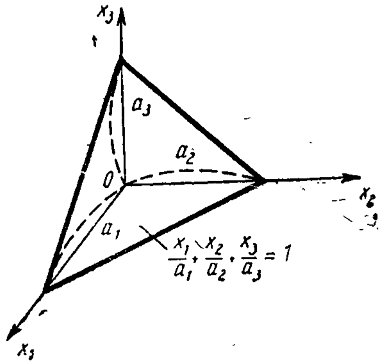

Рис. 24

Плоскость, соответствующая последнему уравнению отсекает на осях координат отрезки a_1, a_2, a_3. При $B=0$ плоскость проходит через начало координат. При $A_1=A_2=B=0$ и $A_3\neq 0$ имеем $A_3x_3=0$ или $x_3=0$. В этом случае уравнение (1) представляет координатную плоскость x_1Ox_2.

Аналогом плоскости в трехмерном пространстве является гиперплоскость в n-мерном пространстве.

Гиперплоскостью (или просто плоскостью в n-мерном пространстве) называется множество всех точек $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n-мерного пространства, удовлетворяющих линейному уравнению с n переменными

$$A_1x_1+A_2x_2+\dots+A_nx_n=B. \tag{3}$$

Итак, линейное уравнение определяет в n-мерном пространстве гиперплоскость. При $B=0$ гиперплоскость проходит через начало координат.

Если задано m линейных уравнений, образующих систему, то множество решений этой системы определяет совокупность точек, принадлежащих одновременно m гиперплоскостям. Эта совокупность точек образует пересечение этих гиперплоскостей.

Чтобы найти точку пересечения с осью Ox_1, надо в уравнении (3) положить все переменные, кроме x_1, равными нулю, т. е. $x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$. Тогда получим $x_1 = \frac{B}{A_1}$. Аналогично точка пересечения с осью Ox_2 будет иметь координаты $x_1 = x_3 = x_4 = \ldots = x_n = 0$ и $x_2 = \frac{B}{A_2}$ и т. д. Разделив почленно уравнение (3) на B, получим

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \ldots + \frac{x_n}{a_n} = 1, \tag{4}$$

где

$$a_1 = \frac{B}{A_1}, \quad a_2 = \frac{B}{A_2}, \quad \ldots, \quad a_n = \frac{B}{A_n}.$$

Уравнение (4) называется уравнением гиперплоскости в отрезках.

При $A_1 = A_2 = \ldots = A_n$ получим гиперплоскость, отсекающую на осях координат равные отрезки.

При $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = B$ получим уравнение $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = 1$, задающее гиперплоскость, отсекающую на осях координат единичные отрезки.

По аналогии с трехмерным пространством координатной гиперплоскостью назовем гиперплоскость, определяемую уравнением (3) при

$$A_1 = A_2 = \ldots = A_{i-1} = A_{i+1} = A_{i+2} = \ldots = A_n = 0,$$
$$B = 0, \quad A_i = 1,$$

т. е. уравнение примет вид $x_i = 0$.

Опорной гиперплоскостью для многогранника K в n-мерном пространстве называется любая гиперплоскость, имеющая с данным многогранником по крайней мере одну общую точку. Этот многогранник лежит в одном из полупространств.

2. Линейному уравнению (1) в трехмерном пространстве соответствует плоскость, нормальная к вектору $A =$

$= (A_1, A_2, A_3)$. Уравнение плоскости может быть представлено в векторной форме

$$(\mathbf{ex}) = p \quad \text{или} \quad (\mathbf{ex}) - p = 0, \tag{5}$$

где $\mathbf{e}$ — единичный вектор, нормальный к плоскости (направляющий вектор плоскости);

$\mathbf{x}$ — текущий вектор произвольной точки плоскости;

p — длина нормали, т. е. расстояние от начала координат до плоскости.

При $p=0$ плоскость проходит через начало координат. Скалярное произведение $(\mathbf{ex})$ векторов $\mathbf{e}$ и $\mathbf{x}$ равно по величине проекции вектора $\mathbf{x}$ на направление, определяемое вектором $\mathbf{e}$. Любой вектор $\mathbf{x}$, соединяющий начало координат с точкой плоскости, имеет одну и ту же проекцию p на направление $\mathbf{e}$ (рис. 25). Величина проекции p, таким образом, есть расстояние плоскости от начала координат.

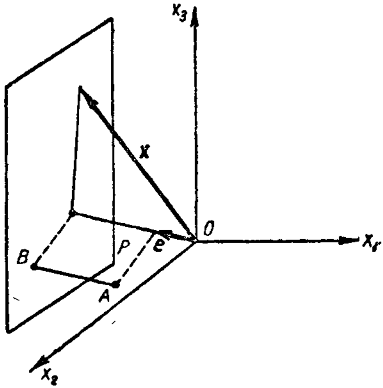

Рис. 25

Расстояние AB всякой точки A пространства от данной плоскости, равное проекции вектора $\mathbf{x}$ на направление $\mathbf{e}$, можно найти из скалярного произведения этих векторов $(\mathbf{ex})$ по формуле

$$d = \left| \frac{A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 - B}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}} \right|. \tag{6}$$

Переходя к n-мерным пространствам, будем говорить, что гиперплоскость, заданная уравнением (3), нормальна к вектору $A = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$.

Векторное уравнение $(\mathbf{ex}) = p$ в n-мерном пространстве определяет гиперплоскость, нормальную к единичному вектору $\mathbf{e}$ и отстоящую от начала координат на расстоянии p.

Расстояние любой точки $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n-мерного пространства до гиперплоскости находится по формуле

$$d = \left| \frac{A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n - B}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + \ldots + A_n^2}} \right|. \tag{7}$$

3. Как известно, прямая на плоскости делит последнюю на две части, каждая из которых называется полуплоскостью. Плоскость в трехмерном пространстве делит все пространство на две части, каждая из которых называется полупространством. Можно сказать, что гиперплоскость в n-мерном пространстве делит это пространство на две части, каждая из которых называется *полупространством.*

Пусть гиперплоскость в n-мерном пространстве выражена векторным уравнением $(\mathbf{ex}) = p$. Тогда одно из полупространств есть множество векторов $\mathbf{x}$, для которых выполняется неравенство $(\mathbf{ex}) \geqslant p$, а для векторов другого полупространства — множество векторов $\mathbf{x}$, для которых $(\mathbf{ex}) \leqslant p$. Гиперплоскость $(\mathbf{ex}) = p$ принадлежит обоим полупространствам.

4. В двухмерном пространстве гиперплоскость представляет собой прямую линию, заданную уравнением

$$A_1x_1 + A_2x_2 = B \tag{8}$$

или, в векторной форме, $(\mathbf{ex}) = p$

Вектор $\mathbf{A} = (A_1, A_2)$ нормален к прямой (8). Длина вектора будет равна $\sqrt{A_1^2 + A_2^2}$.

При $B = 0$ прямая, очевидно, проходит через начало координат.

Если увеличивать p, то прямая будет отдаляться от начала координат. При этом, если A_1 и A_2 будут постоянными, а увеличивать только B, то прямая будет перемещаться параллельно самой себе, так как она остается нормальной к одному и тому же вектору $\mathbf{A} = (A_1, A_2)$.

Аналогично этому в n-мерном пространстве в уравнении гиперплоскости $A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = B$, где $B \geqslant 0$, коэффициенты $A_1, A_2, \ldots, A_n$ остаются постоянными.

Однородную линейную функцию

$$f(x) = A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n \tag{9}$$

будем называть *линейной формой*. Линейную форму будем обозначать также через z.

Из уравнения (3) очевидно, что для точек $(x_1, x_2, ..., x_n)$, лежащих на данной гиперплоскости, линейная форма принимает значение $z = B$. При увеличении в уравнении (3) свободного члена $(B < B_1 < B_2 < \ldots B_n < \ldots)$, гиперплоскость будет отдаляться от начала координат по направлению вектора A, оставаясь параллельной самой себе. При переходе от точек одной гиперплоскости к другой линейная форма (9) будет возрастать, принимая значения $z_1 = B_1, ..., z_n = B_n$. При $B = 0$ гиперплоскость проходит через начало координат, а линейная форма $z = 0$.

Таким образом, линейная форма $z = A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_n x_n$ сохраняет постоянное значение $z = B$ для всех точек гиперплоскости $A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_n x_n = B$ и будет возрастать при параллельном перемещении гиперплоскости в направлении вектора $\mathbf{A} = (A_1, A_2, ..., A_n)$.

§ 19. Выпуклые многогранники и линейное программирование

1. Теория выпуклых множеств дает возможность доказать основные теоремы линейного программирования.

Теорема 1. *Если K — ограниченный выпуклый многогранник, то каждая точка x, являющаяся выпуклой линейной комбинацией угловых точек множества K, принадлежит этому множеству K.*

Доказательство. Поскольку K — ограниченный выпуклый многогранник, множество K имеет конечное число угловых точек $x_1, x_2, ..., x_p$; K есть пересечение конечного числа полупространства, определяемых неравенствами

$$\begin{cases} a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \ldots + a_{1n} y_n \leqslant b_1 \\ a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \ldots + a_{2n} y_n \leqslant b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} y_1 + a_{m2} y_2 + \ldots + a_{mn} y_n \leqslant b_m \end{cases}$$

или

$$AY \leqslant B,$$

где A — матрица типа $m \times n$, составленная из коэффициентов при y;

B — матрица-столбец, составленная из свободных членов;

Y — матрица-столбец, составленная из переменных y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Угловые точки x_i принадлежат множеству K и поэтому

$$Ax_i \leqslant B, \quad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Допустим, что x^* — выпуклая линейная комбинация угловых точек:

$$x^* = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_p x_p \ (\lambda_i \geqslant 0, \ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1).$$

Покажем, что $x^* \in K$, т. е. x^* принадлежит множеству K.

Умножив обе части уравнения на матрицу A слева, получим

$$Ax^* = A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_p x_p),$$

или

$$Ax^* = \lambda_1 Ax_1 + \lambda_2 Ax_2 + \ldots + \lambda_p Ax_p.$$

Поскольку $Ax_i \leqslant B$, следовательно:

$$Ax^* = \lambda_1 Ax_1 + \lambda_2 Ax_2 + \ldots + \lambda_p Ax_p \leqslant$$
$$\leqslant \lambda_1 B + \lambda_2 B + \ldots + \lambda_p B = B,$$

так как

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1.$$

Отсюда

$$Ax^* \leqslant B \quad \text{и} \quad x^* \in K.$$

Таким образом, теорема доказана.

Теперь сформулируем задачу линейного программирования следующим образом: максимизировать (минимизировать) $z = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$ при условиях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

$$x_i \geqslant 0 \ (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

где a_{ij}, b_i и λ_j суть известные постоянные и $m < n$.

2. **Теорема 2.** *Если выпуклое множество K допустимых решений задачи линейного программирования является ограниченным многогранником, то линейная форма $f(x)$ достигает максимума в угловой точке множества K.*

Доказательство. Поскольку K — выпуклый многогранник, то имеется конечное число угловых точек; обозначим их через

$$x_1, x_2, \ldots, x_n.$$

Пусть x^* — точка множества K, такая, что $f(x^*)$ является максимумом, т. е. x^* есть оптимальное допустимое решение. Тогда $f(x^*) \geqslant f(x)$ для всех $x \in K$. Если x^* есть угловая точка, то теорема доказана.

Предположим теперь, что x^* не является угловой точкой. Если $x^* \in K$, то по теореме 1 x^* есть выпуклая линейная комбинация угловых точек множества K. Так,

$$x^* = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n,$$

где

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geqslant 0 \, (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Так как $f(x)$ является линейной функцией, то получаем:

$$f(x^*) = f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n) =$$
$$= \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \lambda_n f(x_n),$$

где $f(x)$ максимум для всех $x \in K$. Теперь выберем наибольшее из значений $f(x_i)$ и подставим его вместо каждого $f(x_i)$ в последнее уравнение. Обозначим это наибольшее значение через $f(x_p)$; тогда получаем:

$$\lambda_1 f(x_p) + \lambda_2 f(x_p) + \ldots + \lambda_n f(x_p) \geqslant$$
$$\geqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \lambda_n f(x_n) = f(x^*),$$

так как все λ_i неотрицательны. Итак,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,$$

откуда

$$\lambda_1 f(x_p) + \lambda_2 f(x_p) + \ldots + \lambda_n f(x_p) =$$
$$= (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n) f(x_p) = f(x_p)$$

и

$$f(x_p) \geqslant f(x^*) = \max.$$

Так как мы приняли $f(x^*) \geqslant f(x)$ для всех $x \in K$, то

$$f(x_p) = f(x^*) = \max,$$

а поскольку x_p есть угловая точка, то замечаем, что максимум достигается на угловой точке множества K. Теорема доказана.

Если же $f(x)$ достигает максимального значения более чем в одной крайней точке, то она достигает такое же максимальное значение для каждой выпуклой линейной комбинации этих точек.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_r$ — угловые точки, для которых

$$f(x_1) = f(x_2) = \ldots = f(x_r) = \max.$$

Далее, если x^* есть выпуклая линейная комбинация точек, то

$$f(x^*) = f(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \ldots + \mu_r x_r) =$$
$$= \mu f(x_1) + \mu_2 f(x_2) + \ldots + \mu_r f(x_r)$$

и

$$f(x^*) = \mu_1 m_1 + \mu_2 m_2 + \ldots + \mu_r m_r = \max,$$

так как $\sum_{i=1}^{k} \mu_i = 1.$

Систему (1) и (2) можно написать в следующей форме векторного уравнения:

$$x_1\mathbf{A}_1 + x_2\mathbf{A}_2 + \ldots + x_n\mathbf{A}_n = \mathbf{B}, \quad (3)$$

$$x_i \geqslant 0 \ (i = 1, 2, \ldots, n), \quad (4)$$

где

$$\mathbf{A}_i = \begin{Vmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{Vmatrix} \text{ где } i = 1, 2, \ldots, n \text{ и } \mathbf{B} = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{Vmatrix}$$

Допустимым решением задачи линейного программирования является вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющий ограничениям (3) и (4).

3. **Теорема 3.** *Если существует множество линейно независимых векторов* $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_r$ *таких, что*

$$\mathbf{A}_1x_1 + \mathbf{A}_2x_2 + \ldots + \mathbf{A}_rx_r = \mathbf{B} \quad (5)$$

$$x_i \geqslant 0 \ (i = 1, 2, \ldots, r),$$

то точка $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_r, 0, 0, \ldots, 0)$, *последние* $n - r$ *координат которой равны нулю, является угловой точкой выпуклого множества* K *решений* (3) *и* (4).

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}$ не является крайней точкой. Тогда эта точка, принадлежащая множеству K, является выпуклой комбинацией двух других точек $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ из K. Имеем:

$$\mathbf{x} = r\mathbf{y} + (1 - r)\mathbf{z} \quad (0 < r < 1).$$

Поскольку компоненты $\mathbf{x}$ неотрицательны, а последние $n - r$ компонент $\mathbf{x}$ — нули, то векторы $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ будут иметь вид

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_r, 0, 0, \ldots, 0),$$

$$\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_r, 0, 0, \ldots, 0). \quad (5)$$

Так как $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ являются решениями (5), получаем

$$\mathbf{yA} = \mathbf{B}, \quad \mathbf{zA} = \mathbf{B},$$

где

$$\mathbf{A} = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{matrix} \right\|.$$

Переписав эти уравнения в векторной форме, имеем

$$\mathbf{A}_1 y_1 + \mathbf{A}_2 y_2 + \dots + \mathbf{A}_r y_r = \mathbf{B},$$

$$\mathbf{A}_1 z_1 + \mathbf{A}_2 z_2 + \dots + \mathbf{A}_r z_r = \mathbf{B}.$$

Но $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_r$ являются линейно независимыми векторами, поэтому вектор $\mathbf{B}$ выражается через них единственным образом, как линейная комбинация $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_r$. Поэтому $y_i = z_i = 0$ и $\mathbf{x}$ невозможно представить в виде выпуклой линейной комбинации двух различных точек множества.

Следовательно, точка $\mathbf{x}$ есть угловая точка множества K.

4. Теорема 4. *Если* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_r, 0, 0, \dots, 0)$ *есть угловая точка множества, то имеются линейно независимые векторы*

$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_r$ *такие, что*

$$\mathbf{A}_1 x_1 + \mathbf{A}_2 x_2 + \dots + \mathbf{A}_r x_r = \mathbf{B} \tag{6}$$

$$x_i \geqslant 0 \ (i = 1, 2, \dots, r).$$

Доказательство. Допустим, что векторы $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_r$ линейно зависимы. Тогда линейная комбинация, равная нулевому вектору, будет

$$\mathbf{A}_1 y_1 + \mathbf{A}_2 y_2 + \dots + \mathbf{A}_r y_r = 0,$$

где не все $y_i = 0$. Умножим обе части равенства на $\tau > 0$, затем прибавим и вычтем полученный результат из (6):

$$\mathbf{A}_1 (x_1 + \tau y_1) + \mathbf{A}_2 (x_2 + \tau y_2) + \dots + \mathbf{A}_r (x_r + \tau y_r) = \mathbf{B},$$

$$\mathbf{A}_1 (x_1 - \tau y_1) + \mathbf{A}_2 (x_2 - \tau y_2) + \dots + \mathbf{A}_r (x_r - \tau y_r) = \mathbf{B}.$$

Поскольку $x_i > 0$, можно выбрать два допустимых решения $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ при достаточно малом τ таких, что $(x_i \pm \tau y_i) > 0$, т. е. первые r компонент $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ примут положительные значения. Предположим, что τ и есть такое выбранное значение. Тогда получим допустимые решения:

$$\mathbf{x}_1 = (x_1 + \tau' y_1,\ x_2 + \tau' y_2,\ \ldots,\ x_r + \tau' y_r,\ 0, 0,\ \ldots,\ 0),$$
$$\mathbf{x}_2 = (x_1 - \tau' y_1,\ x_2 - \tau' y_2,\ \ldots,\ x_r - \tau' y_r, 0, 0,\ \ldots,\ 0).$$

Но $x = \frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_2$; это означает, что x не является угловой точкой, что противоречит предположению. Поскольку допущение о том, что $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_r$ являются линейно зависимыми векторами, ведет к противоречию, поэтому оно должно быть отвергнуто.

Следовательно, $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_r$ являются линейно независимыми векторами.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Докажите, что пересечение двух или нескольких выпуклых фигур есть выпуклая фигура.

2. Докажите, что всякий выпуклый многоугольник является пересечением конечного числа полуплоскостей.

3. Докажите, что, если через каждую граничную точку ограниченной фигуры проходит по крайней мере одна опорная прямая, то фигура является выпуклой.

4. Показать, что уравнению

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \ldots + \frac{x_n}{a_n} = 1$$

соответствует гиперплоскость, отсекающая на осях координат отрезки длиной $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

5. Дано полупространство $-5x_1 + 4x_2 - 3x_3 \leqslant 5$. Определить, принадлежит ли ему точка (0, 0, 0). *Отв.* Принадлежит.

6. Определить, принадлежит ли точка девятимерного пространства (0; 4; 3; —7; 0; 0; 9; 1; 0) полупространству

$$4x_1 + 5x_2 - 7x_3 + x_5 - 2x_6 + 12x_7 - 3x_9 \leqslant 11.$$

Отв. Не принадлежит.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какая плоская фигура называется выпуклой? Привести примеры.
2. Что такое полуплоскость?
3. Что называется выпуклым многоугольником?
4. Что такое угловые точки многоугольника?

5. Какие прямые называются опорными?
6. Что называется выпуклым телом в пространстве? Привести примеры выпуклых тел.
7. Что такое опорная плоскость?
8. Что такое многогранник? Конус?
9. Дайте понятие выпуклого множества.
10. Что такое крайние (или угловые) точки выпуклого множества?
11. Расскажите о выпуклой комбинации точек.
12. Что такое многоугольник решений? Многогранник решений?
13. Что такое гиперплоскость?
14. Что такое полупространство?

Глава VII

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

§ 20. Понятие о неравенствах

1. Два числа или два алгебраических выражения, соединенные между собой знаком $>$ или $<$, образуют *неравенство.*

Неравенство $4 > -5$ читается так: четыре строго больше -5.

Неравенство $2+a<3+a$ читается так: $2+a$ строго меньше $3+a$.

Неравенство называется *тождественным*, если оно верно (т. е. остается таким же: строго больше или строго меньше) при всевозможных значениях букв, или при значениях, ограниченных заданными условиями. Оба приведенных выше примера неравенств тождественные.

Два неравенства называются неравенствами *одинакового смысла*, если в каждом из них имеется один и тот же знак: $>$ или $<$; например, $7>5$ и $-2>-4$, или $-3<4$ и $a<a+b$.

Если в одном из неравенств стоит знак $>$, а в другом $<$, то такие неравенства будут неравенствами *противоположного* смысла; например,

$$0>-3 \quad \text{и} \quad -3<2.$$

В ряде случаев неравенство при некоторых значениях входящих в него букв становится равенством. Например, сумма двух взаимно обратных положительных чисел больше двух, т. е.

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2.$$

При $a = b$ имеем $\frac{a}{b} = 1$ и $\frac{b}{a} = 1$, т. е. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2$.

Тогда неравенство запишем так:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2.$$

Знак $\geqslant$ читается «больше, или равно» (не меньше); знак $\leqslant$ «меньше, или равно» (не больше).

Неравенство состоит из двух частей; левой части и правой части. Приведем основные свойства неравенств:

1. Два неравенства одинакового смысла можно почленно складывать.

2. Два неравенства противоположного смысла можно почленно вычитать, оставляя знак того неравенства, из которого вычиталось другое неравенство.

3. Если обе части неравенства умножим или разделим на одно и то же положительное число, то знак неравенства не изменится.

4. Если обе части неравенства умножим или разделим на одно и то же отрицательное число, то получим неравенство противоположного смысла.

Эквивалентными (или *равносильными*) неравенствами называются неравенства, которые удовлетворяются одними и теми же значениями входящих в них переменных. Например, неравенства

$$3x + 2 < x + 12 \quad \text{и} \quad 3x < x + 10$$

эквивалентны, так как оба они удовлетворяются значениями x, меньшими 5, и только этими значениями.

Эквивалентные неравенства имеют свойства, аналогичные эквивалентным уравнениям:

1. Если одно неравенство эквивалентно второму, а второе эквивалентно третьему, то и первое неравенство эквивалентно третьему.

2. Если к обеим частям неравенства, содержащего переменные, прибавим одно и то же число, то получим неравенство, эквивалентное данному.

3. Любой член неравенства можно перенести из одной части неравенства в другую, сменив знак члена на противоположный.

4. Если обе части неравенства, содержащего переменные, умножить на одно и то же положительное число, то получим неравенство, эквивалентное данному.

5. Если обе части неравенства, содержащего переменные, разделить на положительное число, то получим неравенство, эквивалентное данному.

6. Если обе части неравенства, содержащего переменные, умножим на одно и то же отрицательное число и переменим знак неравенства на противоположный, то получим неравенство, эквивалентное данному. В частности, если обе части неравенства умножить на —1, то знак неравенства надо изменить на противоположный.

Используя эти свойства, из одного неравенства можно получить другое, эквивалентное первому, путем ряда тождественных преобразований (сложение, вычитание, умножение, деление, приведение подобных членов).

2. Неравенства первой степени с одним или многими переменными будем называть *линейными неравенствами.*

Линейное неравенство с одним переменным после раскрытия в нем скобок и приведения подобных членов (и, если понадобится, умножения на —1), принимает следующий общий вид:

$$ax + b > 0,$$

где x — переменное, a и b — постоянные числа $(a \neq 0)$.

Решить неравенство $f(x) > \varphi(x)$, значит, найти все те допустимые численные значения переменного x, при которых значение функции $f(x)$ больше значения функции $\varphi(x)$. Решение неравенств сводится к ряду последовательных преобразований, когда из данного неравенства получают другое, эквивалентное данному, но более простое неравенство.

Пусть дано линейное неравенство с одним переменным:

$$a_{11}x_1 + b_1 > 0 \quad (a_{11} \neq a). \tag{1}$$

Решение соответствующего этому неравенству уравнения

$$a_{11}x_1 + b_1 = 0$$

выражается с помощью равенства

$$x_1 = -\frac{b_1}{a_{11}};$$

другими словами, всегда существует единственное значение переменного, удовлетворяющее этому уравнению.

Решение неравенства (1) выражается с помощью знака неравенства ($>$ или $<$), т. е. существует бесчисленное множество значений переменного x_1, удовлетворяющих данному неравенству.

При этом, если

$$a_{11} > 0, \quad \text{то} \quad x_1 > -\frac{b_1}{a_{11}},$$

а если

$$a_{11} < 0, \quad \text{то} \quad x_1 < -\frac{b_1}{a_{11}}.$$

Таким образом, совокупность значений переменного x_1, удовлетворяющих неравенству (1), представляет

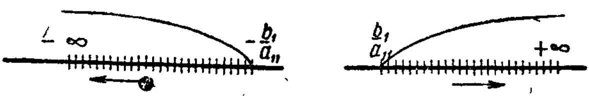

Рис. 26

собой интервал, ограниченный снизу (слева) при $a>0$ и сверху (справа) при $a<0$, т. е. линейное неравенство с одним переменным имеет одностороннее решение:

$$-\infty < x_1 < -\frac{b_1}{a_{11}} \quad \text{или} \quad -\frac{b_1}{a_{11}} < x_1 < +\infty.$$

Геометрически это решение представлено на рис. 26.

Примеры:

а) $3x - 5 > 0; \qquad x > \frac{5}{3}.$

б) $-4x - 1 > 0; \quad x < -\frac{1}{4}.$

3. *Системой* двух или нескольких *неравенств* называется совокупность таких неравенств, что значения переменных удовлетворяют каждому из этих нера-

венств. Решить систему неравенств значит найти все значения переменных, которые удовлетворяют всем данным неравенствам. Простейшим примером будет система двух неравенств с одним переменным.

Пусть дана система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + b_1 > 0 \\ a_{21}x_1 + b_1 > 0 \end{cases} \quad (a_{11} \neq 0, \ a_{21} \neq 0).$$

Каждое из неравенств системы, взятое в отдельности, дает для x_1 односторонний интервал, т. е. совокупность значений переменной, лежащих влево или вправо от определенной точки. Решение системы этих неравенств, т. е. совокупность значений, удовлетворяющих одновременно обоим неравенствам, будет определяться, во-первых, знаками неравенства ($>$ или $<$) в решении каждого из неравенств, а следовательно, знаками коэффициентов при переменном, и, во-вторых, границами изменения для x.

В зависимости от знаков коэффициентов при переменных могут представиться два случая: 1) коэффициенты при переменном в неравенствах имеют разные знаки; 2) коэффициенты при переменном в обоих неравенствах имеют одинаковые знаки.

Пусть теперь дано одно неравенство с двумя переменными

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 > 0 \quad (a_{11} \neq 0; \ a_{12} \neq 0).$$

В нем каждое из переменных в отдельности может принять любое значение в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Если одному из переменных, например x_2, приписать какое-нибудь произвольное, но фиксированное значение, то для другого переменного x_1 получается одностороннее решение (знак неравенства определяется знаком коэффициента при этом переменном), например, при

$$a_{11} > 0 \quad x_1 > \frac{a_{12}x_2 + b_1}{a_{11}}.$$

Следовательно, граница изменения переменного x_1 не является постоянной, а зависит от значения x_2. Можно также фиксировать x_1 и решать неравенство относительно x_2.

Остановимся на геометрическом смысле этого неравенства. Соответствующее уравнение $a_{11}x_1+a_{12}x_2+b_1=0$ определяет прямую на плоскости, так что трехчлен $a_{11}x_1+a_{12}x_2+b_1$ обращается в нуль тогда и только тогда, когда точка $(x_1. x_2)$ лежит на прямой. Прямая эта разбивает координатную плоскость на две полуплоскости, причем для точек одной половины имеет место неравенство $a_{11}x_1+a_{12}x_2+b_1>0$, а для другой — $a_{11}x_1+a_{12}x_2+b_1<0$.

Действительно, в нуль трехчлен обращается только на прямой, поэтому в пределах одной полуплоскости он в силу своей непрерывности сохраняет знак. По разные же стороны от прямой эти знаки должны быть различны.

Таким образом, геометрически данное неравенство выражает полуплоскость, т. е. совокупность точек, лежащих в плоскости по одну сторону от прямой. Выбор полуплоскости осуществляется следующим образом: берем точку, ее значение (координаты) подставляем в неравенство и если последнему удовлетворяет его значение, то взятая точка принадлежит данной полуплоскости.

§ 21. Системы линейных неравенств в двухмерном пространстве

1. Пусть на плоскости (т. е. в двухмерном пространстве) дана линейная функция, определяемая из уравнения $x_1+x_2=5$, а именно $x_2=5-x_1$.

Эта функция называется линейной, так как точки (x_1, x_2) лежат на графике, представляющем прямую линию. Прямая линия может быть использована как базис, удовлетворяющий другой точке множества на плоскости.

Пусть теперь дано неравенство $x_2<5-x_1$ или x_1+ $+x_2-5<0$.

Множество точек, определяемых линейным неравенством, называется *полупространством*, или *пространством решений неравенства*.

Различают открытые и закрытые (или замкнутые) полупространства. Открытое полупространство есть множество точек, удовлетворяющих строгим линейным неравенствам,

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+b_1>0$$

или

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+b_1<0.$$

Закрытое полупространство есть множество точек, удовлетворяющих нестрогим неравенствам,

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+b_1\geqslant 0$$

или

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+b_1\leqslant 0,$$

где a_{11}, a_{12} и b_1 — действительные числа и $a_{11}\neq 0$, $a_{12}\neq 0$.

Если даны два уравнения с двумя переменными, графиками которых служат две прямые линии, то их можно рассматривать как множество точек, которое одновременно удовлетворяет соответствующим линейным неравенствам. Множество решений как равенств, так и неравенств, есть пересечение множеств. Поскольку эти множества включают полупространства, то в отличие от систем уравнений вместо единственности решения для системы линейных неравенств будем иметь или бесчисленное множество решений или пустое множество. Это различие между точками уравнений и неравенств необходимо отличать. Например, возьмем пересечение двух прямых линий на плоскости. Совместное решение двух уравнений есть точка пересечения их прямых линий. Одновременное же решение системы соответствующих неравенств есть клинообразная область. На рис. 27 показано решение системы

$$\begin{cases} x_1+x_2-4<0 \\ 2x_1-2x_2-5<0 \end{cases}$$

Решение системы неравенств

$$\begin{cases} x_1+x_2-4>0 \\ x_1-2x_2-5>0 \end{cases}$$

показано на рис. 28.

Если прямые линии параллельны, то имеем:

а) неравенства одинакового смысла, т. е. знаки неравенств имеют одинаковое направление; в этом случае пересечение полупространств есть полупространство;.

