

31.3

Ш 78

С. Н. ШОРИН

# ТЕПЛОПЕРЕДАЧА



С. П. ШОРИН

# ТЕПЛОПЕРЕДАЧА

*Допущено  
Министерством высшего и среднего  
специального образования СССР  
качестве учебного пособия для студентов  
машиностроительных специальностей  
вузов*

А 506878



ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВЫСШАЯ ШКОЛА»

Москва — 1964

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В соответствии с современным уровнем науки о переносе тепла и массы, а также в методических целях во второе издание книги введен новый раздел «Основы теории переноса». Определение потоков переноса энергии и массы по интенсивностям множества перемещаемых носителей и по взаимодействию их с частицами вещества в элементарном слое, в отличие от обычного феноменологического определения потоков с помощью гипотез, позволяет более детально рассмотреть все особенности процессов переноса и истолковать соответствующие коэффициенты. Изучение этого раздела, по мнению автора, позволит более обстоятельно ознакомиться с явлениями переноса энергии, массы и импульса и облегчит изучение дальнейших разделов курса теплопередачи.

Наличие значительного количества справочников с таблицами математических функций, а также книг с таблицами теплофизических величин различных веществ, например [8, 27], позволило исключить приложение к этой книге — справочные таблицы. Из книги исключен также раздел, касающийся расчета теплообменных аппаратов. Изложение этого раздела требует сведений технологического характера и изучается в специальных курсах теплотехнических устройств и установок. За счет принятых сокращений более полно изложен материал в разделах курса: теплопроводность и теплопередача тел, а также конвективный и лучистый теплообмен.

В тексте и в рисунках книги используются единицы измерения международной системы (СИ), в связи с чем сделаны необходимые пересчеты. При всеобщем использовании этой системы единиц измерения устраняется необходимость пересчета различных данных.

Автор выражает благодарность рецензентам рукописи книги: коллективу сотрудников кафедры МВТУ им. Баумана и д. т. н. профессору БАУМУ В. А. за ценные замечания, способствовавшие улучшению книги.

## УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Наименование величин	Единица измерения	Условное обозначение
Площадь поверхности . . . . .	$m^2$	$F$
Объем . . . . .	$m^3$	$V$
Направление перемещения . . . . .	—	$\vec{l}$
Направление нормали . . . . .	—	$\vec{n}$
Орты единичного вектора . . . . .	—	$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$
Плоский угол . . . . .	<i>рад</i>	$\varphi, \psi, \theta, \alpha$
Пространственный (телесный) угол . . . . .	<i>стер</i>	$\omega$
Время . . . . .	<i>сек</i>	$\tau$
Скорость частицы . . . . .	<i>м/сек</i>	$c$
Средняя длина свободного пробега частиц . . . . .	$m$	$\bar{l}$
Скорость звука . . . . .	<i>м/сек</i>	$a$
Скорость потока . . . . .	<i>м/сек</i>	$w$
Ускорение в поле тяготения . . . . .	<i>м/сек<sup>2</sup></i>	$g$
Плотность массы . . . . .	<i>кг/м<sup>3</sup></i>	$\rho$
Удельный объем массы . . . . .	<i>м<sup>3</sup>/кг</i>	$v$
Плотность энергии . . . . .	<i>дж/м<sup>3</sup></i>	$U$
Температура . . . . .	°K, °C	$T, t$
Условная температура . . . . .	°K	$\theta$
Безразмерная температура . . . . .	—	$\theta$
Число частиц в единичном объеме (концентрация частиц) . . . . .	$\frac{1}{m^3}$	$N$
Интенсивность потока частиц . . . . .	$\frac{1}{m^2 \cdot \text{сек} \cdot \text{стер}}$	$j$
Интенсивность потока энергии . . . . .	$\frac{вт}{m^2 \cdot \text{стер}}$	$I$
Поток энергии . . . . .	<i>вт</i>	$Q$
Удельный поток энергии . . . . .	<i>вт/м<sup>2</sup></i>	$\frac{q}{q}$
Вектор потока энергии . . . . .	<i>вт/м<sup>2</sup></i>	$\vec{q}$
Удельная мощность источников энергии . . . . .	$\frac{вт}{m^