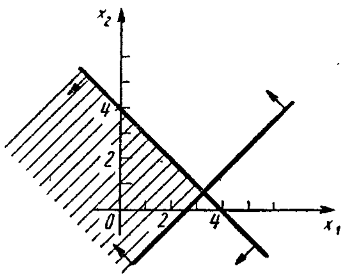

Рис. 27

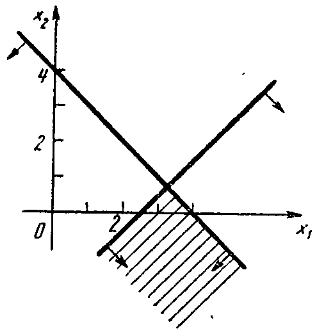

Рис. 28

б) неравенства противоположного смысла; пересечение полупространств есть бесконечная полоса на плоскости;

в) неравенства противоположного смысла; пересечение полупространств не содержит ни одной точки.

Пример 1. Пусть даны неравенства одинакового смысла

$$x_1 + 2x_2 - 6 \leqslant 0, \tag{1}$$

$$x_1 + 2x_2 - 10 \leqslant 0. \tag{2}$$

Множество точек, одновременно удовлетворяющих обоим неравенствам, и множество точек, удовлетворяющих только первому неравенству, совпадают. Это — полупространство, определяемое неравенством (1). Неравенство (2) будет «лишним» (рис. 29).

Пример 2. Пусть даны неравенства противоположного смысла

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - \ \ 6 \geqslant 0, & (3) \\ x_1 + 2x_2 - 10 \leqslant 0. & (2) \end{cases}$$

Пересечение соответствующих полупространств есть бесконечное множество точек между двумя параллельными прямыми линиями. Совместное решение системы есть полоска (рис. 30).

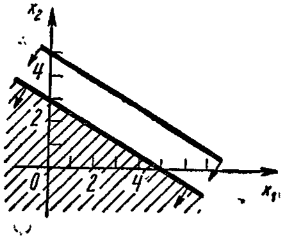

Рис. 29

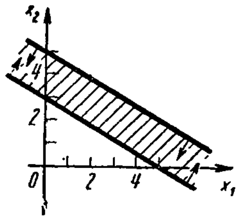

Рис. 30

Пример 3. Даны неравенства противоположного смысла

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - \ \ 6 \leqslant 0, & (1) \\ x_1 + 2x_2 - 10 \geqslant 0. & (4) \end{cases}$$

В этом случае нет точек, которые одновременно удовлетворяют неравенствам (1) и (4) — неравенства несовместны (рис. 31).

2. Если дана система двух неравенств с двумя переменными в общем виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 > 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 > 0, \end{cases}$$

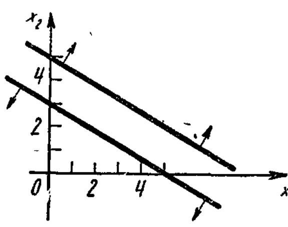

Рис. 31

го простейший способ решения ее состоит в следующем.

Путем уравнивания коэффициентов исключаем одно из переменных (в случае, когда коэффициенты при одном из переменных имеют различные знаки). Пусть исключили переменное x_1. Тогда полученное в результате исключения неравенство дает для оставшегося переменного x_2 одностороннее решение. Если затем этому переменному x_2 дадим какое-нибудь из возможных для него значений, то исходную систему можно рассматривать как систему двух неравенств относительно только переменного x_1. В этом случае система допускает для x_1 конечное двустороннее, но зависимое от x_2 решение.

Поскольку каждое из неравенств системы представляет собой полуплоскость, то решение данной системы есть пересечение двух полуплоскостей.

3. Пусть теперь дана система трех неравенств с двумя переменными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 > 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 > 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + b_3 > 0. \end{cases} \tag{5}$$

Каждое из неравенств системы (5) задает полуплоскость. Решение системы трех неравенств с двумя переменными дает пересечение трех полуплоскостей, и в общем случае образует треугольник.

Необходимыми условиями, при которых эта система неравенств будет определять конечную область, являются требования, чтобы три соответствующие прямые давали в пересечении треугольник. Эти требования будут выполняться, если определитель системы D и определители

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

будут все отличны от нуля.

Достаточными условиями для определения неравенствами области, лежащей внутри треугольника, являются требования, чтобы определитель системы D и три алгебраических дополнения элементов столбца свободных членов были отличны от нуля и имели бы одинаковые знаки.

Для установления необходимых и достаточных условий над системой неравенств (5) произведем линейное преобразование.

Введем новые переменные y и z:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 = y \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 = z. \end{cases} \tag{6}$$

Положив

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

определим отсюда x_1 и x_2 через y и z и подставим их значение в третье неравенство; в результате систему неравенств (5) преобразуем в систему вида

$$\begin{cases} y > 0 \\ z > 0 \\ my + nz + p > 0, \end{cases} \qquad (7)$$

где m, n, и p — некоторые постоянные числа.

Геометрически такое преобразование (рис. 32 *а* и *б*) означает, что треугольник ABC (в плоскости x_1Ox_2) преобразован в треугольник OMN (в плоскости yOz)

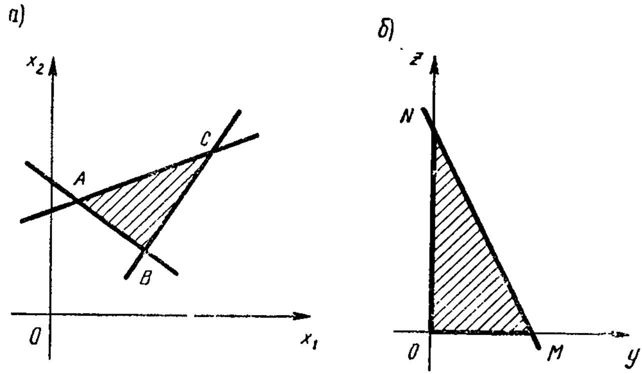

Рис. 32

такой, у которого две стороны совпадают с положительными направлениями осей координат (так называемый координатный треугольник).

И если система неравенств (7) будет такова, что определит внутреннюю часть треугольника OMN, то и эта система также будет определять внутреннюю часть треугольника ABC.

Выясним, когда система (7) будет определять внутренние точки треугольника. Очевидно, тогда, когда третья прямая MN будет отсекать на осях y и z положительные отрезки и когда полуплоскость, определяемая третьим неравенством, будет располагаться влево и вниз от соответствующей прямой. Все это будет иметь место в том случае, когда коэффициенты m и n будут отрицательны, а свободный член p положителен.

Вычислим эти коэффициенты, для чего выполним следующее преобразование. Из (6) находим x_1 и x_2 и подставим эти значения в третье неравенство системы (5); тогда после алгебраических преобразований получим

$$-y\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + D > 0, \tag{8}$$

где D — определитель системы (5).

Таким образом m, n и p системы (7) являются соответствующими алгебраическими дополнениями. Каждому алгебраическому дополнению A_i приписываем тот множитель, который он получил бы в разложении определителя D по элементам последнего столбца. Так что A_1, A_2 и A_3 суть не что иное, как алгебраические дополнения элементов последнего столбца в определителе системы

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

При этих обозначениях получаем

$$-A_1 y - A_2 z + D > 0.$$

Очевидно, что коэффициенты при y и z будут отрицательны, а свободный член положителен тогда, когда

$$A_1 > 0, \quad A_2 > 0, \quad D > 0.$$

Этот результат мы получили, предположив, что $D_3 > 0$. Если бы D_3 был меньше нуля, то при умножении на A знак больше неравенства (8) пришлось бы сменить на обратный, умножив все неравенство на —1. В результате имели бы

$$A_1y + A_2z - D > 0.$$

В этом случае, для того чтобы коэффициенты при переменных были отрицательны, а свободный член положителен, необходимо:

$$A_1 < 0, \quad A_2 < 0, \quad D < 0.$$

Итак, в обоих случаях знак определителей D, D_1 и D_2 должен совпадать со знаком D_3. При этих условиях неравенства (7), а следовательно, и данная система неравенств будет представлять внутреннюю часть треугольника.

Таким образом, для того чтобы система трех неравенств с двумя переменными имела конечное решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель системы D и три алгебраических дополнения элементов столбца свободных членов были отличны от нуля и имели одинаковые знаки.

§ 22. Системы линейных неравенств в n-мерном пространстве. Многогранник решений

1. Понятия, относящиеся к двухмерному пространству, могут быть обобщены и расширены на случай n-мерных пространств.

Рассмотрим решение системы трех неравенств. В этом случае совокупность решений системы есть пересечение полупространств, определяемых неравенствами.

Пусть дана система трех неравенств с двумя переменными

$$\begin{cases} x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \\ x_1 + 2x_2 - 5 \geqslant 0. \end{cases}$$

Пересечение множеств решений этих неравенств (рис. 33) есть неограниченное множество M.

Пусть дана теперь система четырех неравенств с двумя переменными

$$\begin{cases} x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \\ x_1 + x_2 - 5 \geqslant 0 \\ x_1 + 3x_2 - 18 \leqslant 0. \end{cases}$$

Пересечение множеств решений данных неравенств есть ограниченное множество N (рис. 34).

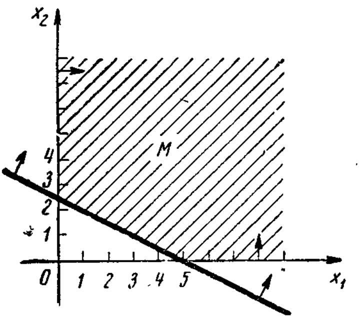

Рис. 33

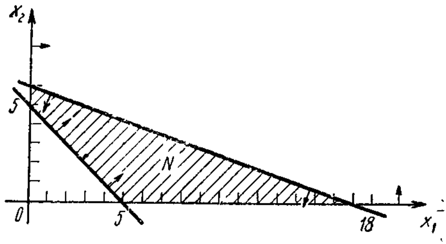

Рис. 34

2. Пусть дана система четырех неравенств с тремя переменными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1 > 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2 > 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_3 > 0 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + b_4 > 0. \end{cases} \tag{1}$$

Одно линейное неравенство с тремя переменными выражает геометрически полупространство, т. е. совокупность точек пространства, лежащую по одну сторону от плоскости, которая задается соответствующим данному неравенству уравнением. Для того чтобы система (1) представляла собой ограниченную часть пространства, необходимо, чтобы четыре соответствующих полупространства образовали в пересечении тетраэдр. Это требование будет выполняться, если определитель системы

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & b_4 \end{vmatrix}$$

и алгебраические дополнения элементов столбца, составленного из свободных членов

$$A_1 = (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}, \quad A_2 = (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

$$A_3 = (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}, \quad A_4 = (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

будут все отличны от нуля.

Эти необходимые условия еще не являются достаточными. Для того чтобы установить, при каких условиях система неравенств (1) будет определять внутреннюю часть этого тетраэдра, введем новые переменные:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1 = y$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2 = z$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_3 = t$$

и преобразуем тетраэдр в такой, у которого тремя гранями служат координатные плоскости (рис. 35).

Система преобразованных неравенств будет иметь вид

$$\begin{cases} y > 0 \\ z > 0 \\ t > 0 \\ my + nz + pt + r > 0, \end{cases} \tag{2}$$

где m, n, p и r — некоторые постоянные числа.

Эта система представляет часть пространства, лежащую внутри тетраэдра, если в последнем неравенстве коэффициенты при переменных будут отрицательны, а свободный член положителен.

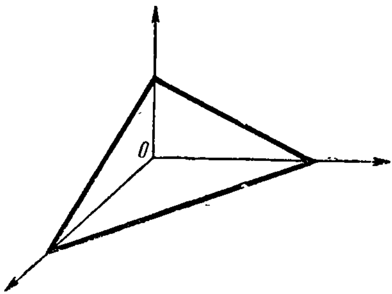

Рис. 35

Выполнив преобразования (аналогично случаю п. 3 § 21), получим четвертое неравенство преобразованной системы (2) в следующем виде

$$-A_1y - A_2z - A_3t + D > 0$$

Коэффициенты при переменных будут отрицательны, а свободный член положителен, если

$$A_1 > 0, \quad A_2 > 0, \quad A_3 > 0, \quad D > 0$$

при условии

$$A_4 = A > 0.$$

Если определитель $A < 0$, то при умножении на A неравенства (2) пришлось бы в нем знак неравенства сменить на противоположный:

$$A_1y + A_2z + A_3t - D > 0,$$

что справедливо при

$$A_1 < 0, \quad A_2 < 0, \quad A_3 < 0, \quad D < 0.$$

Таким образом, система четырех неравенств с тремя переменными определяет тетраэдр тогда и только тогда, когда знаки определителя системы D и алгебраических дополнений одинаковы.

3. Полученные результаты обобщим на случай системы $n+1$ неравенств с n переменными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n + b_1 > 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n + b_2 > 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n + b_i > 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nj}x_j + \ldots + a_{nn}x_n + b_n > 0 \\ a_{n+1,1}x_1 + a_{n+1,2}x_2 + \ldots + a_{n+1,j}x_j + \ldots + \\ \qquad + a_{n+1,n}x_nb_{n+1} > 0. \end{cases} \tag{3}$$

Одно неравенство в n-мерном пространстве представляет в геометрической интерпретации n-мерное полупространство — совокупность точек n-мерного пространства, лежащих по одну сторону от соответствующей гиперплоскости.

Установим условия, необходимые и достаточные для того, чтобы система (3) имела решение, представляемое n-мерным тетраэдром (или симплексом). Под n-мерным тетраэдром подразумевается совокупность точек n-мерного пространства, получаемая путем линейного преобразования (с определителем $D \neq 0$) точек координатного n-мерного тетраэдра в совокупность точек, координаты которых удовлетворяют $n+1$ неравенствам:

$$x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ \ldots,\ x_n > 0,$$
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + b_i > 0,$$

где все $a_{i1} < 0$, а свободный член $b_i > 0$.

При $n=3$ это определение дает трехмерный тетраэдр, при $n=2$ треугольник и при $n=1$ отрезок.

Чтобы установить условия, при которых система неравенств (3) будет иметь конечную область решений, представляющую n-мерный тетраэдр, применим к ней линейное преобразование:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + b_n, \end{cases}$$

предполагая при этом, что определитель

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

Возьмем определитель системы

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \ldots & a_{n+1,n} & b_{n+1} \end{vmatrix}$$

и обозначим через D_i алгебраическое дополнение i-го элемента последнего столбца.

Найденные значения x_i подставляем в $n+1$ неравенств системы (3), которые затем преобразуем аналогично тому, как это делали в случае системы четырех неравенств с тремя переменными.

Предполагая сначала, что $D>0$, умножаем обе части неравенства на D; затем определители, содержащие переменные, разлагаем по элементам соответствующего столбца, а в определителях, содержащих столбцы свободных членов b_i, транспонируем столбцы так, чтобы ряд свободных членов оказался в каждом из определителей на последнем n-м месте; для этого в первом из таких определителей придется сделать $n-1$ транспозиций и в каждом следующем на единицу меньше.

Далее, раскрываем скобки и объединяем члены, содержащие переменные $y_1, y_2, \ldots, y_n$, вынося эти переменные за скобку. Убедимся при этом, что коэффициентами при y_i будут являться определители D_i, взятые с обратным знаком, а совокупность свободных членов будет представлять собой определитель системы D'.

Окончательно получаем:

$$-D_1y_1-D_2y_2- \dots -D_ny_n+D'>0.$$

Этот результат получен в предположении, что $D_{n+1}=D>0$. В этом случае система неравенств после линейного преобразования принимает вид

$$\begin{cases} y_1>0, \ y_2>0, \ \dots, \ y_n>0 \\ D_1y_1-D_2y_2- \dots -D_ny_n+D'>0. \end{cases} \tag{4}$$

Система (4), а следовательно, и исходная система (3) будут представлять n-мерный тетраэдр, в том и только в том случае, если коэффициенты при y_i в последнем неравенстве будут отрицательны, а свободный член положителен. Это будет иметь место, когда

$$D_1>0, \ D_2>0, \ \dots \ D_n>0, \ D'>0.$$

Если предположить, что $D_{n+1}=D<0$, то при умножении исходного неравенства на D знак неравенства надо сменить на противоположный и затем, чтобы вернуться к неравенству со знаком $>$, надо умножить обе части неравенства на -1. В результате получили бы

$$Dy_1+D_2y_2+ \dots +D_ny_n-D'>0,$$

и тогда преобразованная система неравенства для случая $D<0$ приняла бы вид

$$\begin{cases} y_1>0, \quad y_2>0, \ \dots, \ y_n>0 \\ D_1y_1+D_2y_2+ \dots + D_ny_n-D'>0. \end{cases} \tag{5}$$

В этом случае, для того чтобы система (5) представляла тетраэдр, необходимо, чтобы

$$D_1<0, \ D_2<0, \dots, \ D^n<0, \quad D'<0.$$

Таким образом, в обоих случаях требуется, чтобы знаки D_i и D' совпадали.

Итак, для того чтобы система $n+1$ неравенств с n переменными представляла внутреннюю часть n-мерного тетраэдра, необходимо и достаточно, чтобы определитель системы D' и все $n+1$ алгебраических дополнений были отличны от нуля и имели одинаковые знаки.

4. Рассмотрим систему неравенств, в которой число неравенств одинаково с числом переменных.

Для системы двух неравенств с двумя переменными множество решений геометрически составляет внутреннюю часть плоского угла. Этот случай имеет место, когда определитель системы отличен от нуля и коэффициенты хотя бы при одном из переменных имеют разные знаки.

Установим, при каких условиях система трех неравенств с тремя переменными будет иметь решение аналогичного характера. Возьмем систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1 > 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2 > 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_3 > 0, \end{cases}$$

предположим, что ее определитель

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Геометрически это значит, что три соответствующие плоскости пересекаются в некоторой точке $M_0(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)$, образуя трехгранный угол (точнее 8 трехгранных углов).

Установим, при каких условиях три данных неравенства определяют внутреннюю часть трехгранного угла.

Для этого фиксируем одно из переменных, например x_3. Тогда данная система преобразуется в систему трех неравенств с двумя переменными x_1 и x_2 и ее определителем будет

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}x_3 + b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}x_3 + b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}x_3 + b_3 \end{vmatrix} = x_3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Если окажется, что три соответствующих алгебраических дополнения второго порядка

$$A_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},\ A_{22}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}\quad \text{и}\quad A_{32}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

будут иметь одинаковые знаки, например, положительные, то взяв $x_3 > \bar{x}_3$ (или $x_3 < \bar{x}_3$), в зависимости от знака

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

где

$$\bar{x}_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{D},$$

добьемся того, что и D будет положительным. А поэтому при любом фиксированном значении $x_3 > \bar{x}_3$ (или $x_3 < \bar{x}_3$) для переменных x_1 и x_2 можно получить конечную область изменения.

Итак, если определитель системы трех неравенств с тремя переменными отличен от нуля, а три алгебраических дополнения, соответствующие одному из переменных, имеют одинаковые знаки, то при фиксировании значения этой переменной для остальных двух переменных получается конечное решение.

Геометрически множество решений системы в этом случае представляется в виде внутренней части трехгранного угла такого вида, что всякая плоскость, параллельная соответствующей координатной плоскости и проведенная выше (ниже) вершины $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$, пересекает все три грани этого угла, образуя в пересечении треугольник, причем площадь треугольника возрастает, и притом неограниченно, с возрастанием абсолютной величины x_3.

Например, для системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - \ x_3 - 3 > 0 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 + 8 > 0 \\ 2x_1 - x_2 + \ x_3 - 1 > 0 \end{cases}$$

определитель будет

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 9\,(>0)$$

Алгебраические дополнения элементов третьего столбца будут

$$A_1 = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1; \qquad A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 4;$$

таким образом,

$$\bar{x}_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & -8 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{D} = -\frac{17}{9}.$$

При фиксировании $x_3 > -\frac{17}{9}$ для x_1 и x_2 получаем конечное решение. Так, при $x_3=0$ значения x_1 и x_2 лежат внутри треугольника, заданного системой

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3 > 0 \\ -3x_1 + x_2 + 8 > 0 \\ 2x_1 - x_2 - 1 > 0. \end{cases}$$

§ 23. Замена неравенств уравнениями

1. Как показано ранее, линейное уравнение

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \ldots \ + a_{1n}x_n = b_1$$

задает гиперплоскость в n-мерном пространстве. Установлено было также, что неравенству с двумя переменными удовлетворяют точки одной из полуплоскостей, ограниченной прямой, построенной по уравнению, соответствующему этому неравенству.

Вообще, линейному неравенству вида

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant b_1$$

удовлетворяют точки одного из полупространств, ограниченных гиперплоскостью, построенной по соответствующему уравнению

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

Пусть дана система m линейных неравенств с n переменными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n \leqslant b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n \leqslant b_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n \leqslant b_m. \end{cases} \quad (1)$$

Запишем эту систему более кратко:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n \leqslant b_i \quad (1')$$

или

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \quad (1'')$$

Система (1) определяет в n-мерном пространстве многогранник решений. Иначе: множество решений этой системы является выпуклым множеством в n-мерном пространстве. Любую систему неравенств можно записать в виде (1), так как знак неравенства можно изменить на противоположный, умножив обе части неравенства на -1.

Систему неравенств (1) можно преобразовать в систему уравнений с помощью прибавления к левой части каждого неравенства неотрицательного переменного. Назовем эти неотрицательные переменные *дополнительными* переменными. Путем введения этих дополнительных переменных для системы (1) получаем систему уравнений

$$\left\{\begin{aligned} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + \\ & \qquad + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + \\ & \qquad + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + \\ & \qquad + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + \\ & \qquad + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

где

$$x_{n+i} \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Неравенство вида

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant b_1$$

может быть преобразовано в уравнение прибавлением к его левой части некоторого неотрицательного переменного $x_{n+1} \geqslant 0$:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1$$

Можно показать, что всякому решению системы неравенств (1), а именно $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$, соответствует определенное решение системы линейных уравнений (2)

$$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n, \bar{x}_{n+1}, \ldots, \bar{x}_{n+m}.$$

Таким образом, решение системы линейных неравенств приводится к решению соответствующей системы линейных уравнений.

2. Рассмотрим пример замены неравенств уравнениями.

Пусть дана система неравенств

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 3 \\ x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0, \end{cases} \tag{3}$$

Множество решений этой системы геометрически представляет собой пересечение полуплоскостей (рис. 36).

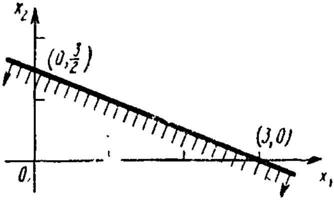

Рис. 36

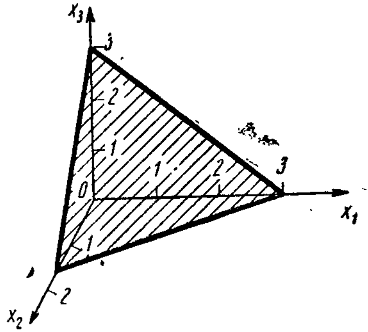

Рис. 37

Если к левой части первого неравенства системы (3) прибавим положительную величину x_3, получим систему (3′), эквивалентную (3):

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \\ x_3 \geqslant 0 \end{cases} \tag{3′}$$

С помощью дополнительной переменной x_3 мы свели данную систему к системе с тремя переменными. Положив в (3′) $x_1 = x_2 = 0$, находим третью координату $x_3 = 3$.

Геометрически это будет плоскость в трехмерном пространстве (рис. 37).

В общем случае систему двух неравенств с двумя неотрицательными переменными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leqslant b_2 \\ x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0, \end{cases} \tag{4}$$

в случае нахождения максимума линейной формы, т. е.

$$Z_{\max} = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$$

можно всегда преобразовать в систему (4′), эквивалентную (4):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + x_3 = b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + x_4 = b_2 \\ x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \\ x_3 \geqslant 0. \end{cases} \tag{4'}$$

$$Z_{\max} = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2,$$

Таким образом, если ограничения данных задачи выражены в виде линейных неравенств, то последние всегда можно заменить уравнениями путем введения дополнительных неотрицательных переменных.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Решить неравенство

$$\frac{37 - 2x}{3} + 9 \leqslant \frac{3x - 8}{4} - x.$$

Отв. $x \geqslant 56$.

2. В чем заключается геометрический смысл следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 1 > 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3 > 0 \\ x_1 - x_2 - 1 < 0 \\ -2x_1 - x_2 - 3 < 0 \end{cases}$$

3. Решить систему неравенств с одной переменной

а) $\begin{cases} 3 + x > 4 + 2x \\ 5x - 3 < 4x - 1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3 + x < 4 + 2x \\ 5x - 3 < 4x - 1 \\ 7 + 2x > 6 + 3x. \end{cases}$

Отв. а) $x < -1$; б) $-1 < x < 1$.

4. Решить следующие системы неравенств и дать их геометрическую интерпретацию:

а) $\begin{cases} x_2 - x_1 + 1 > 0 \\ 2x_1 - x_2 - 3 > 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 6 > 0 \\ x_1 - 3 < 0 \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 1 < 0 \\ 2x_1 - x_2 - 1 < 0 \\ x_1 - x_2 + 1 > 0 \end{cases}$ г) $\begin{cases} 4x_1 - x_2 - x_3 + 1 > 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2 > 0 \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 1 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2 > 0 \end{cases}$ е) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 1 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2 > 0 \\ x_1 - 2x_2 + 4 > 0. \end{cases}$

5. Решить следующие системы неравенств и интерпретировать их геометрически:

а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 1 > 0 \\ -3x_1 + x_2 - 2 > 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 6 > 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_2 \geqslant 0 \\ x_1 - x_2 \geqslant 1 \\ -x_1 + 2x_2 \leqslant 0. \end{cases}$

6. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 6 \leqslant 0 \\ -x_1 + x_2 - 2 \leqslant 0 \\ -x_1 - 3x_2 - 3 \leqslant 0. \end{cases}$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Почему теория систем линейных неравенств служит математической основной линейного программирования?
2. Приведите общий вид неравенств с одной переменной; с двумя и тремя переменными?
3. Дайте геометрическую интерпретацию неравенств с одним, двумя и тремя переменными.

4. Каким условиям должна удовлетворять система трех неравенств с двумя переменными, чтобы она определяла часть плоскости, лежащей внутри треугольника?
5. Что такое координатный треугольник и как он получается?
6. Какое линейное неравенство геометрически выражает полупространство?
7. При каких условиях система четырех линейных неравенств с тремя переменными образует (соответствующими плоскостями) тетраэдр?
8. Что такое тетраэдр с координатными плоскостями?
9. Что называется гиперплоскостью? Каким уравнением она определяется?
10. Что называется n-мерным тетраэдром (или симплексом)?

Глава VIII

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

§ 24. Тождественные преобразования

1. Пусть дана система линейных уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{array}\right. \tag{1}$$

В сокращенной записи эта система может быть представлена в виде

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i \tag{2}$$

или

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad (i = 1,2, \ldots, m). \tag{3}$$

Здесь m уравнений системы линейно независимы. В противном случае из системы можно удалить одно или даже несколько уравнений (так называемых «лишних»). Условимся считать все b_i неотрицательными, так как в случае отрицательности их можно сделать положительными, умножив обе части уравнений на -1.

В системе (1) перенесем все члены уравнений в правую часть. Тогда будем иметь

$$
\left\{
\begin{aligned}
0 &= b_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \\
&\qquad + \ldots + a_{1n}x_n) \\
0 &= b_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \\
&\qquad + \ldots + a_{2n}x_n) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 &= b_i - (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \\
&\qquad + \ldots + a_{in}x_n) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 &= b_m - (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + \\
&\qquad + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n),
\end{aligned}
\right.
\tag{4}
$$

или, пользуясь сокращенными записями (2) и (3), соответственно получим

$$0 = b_i - (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n) \tag{4'}$$

или

$$0 = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{4''}$$

Уравнения, записанные в форме (4), (4′) или (4″), будем называть 0-*уравнениями*.

Из системы (4) определим переменную x_j, для чего перенесем член $a_{ij}x_j$ влево с противоположным знаком, и затем разделим обе части уравнения на $a_{ij} \neq 0$. Тогда получим

$$x_j = \frac{b_i}{a_{ij}} - \frac{a_{i1}}{a_{ij}} x_1 - \frac{a_{i2}}{a_{ij}} x_2 - \ldots - \frac{a_{in}}{a_{ij}} x_n$$

или, положив

$$\lambda_i = \frac{b_i}{a_{ij}}; \quad \lambda_{i1} = -\frac{a_{i1}}{a_{ij}}; \ \ldots \ ; \ \lambda_{in} = -\frac{a_{in}}{a_{ij}}$$

будем иметь

$x_j = \lambda_i + \lambda_{i1}x_1 + \lambda_{i2}x_2 + \ldots + \lambda_{in}x_n$, где $i = 1, 2, \ldots, n$.

Такие уравнения, разрешенные относительно одной из переменных, называются *X-уравнениями.*

2. Пусть система (1) содержит k линейно независимых уравнений и разрешена относительно k переменных. Тогда можно считать, что эта система разрешена относительно первых k переменных из первых k уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = b_1 - (a_{1,k+1}x_{k+1} + a_{1,k+2}x_{k+2} + \ldots + a_{1n}x_n) \\ x_2 = b_2 - (a_{2,k+1}x_{k+1} + a_{2,k+2}x_{k+2} + \ldots + a_{2n}x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_i = b_i - (a_{i,k+1}x_{k+1} + a_{i,k+2}x_{k+2} + \ldots + a_{in}x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_k = b_k - (a_{k,k+1}x_{k+1} + a_{k,k+2}x_{k+2} + \ldots + a_{kn}x_n). \end{cases} \tag{5}$$

Система (5) в сокращенной записи имеет вид

$$x_i = b_i - \sum_{j=k+1}^{n} a_{ij}x_j \quad (i = 1, 2, \ldots, k). \tag{5'}$$

Обозначим вектор-столбец свободных членов этой системы (5) через $\mathbf{B}$, векторы-столбцы коэффициентов при переменных $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ соответственно через $\mathbf{A}_j$ (где $j=k+1, k+2, \ldots, n$), а левые части уравнений (т. е. разрешенные переменные $x_1, x_2, \ldots, x_k$) умножим соответственно на единичные векторы k-мерного пространства

$$\mathbf{A}_1(1, 0, \ldots, 0); \quad \mathbf{A}_2(0, 1, \ldots, 0); \ \ldots; \ \mathbf{A}_k(0, 0, \ldots, 1).$$

Тогда имеем систему (5) в виде векторного уравнения

$$\sum_{i=1}^{k} x_i\mathbf{A}_i = \mathbf{B} - \sum_{j=k+1}^{n} x_j\mathbf{A}_j, \tag{6}$$

где векторы $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_k$ образуют базис в k-мерном пространстве.

Составим матрицу разложений векторов

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_k, \mathbf{B}, \mathbf{A}_{k+1}, \mathbf{A}_{k+2}, \ldots, \mathbf{A}_j, \ldots, \mathbf{A}_n$$

в базисе $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_k$

Имеем:

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & b_1 & a_{1,k+1} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & b_2 & a_{2,k+1} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 & b_l & a_{l,k+1} & \ldots & a_{lj} & \ldots & a_{ln} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 & b_k & a_{k,k+1} & \ldots & a_{kj} & \ldots & a_{kn} \end{matrix} \right\| \tag{7}$$

Предположим, что совокупность векторов

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots \mathbf{A}_k, \mathbf{A}_{k+1}, \ldots, \mathbf{A}_n,$$

входящих в уравнение (6), образует несколько базисов k-го порядка, отличающихся один от другого хотя бы одним вектором. При переходе от базиса к базису (см. § 12) все коэффициенты уравнений (5) будут преобразовываться по формулам

$$b_l' = \frac{D_{l0}}{D}, \quad a_{lj}' = \frac{D_{lj}}{D}.$$

Переход от одного базиса к другому преобразует одну систему уравнений в эквивалентную ей систему, т. е. в систему с теми же решениями. При этом мы будем рассматривать положительные базисы. Базис будем называть положительным по отношению к вектору свободных членов **B**, если **B** представляется в этом базисе в виде

$$\mathbf{B} = \sum_{l=1}^{k} \beta_l \mathbf{A}_l \; (\beta_l \geqslant 0).$$

Из уравнений системы (5) видно, что базис, содержащий векторы $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_k$, соответствующие разрешенным переменным, является положительным, так как по предположению $\beta_l \geqslant 0$.

Переменные $x_1, x_2, \ldots, x_k$, относительно которых система (5) разрешена, будем называть *базисными*, а все остальные — *небазисными*. Решение системы, получаемое приравниванием небазисных переменных нулю, называется *базисным*.

Разберем последовательность перехода от одного базиса к другому, используя систему (5) и матрицу (7):

1) Выберем один из столбцов матрицы A_j $(k+1 \leqslant \leqslant j \leqslant n)$, в котором имеются положительные коэффициенты (один или несколько),

$$y_{1j},\ y_{2j},\ \ldots,\ y_{ij},\ \ldots,\ y_{kj}\ (1 \leqslant i \leqslant k)$$

при неразрешенных переменных x_j. (В исходной системе

$$y_{1j} = a_{1j},\quad y_{2j} = a_{2j},\ \ldots,\ y_{kj} = a_{kj}).$$

Пусть таким столбцом будет j'.

2) Находим минимальное значение частных от деления свободных членов на соответствующие (только положительные!) коэффициенты при неразрешенных переменных, т. е. отношение $\min\left\{\frac{b_i}{y_{ij}}\right\}$. Пусть минимальное отношение будет при $i = i'$. Коэффициент $y_{i'j'}$ назовем *разрешающим элементом* системы (5).

3) Разрешим i'-е уравнение относительно переменной:

$$x_{j'} = \frac{b_{i'}}{y_{i'j'}} - \left(\frac{x_{i'}}{y_{i'j'}} + \sum_{j \neq j'} \frac{y_{i'j}}{y_{i'j'}} x_j\right). \tag{8}$$

Подставим полученное выражение в остальные уравнения системы (5). Тогда система (5) перейдет в эквивалентную ей систему:

$$x_i = \left(b_i - y_{ij'}\frac{b_{i'}}{y_{i'j'}}\right) - \left[-\frac{y_{ij}}{y_{i'j'}} x_{i'} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j \neq j'}\left(y_{ij} - y_{ij'}\frac{y_{i'j}}{y_{i'j'}}\right) x_j\right]$$

$$(i = 1, 2, \ldots, i'-1,\quad i'+1, \ldots, k-1). \tag{9}$$

$$x_k = \left(b_k - y_{kj'}\frac{b_{j'}}{y_{i'j'}}\right) - \left[-\frac{y_{kj'}}{y_{i'j'}} x_{i'} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j \neq j'}\left(y_{kj} - y_{kj'}\frac{y_{i'j}}{u_{i'j'}}\right) x_j\right]$$

$$(j = k+1,\ \ldots,\ n).$$

При этом совокупность векторов $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{j'-1}, A_{j'}, \mathbf{A}_{j'+1}, \ldots, \mathbf{A}_k$ станет новым базисом. Это можно показать таким образом. Из (9) следует, что эти векторы образуют базис, так как соответствующий им определитель не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & a_{1j'} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & a_{2j'} & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{i'j'} & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{kj'} & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = a_{i'j'} > 0.$$

Этот базис положительный, так как новые свободные члены неотрицательны. В самом деле, свободные члены имеют вид

$$b_i - y_{ij'}\frac{b_{i'}}{a_{i'j'}} = y_{ij'}\left(\frac{b_i}{y_{ij'}} - \frac{b_{i'}}{y_{i'j'}}\right).$$

Если $y_{ij'} > 0$, то по правилу 2)

$$\frac{b_i}{y_{ij'}} \geqslant \frac{b_{i'}}{y_{i'j'}}$$

и свободный член неотрицателен; если же $y_{ij'} \leqslant 0$, то свободный член снова неотрицателен.

Преобразование системы (5) в систему (9), определяемое правилами 1) —3), является *тождественным преобразованием.*

§ 25. Неотрицательные решения линейных систем

1. В задачах линейного программирования нас будут интересовать решения систем неравенств, удовлетворяющих условию $x_j \geqslant 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Такие решения называются *неотрицательными решениями.*

Поскольку решение системы линейных неравенств сводится к решению соответствующей системы линейных алгебраических уравнений путем введения дополнительных неотрицательных переменных, то одним из важных вопросов линейного программирования является определение неотрицательных решений системы линейных уравнений.

Пусть дана система линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \ (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{1}$$

После того, как будет найдено общее решение, выделим подпространство решений, в котором дополнительные переменные неотрицательны. Так как в большинстве экономических задач условие неотрицательности налагается не только на дополнительные переменные, но и на все другие переменные, рассмотрим прежде всего системы, в которых ограничены все без исключения переменные, т. е. системы

$$0 = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \ (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{2}$$

где все $x_j \geqslant 0$.

Каждое уравнение системы (2) можно разрешить относительно переменной, входящей только в одно из уравнений системы (2), причем коэффициент при переменной должен иметь знак плюс.

Предположим, что уравнения системы (2) разрешены относительно всех таких переменных. После соответствующей перенумерации переменных систему (2) можно записать так:

$$\left\{\begin{aligned} x_i &= b_i - \sum_{j=i'+1}^{k} a_{ij}x_j \\ 0 &= b_l - \sum_{j=i'+1}^{k} a_{lj}x_j, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

где

$$i = 1, 2, \ldots, i'; \quad l = 1, 2, \ldots, l'; \quad i' + l' = m;$$

$$i' + k = n; \quad b_i \geqslant 0; \quad b_l \geqslant 0.$$

В системе (3) любое уравнение, не разрешенное относительно какой-либо переменной, будет нуль-уравнение. Следовательно, всякую систему линейных уравнений можно привести к виду (3).

Чтобы найти неотрицательное решение системы (3), производим тождественные преобразования последней, для чего:

а) найдем нуль-уравнение, в котором $b_l > 0$; если такого уравнения нет, то значения переменных

$$x_i = b_i; \quad x_j = 0 \ (i = 1, 2, \ldots, i', \ j = i' + 1, \ldots, k)$$

образуют неотрицательное решение системы (3) (пусть это будет, например, r-е уравнение);

б) отметим в r-м уравнении положительный коэффициент $a_{rj'}$

в) найдем разрешающий элемент $a_{r'j'}$ и произведем тождественное преобразование системы (3);

г) r-е нуль-уравнение используем и в дальнейших преобразованиях системы до разрешения его или до тех пор, пока не установим, что система (3) несовместна;

д) разрешив r-е нуль-уравнение, найдем следующее нуль-уравнение со свободным членом $b_l > 0$ и произведем с ним аналогичные преобразования;

е) такие тождественные преобразования продолжаем до тех пор, пока не освободимся от всех нуль-уравнений.

Этот прием тождественных преобразований применим к любой системе m линейных уравнений с n переменными и через конечное число шагов приводит к некоторому неотрицательному решению (в случае совместности системы).

Замечание. В ряде задач тождественные преобразования приводят к уже встречавшимся базисам. В этом случае имеет место так называемое *зацикливание*. Ввиду краткости изложения в настоящем руководстве нет возможности подробно остановиться на этом, тем более, что в практических задачах случаи зацикливания встречаются крайне редко.

Пример 1. Найти неотрицательные решения системы

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 \qquad\ + \ x_3 = 2. \end{cases}$$

Решение. 1) Составим систему нуль-уравнений:

$$\begin{cases} 0 = 3 - (x_1 - x_2 + 2x_3) \\ 0 = 2 - (x_1 \qquad + \ x_3). \end{cases}$$

2) Из второго уравнения определим x_1 (или x_3). Если определить x_1 (или x_3) из первого уравнения и подставить во второе, то получим отрицательный свободный член. Если определить x_2, то свободный член для x_2 также будет отрицательный.

Итак,

$$x_1 = 2 - x_3.$$

Подставим значение x_1 в первое уравнение данной системы:

$$0 = 1 + x_2 - x_3.$$

3) Из последнего нуль-уравнения определим x_3 (так как, определяя x_2, получим отрицательный свободный член):

$$x_3 = 1 + x_2 \tag{4}$$

4) Подставляя значение x_3 в уравнение $x_1 = 2 - x_3$, найдем

$$x_1 = 1 - x_2 \tag{5}$$

Свободные члены в (4) и (5) положительны, поэтому частным решением будем $x_1 = 1$; $x_2 = 0$; $x_3 = 1$.

Поскольку $0 \leqslant x_2 \leqslant 1$, то общее решение можно представить так:

$$x_1 = 1 - \lambda; \quad x_2 = \lambda; \quad x_3 = 1 + \lambda;$$

где λ — любое число на отрезке $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Пример 2. Определить, совместна ли данная система в области неотрицательных значений переменных:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 7 \\ -3x_1 + 3x_2 + \ x_3 = 3. \end{cases}$$

Решение. 1) Составим нуль-уравнения данной системы:

$$\begin{cases} 0 = 2 - (x_1 + 3x_2 + 3x_3) \\ 0 = 7 - (x_1 + 2x_2 + 4x_3) \\ 0 = 3 - (-3x_1 + 3x_2 + \ \ x_3) \end{cases}$$

2) В первом нуль-уравнении положительный коэффициент при $x_1 = 1$ одновременно является и разрешающим элементом, поэтому

$$x_1 = 2 - (3x_2 + 3x_3).$$

Подставляя полученное значение x_1 во второе и третье нуль-уравнения, имеем:

$$0 = 5 - (-x_2 + x_3);$$

$$0 = 9 - (-12x_2 + 8x_3).$$

3) В нуль-уравнении коэффициент при x_3 положителен. Разрешающий элемент принадлежит первому уравнению, поэтому

$$x_3 = \frac{2}{3} - \left(\frac{1}{3}x_1 + x_2\right);$$

$$0 = \frac{13}{3} - \left(-\frac{1}{3}x_1 - 2x_2\right).$$

Эта система несовместна, так как в нуль-уравнении свободный член положителен, а оба коэффициента при переменных в скобках отрицательны; поэтому второму уравнению не удовлетворяет ни одно значение, для которого $x_1 \geqslant 0$ и $x_2 \geqslant 0$.

Пример 3. Найти неотрицательное решение системы

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3 \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 3 \\ -2x_1 + x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 6. \end{cases}$$

Решение. Составим нуль-уравнения:

$$\begin{cases} 0 = 3 - (\ \ 2x_1 + \ x_2 + 2x_3 + 2x_4) \\ 0 = 3 - (-2x_1 + \ x_2 + 4x_3 + 2x_4) \\ 0 = 6 - (-2x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 4x_4). \end{cases}$$

Произведем тождественные преобразования системы:

$$x_1 = \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{2}x_2 + x_3 + x_4\right). \tag{6}$$

Подставляя полученное значение во второе и третье нуль-уравнения, имеем

$$\begin{cases} 0 = 6 - (2x_2 + 6x_3 + 4x_4) \\ 0 = 9 - (3x_2 + 9x_3 + 6x_4). \end{cases}$$

Найдем x_3:

$$x_3 = 1 - \left(\frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_4\right).$$

Подставляя в (6), имеем:

$$x_1 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{6}x_2 + \frac{1}{3}x_4\right);$$

получаем тождество $0 \equiv 0$.

Одно из неотрицательных решений системы есть

$$x_1 = \frac{1}{2}; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 1; \quad x_4 = 0.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти неотрицательные решения системы:

а) $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

б) $$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 - 4x_2 - 4x_3 = 3 \end{cases}$$

в) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 15 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 6 \\ 3x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

2. Исследовать смешанную систему уравнений и неравенств и найти неотрицательные решения.

$$\begin{cases} x_1 - \dfrac{3}{5}x_2 - \dfrac{1}{5}x_3 - 3x_5 \geqslant \dfrac{6}{5} \\ 2x_1 - \dfrac{6}{5}x_2 - \dfrac{2}{5}x_3 - 4x_5 \leqslant \dfrac{12}{5} \\ 10x_1 - 6x_2 - 2x_3 = 12 \\ 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 34 \\ 2x_1 - \dfrac{1}{5}x_2 - \dfrac{1}{15}x_3 - 6x_5 = \dfrac{56}{15} \\ 8x_1 + 3x_2 + x_3 + 20x_5 = 20. \end{cases}$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какие уравнения системы называются «лишними»?
2. Как поступают с уравнениями системы, чтобы все свободные члены b_i сделать положительными?
3. Какие уравнения называются 0-уравнениями?
4. Какие уравнения называются X-уравнениями?
5. Что такое базис?
6. Какие переменные называются базисными?
7. В чем состоит переход от одного базиса к другому?
8. Что такое разрешающий элемент системы?
9. Что называется тождественным преобразованием?

Глава IX

ОБЩАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

§ 26. Формулировка общей задачи

1. В линейном программировании важное значение имеет четкая формулировка задачи. Одной из особенностей экономической задачи является то, что на факторы, входящие в нее, налагаются количественные ограничения. Эти ограничения (в экономике они часто называются лимитами) могут быть выражены в виде уравнений или неравенств и их систем, в том числе смешанных систем.

Пусть дана система

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Набор из m переменных, такой, что матрица, составленная из коэффициентов при этих переменных в m уравнениях (или неравенствах), будет невырожденной (неособенной), называется *базисом.*

Переменные, которые вводятся в неравенства для замены их уравнениями, назовем *дополнительными переменными.*

По отношению к данному базису эти m переменных называются *базисными переменными.*

Все остальные переменные, входящие в систему уравнений или неравенств, составленную из условий данной задачи, будем называть *небазисными.*

Решением системы называется любой набор переменных x_i, удовлетворяющий всем ограничениям (кроме ограничений на знаки этих переменных).

Решение с неотрицательными значениями переменных (т. е. когда $x_i \geqslant 0$) будет *допустимым решением.* Таким образом, допустимым решением задачи линейного программирования называется вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющий условиям

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

и

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

В дальнейшем под решением мы будем понимать допустимое решение, поскольку нас интересуют только неотрицательные переменные.

Введенные в неравенства дополнительные переменные для замены их уравнениями можно расположить так, что коэффициенты при этих переменных составят единичную матрицу, которая может быть использована для получения базиса m-мерного пространства. Векторы, составленные из коэффициентов дополнительных переменных, должны быть линейно независимы. Будем называть эти векторы *базисными векторами.*

Базисным решением задачи линейного программирования называется такое допустимое решение, когда, положив $x_j = 0$ $(j \leqslant n)$ в ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} (a_{ij}x_j + x_{n+j}) = b_i,$$

будем иметь

$$x_{n+i} = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Таким образом, базисное решение получается приравниванием небазисных переменных нулю и решением уравнений для базисных переменных.

Базисное решение называется допустимым базисным решением, если значения переменных $x_j \geqslant 0$. Базисные решения геометрически соответствует вершинам многогранника условий (области определения задачи линейного программирования).

Задача линейного программирования называется *невырожденной,* если каждое ее базисное решение содержит ровно m положительных компонент. Задачи линейного программирования, рассматриваемые в настоящем курсе, предполагаются невырожденными.

Оптимальным решением задачи линейного программирования называется система чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющих условиям задачи и определяющих экстремум (максимум или минимум) линейной формы.

Иначе, оптимальным решением называется базисное решение задачи линейного программирования, которое обращает линейную форму

$$f(x_j) = \lambda x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_j x_j + \ldots + \lambda_n x_n$$

в минимум (максимум).

2. Задачу линейного программирования в двухмерном пространстве рассмотрим на следующем примере.

Найти значения переменных x_1 и x_2, обращающих в максимум линейную форму

$$f(x_1, x_2) = x_1 + 5x_2,$$

при условиях:

$$5x_1 + 6x_2 \leqslant 30, \tag{1}$$

$$3x_1 + 2x_2 \leqslant 12, \tag{2}$$

$$x_1 \geqslant 0, \tag{3}$$

$$x_2 \geqslant 0. \tag{4}$$

Известно, что две прямые

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3 = 0 \text{ и } A_1'x_1 + A_2'x_2 + A_3' = 0$$

параллельны, если коэффициенты при x_1 и x_2 равны или пропорциональны. Иначе, две параллельные прямые отличаются друг от друга свободными членами. Если данную линейную форму x_1+5x_2 приравнять какому-либо действительному числу, то получим параллельные прямые:

$$x_1 + 5x_2 = -10 \quad \text{или} \quad x_1 + 5x_2 + 10 = 0,$$

$$x_1 + 5x_2 = 2 \quad \text{или} \quad x_1 + 5x_2 - 2 = 0,$$

$$x_1 + 5x_2 = 47 \quad \text{или} \quad x_1 + 5x_2 - 47 = 0.$$

Имеем три прямые из семейства параллельных линий.

Возьмем значения x_1 и x_2, равные двум, т. е. $x_1=x_2=2$. Эти значения удовлетворяют условиям (1)—(4), так как

$$5x_1+6x_2=5\cdot2+6\cdot2=22<30$$
$$3x_1+2x_2=3\cdot2+2\cdot2=10<12$$
$$x_1=2>0$$
$$x_2=2>0.$$

При этих значениях линейная форма

$$f(2{,}2)=2+5\cdot2=12.$$

Возьмем теперь другую пару значений переменных x_1 и x_2, например, $x_1=1$ и $x_2=3$. Эти значения также удовлетворяют условиям (1)—(4). Линейная форма в этом случае принимает значение

$$f(1{,}3)=1+5\cdot3=16.$$

Сравнивая пары значений наших переменных, видим, что во втором случае пара (1, 3) делает линейную форму больше, чем в первом случае (2, 2).

При $x_1=0$ и $x_2=5$, удовлетворяющим условиям задачи, получим наибольшее значение линейной формы:

$$f(0,5)=0+5\cdot5=25.$$

3. Общая задача линейного программирования формулируется следующим образом.

Пусть дана система m линейных уравнений с n переменными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ \ldots\ +a_{1j}x_j+\ \ldots\ +a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ \ldots\ +a_{2j}x_j+\ \ldots\ +a_{2n}x_n=b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ \ldots\ +a_{ij}x_j+\ \ldots\ +a_{in}x_n=b_i \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ \ldots\ +a_{mj}x_j+\ \ldots\ +a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \qquad (5)$$

и

$$x_1\geqslant0,\ x_2\geqslant0,\ \ldots\ x_j\geqslant0,\ \ldots\ ,\ x_n\geqslant0, \qquad (6)$$

Требуется найти минимум линейной формы

$$f(x) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_j x_j + \ldots + \lambda_n x_n, \tag{7}$$

В (5)—(7) a_{ij}, b_i и λ_j — постоянные величины, а $m \leqslant n$*. Можно считать все b_i неотрицательными, ибо в противном случае соответствующее уравнение можно умножить на -1.

Неотрицательные значения переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, представляющие собой вектор $x = (x_1, x_2, \ldots x_j, \ldots x_n)$ и удовлетворяющие условиям (5) и (6), составляют область определения задачи линейного программирования.

Если дана система (5) и $x_j \geqslant 0$, но требуется найти максимальное (в отличие от минимального) значение линейной формы

$$f(x) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n,$$

то эту задачу можно свести к предыдущей, потребовав минимизации линейной формы с противоположным знаком; при этом для получения искомого максимального значения первоначальной линейной формы надо изменить знак у найденного минимума.

Данная нами формулировка общей задачи линейного программирования подходит и в случае, когда несколько или все уравнения заменены на неравенства, так как неравенства

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \ldots + a_{ij}x_i + \ldots + a_{in}x_n \leqslant b_i$$

эквивалентны равенствам

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_i + \ldots + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i$$

при условии, что x_{n+i} также неотрицательны.

4. При сохранении принятых выше обозначений общую задачу линейного программирования можно сформулировать более кратко:

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \; i = 1, 2, \ldots, m \tag{8}$$

$$x_j \geqslant 0, \; j = 1, 2, \ldots, n \tag{9}$$

---

* Запись $m \leqslant n$ означает, что данные m уравнений линейно независимы. В противном случае из системы можно удалить одно или даже несколько уравнений.

найти

$$z_{\max(\min)} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j. \qquad (10)$$

Форму записи общей задачи линейного программирования в виде системы (5)—(7) или (8)—(10) будем называть *канонической формой.*

5. Систему условий (8) можно записать также в векторной форме:

$$\mathbf{A}_1 x_1 + \mathbf{A}_2 x_2 + \ldots + \mathbf{A}_j x_j + \ldots + \mathbf{A}_n x_n = \mathbf{B},$$

где

$$\mathbf{A}_j = \begin{Vmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{Vmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{Vmatrix} (j = 1, 2, \ldots n).$$

Под j-м *вектором условий* $\mathbf{A}_j$ будем понимать вектор, компоненты которого являются коэффициентами при x_j в условиях системы (8). Через $\mathbf{B}$ обозначен вектор, компоненты которого представляют собой ограничения b_i в правых частях условий задачи линейного программирования; вектор $\mathbf{B}$ будем называть *вектором ограничений.* Таким образом, на равенство

$$\mathbf{A}_1 x_1 + \mathbf{A}_2 x_2 + \ldots + \mathbf{A}_j x_j + \ldots + \mathbf{A}_n x_n = \mathbf{B}$$

можно смотреть, как на разложение вектора ограничений $\mathbf{B}$ по векторам условий $\mathbf{A}_j$ (x_j являются коэффициентами этого разложения).

Тогда задачу линейного программирования можно сформулировать следующим образом:

найти точки $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots x_n)$, имеющие неотрицательные координаты, т. е. $x_j \geqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots n$, такие, что

$$\mathbf{A}_1 x_1 + \mathbf{A}_2 x_2 + \ldots + \mathbf{A}_j x_j + \ldots + \mathbf{A}_n x_n = \mathbf{B},$$

а линейная форма $f(x) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$ достигает экстремума.

Используя матричную запись, а также терминологию n-мерного векторного пространства, общую задачу линейного программирования можно записать и так:

найти

$$z_{\min(\max)} = \lambda \mathbf{x}$$

при условии

$$A\mathbf{x} = \mathbf{B}$$

и

$$\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0},$$

где

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ — вектор-строка

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — вектор-столбец

$A = \| a_{ij} \|$ $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots n)$ — матрица

$\mathbf{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ — вектор-столбец

$\mathbf{0}$ — n-мерный нулевой вектор-столбец.

§ 27. Геометрическая интерпретация общей задачи

1. Рассмотрим задачу линейного программирования, в которой линейная форма содержит одно переменное x:

$$f(x) = \lambda x$$

при условиях

$$ax \leqslant b,\ x \geqslant 0\ (a, b > 0).$$

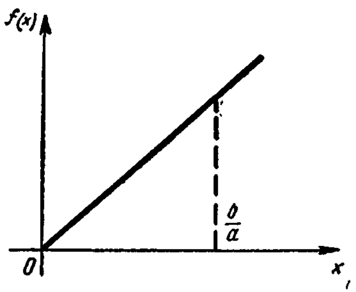

Рис. 38

Неравенству $ax \leqslant b$ геометрически соответствует полупрямая $x \leqslant \frac{b}{a}$ (рис. 38) вместе с граничной точкой.

Линейная форма $f(x)$ достигает своих экстремальных значений на концах отрезка, на котором она согласно условиям задачи определена.

Пусть, далее, требуется найти максимальное значение линейной формы

$$f(x) = \lambda_1 x + \lambda_2$$

при условиях

$$a_1x \geqslant b_1, \quad a_2x \leqslant b_2, \quad x \geqslant 0.$$

Вводя новую переменную $z = a_1x - b_1$, приходим к прежней задаче.

Очевидно, что все значения переменной x, для которых определена линейная форма $f(x)$, т. е. все точки отрезка $\left[\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}\right]$ выражаются через крайние точки отрезка по формуле

$$x = \lambda \frac{b_1}{a_1} + (1 - \lambda) \frac{b_2}{a_2}, \quad \text{где } 0 \leqslant \lambda \leqslant 1.$$

Эта формула представляет собой уравнение отрезка, причем ни одна из крайних точек отрезка не может быть выражена по этой формуле через две другие точки отрезка.

Как ранее было установлено, в таком случае точка x есть выпуклая линейная комбинация точек $\frac{b_1}{a_1}$ и $\frac{b_2}{a_2}$. Следовательно, любая точка отрезка является выпуклой линейной комбинацией его концов.

2. Рассмотрим случай двух переменных. Напомним, что неравенству $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leqslant b_1$ соответствует полуплоскость с граничной прямой $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$, координаты каждой точки которой удовлетворяют этому неравенству.

Пусть дана система двух неравенств с двумя переменными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leqslant b_2 \end{cases} \tag{1}$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0. \tag{2}$$

Найдем

$$z_{\max(\min)} = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2. \tag{3}$$

Возьмем вместо неравенств системы (1) уравнения:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2,$$

которые представляют собой уравнения прямых (на рис. 39, *а* это прямые AB и CD), или уравнения плоскостей (на рис. 39, *б* это плоскости ABF и CDE_1, параллельные оси Oz).

Линейная форма $z=\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2$ представляет собой уравнение плоскости в системе координат x_1Ox_2z. Пусть этому уравнению соответствует плоскость FOC. Она пересекает координатные плоскости x_1Oz и x_1Ox_2 соответственно по прямым OF и OC.

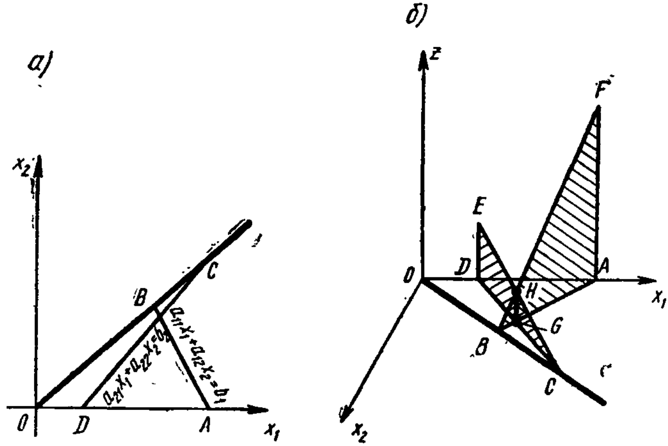

Рис. 39

Прямые BD и CD и оси координат OX_1 и OX_2 ограничивают область изменения значений x_1 и x_2, из которых нужно будет выбрать координаты точки, обращающей в минимум или максимум линейную форму z. Выберем постоянные a_{ij} так, чтобы область определения z представляла собой внутренность треугольника ADG.

По аналогии (п. 1) минимум или максимум линейной формы z может быть достигнут в точках (x_1, x_2), лежащих на границе области изменения переменных, т. е. в вершинах треугольника или на его сторонах. Максимум z, равный длине отрезка AF, достигается в точке A. Минимум z, равный длине $GH=ED$ — в точке G. Минимум z будет во всех точках, лежащих на отрезке DG.

Рассмотренный случай может быть геометрически истолкован на плоскости x_1Ox_2.

Прямая BC (рис. 36), проходящая через начало координат, соответствует значению $z=0$. Ее уравнение

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0$$

Уравнения семейства прямых, параллельных BC, можно записать в виде

$$z = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2,$$

где z — какое-либо постоянное число. Параметр семейства этих прямых пропорционален расстоянию от начала координат до соответствующей прямой семейства.

3. Пусть теперь дана система m ограничений с двумя переменными, т. е.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leqslant b_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leqslant b_m \end{cases} \qquad (4)$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0.$$

Рассуждая аналогичным образом, установим, что если множество значений (x_1, x_2), удовлетворяющих условиям (4) и (5), ограничено, то оно представляет собой выпуклый многоугольник. Линейная форма достигает экстремума в вершине многоугольника. Если максимум (или минимум) достигается одновременно в двух вершинах, то он достигается на всей стороне многоугольника, соединяющей эти вершины, причем стороны многоугольника — это отрезки прямых, уравнения которых могут быть получены, если в (4) и (5) заменить неравенства на уравнения. Любое ограничение — неравенство — означает, что область определения линейной формы рассматриваемой задачи лежит по одну сторону от каждой из прямых. Все точки выпуклого k-угольника могут быть представлены как выпуклые линейные комбинации его вершин.

Область изменения линейной формы, представляющая собой многоугольник, изображена на рис. 40. Прямые, образующие многоугольник $OABCDEF$ на плоскости x_1Ox_2, соответствуют условиям (4) и (5), в которых неравенства заменены уравнениями. Штриховка указывает на ту сторону прямой, по которую располагаются точки плоскости, удовлетворяющие неравенствам (4) и (5). Направление прямой MN определяется вектором (λ_1, λ_2); этот вектор перпендикулярен MN. Коэффициенты λ_1 и λ_2 указывают также направление, в котором увеличивается линейная форма.

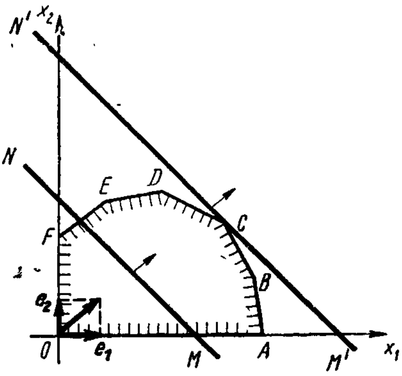

Рис. 40

Задача линейного программирования — вычисление координат точки, дающей экстремум линейной форме (3) при условиях (4) и (5), может быть (при $n=2$) геометрически истолкована следующим образом.

Называя область определения линейной формы многоугольником условий, пересечем последний прямой $z=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2$ и будем перемещать эту прямую MN параллельно самой себе в направлении увеличения z (если требуется вычислить максимум линейной формы) и в направлении уменьшения z (если требуется вычислить минимум линейной формы). При этом возможны несколько случаев.

В случае, изображенном на рис. 40, параллельное перемещение приведет прямую в такое положение $M'N'$, когда у нее окажется только одна общая точка с многоугольником — вершина C. Эта точка определяет единственное решение задачи линейного программирования.

Если прямая MN параллельна одной или двум сторонам многоугольника, то экстремум достигается во всех точках соответствующей стороны многоугольника (рис. 41).

Здесь во всех точках стороны CD многоугольника $ABCDEFG$, параллельной прямой MN, достигается максимум, а во всех точках стороны $AG \| MN$ достигается минимум линейной формы.

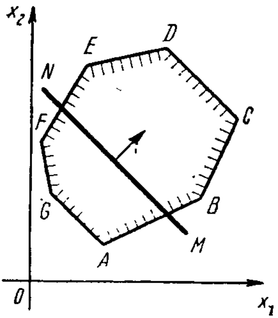

Рис. 41

Таким образом, задача линейного программирования может иметь либо одно, либо бесконечное количество решений. Если две вершины дают экстремум линейной формы, то и все точки отрезка, соединяющего эти вершины, определяют решение задачи линейного программирования.

Задача линейного программирования будет неразрешимой, если определяющие ее условия окажутся противоречивыми (рис. 42).

Область определения линейной формы неограничена (рис. 43). В том случае, когда прямая $AB \| MN$, линейная форма достигает конечного экстремума во всех точках луча AB. Если изменять область определения линейной формы, поворачивая луч AB относительно точки A, то можно получить два случая — линейная форма может стать неограниченной при допустимых значениях переменных либо достигнуть максимума в единственной точке. Первый случай соответствует лучу AB', изображенному на рис. 43 пунктиром; второму случаю соответствует штрих-пунктирный луч AB''.

4. Геометрическое истолкование задачи линейного программирования было рассмотрено нами в предыдущем пункте для случая, когда дана система m неравенств с двумя переменными. Если привести эту задачу к канонической форме, то в новой задаче число переменных $n=m+2$, где m — число неравенств. Таким образом, здесь $n-m=2$. Можно показать, что геометрическое истолкование задачи линейного программиро-

вания остается справедливым и в том случае, когда n и m произвольны, но $n-m=2$. Выразим все переменные через два из них, например через x_1 и x_2 и перепишем линейную форму и условия задачи в следующем виде:

$$z = \lambda_1' x_1 + \lambda_2' x_2$$

$$x_k = a_{1k} x_1 + a_{2k} x_2 - a_k \quad (k = 3, 4, \ldots, n)$$

$$x_i \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

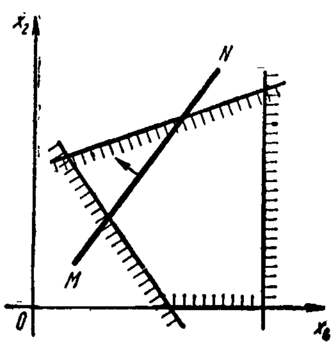

Рис. 42

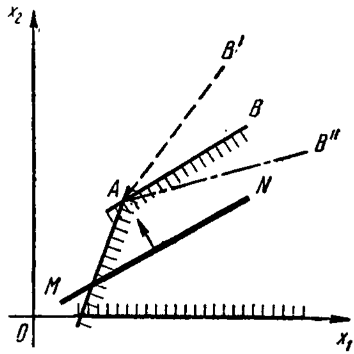

Рис. 43

Прямые $x_k=0$ $(a_{1k}x_1+a_{2k}x_2=a_k)$ и оси координат образуют на плоскости x_1Ox_2 выпуклый многоугольник. Условия $x_k \geqslant 0$ устанавливают направление штриховки сторон многоугольника. Так как определяется область возможных значений пар чисел (x_1, x_2), среди которых следует выбрать точки, обращающие линейную форму в максимум (минимум). Коэффициенты линейной формы определяют семейство параллельных прямых и направление, в котором увеличивается z. Выберем из семейства любую прямую, пересекающую многоугольник, и будем смещать ее в сторону увеличения (уменьшения) линейной формы до тех пор, пока она еще будет содержать точки многоугольника. Предельное положение прямой определит максимальное (минимальное) значение линейной формы.

Такое же наглядное геометрическое истолкование задачи линейного программирования имеет место как для трех переменных, если условия имеют вид неравенств, так и в случае, когда число переменных превышает на 3 число условий ($n-m=3$), а задача записана в канонической форме. Условия задачи образуют в пространстве выпуклый многоугольник. Коэффициенты линейной формы определяют семейство параллельных плоскостей L и направление, в котором увеличивается z.

Для решения задачи линейного программирования следует перемещать плоскость L, пересекающую многогранник, в сторону увеличения линейной формы (если решается задача на максимум) или в сторону уменьшения z (если решается задача на минимум) до тех пор, пока она еще содержит точки многогранника. Предельное положение плоскости определяет решение задачи.

Геометрические соображения подсказывают здесь, как и прежде, что экстремум достигается в крайних точках — в вершинах многогранника. Если экстремум достигается более чем в одной точке, то он достигается на всем ребре или на всей грани многогранника, параллельной плоскости, определяемой коэффициентами линейной формы задачи.

Любая точка выпуклого многогранника может быть представлена как выпуклая линейная комбинация его вершин, т. е. если $x_i^{(k)}$ есть i-я координата k-й вершины, а x_i есть i-я координата любой точки многогранника, то

$$x_i = \lambda_1 x_i^{(1)} + \lambda_2 x_i^{(2)} + \ldots + \lambda_s x_i^{(p)} \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\lambda_k \geqslant 0, \ \sum_{k=1}^{p} \lambda_k = 1,$$

где p — число вершин многогранника.

5. Распространим теперь геометрическую интерпретацию общей задачи линейного программирования на случай произвольного числа переменных и неравенств.

Рассмотрим общую задачу линейного программирования.

Пусть требуется найти точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n-мерного пространства, имеющие неотрицательные координаты ($x_j \geqslant 0$, $j=1, 2, \ldots, n$) и удовлетворяющие соотношениям

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

в которых линейная форма z достигает экстремального значения.

Система (1) и (3) из § 22 образует в n-мерном пространстве переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ область определения (множество решений) нашей задачи. Обозначим это множество через K.

Допустим, что K ограниченно. Тогда K является выпуклым многогранником n-мерного пространства; при этом размерность многогранника не превышает $n-m$, так как он принадлежит общей части m гиперплоскостей, отвечающих линейно независимым уравнениям системы. Линейная форма z задачи определяет в n-мерном пространстве семейство параллельных гиперплоскостей

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = z,$$
$$-\infty < z < \infty.$$

Коэффициенты линейной формы задают вектор $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, указывающий направление возрастания z. Вектор λ перпендикулярен рассматриваемому семейству гиперплоскостей. Будем исходить из некоторой гиперплоскости семейства, имеющей общие точки с многогранником K (значения линейной формы во всех этих точках совпадают). Передвигая гиперплоскость параллельно самой себе в сторону увеличения (уменьшения) z, можно прийти к такому ее положению, когда при дальнейшем смещении гиперплоскость уже не будет иметь общих точек с многогранником K. Многогранник K расположен по одну сторону от полученной гиперплоскости и имеет с ней общие точки, каждая из которых придает линейной форме z экстремальное (максимальное или минимальное в зависимости от постановки задачи) значение. Если задача имеет единственное решение, то многогранник K и предельная гиперплоскость обладают лишь одной общей точкой, совпадающей с некоторой вершиной многогранника.

В общем случае совокупность решений задачи, являясь пересечением предельной гиперплоскости и многогранника условий, представляет собой выпуклый многогранник. Таким образом, полученная предельная гиперплоскость определяет всю совокупность решений задачи линейного программирования.

§ 28. Экономическая интерпретация общей задачи

1. Введем терминологию, которой мы будем пользоваться при решении экономических задач.

Векторы

$$\mathbf{A}_j = \begin{Vmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{B} = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{Vmatrix} \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

названные вектором условий и вектором ограничений, будем называть также соответственно *векторами затрат* и *вектором запасов*. Компоненты векторов затрат определяют затраты отдельных произведенных факторов в единицу времени для соответствующего исходного способа производства, а компоненты вектора ограничений — запасы отдельных факторов, ограничивающие их расход.

Набор неотрицательных значений переменных или вектор

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

удовлетворяющий условиям (1) и (2), будем называть *планом* задачи линейного программирования.

План $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будем называть базисным, если векторы $\mathbf{A}_i$, входящие в разложение $\mathbf{B} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i A_i$ с положительными коэффициентами x_i, являются линейно независимыми. Из этого определения следует, что число его положительных компонент не может превышать m.

При ограниченной области определения задачи каждый план соответствует некоторой точке многогранника условий. Вершины многогранника условий играют особую роль при определении экстремума линейной формы. С другой стороны, вершины многогранника полностью его определяют. Поэтому планы, отвечающие вершинам многогранника условий, назовем *опорными* планами.

Систему линейно независимых векторов, отвечающих положительным компонентам опорного плана, будем называть базисом плана или просто базисом.

Опорный план назовем невырожденным, если он содержит ровно — m положительных компонент.

Оптимальным планом или решением задачи линейного программирования называется план, удовлетворяющий условиям задачи и обращающий ее линейную форму в оптимум (минимум или максимум). Линейная форма разрешимой задачи достигает экстремума в вершинах многогранника условий. В терминах производственной задачи это значит, что для каждой разрешимой задачи линейного программирования существует опорный план, являющийся решением этой задачи.

2. Наиболее важные этапы решений общей задачи линейного программирования определяются следующими теоремами:

а) Множество всех планов задачи линейного программирования выпукло.

б) Линейная форма задачи программирования достигает своего минимума в крайней точке выпуклой ограниченной области, являющейся множеством планов этой задачи.

Если линейная форма принимает минимальное значение более чем в одной крайней точке, то она достигает того же значения в любой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией этих точек.

в) Если известно, что система векторов $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_k$ линейно независима и такова, что

$$\mathbf{A}_1 x_1 + \mathbf{A}_2 x_2 + \ldots + \mathbf{A}_k x_k = \mathbf{B}_1$$

где все $x_i \geqslant 0$, то точка $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k\ 0, 0, \ldots, 0)$ является крайней точкой выпуклого множества планов k.

г) Если $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — крайняя точка множества K, то векторы, соответствующие положительным x_i, образуют линейно независимую систему. Из этого следует, что крайняя точка имеет не более чем m положительных компонент x_i.

Следствие: каждой крайней точке из множества K соответствует m линейно независимых векторов из данной системы $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$.

д) Вектор $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является крайней точкой многогранника K в том и только в том случае, если положительные компоненты x_j являются коэффициентами при линейно независимых векторах $\mathbf{A}_j$ в разложении

$$\sum_{j=1}^{n} A_j x_j = \mathbf{B}.$$

3. Рассмотрим некоторые примеры применения линейного программирования в народном хозяйстве.

Задачи наилучшего использования ресурсов путем оптимального их распределения по видам использования делятся на три группы:

1) Задача планирования производства (оптимальное использование производственных мощностей).

2) Задача на составление смесей; рациональный раскрой материалов (оптимальное использование сырья и материалов).

3) Транспортная задача (оптимальный план перевозок).

К первой группе относятся задачи на рациональное распределение загрузки по станкам, оптимальное распределение заданной программы по станкам, определение оптимальной загрузки оборудования при заданном ассортименте, нахождение оптимального ассортимента выпуска продукции, планирование севооборотов, распределение машин между видами сельскохозяйственных работ и др.

К задачам второй группы относятся следующие: рациональный раскрой промышленных материалов; определение оптимальной смеси, сплава, шихты, рецептуры, диэты; подбор наиболее дешевых и питательных кормовых рационов для сельскохозяйственных животных; комплексное использование сырья и др.

В число транспортных задач входят: оптимальное прикрепление пунктов назначения к пунктам отправления при перевозке грузов; рациональное распределение транспортных средств; построение оптимального графика перевозок и др. К этой группе относятся задачи, касающиеся не только перевозки грузов, но и родственные задачи по снабжению электроэнергией, оптимальному размещению почтовой сети и сети телесвязи (задача сети); задачи, связанные с вопросами внутризаводского транспорта или перевозок внутри предприятия (так называемое регулирование движения материалов); сюда же относятся технико-экономические вопросы, в которых критерием оптимальности является затрата времени (затрата распределения загрузки).

Задачи, относящиеся к этой группе, с математической точки зрения, носят характер минимализации (например, сведение к минимуму общих транспортных расходов, общей протяженности перевозок, общих затрат времени).

С математической точки зрения, оптимализация задач, относящихся к первой и второй группам, носит иногда характер максимализации (например, максимализация прибыли в задачах на смешивание) или минимализации (например, минимализация расходов в задаче о пище).

Задача производственного планирования. Примем следующие обозначения:

m — число производственных факторов или ресурсов (сырье, труд, оборудование, топливо, энергия, транспорт, посевные площади и т. д.);

n — число технологических способов производства, определяющих затраты каждого производственного фактора в единицу времени (различные операции, станки с разной производительностью) — или число товаров, продукции.

a_{ij} — число единиц i-го производственного фактора, необходимое для производства единицы j-го продукта, т. е. затраты производственных факторов;

b_i — наличные ресурсы различных производственных факторов, т. е. максимальное число единиц i-го производственного фактора, имеющегося на предприятии;

λ_i — количество единиц продукции, выпущенной предприятием при работе в течение единицы времени по j-му способу производства, или доход от единицы j-го товара;

x_j — запланированный предприятием уровень производства j-го товара, или промежутки времени, в течение которых предприятие работает по 1, 2, ..., n способу производства.

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ — общий план производства.

Общее количество i-го производственного фактора, используемого согласно общему плану производства, равно

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n.$$

Эта величина не должна превосходить наличного запаса i-го производственного фактора, поэтому для каждого i получаем неравенство

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant b_i.$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n);$$

отрицательные значения x_j не имеют практического смысла.

Количество продукции, выпущенной предприятием за все время работы по j-му способу (или доход, получаемый от производства x_j единиц j-й продукции), равен $\lambda_j x_j$. Суммарная продукция, выпущенная предприятием (или общий доход), определяется линейной формой

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n.$$

Задача состоит в том, чтобы найти наибольшее значение этой линейной формы, т. е.

$$z = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j$$

при условии

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

и

$$x_j \geqslant 0.$$

З а д а ч а н а с о с т а в л е н и е с м е с е й (задача диеты). Введем следующие обозначения:

m — общее число требуемых питательных химических веществ (белки, жиры, углеводы и др.) и микроэлементов (железо, кальций, витамины и др.);

n — число имеющихся в распоряжении различных видов продуктов;

a_{ij} — количество единиц i-го питательного вещества, содержащегося в единице j-го продукта;

b_i — минимальная ежесуточная потребность организма в i-м питательном веществе;

λ_j — стоимость единицы j-го продукта;

x_j — количество единиц j-го продукта, используемое в диете, или суточное потребление j-го продукта.

Диета характеризуется системой чисел $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Общее количество i-го питательного вещества в принятой диете (т. е. во всех используемых согласно упомянутой диете продуктах) равно

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Каждое из этих количеств не может быть меньше минимальной суточной потребности в i-м питательном веществе.

Диета должна удовлетворять ограничениям

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geqslant b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Поскольку суточное потребление каждого продукта ограничено запасами, а также возможностями и сроками их пополнения, учитываем дополнительные условия на компоненты диеты

$$a_{i1} \geqslant x_i \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где величины a_{i1} определяются наличными ресурсами продуктов и временем, на которое они рассчитаны.

Стоимость всей диеты определяется линейной формой

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n.$$

Данная задача линейного программирования состоит в достижении минимума функций стоимости z.

Таким образом, получаем оптимальную диету с требуемым набором ежесуточного потребления продуктов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Краткая формулировка задачи на диету (при сохранении ранее введенных обозначений).

Дана система ограничений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Найти

$$z_{\min} = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n.$$

Транспортная задача. Примем следующие обозначения:

m — число пунктов отправления;

n — число пунктов назначения;

a_i — общее количество единиц однородного груза, находящегося в каждом из m пунктов отправления $(i = 1, 2, ..., m)$;

b_j — количество единиц того же груза, потребного для каждого j-го из n пунктов назначения;

λ_{ij} — стоимость перевозки единицы груза от i-го пункта отправления к j-му пункту назначения $(j = 1, 2, ..., n)$;

x_{ij} — количество единиц груза, перевозимого из i-го пункта отправления в j-пункт назначения.

Если количество груза, отправляемого из всех m пунктов, равно количеству груза, потребного в n пунктах назначения, то выполняется условие

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Если из i-го пункта отправления вывозится весь груз, то должно выполняться условие

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Если потребность j-го пункта удовлетворяется полностью, то выполняется условие

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Задача состоит в определении таких неотрицательных значений неизвестных перевозок x_{ij}, чтобы общая стоимость перевозки была наименьшей, т. е.

$$z_{\min} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} x_{ij}.$$

Краткая формулировка транспортной задачи.
Дана система ограничений

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

$$x_{ij} \geqslant 0$$

и

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

$$x_{ij} \geqslant 0.$$

Найти

$$z_{\min} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} x_{ij}.$$

Рассмотрим пример для случая $m=2$ и $n=3$. Запишем условия задачи в виде таблицы:

Пункты отправления (m)	Пункты назначения (n)		
	1	2	3
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}

Совокупность перевозок с первого пункта отправления удовлетворяет линейному уравнению

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = a_1,$$

аналогично для второго пункта отправления

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = a_2.$$

Условия, которые необходимо наложить на перевозки, направляемые в каждый из трех пунктов назначения:

$$x_{11} + x_{21} = b_1,$$
$$x_{12} + x_{22} = b_2,$$
$$x_{13} + x_{23} = b_3.$$

Поскольку отрицательные значения x_{ij} соответствуют обратным перевозкам из j-го пункта в i-й, а по условию задачи грузы перевозятся из i-го пункта в j-й, то

$$x_{11} \geqslant 0, \quad x_{12} \geqslant 0, \quad x_{13} \geqslant 0, \quad x_{21} \geqslant 0, \quad x_{22} \geqslant 0, \quad x_{23} \geqslant 0.$$

Стоимость перевозки x_{ij} единиц груза равна $\lambda_{ij} x_{ij}$.

Требуется определить, сколько единиц груза нужно перевезти с каждого пункта отправления в каждый пункт назначения, чтобы общая стоимость перевозок была минимальной, т. е.

$$z_{\min} = \lambda_{11}x_{11} + \lambda_{12}x_{12} + \lambda_{13}x_{13} + \lambda_{21}x_{21} + \lambda_{22}x_{22} + \lambda_{23}x_{23}$$

или

$$z_{\min} = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} \lambda_{ij}x_{ij}.$$

§ 29. О методах линейного программирования

1. Типичные задачи линейного программирования, рассмотренные в предыдущем параграфе, решаются особыми математическими методами на определение условий экстремума того или иного производственного фактора. Задача определения экстремума функции обычно легко решается методами математического анализа. Но классические методы математического анализа не могут быть использованы для определения экстремума линейной формы при линейных условиях. Действительно, если функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ имеет экстремум в точке, лежащей внутри области существования, то ее частные производные $\frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i}$ в этой точке все обращаются в нуль или не существуют. Частные же производные от линейной функции равны коэффициентам при x_i, но все коэффициенты не могут быть равны нулю; отсюда заключаем, что линейная функция не может иметь экстремумов внутри области существования. Следовательно, наибольшего и наименьшего значения линейная функция достигает обязательно на границе области существования.

В предыдущей главе установлено, что решение задачи линейного программирования сводится в общем случае к тому, чтобы исследовать крайние точки выпуклого множества, т. е. допустимые решения (опорные планы), каждое из которых определяется системой m линейно независимых векторов. Оптимальное решение задачи (оптимальный план) отыскивается путем перебора всех опорных планов. Однако даже в сравнительно простых задачах вычисление координат вершин многогранника условий и сравнение значений линейной формы в них требует огромного числа операций. Так, в задаче линейного программирования, в которой дано m ограничений и n переменных, требуется проверить линейную независимость C_n^m систем линейных уравнений. Далее следует из всех наборов решений выделить наборы с неотрицательными значениями, т. е. найти координаты вершин многогранника условий. И, наконец, вычислить значения линейной формы во всех вершинах многогранника и сравнить их между собой.

О вычислительных трудностях решения задач линейного программирования говорит такой пример. Для разыскания оптимального распределения 5 видов работ между 8 станками необходимо решить около миллиарда алгебраических систем линейных уравнений с 12 переменными, что, очевидно, нереально даже при использовании современных быстродействующих вычислительных машин. Поэтому для решения рассматриваемых задач важную роль играет упорядочение перебора вершин. При упорядочении перебора вершин для решения задачи линейного программирования не требуется сравнения значений линейной формы во всех вершинах многогранника условий. Специальные методы сокращают также число сравнений, необходимых для того чтобы установить, достигается ли на данной вершине экстремум линейной формы. Эти методы дают вычислительную схему, позволяющую осуществить упорядоченный переход от одного опорного плана к другому.

2. Из разработанных в последнее время методов линейного программирования наибольшее распространение получили метод разрешающих множителей и симплексный метод (или метод последовательного улучшения плана). Частным случаем симплексного метода является распределительный метод, который применяется для решения большого класса специальных задач, называемых распределительными или транспортными. Наиболее простым и наглядным является графическое решение задач линейного программирования, называемое также геометрическим или графическим методом.

Графическое решение может быть использовано для решения сравнительно простых задач линейного программирования. К достоинствам такого решения относится его наглядность. Но его можно использовать только тогда, когда количество переменных не превышает двух; при трех переменных решение задачи усложняется, а при четырех — становится практически невыполнимым.

Распределительный метод является наиболее простым из строго математических методов линейного программирования, дающих решение поставленной задачи. Обязательным условием применения распределительного метода является использование одной и той же единицы измерения как для всех исходных данных, так и для результатов программирования. Если эти факторы выражены в различных единицах измерения, распределительный метод может быть применен только в том случае, когда имеется возможность привести их к единой мере. Распределительный метод, как показывает его название, наиболее применим к решению задач наилучшей организации перевозок, т. е. транспортных задач.

Метод разрешающих множителей предпочтительно использовать для решения частных производственно-экономических задач, например, для оптимального распределения заданий между цехами, участками, бригадами, станками.

Симплексный метод является наиболее гибким и универсальным, применимым для решения любой задачи линейного программирования. Он наиболее труден и требует большой затраты времени, что значительно сокращает область его применения для практических целей. Математическая обоснованность симплексного метода обеспечивает высокую точность результатов. Для решения задач с помощью этого метода необходимо знание элементов линейной алгебры.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Дайте формулировку общей задачи линейного программирования и ее различные формы записи, в том числе каноническую форму.
2. Что называется линейной формой? Что такое максимизация и минимизация линейной формы?
3. Почему линейная форма достигает экстремума на угловой точке выпуклого множества?
4. Какие переменные называются дополнительными? базисными? небазисными?
5. Что называется решением задачи? допустимым решением? базисным решением? оптимальным решением?
6. Что называется базисом?
7. Что такое область определения задачи линейного программирования?
8. В чем состоит геометрический смысл общей задачи линейного программирования?
9. Что такое вектор условий и вектор ограничений?
10. Что такое вектор затрат? вектор выпуска?
11. Дайте определение плана; опорного плана; оптимального плана.
12. Что называется базисом плана? Какой опорный план называется невырожденным?
13. Назовите виды задач, решаемых методами линейного программирования?
14. Дайте понятие задачи производственного планирования; задачи на составление смесей; транспортной задачи.
15. Назовите методы решения задач линейного программирования.

Глава X

ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД

§ 30. Графическое решение задач линейного программирования

1. При решении задач линейного программирования графическим путем важнейшим вопросом является определение многоугольника, отражающего все допустимые решения. Как известно, такой многоугольник — выпуклый. Если он построен, то необходимо построить лишь экстремальные точки, отражающие условия задачи. Могут встретиться два варианта: а) из полученных чисел одно число окажется больше других; б) из полученных чисел обнаружатся два одинаковых числа, которые окажутся больше других. В первом случае имеется только одна оптимальная точка, которой соответствует наибольшее значение. Во втором случае имеется бесчисленное множество оптимальных точек, расположенных на отрезке, и всем этим точкам соответствует одно и то же наибольшее значение.

При изучении теории систем линейных неравенств было установлено, что система неравенств с двумя переменными может быть совместной, либо несовместной.

Если система совместна, то существует по крайней мере одна точка плоскости, координаты которой удовлетворяют всем неравенствам системы. Совокупность всех таких точек может быть одной точкой, отрезком, прямой, ограниченным или неограниченным многоугольником, полуплоскостью: для точки это будет система

$$x \leqslant a, \quad x \geqslant a;$$

для отрезка:

$$x \leqslant a, \quad x \geqslant b, \quad \text{где} \quad b < a;$$

для прямой

$$x < +\infty, \quad x > -\infty.$$

Совокупность точек, удовлетворяющих системе неравенств с двумя переменными, есть выпуклый многоугольник; в случае, если переменных более двух — выпуклый многогранник.

Если система неравенств несовместна, то не существует ни одной точки плоскости, координаты которой удовлетворяют всем неравенствам системы.

Как известно, при решении задач линейного программирования наряду с системой ограничений (уравнений или неравенств) рассматривается также линейная форма, максимальное или минимальное значение которой требуется найти. Ранее было установлено, что совокупность решений совместной системы неравенств с двумя переменными образует выпуклый многоугольник решений. В случае двух переменных линейная форма имеет вид

$$f(x_1, x_2) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2.$$

При $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$ и некотором фиксированном f_1 линейная форма представляет собой линейное уравнение

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = f_1$$

с двумя переменными, график которой есть прямая, отсекающая на осях координат отрезки $\frac{f_1}{\lambda_1}$ и $\frac{f_1}{\lambda_2}$.

Таким образом, чем больше значение f_1, тем дальше прямая отстоит от начала координат. Изменяя значение f, мы получим семейство параллельных прямых $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = f$, среди которых существуют две таких, называемых опорными, которым принадлежат некоторые угловые точки (вершины) многоугольника решений системы, но которым не принадлежат внутренние точки. Эти опорные прямые находятся на разных расстояниях от начала координат: одна ближе к нему, другая — дальше от него. Если каждая опорная прямая проходит лишь через одну вершину многоугольника решений, то координаты этой вершины являются решением задачи линейного программирования. Заметим при этом, что, если опорная прямая проходит через вершину многоугольника ближе к началу координат, то значение линейной формы будет минимальное, если же опорная прямая проходит дальше от начала координат, значение линейной формы — максимальное.

В случае, если опорная прямая содержит две вершины многоугольника решений, то она содержит все точки, лежащие на стороне многоугольника, концами которой являются эти вершины. Тогда задача имеет бесчисленное множество пар чисел (x_1, x_2), удовлетворяющих условиям задачи.

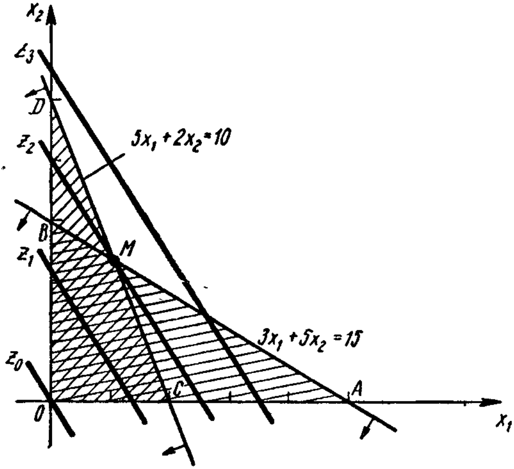

Рис. 44

Рассмотрим на примерах графическое решение задач линейного программирования (такое решение называют также графическим, или геометрическим методом).

2. Пример 1. Пусть задана система неравенств

$$3x_1+5x_2\leqslant 15,$$

$$5x_1+2x_2\leqslant 10, \quad x_1, x_2\geqslant 0.$$

Требуется найти $z_{max}=5x_1+3x_2$.

Решение. Переменные x_1 и x_2 неотрицательны, поэтому множество точек (x_1, x_2), являющееся возможным решением задачи, будем искать в первом квадранте (рис. 44). В самом деле, для всех точек, лежащих на оси Ox_2 или справа от нее, значения $x_1\geqslant 0$. Также и для точек, лежащих на оси Ox_1 или выше ее, значения $x_2\geqslant 0$.

Если в неравенстве $3x_1+5x_2\leqslant 15$ заменим знак неравенства на знак равенства, то получим уравнение прямой линии $3x_1+5x_2=15$. Последнему удовлетворяют все точки, лежащие на прямой. Все точки, лежащие в треугольнике OAB или на его сторонах, удовлетворяют неравенству $3x_1+5x_2\leqslant 15$.

Аналогичными рассуждениями убедимся, что множество точек, лежащих в треугольнике OCD, удовлетворяет неравенству

$$5x_1+2x_2\leqslant 10.$$

Рассмотрим функцию $f(x_1, x_2)=5x_1+3x_2$ или $z=5x_1+3x_2$. Для некоторого фиксированного переменного z линейная функция $z=5x_1+3x_2$ есть прямая линия. Давая различные значения z, например 0, 1, 3, 4, 15 и т. д., получим семейство параллельных линий. В общем случае линейная форма $z=\lambda_1 x_1=\lambda_2 x_2$, где $\lambda_1=5$; $\lambda_2=3$ есть семейство параллельных прямых.

Одна из этих прямых, проходящая через вершину M, дает максимальное значение линейной форме. Координаты точки M определим, решая совместно уравнения $3x_1+5x_2=15$ и $5x_1+2x_2=10$. Имеем: $x_1=1{,}053$; $x_2=2{,}368$. Подставляя эти значения в $z=5x_1+3x_2$, получим максимальное значение $z=12{,}37$.

3. Пример 2. Рассмотрим теперь задачу на нахождение минимального значения.

Пусть дана система линейных неравенств

$$\begin{cases} x_1+\ \ x_2\leqslant 4,\\ 6x_1+2x_2\geqslant 8,\\ x_1+5x_2\geqslant 4,\end{cases}$$

$$x_1\leqslant 3,\ x_2\leqslant 3,\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0.$$

Требуется найти $z_{\min}=2x_1+3x_2$.

Геометрическая интерпретация задачи видна на рис. 45. Минимальное значение линейной формы $f(x_1, x_2)$ есть z_2. Минимум будет в M — точке пересечения прямых $6x_1+2x_2=8$ и $x_1+5x_2=4$. Совместное решение этих двух уравнений дает следующие значения

$$x_1=\frac{8}{7}\quad \text{и}\quad x_2=\frac{4}{7}.$$

Таким образом, $z_{\min}=4$.

Задача линейного программирования с тремя переменными также может быть решена графическим методом, хотя и значительно сложнее. В качестве иллюстрации рассмотрим следующую задачу.

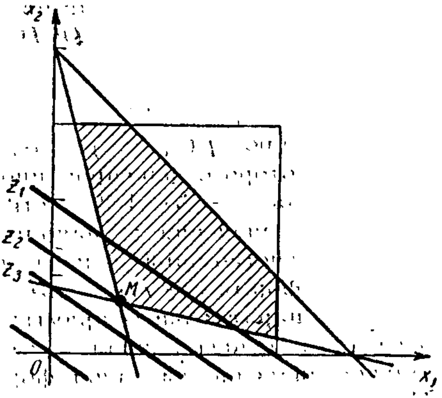

Рис. 45

4. Пример 3. Пусть дана система неравенств с тремя переменными

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leqslant 24, \\ x_1 + 1{,}5x_2 + 3x_3 \leqslant 12, \\ 3x_1 + x_2 \leqslant 12, \end{cases}$$

$$x_1 \geqslant 0,$$

$$x_2 \geqslant 0,$$

$$x_3 \geqslant 0.$$

Требуется найти максимальное значение линейной формы:

$$z = 0{,}5x_1 + 6x_2 + 5x_3.$$

Областью определения возможных решений является многогранник (на рис. 46 заштрихован). Напомним, что уравнение с тремя переменными, например $4x_1+6x_2+3x_3 = 24$, есть плоскость. Если в этом уравнении знак равенства заменить на знак неравенства, то совокупность решений, удовлетворяющих этому неравенству, представляет собой множество всех точек, лежащих «над» или «под» плоскостью. Множество точек (x_1, x_2, x_3), будучи подставлено в линейную форму, дает значение z, принадлежащее плоскости $z = 0{,}5x_1 + 6x_2 + 5x_3$. Давая z

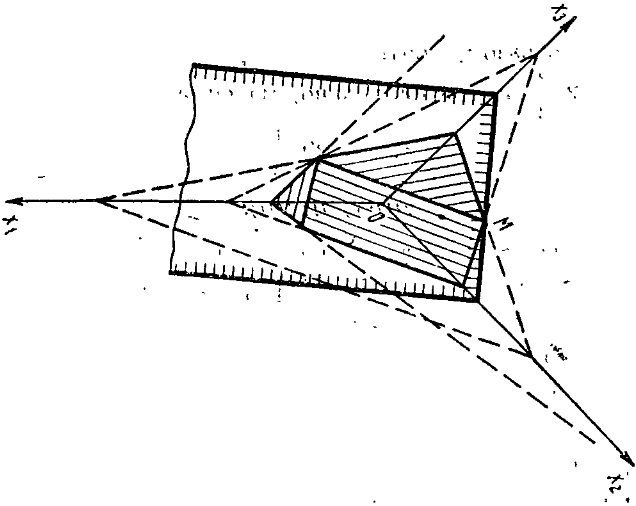

Рис. 46

различные значения, получим семейство параллельных плоскостей.

Плоскость, которой принадлежит наибольшее значение z, которое имеет по крайней мере одну общую точку в области допустимых решений, достигает максимального значения z. Точка или точки из области допустимых решений, которые лежат в этой плоскости, суть оптимальные решения.

Очевидно, что оптимальное решение получаем в вершине многогранника допустимых решений. В этой точке плоскости

$$4x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 24 \quad \text{и} \quad x_1 + 1{,}5x_2 + 3x_3 = 12$$

пересекаются.

Однако точка M имеет значение $x_1 = 0$.

Поэтому при совместном решении системы

$$\begin{cases} 6\ \ x_2 + 3x_3 = 24 \\ 1{,}5x_2 + 3x_3 = 12 \end{cases}$$

находим, что

$$x_2 = x_3 = 2\frac{2}{3}$$

Таким образом, оптимальное решение есть $x_1 = 0$, $x_2 = x_3 = 2\frac{2}{3}$ и, следовательно, максимальное значение

$$z_{\max} = 29\frac{1}{3}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

Нижеследующие задачи решить графически:

1) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leqslant 6 \\ x_1 + 4x_2 \leqslant 4 \\ x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$

$z_{\max} = x_1 + 1{,}5x_2.$

2) $\begin{cases} x_1 - x_2 \geqslant 0 \\ -0{,}5x_1 + x_2 \leqslant 1 \\ x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$

$z_{\max} = x_2 - 0{,}75x_1.$

3) $\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 \leqslant 50 \\ x_1 + x_2 \geqslant 1 \\ x_2 \leqslant 4 \\ x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$

$z_{\max} = x_1 + x_2.$

4) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geqslant 3 \\ x_1 + x_2 \geqslant 2 \\ x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$

$z_{\min} = 1{,}5x_1 + 2{,}5x_2.$

5) $\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 \leqslant 50 \\ x_1 + x_2 \geqslant 1 \\ x_2 \leqslant 4 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$

$z_{\min} = 2x_1 + x_2.$

6) $\begin{matrix} x_1 + x_2 \geqslant 1 \\ x_2 \leqslant 5 \\ x_1 \leqslant 6 \\ 7x_1 + 9x_2 \leqslant 63 \\ x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \end{matrix}$

$z_{\max} = 10x_1 + 6{,}2x_2.$

7) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geqslant 1 \\ 3x_1 + 4x_2 \geqslant 1{,}5 \\ x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$

$z_{\min} = 6x_1 + 4x_2$

8) $\begin{cases} x_1 - 0{,}5x_2 \geqslant 0 \\ x_1 - 5x_2 \geqslant -5 \\ x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$

$z_{\min} = x_1 - 10x_2$

9) $\begin{cases} x_1 - x_2 \geqslant 0 \\ x_1 - 5x_2 \geqslant -5 \\ x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$

$z_{\min} = 2x_1 - 10x_2.$

10) $\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 1 \\ -0{,}5x_1 - 5x_2 \leqslant -10 \\ x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$

$z_{\max} = -5x_2.$

11) $\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 2 \\ -x_1 - 5x_2 \leqslant -10 \\ x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$

$z_{\max} = -5x_2.$

12) $\begin{cases} x_1 + x_2 \geqslant 1 \\ x_2 - 5x_1 \leqslant 0 \\ 5x_2 - x_1 \geqslant 0 \\ x_1 - x_2 \geqslant -1 \\ x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$

$z_{\max} = 3x_1 + 2x_2.$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Почему классические методы математического анализа не могут быть использованы для определения экстремума линейной формы при линейных условиях?
2. Какой метод решения задач на нахождение оптимума был разработан первым?
3. В каких случаях применяется графическое решение задачи линейного программирования?

Глава XI

СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД

§ 31. Понятие симплексного метода

1. Рассмотрим один из общих приемов линейного программирования — *симплексный метод*, основы которого были сформулированы Дж. Д. Данцигом в 1949 г. и впервые опубликованы в 1951 г. Симплексный метод получил такое название от одного из простых примеров, при решении которого он использовался. В этот пример входило ограничение вида $\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$, $x_j \geqslant 0$, которое является уравнением выпуклого многогранника в n-мерном пространстве, называемого симплексом.

В двухмерном пространстве (на плоскости), т. е. при $n=2$ симплекс соответствует треугольнику (рис. 47). В самом деле, в этом случае мы имеем смешанную систему $x_1+x_2=1$, $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$. Значения x_1 и x_2, удовлетворяющие этой системе, представляют собой множество внутренних и крайних точек треугольника.

В трехмерном пространстве, т. е. при $n=3$ симплекс соответствует тетраэдру (рис. 48). Действительно, в данном случае мы имеем смешанную систему

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0.$$

Множество внутренних и крайних точек тетраэдра и представляет собой множество всех решений указанной системы. Теперь название «симплекс» используется независимо от формы линейных ограничений.

Симплексный метод состоит из ряда шагов. Сначала находят базисное решение. Затем определяют, не получено ли оптимальное решение. Если оптимального решения нет, то из базиса удаляют одну из переменных и вместо нее вводят другую переменную. Таким образом получают новый базис. Если оптимальное решение не получено и на этот раз, то с новым базисом поступают точно так же, и, если нужно, все шаги повторяются. Следовательно, задача сводится к тому, чтобы найти любое базисное решение, а затем улучшать его, пока не будет достигнуто оптимальное решение.

За конечное число шагов из числа базисных решений определяется оптимальное решение. Возможны так-

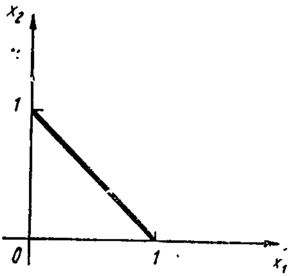

Рис. 47

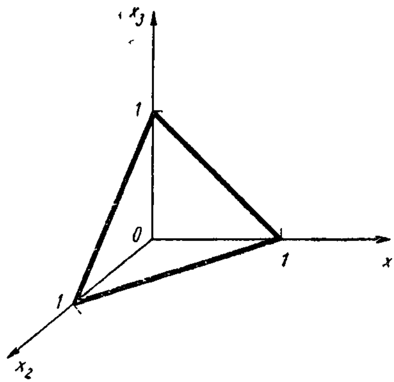

Рис. 48

же два других случая: либо значение линейной формы будет бесконечно, либо ограничения противоречивы.

Геометрическое решение задачи линейного программирования симлексным методом означает, что, начав с определенной вершины многогранника, следующим шагом выбирают вершину, которая расположена ближе к оптимальному решению и, таким образом, последовательно приближаются к последнему, пока не получат его.

2. После приведения задачи линейного программирования к каноническому виду для ее решения симплексным методом, как было отмечено, прежде всего необходимо найти базисное решение (в другой терминологии — опорный план).

Первое (исходное) *базисное* решение можно определить непосредственно из системы уравнений, получаемой при замене неравенств уравнениями введением дополнительных переменных.

Коэффициенты при дополнительных переменных образуют единичную матрицу, определитель которой равен единице. Это означает, во-первых, что система невырожденная, и, во-вторых, векторы-столбцы, компонентами которых являются коэффициенты соответствующих дополнительных переменных, линейно независимы и образуют базис.

Пример. Пусть дана система линейных неравенств

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leqslant 2 \\ x_1 - 2x_2 \leqslant 2 \\ x_1 + x_2 \leqslant 5. \end{cases} \tag{1}$$

Найдем первое базисное решение. Прежде всего неравенства системы (1) заменим уравнениями путем введения дополнительных переменных x_3, x_4, x_5 ($x_i \geqslant 0$, $i = 3, 4, 5$).

Получим систему уравнений

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \end{cases} \tag{2}$$

или в векторной форме

$$\mathbf{A}_1 x_1 + \mathbf{A}_2 x_2 + \mathbf{A}_3 x_3 + \mathbf{A}_4 x_4 + \mathbf{A}_5 x_5 = \mathbf{B},$$

где

$$\mathbf{A}_1 = \begin{Vmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix},$$

$$\mathbf{A}_4 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{A}_5 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{Vmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{Vmatrix}.$$

Коэффициенты при x_3, x_4, x_5 составляют единичную матрицу

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Векторы $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_4$, $\mathbf{A}_5$ линейно независимы и образуют базис. Следовательно, первое базисное решение задачи есть вектор

$$\mathbf{x} = (0, 0, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 2, 2, 5).$$

Вообще, если дана система

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{3}$$

и $x_j \geqslant 0$, то для получения первого базисного решения используют дополнительные переменные x_{n+i}, $i = 1, 2, \ldots, m$, вводимые в неравенства (3) для замены последних уравнениями:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{4}$$

Поскольку коэффициенты при x_{n+i} образуют единичную матрицу, то векторы $\mathbf{A}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+2}, \ldots, \mathbf{A}_{n+m}$ линейно независимы и образуют базис. Первое базисное решение будет вектор

$$\mathbf{x} = (0, 0, \ldots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}).$$

3. В практических задачах могут встретиться два других случая, когда условия выражены системой уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{5}$$

или системой неравенств вида

$$\sum_{j=1}^{n} {}_{ij}x_j \geqslant b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{6}$$

В случае (5) исходное базисное решение находится также прибавлением к левым частям уравнений дополнительных переменных x_{n+i} $(i=1, 2,..., m)$, называемых искусственными (каждое из искусственных переменных равно нулю). Коэффициенты при x_{n+i} образуют единичную матрицу, вектор-строки которой представляют собой первое базисное решение, называемое искусственным базисом.

В случае (6) неравенства преобразуют в уравнения вычитанием дополнительных переменных x_{n+i}. Поскольку коэффициенты при переменных x_{n+i} равны минус единице и не могут служить базисом первого базисного решения, то в уравнения добавляют так называемую фиктивную переменную u_{n+i}.

В дальнейшем будут рассмотрены примеры решения задач линейного программирования на оба эти случая.

4. Первое базисное решение не всегда приводит к оптимальному решению. На практике чаще бывает, когда от первого базисного решения переходят к другому, от другого к третьему и т. д., пока не получат оптимального решения. Переход от одного базиса к другому рассмотрен в главе «векторные пространства». Сейчас мы рассмотрим численный пример нахождения оптимального решения задачи линейного программирования, из которого видна необходимость получения, кроме первого базисного решения, нового базисного решения.

Пусть дана система линейных неравенств (1), где $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$. Требуется найти минимальное значение линейной формы $z = -x_1 + x_2$ (7).

Решая пример (п. 2), мы определили первое базисное решение $\mathbf{x} = (0, 0, 2, 2, 5)$. Подставим полученные значения в линейную форму, получим

$$z_1 = -1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 + 0 + 0 = 0,$$

т. е. мы имеем базисное решение, когда, говоря экономическим языком, «ничего не производится». Признаком того, что полученное решение не является оптимальным, служит наличие в *индексной строке* (см. симплексную таблицу) положительных элементов в случае, когда отыскивается минимум, или отрицательных элементов в случае отыскания максимума. Так как оптимального решения нет, от первого базиса $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_4$, $\mathbf{A}_5$ переходят к новому базису.

Переход от одного базиса к новому базису будем осуществлять с помощью симплексных таблиц.

Первый шаг. Для составления первой симплексной таблицы (таблица I) во второй строке запишем векторы в следующем порядке **B**, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_4$, $\mathbf{A}_5$, где **B** — вектор свободных членов; $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ — векторы, компонентами которых являются соответственно коэффициенты при x_1 и x_2; $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_4$ и $\mathbf{A}_5$ — базисные векторы. Влево от вектора **B** добавим столбец «базисные векторы», показывающий элементы, которые составляют первое базисное решение.

Во втором столбце запишем базисные векторы $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_4$, $\mathbf{A}_5$.

В первой строке запишем значения λ_j, $j=1, 2$, т. е. коэффициенты при переменных x_1 и x_2 в линейной форме (7), минимум которой отыскивается.

Обозначим значения линейной формы z на каждом шаге через z_j (на первом шаге это будет z_1, на втором z_2 и т. п.).

Последнюю строку называют *индексной строкой.* Каждый ее элемент (индекс) на первом шаге (но только на первом шаге!) находится путем вычитания из значения линейной формы (в данном случае, из нуля), соответствующих коэффициентов линейной формы (λ_j).

Наличие в индексной строке таблицы I положительного элемента (+1) вектора $\mathbf{A}_2$ показывает, что оптимального решения нет и следует перейти к новому базису.

Таблица I

$\lambda_{Б_j}$ базисных векторов	Базисные векторы $A_{Б_j}$	Вектор свободных членов B	−1	1	0	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
0	A_3	2	−2	1	1	0	0
0	A_4	2	1	−2	0	1	0
0	A_5	5	1	1	0	0	1
Индексная строка		0	1	−1	0	0	0

Второй шаг. Составим вторую симплексную таблицу. Отыскиваем в таблице 1 в индексной строке наибольшее положительное число (в случае же нахождения максимума линейной формы — наибольшее по абсолютной величине отрицательное число). Это будет $+1$ в векторе-столбце A_1, который назовем *ключевым вектор-столбцом*.

Далее находим *ключевую вектор-строку* в таблице I, которая определяется как строка, содержащая наименьшее положительное частное от деления компонент вектора свободных членов на элементы ключевого столбца.

Имеем $\min\left\{\frac{2}{1}, \frac{5}{1}\right\} = \frac{2}{1} = 2.$

Это частное стоит, как видно из таблицы, в вектор-строке A_4, которая и будет ключевой строкой. Выведем вектор A_4 из базиса A_3, A_4, A_5. Вместо A_4 в таблице II вводим новый базисный вектор. Для этого каждый элемент ключевой строки делим на *разрешающий элемент*, стоящий на пересечении ключевого столбца и ключевой строки, и частные будут соответствующими элементами вводимого базисного вектора (2, 1, —2, 0, 1, 0). Вводимый в базис вектор имеет тот же номер, что и выводимый вектор, а именно A_1.

Преобразуем все остальные элементы матрицы-таблицы I по следующей схеме (формула приводится в следующем параграфе). Допустим, мы хотим найти, какое число надо записать в таблице II вместо 5 (см. таблицу I). На таблице I можно представить себе прямоугольник, в вершинах которого по одной диагонали будут числа 5 и 1 (разрешающий элемент), а по другой диагонали 2 и 1. Произведение последних делят на разрешающий элемент и вычитают из 5; получим:

$$5 - \frac{2 \cdot 1}{1} = 3 \text{ и т. д.}$$

Для составления второй симплексной таблицы можно упростить некоторые расчеты:

а) Все элементы ключевого столбца во второй таблице будут нулями, кроме разрешающего, равного 1.

б) Каждую строку, в ключевом столбце которой стоит нуль, переписывают без изменения.

$\lambda_{Б_j}$ базисных векторов	Базисные векторы $A_{Б_j}$	Вектор свободных членов B	−1	1	0	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
0	A_3	6	0	−3	1	2	0
−1	A_1	2	1	−2	0	1	0
0	A_5	3	0	3	0	−1	1
Индексная строка		−2	0	1	0	−1	0

в) Каждый столбец, в ключевой строке которого стоит нуль, переписывают также без изменения.

Вторая таблица показывает, что получено базисное решение (т. е. векторы A_1, A_3, A_5 образуют базис). Это будет вектор $x = (2, 0, 6, 0, 3)$. Но второе базисное решение не является оптимальным, так как в индексной строке снова есть положительное число 1. Значение линейной формы будет

$$z_2 = -x_1 + x_2 = -1\cdot 0 + 1 = 1.$$

Третий шаг. Переходим от второго базиса A_3, A_1, A_5 к третьему базису.

Находим ключевой столбец A_2, в индексной строке которого стоит положительное число 1. Ключевой строкой будет A_5, так как это единственная строка, в ключевом столбце которой стоит положительное число 3, на которое мы должны разделить свободные члены для получения минимального частного.

Затем преобразуем матрицу и получим третью симплексную таблицу (см. табл. III). Третье базисное решение будет $x = (4, 1, 9, 0, 0)$. Индексная строка не содержит положительных чисел. Следовательно, получено оптимальное решение

$$z_3 = -1\cdot 4 + 1\cdot 1 + 0\cdot 9 + 0 + 0 = -4 + 1 = -3.$$

Таким образом, наименьшее значение линейной формы достигается при $x_1=4$, $x_2=2$ и $x_3=9$ и равно $z=-3$.

Таблица III

$\lambda_{Б_j}$ базисных векторов	Базисные векторы A_j	Вектор свободных членов B	-1	1	0	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
0	A_3	9	0	0	1	1	1
-1	A_1	4	1	0	0	1/3	2/3
1	A_2	1	1	1	0	$-1/3$	$-1/3$
Индексная строка		-3	0	0	0	$-2/3$	$-1/3$

Правило составления симплексных таблиц (кроме первой):

1. Выберем наибольший положительный элемент (когда находится минимум; но отрицательный — при отыскании максимума) в индексной строке матрицы (исключая вектор свободных членов).

2. Наибольший положительный элемент определяет ключевой вектор-столбец.

3. Разделим компоненты вектора свободных членов на положительные элементы ключевого столбца.

4. Из полученных отношений выберем наименьшее положительное.

5. Вектор-строка, содержащая наименьшее положительное частное, будет ключевой вектор-строкой. Эту строку нужно вывести из базиса.

6. На пересечении ключевой строки и ключевого столбца находим разрешающий элемент.

7. Приступаем к преобразованию матрицы. Разделим каждый элемент ключевой строки на разрешающий элемент.

8. Частные от деления элементов ключевой строки

на разрешающий элемент будут соответствующими элементами ключевой вектор-строки следующей симплексной таблицы. Элементы новой ключевой строки следующей таблицы находим по формуле:

$$\boxed{\text{элемент новой ключевой строки}} = \frac{\boxed{\text{элемент предыдущей ключевой строки}}}{\boxed{\text{разрешающий элемент}}}$$

9. Все остальные новые элементы для следующей симплексной таблицы рассчитываются по следующей формуле

$$\boxed{\text{Новый элемент}} = \boxed{\text{Выбранный элемент}} - \frac{\boxed{\text{элемент ключевой строки}} \times \boxed{\text{элемент ключевого столбца}}}{\boxed{\text{разрешающий элемент}}}$$

10. Повторяем все операции (1—9) до тех пор, пока в индексной таблице не останется отрицательных чисел (при отыскании максимума) или положительных чисел (при отыскании минимума). Наличие в индексной строке матрицы, не считая столбца свободных членов, положительных чисел (при отыскании максимума) или отрицательных чисел (при отыскании минимума) означает, что получено оптимальное решение.

5. Рассмотрим задачу линейного программирования на нахождение максимального значения линейной формы.

Пусть дана система неравенств

$$\begin{cases} x_1 \leqslant 4 \\ x_2 \leqslant 6 \\ x_1 + x_2 \leqslant 8 \end{cases} \tag{8}$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0.$$

Требуется найти максимальное значение линейной формы:

$$z_{max} = 2x_1 + 5x_2. \tag{9}$$

Введя в неравенства системы (8) дополнительные переменные x_3, x_4 и x_5 (также неотрицательные), получим систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 \quad + x_3 \qquad = 4 \\ \quad x_2 \quad + x_4 \quad = 6 \\ x_1 + x_2 \qquad + x_5 = 8 \end{cases} \tag{10}$$

Запишем систему (10) в форме векторного уравнения:

$$\underset{A_1}{\begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}} x_1 + \underset{A_2}{\begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}} x_2 + \underset{A_3}{\begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}} x_3 + \underset{A_4}{\begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}} x_4 + \underset{A_5}{\begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}} x_5 = \underset{B}{\begin{Vmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{Vmatrix}} \tag{11}$$

Тогда задачу линейного программирования можно сформулировать следующим образом:

При условиях

$$\mathbf{A}_1 x_1 + \mathbf{A}_2 x_2 + \mathbf{A}_3 x_3 + \mathbf{A}_4 x_4 + \mathbf{A}_5 x_5 = \mathbf{B} \tag{12}$$

$$x_i \geqslant 0 \qquad (i = 1,\ 2, \ldots, 5)$$

требуется найти

$$z_{\max} = 2x_1 + 5x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5. \tag{13}$$

Первый шаг. Составим первую симплексную таблицу.

В таблицу IV запишем векторы в следующем порядке: **B**, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_4$, $\mathbf{A}_5$, т. е. сначала запишем **B**—свободные члены системы (10), затем — векторы $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ (коэффициенты при переменных x_1 и x_2) и, наконец, базисные векторы $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_4$ и $\mathbf{A}_5$ (коэффициенты при базисных переменных x_3, x_4 и x_5). Влево от **B** (столбца свободных членов) добавим столбец базисных векторов, показывающий элементы, входящие в базис.

В первой строке таблицы запишем значения λ_j, т. е. коэффициенты при переменных x_j в линейной форме (13), максимум которой мы хотим найти

Во втором столбце «базисные векторы» запишем векторы $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_4$ и $\mathbf{A}_5$.

Обозначим значения линейной формы (13) на каждом этапе через z_j. (Как известно, при нахождении базисного решения, согласно определению, мы полагаем все небазисные переменные x_1, x_2 и x_3 равными нулю.).

Наконец, заполним индексную строку, обозначаемую через $z_j - \lambda_j$. Каждый индекс ее находится следующим образом. Значения z_j в каждой клетке строки умножим на соответствующие элементы свободных членов (компонентов вектора **B**), основной части матрицы (компонентов небазисных векторов $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$) и единичной матрицы (компонентов базисных векторов $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_4$ и $\mathbf{A}_5$).

Полученные произведения сложим и из найденной суммы вычтем соответствующие каждому столбцу коэффициенты линейной формы. Результатом и будет величина соответствующего индекса. Она записывается на соответствующем месте в индексной строке. Итак, мы получим следующую матрицу:

Таблица IV

$\lambda_{Б_j}$ базисных векторов	Базисные векторы $\mathbf{A}_{Б_j}$	Вектор свободных членов B	2	5	0	0	0
			$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_5$
0	$\mathbf{A}_3$	4	1	0	1	0	0
0	$\mathbf{A}_4$	6	0	1	0	1	0
0	$\mathbf{A}_5$	8	1	1	0	0	1
Индексная строка $z_j - \lambda_j$		0	−2	−5	0	0	0

Из этой таблицы устанавливаем, является ли наше решение оптимальным.

При $x_3 = 4, \qquad x_4 = 6, \qquad x_5 = 8$

значения x_1 и x_2, удовлетворяющие линейной форме (13), должны быть оба нули. Отсюда вектор (0, 0,4, 6, 8) есть базисное решение, и для этого вектора мы имеем

$$z_1 = 2 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 0 + 0 + 0 = 0.$$

Следовательно, линейная форма z_1 равна нулю. Заметим, что (при определении максимума линейной формы) оптимальное решение будет только в том случае, когда в индексной строке $z_j - \lambda_j$ не будет отрицательных элементов. Поскольку элементы этой строки, входящие в вектор-столбцы $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ суть -2 и -5, мы продолжаем испытание.

Таким образом, выяснив, что наше решение не является оптимальным, мы должны выяснить, следует ли продолжать испытание или остановиться на этом, если конечного решения получить нельзя.

Для этого надо руководствоваться следующим:

1) если все индексы $z_j - \lambda_j$ индексной строки неотрицательны, т. е. $z_j - \lambda_j \geqslant 0$; то получено оптимальное решение.

2) если $z_j - \lambda_j < 0$ для некоторого столбца, то мы имеем один из двух случаев:

а) если элементы a_{ij} в этом столбце неположительные, то решение бесконечное и неопределенное;

б) если какой-нибудь элемент a_{ij} в этом столбце неотрицательный, необходимо продолжать вычисления.

В данном примере, как видно из таблицы, не все элементы индексной строки положительны. Значит, решение не оптимальное.

Второй шаг. Составляем вторую симплексную таблицу.

В индексной строке выбираем элемент, содержащий наименьшее отрицательное число. (В случае, если мы имеем два или более одинаковых отрицательных числа, то можно выбрать любое из них). Вектор-столбец ($\mathbf{A}_2$), содержащий этот наименьший отрицательный индекс (-5), есть ключевой столбец. В таблице он заключен в рамки. Далее, найдем ключевую строку. Для этого все компоненты вектора свободных членов $\mathbf{B}$ поделим на соответствующие элементы ключевого столбца, причем делим только на положительные числа. Из полученных отношений выберем наименьшее. Ключевой вектор-строкой является $\mathbf{A}_4$, так как она содержит

$$\min\left\{\frac{6}{1};\ \frac{8}{1}\right\} = \frac{6}{1} = 6.$$

Элемент матрицы, лежащий на пересечении ключевого столбца и ключевой строки, т. е. *разрешающий элемент,* равен 1.

Ключевую вектор-строку $\mathbf{A}_4$ выводим из таблицы I (в таблице эта вектор-строка показана стрелкой). Вместо ключевой строки, надо записать в таблицу V *новую вектор-строку.* Она получается путем деления всех чисел ключевой строки на разрешающий элемент; результаты деления пишем в соответствующих клетках этой строки. Элементы новой вектор-строки в таблице V вместо ключевой в таблице IV получаем по следующей формуле:

$$y'_{rj} = \frac{y_{rj}}{y_{rk}}, \tag{14}$$

где y'_{rj} — элемент новой ключевой строки,

y_{rj} — элемент старой ключевой строки,

y_{rk} — разрешающий элемент.

Теперь столбец таблицы «базисные векторы» вместо

$$\begin{Vmatrix} \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{A}_4 \\ \mathbf{A}_5 \end{Vmatrix}$$

будет другим, а именно

$$\begin{Vmatrix} \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_5 \end{Vmatrix}$$

(т. е. получен новый базис $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_5$) и вместо выведенной вектор-строки $\mathbf{A}_4$ будем иметь $\mathbf{A}_2$.

Элементы других строк находятся по формуле

$$y'_{ij} = y_{ij} - \frac{y_{rj}}{y_{rk}} y_{ik} = y_{ij} - y'_{rj} \cdot y_{ik}, \tag{15}$$

где y'_{ij} — новый элемент, y_{ij} — выбранный элемент,

$y'_{rj} = \frac{y_{rj}}{y_{rk}}$ — элемент новой ключевой строки,

y_{ik} — элемент ключевого столбца.

Например, найдем из первой таблицы элемент, стоящий на пересечении строки A_3 и столбца **B**. Так как $i = 3$ и $j = 0$, имеем $r = 4$ и $k = 2$. Из (15) находим

$$y'_{30} = a_{30} - a'_{20} \cdot a_{32} = 4 - 6 \cdot 0 = 4.$$

Элемент, стоящий на пересечении A_3 и A_3 (при $i = 3$ и $j = 3$), по этому же правилу будет

$$a'_{33} = a_{33} - a'_{23} \cdot a_{32} = 1 - 0 \cdot 0 = 1.$$

Таблица V

$\lambda_{Б_j}$ базисных векторов	Базисные векторы $A_{Б_j}$	Вектор свободных членов B	2	5	0	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
0	A_3	4	1	0	1	0	0
5	A_2	6	0	1	0	1	0
0	A_5	2	1	0	0	−1	1
$z_j - \lambda_j$		30	−2	0	0	5	0

Таблица VI

$\lambda_{Б_j}$ базисных векторов	Базисные векторы $A_{Б_j}$	Вектор свободных членов B	2	5	0	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
0	A_3	2	0	0	1	1	−1
5	A_2	6	0	1	0	1	0
2	A_1	2	1	0	0	−1	1
$z_j - \lambda_j$		34	0	0	0	3	2

Преобразуя таким образом таблицу IV, получим таблицу V. В ней, в индексной строке, не все элементы положительные. Поэтому оптимального решения нет, и следует перейти к следующему шагу.

Третий шаг. Аналогично составим третью симплексную таблицу.

Так как все $z_j - \lambda_j \geqslant 0$, то мы добились оптимального решения, т. е. $x_1 = 2$; $x_2 = 6$; $x_3 = 2$ и

$$z_{\max} = 2 \cdot 2 + 5 \cdot 6 + 0 \cdot 2 + 0 + 0 = 34.$$

Заметим, что коэффициент x_3 дополнительного вектора $\mathbf{A}_3$ равен нулю в линейной форме и поэтому не влияет на значение z.

§ 32. Алгоритм симплексного метода

1. Рассмотрим симплексный метод для невырожденной задачи линейного программирования* в общем виде.

Пусть дана система линейных неравенств (или уравнений)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \leqslant \\ = \\ \geqslant \end{Bmatrix} b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Требуется найти максимальное значение линейной формы

$$z_{\max} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j.$$

Перед тем как приступить к решению задачи, надо привести ее к канонической форме.

Прежде всего убедимся, что все b_i неотрицательны. Если необходимо, неравенства умножают на —1 для того, чтобы получить $b_i \geqslant 0$. Затем путем введения дополнительных переменных каждое неравенство преобразуем в уравнение. Тогда

* Задача называется невырожденной, если каждое ее базисное решение содержит ровно m положительных компонент.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i \quad \text{становится} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i, \; x_{n+i} \geqslant 0$$

и

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i \quad \text{становится} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i, \; x_{n+i} \geqslant 0.$$

Каждая дополнительная переменная определяет нулевое значение линейной формы. В случае, если эта дополнительная переменная прибавляется к i-му неравенству, то столбец матрицы A, соответствующий x_{n+i}, есть $\mathbf{e}_i$; если же дополнительная переменная вычитается из i-го неравенства, то столбец матрицы A, соответствующий x_{n+i}, будет $-\mathbf{e}_i$.

Матрица A рассматривается здесь для того, чтобы определить, содержит ли она единичную матрицу $m \times m$ (т. е. могут ли столбцы матрицы переставлены с тем, чтобы получить единичную матрицу в A). Если единичной матрицы нет, то прибавляют необходимое число искусственных векторов Q_i и искусственных переменных x_{n+k} с тем, чтобы получить единичную матрицу. В этом случае выбирают очень большую относительно λ_j отрицательную величину $-M$ (при нахождении максимума линейной формы) в качестве значения искусственной переменной (значение $-M$ можно использовать для каждой искусственной переменной).

Для того чтобы начать решение симплексным методом, используют единичную матрицу как базисную. Действительно, коэффициенты при дополнительных переменных x_{n+i} образуют единичную матрицу, определитель которой равен единице. Поэтому векторы $\mathbf{A}_{n+1}$, $\mathbf{A}_{n+2}, \ldots \mathbf{A}_{n+m}$ линейно независимы и образуют базис. Тогда исходное базисное решение задачи есть вектор $\mathbf{x} = (0, 0, \ldots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m})$.

Построим первую симплексную таблицу (см. таблицу на стр. 227). Такую таблицу легко построить, поскольку $y_{i0} = b_i$, $y_{ij} = a_{ij}$. Последняя (индексная строка) в которой записывается z, $z_j - \lambda_j$ вычисляется по формулам $z = \lambda_{Бj} b_i$, $z_j - \lambda_j = \lambda_{Бj} \mathbf{A}_j - \lambda_i$.

Теперь применяют *критерий оптимальности:*

Если все $z_j - \lambda_j \geqslant 0$, то базисное решение будет оптимальным.

Симплексная таблица

$\lambda_{Б_j}$ базисных строк	Базисные векторы $A_{Б_j}$	Вектор свободных членов B	λ_1	λ_2	…	λ_j	…	λ_k	…	λ_n	$\pm M$		$\pm M$
			$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	…	$\mathbf{A}_j$	…	$\mathbf{A}_k$	…	$\mathbf{A}_n$	$\mathbf{Q}_1$	…	$\mathbf{Q}_s$
$\lambda_{Б_1}$	A_1	$x_1=y_{10}$	y_{11}	y_{12}		y_{1j}		y_{1k}		y_{1n}	$y_{1,n+1}$		$y_{1,n+s}$
$\lambda_{Б_2}$	A_2	$x_2=y_{20}$	y_{21}	y_{22}		y_{2j}		y_{2k}		y_{2n}	$y_{2,n+1}$		$y_{2,n+s}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮		⋮	⋮		⋮
$\lambda_{Б_l}$	A_l	$x_l=y_{lo}$	y_{l1}	y_{12}		$\overset{1}{y_{lj}}$		$\overset{2}{y_{lk}}$		y_{ln}	$y_{l,n+1}$		$y_{l,n+s}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮		⋮	⋮		⋮
$\lambda_{Б_r}$	A_r	$x_r=y_{ro}$	y_{r1}	y_{r2}		$\overset{4}{y_{rj}}$		$\overset{3}{y_{rk}}$		y_{rn}	$y_{r,n+1}$		$y_{r,n+s}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮		⋮	⋮		⋮
$\lambda_{Б_m}$	A_m	$x_m=y_{mo}$	y_{m1}	y_{m2}		y_{mj}		y_{mk}		y_{mn}	$y_{m,n+1}$		$y_{m,n+s}$
Индексная строка		$z=y_{m+1,0}$	$z_1-\lambda_1==y_{m+1,1}$	$z_2-\lambda_2==y_{m+1,2}$	…	$z_j-\lambda_j==y_{m+1,j}$	…	$z_k-\lambda_k==y_{m+1,j}$	…	$z_n-\lambda_n==y_{m+1,n}$	…	…	…

Когда один или более элементов индексной строки отрицательны, т. е. $z_j - \lambda_j < 0$, то для выбора вектора, который вводится в базис, применяется следующее правило вычисления ключевого столбца.

Вычисляют $z_k - \lambda_k = \min(z_j - \lambda_j)$, где $z_j - \lambda_j < 0$. Вектор $\mathbf{A}_k$ вводится в базис.

При выборе $\mathbf{A}_k$ в качестве базисного вектора, могут представиться два случая:

1) $y_{ik} \leqslant 0$ для всех i. Это означает, что значение линейной формы может расти до бесконечности;

2) $y_{ik} > 0$ по крайней мере для одного i. В этом случае можно найти новое базисное решение, для которого $z' \geqslant z$.

Если по крайней мере одно $y_{ik} > 0$, то для определения вектора, который выводится из базиса (для замены строки в столбце $\mathbf{B}$ вектором $\mathbf{A}_k$), применяется правило для вычисления ключевой строки.

Вычисляют отношение

$$\frac{y_{ro}}{y_{rk}} = \min_i \left\{ \frac{y_{io}}{y_{ik}}, \quad y_{ik} > 0 \right\}.$$

Вектор r-й строки базиса выводится из него и заменяется вектором $\mathbf{A}_k$.

Теперь построим вторую симплексную таблицу, используя для нахождения ее элементов следующие формулы:

$$\boxed{y'_{ij} = y_{ij} - \frac{y_{ik}}{y_{rk}} y_{rj}} \quad \text{для всех } j, \ i = 1, 2, \ldots, m+1; \ i \neq r.$$

$$\boxed{y'_{rj} = \frac{y_{rj}}{y_{rk}}} \qquad \text{для всех } j,$$

$$A_i = y_{i0}; \quad z = y_{m+1,0}; \quad z_j - \lambda_j = y_{m+1,j}; \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

или формулы векторного преобразования:

$$y_j = y_j + y_{rj}\Phi, \quad y_j = \| y_j, \ y_{m+1} \|, \text{ для всех } j$$

$$\Phi = \left\| -\frac{y_{ik}}{y_{rk}}, \ldots, -\frac{y_{r-1,k}}{y_{rk}}, \ \frac{1}{y_{rk}} - 1, \right.$$

$$\left. -\frac{y_{r+1,k}}{y_{rk}}, \ldots, -\frac{y_{m+1,k}}{y_{rk}} \right\|.$$

Значение в r-й позиции столбца $\lambda_{Б_j}$ должно быть заменено на λ_j, а вектор в r-й позиции, обозначенный в столбце «базисные векторы», должен быть заменен на $\mathbf{A}_k$.

Возвращаясь к шагу, где мы рассматривали критерий оптимальности и правило 1, отметим, что симплексный метод является конечным итерационным процессом и посредством конечного числа шагов приводит к оптимальному решению.

В случае вырожденности базисного решения может появиться зацикливание, т. е. повторное получение одного и того же базисного решения. При зацикливании оптимальное решение никогда не будет достигнуто. Но эта возможность настолько редкая, что в практических задачах почти нигде не встречалась. Для того чтобы полностью гарантировать попадание в цикл, приходится делать дополнительные вычисления.

Симплексный метод позволяет на каждом шаге вычислений установить, будет ли решение оптимальным, а если нет, то можно ли получить новое базисное решение, или значение линейной формы будет бесконечно. Практика показывает, что достижение оптимального решения осуществляется в среднем за $2 \min \{m, n\}$ итераций, где m — число ограничений (уравнений или неравенств), n — число переменных.

2. Таким образом, оптимальное решение симплексным методом достигается путем перехода от одного базисного решения к другому.

Можно доказать, что *оптимальное решение задачи линейного программирования всегда базисное.* Из этого следует, что задача сводится к тому, чтобы найти любое базисное решение, а затем улучшать его, пока не будет получено оптимальное решение. Предположим теперь, что мы нашли какое-либо базисное решение, которое удовлетворяет условиям:

$$\sum_{i=1}^{m} \mathbf{A}_i x_i = \mathbf{B}, \ x_i \geqslant 0 \tag{1}$$

и дает минимум линейной формы

$$z_{\min} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i. \tag{2}$$

Любой вектор системы можно выразить через векторы базиса

$$\mathbf{A}_j = \sum_{i=1}^{m} y_{ij}\mathbf{A}_i \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

В первой симплексной таблице $y_{ij} = a_{ij}$.

Если заменить вектором $\mathbf{A}_j$ один из базисных векторов $\mathbf{A}_i$, получим новое базисное решение, причем замену надо делать так, чтобы увеличить линейную форму z (при нахождении максимума).

Перепишем (1) следующим образом:

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{A}_i x_i - \rho\mathbf{A}_j + \rho\mathbf{A}_j.$$

Заменяя $\mathbf{A}_j$ выражением из формулы (3), получим

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{A}_i x_i - \rho \sum_{i=1}^{m} y_{ij}\mathbf{A}_i + \rho\mathbf{A}_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (x_i - \rho y_{ij})\,\mathbf{A}_i + \rho\mathbf{A}_j. \tag{4}$$

Задача будет решена только в том случае, если $\rho \geqslant 0$ и соответствующие $x_i - \rho y_{ij}$ неотрицательны.

Новое значение линейной формы z' можно получить на основании формул (2) и (4):

$$z' = \sum \lambda_i (x_i - \rho y_{ij}) + \rho\lambda_j = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i + \rho\,(\lambda_j - \lambda_i \cdot y_{ij}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i - \rho\,(\lambda_i y_{ij} - \lambda_j) \tag{5}$$

Введем обозначение $z_j = \lambda_i y_{ij}$. Тогда формулу (5) можно написать так:

$$z' = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i - \rho\,(z_j - \lambda_j).$$

Таким образом, если $z_j - \lambda_j$ отрицательно, можно, введя в базис вектор $\mathbf{A}_j$, увеличить значение линейной формы.

Возможны следующие случаи:

1) $z_j - \lambda_j \geqslant 0$ для всех столбцов; тогда получено оптимальное решение;

2) $z_j - \lambda_j < 0$ для j-го столбца и $y_{ij} > 0$ для i-й строки. Примем $\rho = \min \frac{x_i}{y_{ij}}$ для всех i, где $y_{ij} > 0$. Пусть минимум ρ достигается при $i = k$. В этом случае можно ввести в базис вектор $\mathbf{A}_j$, вывести $\mathbf{A}_k$ и получить новое решение задачи с бóльшим значением линейной формы.

3) $z_j - \lambda_j < 0$ для одного j и $y_{ij} < 0$ для всех i; тогда оптимального решения нет.

3. Рассмотрим более подробно детали перехода от одного базисного решения к другому на примере нахождения минимального значения линейной формы.

Пусть требуется найти

$$z_{\min} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \tag{6}$$

при условии

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{A}_j x_j = \mathbf{B}, \quad x_j \geqslant 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{7}$$

Как известно, вначале находится решение системы (7), не обязательно дающее минимальное значение линейной формы (6), для чего берем одно из базисных решений.

Предположим, что мы нашли базисное решение, соответствующее m векторам $\mathbf{A}_j$ из первоначальной совокупности векторов n. В этом базисном решении $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots, x_n)$ не нарушая общности, можно считать, что первые m векторов $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m$ есть единичные, т. е. образуют базис. Тогда компоненты базисного решения $\mathbf{x}$ с номерами, превышающими m, равны нулю $x_{m+1} = \ldots = x_n = 0$, а базисное решение имеет вид $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$.

Тогда справедливы соотношения (6) и (7).

Теперь переходим к другому шагу. Зная известное базисное решение, находим новое базисное решение.

Так как векторы $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m$ линейно независимы, то они образуют базис в m-мерном пространстве. Поэтому каждый из данных n векторов $\mathbf{A}_j$ можно выразить через этот базис в виде линейной комбинации векторов базиса:

$$\sum_{i=1}^{m} y_{ij}\mathbf{A}_i = \mathbf{A}_j, \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{8}$$

где y_{ij} — элементы j-го столбца матрицы, для которого находится решение.

Заменяя один из базисных векторов, получим другое решение. Это можно сделать путем увеличения z (если это возможно).

Допустим, что для некоторого вектора, не входящего в наш базис, например $\mathbf{A}_{m+1}$, в выражении

$$y_{1,m+1}\mathbf{A}_1 + y_{2,m+1}\mathbf{A}_2 + \ldots + y_{m,m+1}\mathbf{A}_m = \mathbf{A}_{m+1} \tag{9}$$

хотя бы один из коэффициентов $y_{i,m+1} > 0$. Умножим обе части равенства (9) на некоторую положительную величину ρ получим

$$\rho y_{1,m+1}\mathbf{A}_1 + \rho y_{2,m+1}\mathbf{A}_2 + \ldots + \rho y_{m,m+1}\mathbf{A}_m = \rho\mathbf{A}_{m+1};$$

полученный результат вычтем из (7):

$$(\mathbf{A}_1 x_1 - \rho y_{1,m+1}\mathbf{A}_1) + (\mathbf{A}_2 x_2 - \rho y_{2,m+1}\mathbf{A}_2) + \ldots +$$
$$+ (\mathbf{A}_m x_m - \rho y_{m,m+1}\mathbf{A}_m) = \mathbf{B} - \rho\mathbf{A}_{m+1}.$$

Вынося за скобки соответственно векторам $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots$ получим:

$$(x_1 - \rho y_{1,m+1})\mathbf{A}_1 + (x_2 - \rho y_{2,m+1})\mathbf{A}_2 + \ldots +$$
$$+ (x_m - \rho y_{m,m+1})\mathbf{A}_m + \rho\mathbf{A}_{m+1} = \mathbf{B}$$

Итак,

$$\sum_{i=1}^{m} (x_i - \rho y_{i,m+1})\mathbf{A}_i + \rho\mathbf{A}_{m+1} = \mathbf{B}. \tag{10}$$

Вектор

$$\mathbf{x}' = (x_1 - \rho y_{1,m+1};\ x_2 - \rho y_{2,m+1};\ \ldots, x_m - \rho y_{m,m+1}; \rho)$$

является *решением*, если компоненты этого вектора будут неотрицательны, т. е. когда $\rho > 0$ и $x_1 - \rho y_{i,m+1} \geqslant 0$, причем мы рассматриваем только положительные значения ρ, так как находится решение $\mathbf{x}'$, отличное от $\mathbf{x}$. Нам необходимо найти такое $\rho > 0$, что $x_i - \rho y_{i,m+1} \geqslant 0$ для всех $y_{i,m+1} > 0$. Перенося второй член неравенства в правую часть с противоположным знаком, имеем:

$$\frac{x_i}{y_{i,m+1}} \geqslant 0.$$

Следовательно, любое ρ, для которого $0 < \rho \leqslant \min\limits_i \frac{x_i}{y_{i,m+1}}$, где минимум берется по тем i, для которых $y_{i,m+1} > 0$ определяет в соответствии с (10) некоторое решение нашей задачи.

Но базисное решение содержит ровно m положительных компонент. Поскольку в решение $\mathbf{x}'$, входит $m+1$ компонент, следует обратить в нуль хотя бы одну из компонент вектора $\mathbf{x}'$. Положив

$$\rho = \rho_0 = \min_i \frac{x_i}{y_{i,m+1}} \text{ для всех } y_{i,m+1} > 0,$$

компонента вектора $\mathbf{x}'$, для которой достигается минимум, обращается в нуль. Положим, что эта компонента стоит на первом месте, т. е.

$$\rho_0 = \min_i \frac{x_i}{y_{i,m+1}} = \frac{x_1}{y_{1,m+1}}.$$

Тогда мы получим новое решение

$$\mathbf{A}_2 x_2' + \mathbf{A}_3 x_3' + \ldots + \mathbf{A}_m x_m' + \mathbf{A}_{m+1} x_{m+1}' = \mathbf{B},$$

где

$$x_i' = x_i - \rho_0 y_{i,m+1} \ (i = 2, 3, \ldots, m) \text{ и } x_{m+1}' = \rho_0.$$

Можно показать, что $\mathbf{x}' = (x_2', x_3', \ldots, x_m', x_{m+1}')$ есть угловая точка, для этого достаточно доказать, что совокупность векторов $\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \ldots, \mathbf{A}_m, \mathbf{A}_{m+1}$ линейно независима (доказательство предоставляем читателю).

Следующим шагом симплексного метода будет нахождение новых базисных решений до тех пор, пока не получим оптимальное решение.

Для получения новых базисных решений надо представить любой вектор, не входящий в новый базис $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3, \ldots, \mathbf{A}_{m+1}$, в виде линейной комбинации векторов этого базиса. Из (9) получим:

$$\mathbf{A}_1 = \frac{1}{y_{1,m+1}} (\mathbf{A}_{m+1} - y_{2,m+1} \mathbf{A}_2 - \ldots - y_{m,m+1} \mathbf{A}_m). \quad (11)$$

Положим, что

$$\mathbf{A}_j = y_{1j}\mathbf{A}_1 + y_{2j}\mathbf{A}_2 + \ldots + y_{mj}\mathbf{A}_m \quad (12)$$

есть некоторый вектор, не входящий в новый базис. Выражение (11) подставим в (12):

$$\mathbf{A}_j = \left(y_{2j} - \frac{y_{1j}}{y_{1,m+1}} y_{2,m+1}\right)\mathbf{A}_2 + \left(y_{3j} - \frac{y_{1j}}{y_{1,m+1}} y_{3,m+1}\right)\mathbf{A}_3 +$$

$$+ \ldots + \left(y_{mj} - \frac{y_{1j}}{y_{1,m+1}} y_{m,m+1}\right) \mathbf{A}_m + \frac{y_{1j}}{y_{1,m+1}} \mathbf{A}_{m+1}.$$

Таким образом, процесс получения новых базисных решений заключается в отыскании нового вектора, который следует ввести в базис известного базисного решения, и определения вектора, подлежащего исключению из этого базиса. Критерий, используемый для определения вектора, который следует ввести в базис, является основным элементом симплексного метода. Он называется *критерием оптимальности.*

Рассмотрение задачи симплексным методом привело нас к решению $\mathbf{x}'$. Теперь найдем значение линейной формы z', для чего на основании (6) и (10) заменим $\mathbf{B}$ на z' и $\mathbf{A}_i$ на λ_i :

$$z' = \sum_{i=1}^{m} (x_i - \rho y_{i,m+1}) \lambda_i + \rho\lambda_{m+1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i\lambda_i + \rho (\lambda_{m+1} - \sum_{i=1}^{m} y_{i,m+1} \lambda_i). \quad (13)$$

Учитывая (2) и положив

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} y_{i,m+1} \lambda_i, \quad (14)$$

перепишем (13) в следующем виде

$$z' = z + \rho(\lambda_{m+1} - z_{m+1}) \tag{15}$$

Следовательно, если значение $\lambda_{m+1} - z_{m+1} > 0$ и, взяв вектор $\mathbf{A}_{m+1}$ по формуле (10), мы можем получить решение, то в силу (14) мы получим *большее* значение линейной формы, если $\rho > 0$.

Пусть в соответствии с формулами (6), (8), (13), (14) и (15) мы вычислили величины y_{ij} и $\lambda_{m+1} - z_{m+1}$ для $i = 1, \ldots, m$; $j = m+1, m+2, \ldots, n$. При этом возможны три взаимно исключающие друг друга случая:

1) $\lambda_j - z_j > 0$ для некоторого j и $y_{ij} > 0$ для некоторого i. В этом случае можно заменить один из векторов базиса новым вектором $\mathbf{A}$ и получить таким образом другое решение с большим значением z_0. Это осуществляется следующим образом. Поскольку $y_{ij} > 0$ по крайней мере для одного i, то примем, что $\rho = \min\limits_{i} \frac{x_i}{y_{ij}}$ по всем i, для которых $y_{ij} > 0$.

Пусть $j = m+1$. В силу (10) вектор $\mathbf{B}$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \ldots, \mathbf{A}_{m+1}$ с неотрицательными коэффициентами, а из формулы (13) вытекает, что линейная форма имеет значение, большее z_0. Векторы $\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \ldots, \mathbf{A}_{m+1}$ снова образуют базис и решение задачи продолжается.

2) $\lambda_j - z_j > 0$ для некоторого j и $y_{ij} \leqslant 0$ для каждого i. В силу (10) для любого положительного ρ все коэффициенты $x_i - \rho y_{ij}$ положительны. Так как ρ можно брать произвольно большим, то по (15) максимальным значением линейной формы является бесконечность. В этом случае задача линейного программирования неразрешима.

3) $\lambda_j - z_j \leqslant 0$ для всех $j = 1, 2, \ldots, n$. Можно показать, что в этом случае z_0 является минимумом, т. е. решение $\sum\limits_{i=1}^{m} \mathbf{A}_i x_i = \mathbf{B}$ есть минимальное решение (доказательство опускаем).

Теперь сформулируем *критерий оптимальности*. Если $\lambda_j - z_j \leqslant 0$ для $j = m+1, m+2, \ldots, n$, то вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$ является решением задачи линейного программирования (6) — (7).

Заметим, что если исходная задача связана с нахождением максимального значения, то все указанные выше рассуждения необходимо отнести к разности $z_j - \lambda_j$.

Понятие критерия оптимальности основывается на следующих теоремах:

1. Если для некоторого j соблюдается условие $z_j - \lambda_j > 0$, то можно построить такое множество решений задачи, что для любого из них справедливо неравенство $z' > z$, где z — значение линейной формы, соответствующее этому решению.

2. Если для некоторого базисного решения $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ справедливы неравенства $z_j - \lambda_j \leqslant 0$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$, то решение x является оптимальным.

4. В случае, если по условию задачи мы получаем непосредственно систему уравнений (тогда задача не содержит единичную матрицу, из которой может быть составлен первоначальный базис) прибегают к так называемому методу *искусственного базиса* (или M-методу).

Пусть требуется найти минимальное значение линейной формы

$$z = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$$

при условиях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

и

$$x_j \geqslant 0.$$

Рассмотрим так называемую расширенную задачу, для чего в систему уравнений введем *искусственные* переменные x_{n+i}. Тогда получим:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} \qquad\qquad = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \qquad + x_{n+2} \qquad = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \qquad\qquad + x_{n+m} = b_m \end{cases} \tag{16}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = 1, \ldots, n, n+1, \ldots, n+m). \tag{17}$$

Требуется найти минимальное значение линейной формы

$$z_{\min} = \lambda_1 x_1 + \lambda_1 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n +$$
$$+ M(x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+m}),$$

где величина M предполагается достаточно большим положительным числом, значение которого заранее не задается, а $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+m})$ удовлетворяет условиям (16) и (17).

Векторы $\mathbf{A}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+2}, \ldots, \mathbf{A}_{n+m}$ образуют базис, называемый *искусственным*.

Если исходная задача имеет хотя бы одно решение, то оно является также решением и расширенной задачи. Применение симплексного метода к расширенной задаче обеспечивает такое решение, в котором каждое из искусственных переменных x_{n+i} равно нулю.

Если исходная задача не имеет решений, то решение расширенной задачи будет содержать по крайней мере одно $x_{n+i} > 0$.

Значения компонент вектора $\mathbf{x}$ будут $x_{n+1} = b_1$, $x_{n+2} = b_2, \ldots, x_{n+m} = b_m$ и могут быть приняты за исходное решение расширенной задачи. При этом значение линейной формы $z = M\sum_{i=1}^{m} b_i$.

Поскольку базисом является единичная матрица, то значения компонент вектора $\mathbf{x}_j$ будут

$$y_{1j} = a_{1j},\ y_{2j} = a_{2j},\ \ldots,\ y_{mj} = a_{mj},$$

а значение линейной формы

$$z_j = M\sum_{i=1}^{m} y_{ij}.$$

Для искусственных переменных, образуюших базис, разности $z_j - \lambda_j$ будут линейными функциями M. Тогда исходное решение будет

$$z_j - \lambda_j = M\sum_{i=1}^{m} y_{ij} - \lambda_j.$$

Заметим, что одна из двух независимых друг от друга частей разности $z_j - \lambda_j$ зависит от M, а другая не зависит. Дальнейшие вычисления производятся аналогично рассмотренному в п. 3 приему.

5. При рассмотрении понятия симплексного метода и при решении задач линейного программирования симплексным методом приводились следующие формулы:

$$y'_{rj} = \frac{y_{rj}}{y_{rk}};$$

$$y'_{ij} = y_{ij} - \frac{y_{rj}}{y_{rk}} \cdot y_{ik}.$$

Выведем эти формулы. Рассмотрим случай, когда матрица исходной задачи линейного программирования содержит m векторов, из которых может быть составлена единичная матрица m-го порядка.

Пусть в данной совокупности n векторов $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ имеются такие m единичных векторов, которые можно сгруппировать в виде единичной матрицы m-го порядка. Не нарушая общности, можно считать такими векторами $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m$. Тогда единичная матрица $A = \| \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m \| = E$ является базисом. Так как $A^{-1} = E$, то получаем исходное базисное решение, равное $\mathbf{x} = \mathbf{B}$ и $\mathbf{x}_j = \mathbf{A}_j$,

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $x_i \geqslant 0$, $\mathbf{x}_j = (y_{1j}, y_{2j}, \ldots, y_{mj})$.

Для $j = 0, 1, 2, \ldots, n$ значение линейной формы z_j равно скалярному произведению j-го вектора на вектор-столбец, обозначенный через λ, а именно:

$$z_0 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i, \quad z_j = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i y_{ij}, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

где λ — m-мерный вектор и содержит компоненты вектора λ, соответствующие базисным векторам $\mathbf{A}_j$.

Элементы z и $z_j - \lambda_j$ помещаются на соответствующие места $(m+1)$-й строки таблицы. Разности $z_j - \lambda_j$ для векторов базиса всегда равны нулю. Если все разности $z_j - \lambda_j \leqslant 0$ для $j = 1, 2, \ldots, n$, то возможное решение $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ является оптимальным и минимальное значение линейной формы равно z_0.

Предположим теперь, что по крайней мере одна из разностей $z_j - \lambda_j > 0$. Перейдем к новому базисному решению, базис которого содержит $m-1$ векторов первоначального базиса $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m$. В качестве вектора, вводимого в базис, теоретически можно выбрать любой вектор, соответствующее значение разности $z_j - \lambda_j$ для которого положительно.

Число шагов, необходимых для получения оптимального решения, может быть уменьшено, если ввести в базис такой вектор $\mathbf{A}_j$ с $z_j - \lambda_j > 0$, который связан с максимально возможным на данном шаге уменьшением значения линейной формы. Вектор $\mathbf{A}_j$ в этом случае будет соответствовать

$$\max_j \rho_0 = (z_j - \lambda_j),$$

где ρ_0 определяется для каждого j из соотношения $\rho_0 = \min\limits_i \frac{x_i}{y_{ij}}$, где минимум берется по всем $y_{ij} > 0$.

Если число индексов j, для которых $z_j - \lambda_j > 0$, велико, применение вышеуказанного правила затруднительно. Более простой критерий для выбора вектора, подлежащего введению в базис, состоит в определении одного из векторов, соответствующих $\max\limits_j (z_j - \lambda_j)$.

Практика показывает, что переход к оптимальному решению осуществляется в среднем за $2 \min \{n, m\}$ итераций.

В дальнейшем мы будем пользоваться вторым критерием. Положим, что

$$\max_j (z_j - \lambda_j) = z_k - \lambda_k > 0.$$

Тогда вектор $\mathbf{A}_k$ подлежит введению в новый базис.

Подсчитаем теперь

$$\rho_0 = \min_i \frac{x_i}{y_{ik}} \quad \text{для} \quad y_{ik} > 0 \quad (i > 0).$$

Если все $y_{ik} \leqslant 0$, может быть найдено решение со сколь угодно малым значением линейной формы. Наши вычисления тогда заканчиваются.

Допустим теперь, что некоторое $y_{ik} > 0$ и

$$\rho_0 = \min_i \frac{x_i}{y_{ik}} = \frac{x_l}{y_{bk}}.$$

Вектор $\mathbf{A}_l$ тогда следует исключить из базиса. Новое решение будет обладать базисом, состоящим из векторов

$\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_{l-1}, \mathbf{A}_{l+1}, \ldots, \mathbf{A}_m, \mathbf{A}_k$. Займемся вычислением нового возможного решения и разложением векторов, не входящих в его базис, по векторам базиса.

Поскольку первоначальный базис $(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \ldots \mathbf{A}_m) = E$, то

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}_1 x_1 + \ldots + \mathbf{A}_l x_l + \ldots + \mathbf{A}_m x_m \tag{18}$$

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{A}_1 y_{1k} + \mathbf{A}_l y_{lk} + \ldots + \mathbf{A}_m y_{mk} \tag{19}$$

и

$$\mathbf{A}_j = \mathbf{A}_1 y_{1j} + \mathbf{A}_l y_{lj} + \ldots + \mathbf{A}_m y_{mj}. \tag{20}$$

Из (19)

$$\mathbf{A}_l = \frac{1}{y_{lk}} (\mathbf{A}_k - \mathbf{A}_1 y_{1k} - \ldots - \mathbf{A}_m y_{mk}). \tag{21}$$

Подставим выражение для A_l в (18), получаем

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}_1 x_1 + \ldots + x_l \left[\frac{1}{y_{lk}} (\mathbf{A}_k - \mathbf{A}_1 y_{1k} - \ldots - \mathbf{A}_m y_{mk})\right] + \ldots$$
$$\ldots + A_m x_m$$

или

$$\mathbf{B} = \left(x_1 - \frac{x_l}{y_{lk}} y_{1k}\right) \mathbf{A}_1 + \ldots + \frac{x_l}{y_{lk}} \mathbf{A}_k + \ldots$$
$$\ldots + \left(x_m - \frac{x_l}{y_{lk}} y_{mk}\right) \mathbf{A}_m.$$

Таким образом, новое решение $\mathbf{X}' = (x'_1, \ldots, x'_k, \ldots, x'_m$ $x'_i \geqslant 0$, определяемое соотношением

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}_1 x'_1 + \ldots + \mathbf{A}_k x'_k + \ldots + \mathbf{A}_m x'_m,$$

вычисляется по формулам

$$\left.\begin{aligned} x'_i &= x_i - y_{ik} \frac{x_l}{y_{lk}}, \quad (i = 1, 2, \ldots, l-1, l+1, \ldots, m) \\ x'_k &= \frac{x_l}{y_{lk}} \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Аналогично, подставляя (21) в (20), получаем разложение каждого вектора $\mathbf{A}_j$, не входящего в базис нового решения, по векторам этого базиса

$$\mathbf{A}_j = \mathbf{A}_1 y'_{1j} + \ldots + \mathbf{A}_k y'_{kj} + \ldots + \mathbf{A}_m y'_{mj},$$

где

$$\left.\begin{aligned} y'_{ij} &= y_{ij} - y_{ik}\frac{y_{lj}}{y_{lk}}, \qquad (i \neq l) \\ y'_{kj} &= \frac{y_{lj}}{y_{lk}} \end{aligned}\right\}. \tag{23}$$

Поскольку $z'_j - \lambda_j = \lambda_1 y'_{1j} + \ldots + \lambda_k y'_{kj} + \ldots + \lambda_m y'_{mj} - \lambda_j$, непосредственное применение формул (23) дает

$$z'_j - \lambda_j = z_j - \lambda_j - (z_k - \lambda_k)\frac{y_{lj}}{y_{lk}}.$$

Аналогично, подставляя выражение для x' из (22) в соотношение

$$z'_0 = \lambda_1 x'_1 + \ldots + \lambda_k x'_k + \ldots + \lambda_n x'_m.$$

получаем

$$z'_0 = z_0 - (z_k - \lambda_k)\cdot\frac{x_l}{y_{rk}}.$$

где

$$x'_l = y'_{i0} \qquad z'_0 = y'_{m+1,0}$$
$$z'_j - \lambda'_j = y'_{m+1,j}.$$

Заметим теперь, что для получения нового решения $\mathbf{X}'$, новых векторов $\mathbf{x}'_j$ и разностей $z'_j - \lambda'_j$, каждый элемент симплексной таблицы I для строк $i = 1, \ldots, m+1$ и столбцов $j = 0, 1, \ldots, n$ преобразуется по общим формулам;

$$\boxed{\begin{aligned} y'_{ij} &= y_{ij} - y_{ik}\frac{y_{rj}}{y_{rk}}, \qquad (i \neq r) \\ y'_{rj} &= \frac{y_{rj}}{y_{rk}}, \end{aligned}} \tag{24}$$

Формулы (24) применяются ко всем элементам вычислительной таблицы, включая столбец **B** и $(m+1)$-ю строку. Преобразование, осуществляемое указанными формулами (24), эквивалентно преобразованию по методу последовательного исключения (§ 16), где за ведущий элемент принимается y_{rk}.

§ 33. Примеры определения оптимального решения

Пример 1. Пусть дана система неравенств

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leqslant 15 \\ 5x_1 + 2x_2 \leqslant 10 \end{cases}$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0.$$

Требуется найти максимальное значение линейной формы

$$z_{\max} = 5x_1 + 3x_2.$$

Решение. В неравенстве введем дополнительные переменные x_3, $x_4 \geqslant 0$, получим

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 15 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 10 \end{cases}$$

В системе уравнений значения векторов будут следующие:

$$\mathbf{A}_1 = \left\| \begin{matrix} 3 \\ 5 \end{matrix} \right\|, \quad \mathbf{A}_2 = \left\| \begin{matrix} 5 \\ 2 \end{matrix} \right\|, \quad \mathbf{A}_3 = \left\| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right\|, \quad \mathbf{A}_4 = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right\|, \quad \mathbf{B} = \left\| \begin{matrix} 15 \\ 10 \end{matrix} \right\|$$

Коэффициенты при дополнительных переменных x_3 и x_4 составляют единичную матрицу. Это означает, что уже имеется исходное базисное решение с базисом $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_4$. Дополнительные переменные имеют в линейной форме нулевое значение. В самом деле

$$z = 5x_1 + 3x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4.$$

Поэтому для этого базисного решения $\lambda_{Бj} = (0,\ 0)$.
Кроме того, вектор свободных членов $\mathbf{B} = \| 15,\ 10 \|$, $z = 0$, $z_j - \lambda_j = -\lambda_j$.

Теперь закончена подготовительная работа к составлению первой симплексной таблицы.

Первый шаг. Заполним клетки таблицы соответствующими числами. В последней клетке столбца «базисные векторы» в индексной строке запишем $z_j - \lambda_j$ первый элемент в этой строке будет z.

Очевидно, что исходное базисное решение не является оптимальным: два элемента из индексной строки

Таблица I

$\lambda_{Б_j}$ базисных векторов	Базисные векторы $A_{Б_j}$	Вектор свободных членов B	5	3	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4
0	A_3	15	3	5	1	0
0	A_4	10	5	2	0	—1
$z_j - \lambda_j$		0	—5	—3	0	0

Таблица II

$\lambda_{Б_j}$ базисных векторов	Базисные векторы $A_{Б_j}$	Вектор свободных членов B	5	3	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4
0	A_3	9	0	3,8	1	—0,6
5	A_1	2	1	0,4	0	0,2
$z_j - \lambda_j$		10	0	—1	0	1

(—5 и —3) отрицательные. Минимальное значение из них есть $z_1-\lambda_1=-5$. Поэтому вектор A_1 будет выведен в столбец «базисные векторы» в следующем шаге.

Второй шаг. Итак, ключевым столбцом является вектор A_1 (в первой таблице показан в рамке), который вводится в базис на втором шаге. Теперь определим ключевую строку, которая выводится из базиса и место которой займет вектор A_1. Для этого воспользуемся формулой

$$\frac{y_{r0}}{y_{rk}} = \min_i \left\{ \frac{y_{i0}}{y_{ik}}, \quad y_{ik} > 0 \right\}.$$

$\lambda_{Б_j}$ базисных векторов	Базисные векторы $A_{Б_j}$	Вектор свободных членов B	5	3	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4
3	A_2	2,368	0	1	0,2632	–0,1579
5	A_1	1,053	1	0	–0,1053	0,2632
$z_j - \lambda_j$		12,87	0	0	0,4632	0,8421

Оба элемента: $y_{11} = 3$ и $y_{21} = 5$ положительны. Поэтому можно разделить на них соответствующие элементы вектора свободных членов; минимальное значение из отношений

$$\frac{y_{10}}{y_{11}} = \frac{15}{3} = 5 \text{ и } \frac{y_{20}}{y_{21}} = \frac{10}{5} = 2$$

будет 2, которое должно находиться в ключевой строке. Таким образом, ключевой строкой будет вектор A_4. Этот вектор базиса и заменяется на вектор A_1 (ключевую строку также заключим в рамку).

Заметим, что y_{10} находится в столбце «свободные члены» на той же строке, что и y_{11}, а y_{20} там, где y_{21}. Разрешающим элементом будет $y_{rk} = y_{21} = 5$.

Теперь необходимо вычислить таблицу для нового базисного решения.

В первую очередь необходимо найти элементы ключевой строки в соответствии с формулой

$$y'_{rj} = \frac{y_{rj}}{y_{rk}}, \quad \text{для всех } j$$

(новая r-я строка получается делением каждого элемента прежней r-й строки на разрешающий элемент $y_{rk} = y_{21} = 5$).

Например,

$$y'_{20} = \frac{y_{20}}{y_{21}} = \frac{10}{5} = 2; \quad y'_{22} = \frac{2}{5} = 0{,}4; \quad y'_{24} = \frac{1}{5} = 0{,}2.$$

Остающиеся две строки находятся по формуле

$$y'_{ij} = y_{ij} - \frac{y_{ik}}{y_{rk}} y_{rj} \quad \text{для} \quad j,\ i = 1,\ 2, \ldots,\ m+1,\quad i \neq r.$$

Для вектора-строки $\mathbf{A}_3$ имеем

$$\frac{y_{1k}}{y_{rk}} = \frac{y_{11}}{y_{21}} = \frac{3}{5} = 0{,}6 \quad \text{и} \quad y'_{1j} = y_{1j} - 0{,}6 y_{2j}.$$

В частности

$$y'_{10} = 15 - 0{,}6 \cdot 10 = 9; \quad y'_{12} = 5 - 0{,}6 \cdot 2 = 3{,}8;$$

$$y'_{14} = 0 - 0{,}6 \cdot 1 = -0{,}6.$$

Для вектора-строки $z_j - \lambda_j$ имеем

$$\frac{y_{3k}}{y_{2k}} = -1 \quad \text{и} \quad y'_{3j} = y_{3j} + y_{2j}.$$

Отсюда

$$y'_{30} = 0 + 10 = 10; \; y'_{32} = 2 - 3 = -1; \; y'_{34} = 0 + 1 = 1.$$

Полученные данные заносятся во вторую симплексную таблицу (см. табл. II). Анализируя таблицу, устанавливаем, что новое базисное решение все еще не оптимально, так как $z_2 - \lambda_2 = -1 < 0$.

Третий шаг. В индексной строке $z_j - \lambda_j$ второй таблицы —1 единственная отрицательная величина. Следовательно, вектор-столбец $\mathbf{A}_2$ является ключевым столбцом и на следующем, третьем шаге вводится в новый базис.

Ключевая строка, которая должна быть выведена из базиса, определяется как минимальное значение отношений

$$\frac{y_{10}}{y_{12}} = \frac{9}{3{,}8}; \quad \frac{y_{20}}{y_{22}} = \frac{2}{0{,}4}.$$

Наименьшим числом является первое из этих отношений, которое входит в вектор $\mathbf{A}_3$. Таким образом, вектор $\mathbf{A}_3$ заменяется на $\mathbf{A}_2$. Теперь построим третью симплексную таблицу. Заметим, что r-я строка — это первая строка (вектор $\mathbf{A}_3$) и сначала мы вычислим ее. Новая первая строка третьей таблицы определяется из 1-й строки второй таблицы путем деления каждого элемента 1-й строки второй таблицы на разрешающий элемент $y_{rk} = y_{12} = 3{,}8$.

Следовательно,

$$y'_{10} = \frac{9}{3{,}8} = 2{,}368; \quad y'_{13} = \frac{1}{3{,}8} = 0{,}2632;$$

$$y'_{14} = -\frac{0{,}6}{38} = -0{,}1579.$$

Вторая и третья строки находятся по формулам

$$y'_{ij} = y_{ij} - \frac{y_{ik}}{y_{rk}} y_{rj}; \quad \text{для всех, } j, \ i = 1, 2, \ldots, m+1; \ i \neq r.$$

Для второй строки

$$\frac{y_{2k}}{y_{rk}} = \frac{y_{22}}{y_{12}} = \frac{0{,}4}{3{,}8} = 0{,}1053 \text{ и } y'_{2j} = y_{2j} - 0{,}1053 y_{2j}.$$

В частности,

$$y'_{20} = 2 - 0{,}1053\,(9) = 1{,}053; \quad y'_{23} = 0 - 0{,}1053\,(1) = -0{,}1053;$$

$$y'_{24} = 0{,}2000 + 0{,}1053\,(0{,}6) = 0{,}2632.$$

Для третьей строки

$$\frac{y_{32}}{y_{12}} = -\frac{1}{3{,}8} = -0{,}2632; \quad y'_{3j} = y_{3j} + 0{,}2632 y_{1j}.$$

Следовательно,

$$y'_{30} = 10 + 0{,}2632\,(9) = 12{,}37; \quad y'_{33} = 0 + 0{,}2632\,(1) = 0{,}2632;$$

$$y'_{34} = 1 + 0{,}2632\,(-0{,}6) = 0{,}8421.$$

В третьей таблице имеем $z_j - \lambda_j \geqslant 0$ для каждого $\mathbf{A}_j$. Следовательно получено оптимальное решение. Оптимальное базисное решение имеет в базисе векторы $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$. Из столбца «базисные векторы» видно, что

$$x_1 = 1{,}053; \quad y_2 = 2{,}368; \quad z = 12{,}37.$$

Это точно такой же ответ, который был получен в § 30 графическим методом.

Пример 2. Пусть дана система линейных неравенств

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 \leqslant 20 \\ 2x_1 + 16x_2 + x_3 + x_4 \geqslant 4 \\ 3x_1 - x_2 - 5x_3 + 10x_4 \leqslant -10 \end{cases} \qquad (1)$$

$$x_1 \geqslant 0$$

$$x_2 \geqslant 0$$

$$x_3 \geqslant 0$$

$$x_4 \geqslant 0.$$

Требуется найти минимальное значение линейной формы, т. е.

$$z_{\min} = -2x_1 - x_2 - 4x_3 - 5x_4.$$

Как видно, это задача на нахождение минимума линейной формы. Ее можно привести к задаче на нахождение максимального значения линейной формы, как и в предыдущем примере. Для этого надо изменить знаки линейной формы:

$$z_{\max} = 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_4.$$

Рассмотрим теперь ограничения (1). Чтобы получить исходное базисное решение все свободные члены должны быть неотрицательными, т. е. $b_i \geqslant 0$. Поэтому третье неравенство системы (1) умножим на -1:

$$-3x_1 + x_2 + 5x_3 - 10x_4 \geqslant 10.$$

Введя дополнительные переменные, получим систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 + x_5 = 20 \\ 2x_1 + 16x_2 + x_3 + x_4 - x_6 = 4 \\ -3x_1 + x_2 + 5x_3 - 10x_4 - x_7 = 10. \end{cases}$$

Первый шаг. В полученной системе единичной матрицы нет. Здесь мы имеем один столбец e_1 (дополнительной переменной x_5) единичной матрицы. Добавим еще два столбца $Q_1 = e_2$, $Q_2 = e_3$ и две искусственные переменные x_{a1}, x_{a2}.

Теперь можно построить первую симплексную таблицу (табл. IV). Исходная базисная матрица есть $\mathbf{E} = (\mathbf{A}_5, \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2)$, так что $\lambda_{Б\,j} = (О, -M_1 - M)$ Для этой таблицы

$$z_j - \lambda_j = \lambda_{Бj}\mathbf{A}_j - \lambda_j, \quad z' = \lambda_{Бj} b_i;$$

поэтому, например,

$$z_3 - \lambda_3 = -M - 5M - 4 = -6M - 4;$$

$$z' = -4M - 10M = -14M.$$

Два вектора $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$ имеют $z_j - \lambda_j < 0$. Наименьшее значение есть $z_2 - \lambda_2 = -17M - 1$. Поэтому $\mathbf{A}_2$ вводится в базис. Поскольку все $y_{i2} > 0$, то строку базиса, которую надо заменить на $\mathbf{A}_2$, находят делением на y_{i2} свободных членов и выбором минимального отношения из них:

$$\frac{y_{10}}{y_{12}} = \frac{20}{3}; \quad \frac{y_{20}}{y_{22}} = \frac{4}{16}; \quad \frac{y_{30}}{y_{32}} = \frac{10}{1}.$$

Наименьшее значение есть $\frac{y_{20}}{y_{22}}$ поэтому вторая строка базиса заменяется на $\mathbf{A}_2$, т. е. вектор $\mathbf{Q}_1$ выводится из базиса. Ключевой столбец и ключевую строку заключим в рамки.

Второй шаг. Составим новую симплексную таблицу.

Проиллюстрируем применение формулы векторного преобразования.

Сначала вычислим Ф. Поскольку $k = 2$, $r = 2$, $y_{rk} = y_{22} = 16$, то

$$Ф = \left\| -\frac{3}{16}, \ \frac{1}{16} - 1, \ -\frac{1}{16}, \ \frac{17M + 1}{16} \right\| =$$

$$= \| -0{,}1875; \quad -0{,}9375; \quad -0{,}0625; \quad 1{,}0625M + 0{,}0625 \|$$

Новые векторы-строки определяем путем нахождения Ф.

Например для y_0 имеем

$$y_{r0} = y_{20} = x_{52} = 4 \text{ и } y_0' = \| 20; \ 4; \ 10; \ -14M \| +$$

$$+ 4 \| -0{,}1875; -0{,}9375; -0{,}0625; 1{,}0625M + 0{,}0625 \| =$$

$$= \| 19{,}25; \quad 0{,}2500; \ 9{,}750; \ -9{,}750M + 0{,}250 \|.$$

Таблица IV

$\lambda_{Б_j}$ Базисных векторов	Базисные векторы $A_{Б_j}$	Вектор свободных членов B	2	1	4	5	0	0	0	$-M$	$-M$
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	Q_1	Q_2
0	A_5	20	1	3	2	5	1	0	0	0	0
$-M$	Q_1	4	2	16	1	1	0	-1	0	1	0
$-M$	Q_2	10	-3	1	5	-10	0	0	-1	0	1
$z_j-\lambda_j$		$-14M$	$M-2$	$-17M-1$	$-6M-4$	$9M-5$	0	M	M	0	0

Таблица V

$\lambda_{Б_j}$ базисных векторов	Базисные векторы $A_{Б_j}$	Вектор свободных членов B	2 A_1	1 A_2	4 A_3	5 A_4	0 A_5	0 A_6	0 A_7	$-M$ Q_1	$-M$ Q_2
0	A_5	19,25	0,6250	0	1,813	4,812	1	0,1875	0	—0,1875	0
1	A_2	0,2500	0,1250	1	0,06250	0,06250	0	—0,06250	0	0,06250	0
$-M$	Q_2	9,750	—3,125	0	4,938	—10,06	0	0,06250	—1	—0,06250	1
$z_j-\lambda_j$		$-9,750M$ $+0,2500$	$3,125M$ $-1,875$	0	$-4,938M$ $-3,938$	$10,06M$ $-4,938$	0	$-0,0625M$ $-0,06250$	M	$1,0625M$ $+0,06250$	0

Таблица VI

$\lambda_{Б_j}$ базисных векторов	Базисные векторы $A_{Б_j}$	Вектор свободных членов **B**	2	1	4	5	0	0	0	$-M$	$-M$
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	Q_1	Q_2
0	A_5	15,67	1,772	0	0	8,506	1	0,1646	0,3671	—0,1646	—0,3671
1	A_2	0,1266	0,1646	1	0	0,1899	0	—0,06329	0,01266	0,06329	—0,0126
4	A_3	1,975	—0,6329	0	1	—2,038	0	0,01266	—0,2025	—0,01266	0,2025
$z_j—\lambda_j$		8,025	—4,367	0	0	—12,96	0	—0,01266	—0,974	—	—

Таблица VII

$\lambda_{Б_j}$ базисных векторов	Базисные векторы $A_{Б_j}$	Вектор свободных членов **B**	2	1	4	5	0	0	0	$-M$	$-M$
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	Q_1	Q_2
0	A_5	10,00	—5,600	—44,80	0	0	1	3,000	—0,2000	—3,000	0,2000
1	A_4	0,6667	0,8667	5,267	0	1	0	—0,3333	0,06667	0,3333	—0,06667
4	A_3	3,333	1,133	10,73	1	0	0	—0,6667	—0,06667	0,6667	0,06667
$z_j—\lambda_j$		16,67	6,867	68,27	0	0	0	—4,3333	0,06667	—	—

Таблица VIII

$\lambda_{Б_j}$ базисных векторов	Базисные векторы $A_{Б_j}$	Вектор свободных членов B	2	1	4	5	0	0	0	$-M$	$-M$
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	Q_1	Q_2
0	A_6	3,333	—1,867	—14,93	0	0	0,3333	1	—0,06667	—1	0,06667
5	A_4	1,778	0,2444	0,2883	0	1	0,1111	0	0,04444	0	0,04444
4	A_3	5,556	—0,1111	0,7778	1	0	0,2222	0	—0,1111	0	0,1111
$z_j—\lambda_j$		31,11	—1,222	3,556	0	0	1,444	0	0,2222	—	—

Таблица IX

$\lambda_{Б_j}$ базисных векторов	Базисные векторы $A_{Б_j}$	Вектор свободных членов B	2	1	4	5	0	0	0	$-M$	$-M$
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	Q_1	Q_2
0	A_6	16,91	0	—12,77	0	7,636	1,182	1	0,2727	—1	—0,2727
2	A_1	7,273	1	1,182	0	4,091	0,4545	0	0,1818	0	—0,1818
4	A_3	6,364	0	0,9091	1	0,4545	0,2727	0	—0,09091	0	0,09091
$z_j—\lambda_j$		40,00	0	5,000	0	5,000	2,000	0	0	—	—

Это является столбцом **B** новой таблицы. Другие столбцы находятся таким же образом. (Ф используется для определения каждого нового столбца).

Третий шаг. При следующей итерации, как видно из таблицы V, вектор $\mathbf{A}_3$ вводится в базис, а третья строка, т. е. $\mathbf{Q}_2$ выводится из базиса. На этом этапе выводим последний искусственный вектор и поэтому в таблице VI M-элементы исчезают в $z', z_j - \lambda_j$.

Для этой итерации $k=3$, так что

$$y_{rk} = y_{33} = 4{,}938$$

и

$$\Phi = \left\| -\frac{1{,}813}{4{,}938}; \quad -\frac{0{,}06250}{4{,}938}; \quad \frac{1}{4{,}938} - 1; \quad \frac{4{,}938M + 3{,}938}{4{,}938} \right\| =$$

$$= \| -0{,}3671; \quad -0{,}01266; \quad -0{,}7975; \quad M + 0{,}7974 \|.$$

Для того чтобы увидеть как исчезает M, предположим, что вычислен y_4'. Поскольку

$$y_{r4} = y_{34} = -10{,}06,$$

$$y_4' = \| 4{,}812; \ 0{,}06250; \ -10{,}06; \ 10{,}06M - 4{,}938 \| -$$

$$- 10{,}06 \| -0{,}3671; \ -0{,}01266; \ -0{,}7975; \ M + 0{,}7974 \| =$$

$$= \| 8{,}506; \ 0{,}1899; \ -2{,}038; \ -12{,}96 \|,$$

что представлено в таблице VI.

В общем, нет необходимости включать столбцы в таблицы для искусственных векторов. В настоящем примере искусственные векторы преобразуются при каждой итерации для последующего их использования в задачах.

Мы получим $z'_{\max} = 40{,}00$; $z'_{\min} = -40{,}00$. Оптимальный базис включает $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_6$. Значения базисных переменных

$$x_1 = 7{,}273; \quad x_3 = 6{,}364; \quad x_6 = 16{,}91.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Дана система уравнений

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 & = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 & = 2 \\ x_1 + x_2 + x_5 & = 5 \end{cases}$$

и $x_j \geqslant 0$ $(j = 1, 2, 3, 4, 5)$.

Найти $z_{\min} = x_2 - x_1$.

2. Дана система уравнений

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \end{cases}$$

и $x_j \geqslant 0$ $(j = 1, 2, 3, 4, 5)$.

Найти $z_{\min} = x_2 - x_1$.

3. Дана система уравнений

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 8 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \end{cases}$$

и $x_j \geqslant 0$ $(j = 1, 2, 3, 4, 5)$.

Найти $z_{\min} = x_2 - x_1$.

4. Дана система уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \end{cases}$$

и $x_j \geqslant 0$ $(j = 1, 2, 3, 4, 5)$.

Найти $z_{\min} = x_2 - x_1$.

5. Дана система уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \end{cases}$$

и $x_j \geqslant 0$ $(j = 1, 2, 3, 4, 5)$.

Найти $z_{\min} = x_2 - x_1$.

Показать, что в данной задаче линейная форма не имеет конечного минимального значения.

6. Дана система уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_4 - 2x_6 = 5 \\ x_2 + 2x_4 - 3x_5 + x_6 = 3 \\ x_3 + 2x_4 - 5x_5 + 6x_6 = 5 \end{cases}$$

и $x_j \geqslant 0$ $(j = 1, 2, \ldots, 6)$.

Найти $z_{\min} = x_1 + x_2 + x_3$.

7. Дана система уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + 6x_6 = 9 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_6 = 2 \\ x_1 - 2x_3 + x_5 + 2x_6 = 6 \end{cases}$$

$$\text{и } x_j \geqslant 0 \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ 6).$$

Найти $z_{\min} = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6$.

8. Дана система уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \end{cases}$$

$$\text{и } x_j \geqslant 0 \quad (j = 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Найти $z_{\min} = 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4$.

9. Дана смешанная система из уравнений и неравенств

$$\begin{cases} 5x_2 - x_3 - x_4 + x_5 \geqslant 0 \\ 2x_1 + 2x_3 - x_4 + x_5 \geqslant 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_4 + x_5 \geqslant 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\text{и } x_j \geqslant 0 \quad (j = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5).$$

Найти $z_{\min} = x_4 - x_5$.

10. Дана система линейных уравнений и одного неравенства

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$$

$$\text{и } x_j \geqslant 0 \quad (j = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

Найти $z_{\min} = -3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4$.

11. Дана система уравнений

$$\begin{cases} 3x_3 + x_5 + x_6 = 6 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 10 \\ x_1 + x_6 = 0 \\ x_3 + x_6 + x_7 = 6 \end{cases}$$

$$\text{и } x_j \geqslant 0 \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ 7).$$

Найти $z_{\min} = x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 - x_6 - 3x_7$.

12. Дана система уравнений

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases} \quad \text{и } x_j \geqslant 0 \ (j = 1,\ 2,\ 3).$$

Найти $z_{\min} = x_1 - 2x_2 + 3x_3$.

13. Дана система неравенств:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \leqslant 12 \\ x_1 + x_4 \leqslant 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_5 \leqslant 20 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 - 2x_5 \leqslant 10 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 \leqslant 24 \end{cases}$$

$$\text{и } x_j \geqslant 0 \qquad (j = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5).$$

Найти $z_{\min} = -2x_1 - 3x_2 + 2x_4 + 3x_5$.

14. Дана система неравенств

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_6 + x_7 + x_9 - x_{10} - 2x_{11} - x_{12} + 2x_{13} + x_{15} \leqslant 12 \\ x_1 + x_4 - x_6 + x_7 + 2x_8 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{14} \leqslant 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_5 + x_6 + 2x_7 - x_8 + x_9 - 2x_{10} + 2x_{12} - 2x_{13} + 2x_{15} \leqslant 20 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 + x_6 - x_8 + 2x_{10} - 2x_{11} - x_{12} + 2x_{13} \leqslant 10 \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_{10} + 2x_{11} + 2x_{12} + x_{14} - 2x_{15} \leqslant 24 \end{cases}$$

$$\text{и } x_j \geqslant 0 \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ 15).$$

Найти $z_{\min} = -2x_1 - 3x_2 + 2x_4 + 3x_5 - x_7 - x_8 + 2x_9 - x_{10} - 3x_{11} + 2x_{12} - x_{13} + x_{14} + 2x_{15}$.

15. Дана система

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 - x_5 + 3x_6 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 - \frac{1}{2} x_5 + x_6 = 0 \end{cases}$$

$$\text{и } x_j \geqslant 0 \qquad (j = 1,\ 2, \ldots, 6).$$

Найти $z_{\min} = -x_3 - x_4 - 3x_5 + 8x_6 + 3$.

16. Дана система

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 7x_3 + 2x_4 = \frac{7}{2} \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 = \frac{3}{2} \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$$

$$\text{и } x_j \geqslant 0 \qquad (j = 1;\ 2,\ 3,\ 4).$$

Найти $z_{\min} = 5x_1 - 10x_2 + 7x_3 - 3x_4$.

17. Дана система неравенств

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \leqslant 3 \\ x_1 + x_2 \geqslant 1 \\ -3x_1 + x_2 \leqslant 3 \\ -3x_1 - 3x_2 \leqslant 2 \\ x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Найти $z_{\min} = -x_1 + 2x_2$.

18. Дана система уравнений

$$\begin{cases} x_1 \qquad - x_4 \qquad - 2x_6 = 5 \\ x_2 \quad + 2x_4 - 3x_5 + x_6 = 3 \\ x_3 + 2x_4 - 5x_5 + 6x_6 = 5 \\ \text{и } x_j \geqslant 0 \; (j = 1,\ 2, \ldots,\ 6) \end{cases}$$

Найти $z_{\min} = x_1 + x_2 + x_3$.

Задачу решить симплексным методом.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что такое симплекс?
2. В чем состоит идея симплексного метода?
3. Почему название «метод последовательного улучшения имеющегося плана» выражает экономическую сторону симплексного метода?
4. Что такое допустимое решение? Базисное решение? Оптимальное решение?
5. Что такое план? Опорный план? Оптимальный план?
6. Из каких шагов состоит симплексный метод для нахождения оптимального решения?
7. Как найти первое базисное решение?
8. Как перейти от первого ко второму базисному решению?
9. В чем состоит *М*-способ отыскания первого базисного решения?
10. Для чего составляются симплексные таблицы?
11. Что такое индексная строка?
12. Что такое ключевая строка? Ключевой столбец? Разрешающий элемент?

Глава XII

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ, РЕШАЕМЫЕ МЕТОДАМИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В настоящей главе рассматриваются задачи линейного программирования, решаемые графическим и симплексным методами. Некоторые из этих задач решены полностью, другие доведены до выражения их условий в канонической форме или до указаний, каким методом целесообразно решить задачу.

Задача 1. Цех для производства двух видов продукции использует четыре группы оборудования, в количествах указанных в таблице:

Группа производственного оборудования	Необходимое количество единиц оборудования на один комплект		Количество оборудования в группе
	продукции I	продукции II	
A	2	2	12
B	1	2	8
C	4	0	16
D	0	4	12
чистый доход (в тыс. руб. на 1 шт.)	2	3	—

По техническим условиям (или при данной технологии) на производство одной штуки продукции I необходимо занять соответственно 2, 1, 4, 0 единиц указанных групп оборудования. Для производства 1 шт. продукции II таких единиц будет соответственно 2, 2, 0 и 4. (Коэффициент «нуль» означает, что при производстве той или иной продукции данное оборудование не применяется).

Обозначим количество комплектов продукции I через x_1, а продукции II через x_2. Пусть каждая единица продукции I дает предприятию 2 тыс. руб. чистого дохода, а II — 3 тыс. руб. Тогда максимальное производство продукции в денежном выражении составит

$$z_{max} = 2x_1 + 3x_2.$$

Найти, сколько единиц каждого вида продукции должно производить предприятие, чтобы получить максимально возможный уровень валовой продукции цеха в денежном выражении.

Решение. Условия, ограничивающие производственные мощности цеха наличным оборудованием, запишем при помощи следующих неравенств:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leqslant 12 & (a) \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 8 & (b) \\ 4x_1 \leqslant 16 & (c) \\ 4x_2 \leqslant 12 & (d). \end{cases} \qquad (1)$$

Найдем неотрицательные значения x_1 и x_2, удовлетворяющих неравенствам данной системы (1) и обращающих в максимум линейную форму

$$z_{max} = 2x_1 + 3x_2. \qquad (2)$$

Неравенства системы (1) показывают, каковы предельные возможности использования каждого вида наличного оборудования. Неотрицательные значения x_1 и x_2, удовлетворяющие (1), можно определить графически.

В системе декартовых координат рассмотрим первый квадрант, поскольку x_1 и x_2 неотрицательны (рис. 49). Каждое из неравенств системы (1) представляет собой, как известно, полуплоскость. Построим прямые, соответствующие указанным неравенствам (a), (b), (c) и (d). Пересечение полуплоскостей образует выпуклый многоугольник $OABCD$, множество точек которого удовлетворяет системе (1).

Установим, какая точка этого многоугольника соответствует наибольшей стоимости производимой продукции. Рассмотрим семейство параллельных прямых вида $2x_1+3x_2=z$, где z — неопределенная величина, которая, однако, сохраняет постоянное значение для каждой из этих прямых. Такие прямые определяют соответствующие уровни доходности.

Поскольку многоугольник является выпуклым, достаточно проверить значения z для его вершин;

$$A(4,0),\ B(4,2),\ C(2,3) \text{ и } D(0,3).$$

Получим:

$$z_A = 2\cdot 4 + 3\cdot 0 = 8;$$

$$z_B = 2\cdot 4 + 3\cdot 2 = 14;$$

$$z_C = 2\cdot 2 + 3\cdot 3 = 13;$$

$$z_D = 2\cdot 0 + 3\cdot 3 = 9.$$

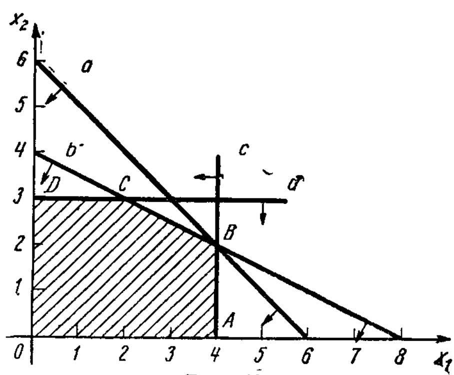

Рис. 49

Следовательно, $z_{max} = 14$, т. е. максимальное значение равно 14 тыс. руб., что определяется точкой B.

Задача 2. Решить предыдущую задачу, оставив все данные задачи без изменения, кроме одного, а именно, что продукция II приносит чистого дохода не 3, а 4 тыс. руб. Тогда линейная форма будет

$$z_{max} = 2x_1 + 4x_2.$$

Указания к решению. Возможные решения задачи будут определяться тем же многоугольником, так как система ограничений осталась та же. Прямые, определяющие уровни доходности, будут теперь, однако отличаться от прямых, изображенных на рис. 49. Прямые линии уровней доходности, соответствующие новым условиям, отражает рис. 50. На нем видно, что теперь имеется не одна оптимальная точка, как это было в предыдущей задаче, а совокупность точек, расположенных на отрезке между точками B и C. Каждой из этих точек соответствует максимальный чистый доход, равный 16 тыс. руб.

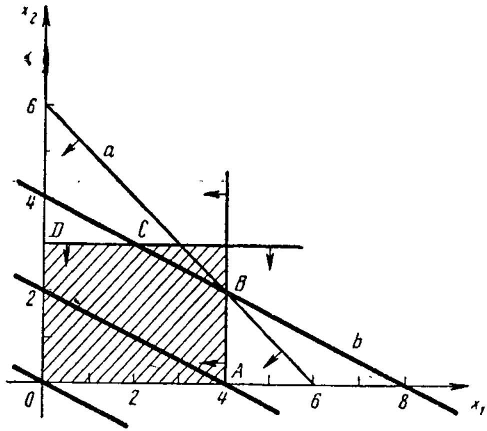

Рис. 50

Задача 3. Для производства двух видов продукции A и B предприятие использует 4 группы оборудования (I, II, III, IV). На производство 1 шт. продукции A требуется занять в течение единицы времени (например, в течение часа, смены) 1; 0,5; 2 и 0 единиц соответственно I, II, III, IV оборудования, а на производство 1 шт. продукции B требуется 1; 1; 0 и 2 единицы I, II, III, IV оборудования. Имеется оборудования по группам: I—18, II—12, III—24, IV—18 единиц. Предприятие получает с 1 шт. продукции A 4 руб. чистого дохода и 6 руб. с 1 единицы продукции B.

Сколько единиц каждого вида продукции должно производить предприятие, чтобы получить наибольшую величину чистой прибыли?

Отв. 12 ед. продукции A; 6 ед. B; $z_{\max}=84$ руб.

Задача 4. В опытном хозяйстве установили, что откорм животных выгоден только тогда, когда каждое животное будет получать в дневном рационе не менее 6 ед. питательного вещества A, не менее 12 ед. вещества B и не менее 4 ед. вещества C. Для кормления животных используется два вида корма. В нижеследующей таблице показано, сколько единиц каждого питательного вещества содержит 1 *кг* каждого вида корма:

Питательные вещества	Корм I	Корм II
A	2	1
B	2	4
C	0	4

Известно, что цена корма I равна 5 коп. за 1 *кг*, а цена корма II — 6 коп. за 1 *кг*.

Требуется установить, какое количество корма каждого вида необходимо расходовать ежедневно, чтобы затраты на него были минимальными.

Решение. Обозначим необходимое количество корма I — через x_1, корма II — через x_2.

Из условий задачи составим систему неравенств:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geqslant 6 \\ 2x_1 + 4x_2 \geqslant 12 \\ 4x_2 \geqslant 4. \end{cases}$$

$$x_1 \geqslant 0$$

$$x_2 \geqslant 0$$

Требуется найти минимум линейной формы

$$z_{\min} = 5x_1 + 6x_2.$$

Построим прямые по их уравнениям, соответствующим каждому из неравенств системы:

$$2x_1 + x_2 = 6,$$

$$2x_1 + 4x_2 = 12,$$

$$4x_2 = 4.$$

Все допустимые решения задачи определяются ограничивающими линиями. В рассматриваемой задаче заштрихованная площадь лежит поверх трех пересекающихся прямых, потому что в этом случае левые части неравенства не меньше правых частей.

Оптимальное решение (минимальные затраты) дает точка с координатами (2, 2). Следовательно, целесообразнее приобретать по 2 *кг* обоих кормов. При таком решении затраты составят

$$z_{\min} = 5 \cdot 2 + 6 \cdot 2 = 22 \text{ (коп)}.$$

Задача 5. Для изготовления столов и шкафов употребляются два вида древесины. Расход древесины каждого вида на каждое изделие задан следующей таблицей (в куб. *м*):

Изделие	Древесина	
	I вид	II вид
стол	0,15	0,2
шкаф	0,2	0,1

Доход мастерской от производства одного стола составляет 12 руб., а шкафа — 15 руб. Определить, сколько столов и сколько шкафов должна изготовить мастерская, чтобы обеспечить наивысшую рентабельность их производства, если в ее распоряжении имеется 60 куб. *м* древесины первого вида и 40 куб. *м* древесины второго вида.

Указания к решению. Обозначим через x_1 и x_2 соответственно то количество столов и шкафов, которое следует изготовить мастерской. Из условий задачи следует, что запасов древесины ограничено. Эти условия составят систему неравенств

$$\begin{cases} 0{,}15x_1 + 0{,}2x_2 \leqslant 60 \\ 0{,}2x_1 + 0{,}1x_2 \leqslant 40 \end{cases} \qquad (3)$$

Требуется найти неотрицательные значения переменных x_1 и x_2, удовлетворяющих условиям системы (3) и обращающих в максимум линейную форму

$$z_{\max} = 12x_1 + 15x_2.$$

Задачу можно решить графическим методом и симплексным методом.

Перед тем, как начать решение задачи симплексным методом систему (3) следует привести к канонической форме. Имеем:

$$\begin{cases} 0,15x_1 + 0,2x_2 + x_3 = 60 \\ 0,2x_1 + 0,1x_2 + x_4 = 40 \\ x_3, x_4 \geqslant 0. \end{cases}$$

Найти

$$z_{\max} = 12x_1 + 15x_2.$$

Для проверки решения задачи ниже приводятся симплексные таблицы:

Таблица I

$\lambda_{Б_j}$ базисных векторов	Базисные векторы $A_{Б_j}$	Вектор свободных членов B	12 A_1	15 A_2	0 A_3	0 A_4
0	A_3	60	0,15	0,2	1	0
0	A_4	40	0,2	0,1	0	1
$z_1 - \lambda_1$		0	—12	—15	0	0

Таблица II

$\lambda_{Б_j}$ базисных векторов	Базисные векторы $A_{Б_j}$	Вектор свободных членов B	12 A_1	15 A_2	0 A_3	0 A_4
15	A_2'	300	0,75	1	5	0
0	A_4	10	0,125	0	—0,5	1
$z_2 - \lambda_2$		4500	—0,75	0	75	0

Таблица III

$\lambda_{Б_j}$ базисных векторов	Базисные векторы $A_{Б_j}$	Вектор свободных членов B	12	15	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4
15	A_2	240	0	1	8	6
12	A_1	80	1	0	—4	8
$z_3 - \lambda_3$		4560	0	0	72	6

Отв. $x_1 = 80$, $x_2' = 240$, $z_{max} = 4560$ руб.

Задача 6. В мастерской промартели освоили производство столов и тумбочек для торговой сети. Для их изготовления имеется два вида древесины: первого — 72 куб. *м* и второго — 56 куб. *м*. Расход каждого вида древесины на каждое изделие показан в следующей таблице (в куб. *м*):

Изделие	Древесина	
	I вид	II вид
Стол	0,18	0,08
Тумбочка	0,09	0,28

От производства одного стола промартель получает чистого дохода 1,1 руб. и одной тумбочки 70 коп.

Определить, сколько столов и тумбочек должна изготовить мастерская из имеющегося материала, чтобы обеспечить наибольший доход.

Отв. 350 столов и 1000 тумбочек, $z_{\max} = 455$ руб.

Задача 7. С вокзала можно отправлять ежедневно скорые и курьерские поезда. Вместимость вагонов и наличный парк вагонов на станции указаны в следующей таблице:

Типы вагонов		Багажные	Почтовые	Жесткие плац-картные	Купейные	Мягкие
Число вагонов в поезде	Курьерский	1	—	5	6	3
	Скорый	1	1	8	4	1
Вагон вмещает пассажиров	—	—	—	58	40	32
Наличный парк вагонов	—	12	8	81	70	27

Требуется выбрать такое соотношение между числом курьерских и скорых поездов, чтобы число пассажиров, которых можно отправить ежедневно, достигло максимума.

Отв. 5 курьерских и 7 скорых поездов, $z_{\max} = 7722$ пассажиров.

Задача 8. На рынок в город привозят одним видом транспорта картофель из трех колхозов по 4, 3 и 1 копейке за *кг* из первого, второго и третьего колхоза соответственно. На погрузку тонны картофеля ленточным транспортером требуется времени: в первом колхозе — 1 *мин*, во втором — 4 *мин*, в третьем — 3 *мин*. Чтобы продукт вовремя поступил на рынок, надо, чтобы на погрузку 12 *т*, потребных для города на каждый день, затрачивалось не более 40 *мин*. Сколько надо привозить на рынок картофеля из этих колхозов, чтобы общая стоимость картофеля на рынке была минимальной, если известно, что первый колхоз может ежедневно доставлять картофеля не более 10 *т*, второй не более 8 *т*, третий не более 6 *т*?

Отв. 1 *т*, 5 *т* и 6*т*; $z_{\min} = 250$ руб.

Задача 9. Цех выпускает три вида изделия, причём суточный плановый выпуск составляет 90 единиц изделия I, 70 — изделия II и 60 — III. Суточные ресурсы следующие: 780 единиц производственного оборудования (станки, машины и т. п.), 850 единиц сырья (металл и т. п.) и 790 единиц электроэнергии, расход которых на одно изделие представлен в таблице:

Ресурсы	Изделия		
	I	II	III
Оборудование	2	3	4
Сырье	1	4	5
Электроэнергия	3	4	2

Стоимость изделия I равна 8 руб., II — 7 руб., III—6 руб.

Сколько надо производить изделий (какого типа и в каком количестве), чтобы получить максимальную стоимость выпускаемых сверх плана изделий?

Указания к решению. Цех после выполнения плана по выпуску каждого изделия имеет возможность перевыполнить план и получить максимальный объем продукции в денежном выражении. Кажущееся оптимальное решение задачи за счет перевыполнения плана выпуска изделия I со стоимостью 8 руб. и изделия II — по 7 руб. за единицу не соответствует действительности.

Устанавливаем, что расход ресурсов на выполнение плановых заданий составляет:

а) оборудования $2 \cdot 90 + 3 \cdot 70 + 4 \cdot 60 = 630$,

б) сырья $1 \cdot 90 + 4 \cdot 70 + 5 \cdot 60 = 670$,

в) электроэнергии $3 \cdot 90 + 4 \cdot 70 + 2 \cdot 60 = 670$.

Следовательно, для перевыполнения плана остается 150 единиц оборудования, 180 — сырья и 120 — электроэнергии. Обозначив сверхплановое количество изделий первого типа x_1, второго x_2 и третьего x_3, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 150 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 180 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 120. \end{cases} \qquad (4)$$

Решение этой системы дает приближенные значения $x_1=7$; $x_2=12{,}3$; $x_3=24{,}7$. Это означает, что полностью израсходовав все ресурсы, цех изготовит 7 единиц изделия I; 12,3 изделия II и 24,7 — III, что составит в денежном выражении

$$7\cdot 8+12\cdot 3\cdot 7+24{,}7\cdot 6=290{,}3 \text{ руб.}$$

Если систему (4) представить в виде системы неравенств, то это будет означать, что расход средств не должен превышать, но вместе с тем может быть и меньше имеющегося наличия.

Тогда задача будет состоять в следующем. Дана система неравенств:

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3\leqslant 150 \\ x_1+4x_2+5x_3\leqslant 180 \\ 3x_1+4x_2+2x_3\leqslant 120 \end{cases}$$

$$x_1\geqslant 0, \quad x_2\geqslant 0, \quad x_3\geqslant 0.$$

Требуется найти максимальное значение линейной формы

$$z_{\max}=8x_1+7x_2+6x_3.$$

(Заметим, что расход средств как и величина неиспользованных ресурсов — числа неотрицательные, так как их перерасход не может быть допущен. Коэффициенты при x_4, x_5, x_6 равны нулю, потому что неиспользованные ресурсы не создают дополнительной стоимости).

Заменив неравенства уравнениями путем введения дополнительных переменных, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3+x_4=150 \\ x_1+4x_2+5x_3+x_5=180 \\ 3x_1+4x_2+2x_3+x_6=120, \end{cases} \tag{5}$$

где x_4 — величина недоиспользованных ресурсов оборудования, x_5 — сырья, x_6 — электроэнергии (x_4, x_5, x_6 величины также неотрицательные).

Задача решается симплексным методом. Ниже приводятся симплексные таблицы:

Таблица IV

$\lambda_{Б_j}$ базисных векторов	Базисные векторы $A_{Б_j}$	Вектор свободных членов B	8 A_1	7 A_2	6 A_3	0 A_4	0 A_5	0 A_6
0	A_4	150	2	3	4	1	0	150
0	A_5	180	1	4	5	0	1	180
0	A_6	120	3	4	2	0	0	120
$z_j - \lambda_j$		0	—8	—7	—6	0	0	0

Таблица V

$\lambda_{Б_j}$ базисных векторов	Базисные векторы $A_{Б_j}$	Вектор свободных членов B	8 A_1	7 A_2	6 A_3	0 A_4	0 A_5	0 A_6
0	A_4	70	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$	1	0	$-\frac{2}{3}$
0	A_5	140	0	$\frac{8}{3}$	$\frac{13}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$
8	A_1	40	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$
$z_j - \lambda_j$		320	0	$\frac{11}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{8}{3}$

Таблица VI

$\lambda_{Б_j}$ базисных векторов	Базисные векторы $A_{Б_j}$	Вектор свободных членов B	8	7	6	0	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
6	A_5	$26\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{3}{8}$	0	$-\frac{1}{4}$
0	A_3	$26\frac{1}{4}$	0	$\frac{17}{8}$	0	$-\frac{13}{8}$	1	$\frac{3}{4}$
8	A_1	$22\frac{1}{2}$	1	$\frac{5}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$
$z_j - \lambda_j$		$337\frac{1}{2}$	0	$\frac{15}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{5}{2}$

Отв. 22,5 изделий I и 26,25 изделий III; $z_{max} = 337{,}5$ руб.

Задача 10. Для откорма свиней на ферме в еженедельный рацион каждой свиньи требуется включать не менее 6 единиц питательного вещества *A*, 8 единиц вещества *B* и 12 единиц вещества *C*. Для откорма можно использовать 3 вида кормов. Данные о содержании питательных веществ в одной весовой единице каждого из них приведены в таблице (цифры условные):

	Питательные вещества		
	A	B	C
I	2	1	3
II	1	2	4
III	3	1,5	2

Требуется составить наиболее дешевый рацион при условии, если одна весовая единица корма I стоит 2 руб., корма II — 3 руб., а корма III — 2 руб. 50 коп.

Указания к решению. Составляем из условий задачи систему неравенств

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geqslant 6 \\ x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 \geqslant 8 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geqslant 12. \end{cases} \tag{6}$$

Найти

$$z_{\min} = 2x_1 + 3x_2 + 2{,}5x_3. \tag{7}$$

Заменим неравенства (6) уравнениями путем введения дополнительных переменных

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 - x_5 = 8 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_6 = 12 \end{array}\right\}. \tag{8}$$

В системе (8) коэффициенты при дополнительных переменных равны минус единице и не могут служить базисом для первой симплексной таблицы.

Поэтому в уравнения системы (8) добавляют фиктивные переменные x_7, x_8, x_9. Тогда вместо (8) получим следующую систему:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + x_7 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 - x_5 + x_8 = 8 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_6 + x_9 = 12. \end{cases}$$

В линейную форму (7) добавляют произведение суммы фиктивных переменных на достаточно большое число M (со знаком плюс, если требуется найти минимум, и со знаком минус, если максимум). Имеем:

$$z_{\min} = 2x_1 + 3x_2 + 2{,}5x_3 + M(x_7 + x_8 + x_9).$$

Далее, для решения используют M-метод.

Отв. Рацион состоит из 3,3 весовой единицы корма II и 0,9 единицы корма III, в котором содержится 6 единиц питательного вещества A, 8 единиц вещества B; вещества C — избыток в 3,1 единицы; наиболее дешевый рацион — 12 руб. 22 коп.

УКАЗАТЕЛЬ ЛИТЕРАТУРЫ

К главам I—V (определители, матрицы, векторные пространства, системы линейных уравнений):

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Гостехиздат, 1953.
2. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре, изд. 2-е. Гостехиздат, 1951.
3. Курош А. Г. Курс высшей алгебры, изд. 6-е. Физматгиз 1962.
4. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры, изд. 2-е. Гостехиздат, 1956.
5. Окунев Л. Я. Высшая алгебра. Учпедгиз, 1958.
6. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре, изд. 2-е. Физматгиз, 1962.
7. Современная математика для инженеров. Под ред. Беккенбаха. ИЛ, 1959.

К главам VI—VIII (выпуклые множества, системы линейных неравенств, тождественные преобразования и неотрицательные решения линейных систем):

1. Александров А. Д. Выпуклые многогранники. Гостехиздат, 1950.
2. Люстерник Л. А. Выпуклые фигуры и многогранники. Гостехиздат, 1956.
3. Черников С. Н. Системы линейных неравенств. УМН, т. VIII, вып. 2(54), 1953.
4. Школьник А. Г. Линейные неравенства. Ученые зап. физ.-мат. фак. МГПИ, 16, 1951.

К главам IX—XII (Линейное программирование):

1. Барсов А. С. Что такое линейное программирование. Физматгиз, 1959.
2. Гасс С. Линейное программирование. Физматгиз, 1961.
3. Канторович Л. В. 1) Математические методы организации и планирования производства. Изд. ЛГУ, 1939.
   2) Об одном эффективном методе решения некоторых классов экстремальных проблем. ДАН, 28, № 3 (1940).
   3) Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. Изд. АН СССР, 1960.
4. Линейные неравенства и смежные вопросы. Сборник переводов под ред. Канторовича Л. В. и Новожилова В. В. ИЛ, 1959.
5. Применение математики в экономических исследованиях. Соцэкгиз, 1959.
6. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. Задачи и методы линейного программирования. «Советское радио», 1961.
7. Charnes A., Cooper W. W. Management Models and Industrial Application of dinear Programming, New-York, London, 1961.
8. Karlin S. Mathematical methods and theory in games, programming, and economics, vol. I, Matrix games, programming, and mathematical economics, Mass., London, 1959.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Алгебраическое дополнение 29
Алгоритм симплексного метода 225
Ассоциативный закон 44, 48

Базис 81, 175
— искусственный 237
Базисная переменная 166, 175
Базисное решение 166, 176
Базисный вектор 176

Ведущий элемент 103
Вектор 65
— единичный 78
— запасов 190
— затрат 180
— n-мерный 67
— нулевой 70
— ограничений 180
— -столбец 181
— -строка 181
— условий 180
Векторы линейно зависимые
— — независимые 68
— равные 68
— эквивалентные 79
Вершина 115
Возвратное соотношение 32
Выпуклая линейная комбинация 117,121
Выпуклая фигура 114
— — двухмерная 114
— — n-мерная 116
— — нульмерная 114
— — одномерная 114
— — трехмерная 115
Выпуклое множество 117
— тело 116
Вырождение 176
Вырожденная матрица 39

Гаусса метод 103
Геометрическая интерпретация 181
Гиперплоскость 123
— опорная 124
Главная диагональ определителя 18
Граничная точка 116
Граница тела 116

Детерминант 18
Диагональная форма 42
Дистрибутивный закон 48
Длина вектора 70, 71
Допустимое решение 129, 175

Задача производственного планирования 192, 193
— на составление смесей 192, 194
— о диете 194
— транспортная 192, 196
Зацикливание 170, 229

Икс-уравнение (X-уравнение) 165
Индексная строка 214
Индекс 17
Инверсия 23
Искусственная переменная 236
Искусственный базис 238

Каноническая форма 180
Ключевая вектор-строка 216
Ключевой вектор-столбец 216
Коммутативный закон 44, 48
Компоненты вектора 67
Конус 120
— выпуклый 122
Крайняя точка выпуклого множества 115, 116, 117
Крамера правило 93

— формулы 95
Критерий оптимальности 226, 234, 235
Кронекера — Капелли теорема 97

Линейная зависимость 72
— — векторов 72
— комбинация векторов 72
— независимость векторов 72
— — уравнений 72
— однородная функция 27
— форма 127
Линейное преобразование 58
Линейное программирование 13
Линейное уравнение 17
Луч 120

Максимизация 129
Максимум линейной формы 129
Матрица 36
— вырожденная 39
— диагональная 37
— единичная 38
— квадратная 37
— невырожденная 39
— неособенная 39
— n-го порядка 37
— нулевая (нуль-матрица) 38
— нулевого ранга 41
— обратная 53
— обратимая 53
— основная 96
— особенная 39
— прямоугольная 37
— расширенная 97
— симметричная 39
— скалярная 37
— транспонированная 39
— треугольная 103
— укороченная 37
— удлиненная 37
Матрицы равные 38
Метод графический 200
— искусственного базиса 236
— последовательного исключения переменных 103
— последовательного улучшения плана 200
— разрешающих множителей 200
— распределительный 200
— симплексный 200, 210
Минор определителя 29
— матрицы 39
Минимизация 129
Минимум линейной формы 13, 177
M-метод 236
Многогранник выпуклый 117
Многоугольник выпуклый 115
Множество выпуклое 117

Небазисная переменная 166
Невырожденная задача линейного программирования 176
Неотрицательное решение 168
Неравенство 135
— линейное 135
— тождественное 135
Неравенства одинакового смысла 135
— противоположного смысла 135
— эквивалентные 136
Нуль-уравнение (0-уравнение) 164

Обратный ход исключений 103
Обращение матрицы 53
Общая задача линейного программирования 175
Ограничения 13
Опорная гиперплоскость 124
Опорный план 191
Опорная прямая 114
Определение оптимального решения 241
Определитель второго порядка 18
— квадратной матрицы 37
— n-го порядка 24
— системы 19
— третьего порядка 20
Оптимальное решение 177
Оптимальный план 191
Орт 78
Ортогональные векторы 70, 71
Основная матрица системы 96

Переменная дополнительная 158, 175
Перестановка 23
— нечетная 24
— четная 24
План 190
Побочная диагональ определителя 18
Полуплоскость 114
Полупространство 126
Порядок матрицы 37
Правило Крамера 102
Правило Саррюса 20
Приведенная система 102

Проблема двойственности 16
Произведение вектора на число 70
— векторов скалярное 69
— матриц 46
— матрицы на число 45
Пространство решений неравенства 140

Равносильные системы 92
Разложение определителя по элементам столбца (строки) 27
Размерность вектора 67
— пространства 78

Разрешающий элемент 167, 216
Ранг матрицы 41
Расширенная матрица 97
Решение нулевое (тривиальное) 99
Решение системы 175

Саррюса правило 20
Свойства определителя 23
Симплекс 151, 210
Симплексный метод 210
Система векторов 73
— — линейно зависимая 79
— — — независимая 79
— неопределенная 90
— определенная 89
— противоречивая (несовместная) 90
— совместная 90
Система линейных неравенств 138
Скаляры 38
Скалярное произведение 69, 71
Сложение векторов 69
— матриц 44

Способ приведения определителя к треугольному виду 31
— разложения определителя по столбцам или строкам 32
Способы вычисления определителей 30
Столбец матрицы 37
— определителя 18
Строка матрицы 36
— определителя 18
Сумма n-мерных векторов 70
— матриц 43
Схема единственного деления 105

Тетраэдр 115
Тождественное преобразование 62, 163, 168
Транспозиция 23
Транспортная задача 192, 196

Угловая точка 115, 117
Умножение матриц 46
Уравнение линейное 17
— однородное линейное 99

Фундаментальная система уравнений 102

Члены определителя 18

Эквивалентные матрицы 41
— системы 136
Экономическая интерпретация 190
Экстремальная точка 115, 116
Элементарные преобразования 41
Элемент матрицы 36
— определителя 18

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

Глава I

Введение

§ 1. Предмет линейного программирования 5
§ 2. Линейная алгебра как математический аппарат линейного программирования 8
§ 3. Краткие исторические сведения 13

Глава II

Определители

§ 4. Определители второго и третьего порядков 17
§ 5. Определители n-го порядка и их свойства 23
§ 6. Способы вычисления определителей 30
Упражнения 35
Вопросы для самопроверки 35

Глава III

Матрицы

§ 7. Матрицы и их ранг 36
§ 8. Действия над матрицами; свойства матриц 43
§ 9. Линейные преобразования 57
Упражнения 63
Вопросы для самопроверки 64

Глава IV

Векторные пространства

§ 10. Понятие n-мерного пространства 65
§ 11. Линейная независимость векторов 72
§ 12. Базис векторного пространства 80
Упражнения 87
Вопросы для самопроверки 88

Глава V

Системы линейных уравнений

§ 13. Системы n линейных уравнений с n переменными. Правило Крамера 89
§ 14. Произвольные системы линейных уравнений. Теорема Кронекера — Капелли 96
§ 15. Линейные однородные уравнения 99
§ 16. Матричное решение линейных уравнений. Метод Гаусса 103
Упражнения 111
Вопросы для самопроверки 112

Глава VI

Выпуклые множества

§ 17. Понятие выпуклых множеств 114
§ 18. Гиперплоскости. Полупространство. Линейная форма. 123
§ 19. Выпуклые многогранники и линейное программирование 127
Упражнения 133
Вопросы для самопроверки 133

Глава VII

Системы линейных неравенств

§ 20. Понятие о неравенствах 135
§ 21. Системы линейных неравенств в двухмерном пространстве 140
§ 22. Системы линейных неравенств в n-мерном пространстве. Многогранник решений 147
§ 23. Замена неравенств уравнениями 156
Упражнения 160
Вопросы для самопроверки 161

Глава VIII

Тождественные преобразования и неотрицательные решения линейных систем

§ 24. Тождественные преобразования 163
§ 25. Неотрицательные решения линейных систем . . . 168
Упражнения 173
Вопросы для самопроверки 174

Глава IX

Общая задача линейного программирования

§ 26. Формулировка общей задачи 175
§ 27. Геометрическая интерпретация общей задачи . . . 181
§ 28. Экономическая интерпретация общей задачи . . . 190
§ 29. О методах линейного программирования 198
Вопросы для самопроверки 201

Глава X

Графический метод

§ 30. Графическое решение задач линейного программирования 202
Упражнения 208
Вопросы для самопроверки 209

Глава XI

Симплексный метод

§ 31. Понятие симплексного метода 210
§ 32. Алгоритм симплексного метода 225
§ 33. Примеры определения оптимального решения . . . 242
Упражнения 253
Вопросы для самопроверки 257

Глава XII

Практические задачи, решаемые методами линейного программирования 258

Указатель литературы 272
Предметный указатель 273

Михаил Иванович Ромакин

**Элементы линейной алгебры
и линейного программирования**

Редактор *Ю. И. Соркин*
Художественный редактор *И. Ф. Муликович*

Редактор издательства А. И. Селиверстова
Технический редактор Л. Л. Ежова
Корректор *Г. И. Кострикова*

Сдано в набор 27/VIII-62 г. Подписано в печать 12/XII-62 г.
Бумага 84×108 1/32 8,75 п. л. 14,35 усл п. л. 11,28 уч-изд. л.
Тираж 25 000. Т-13738. Изд. № ФМХ/96. Цена 44 к.
Заказ 229.

Государственное издательство «Высшая школа»,

Москва, К-62, Подсосенский пер., 20
Типография изд-ва МГУ. Москва, Ленинские горы

1[illegible] коп.

ВЫСШАЯ ШКОЛА 1963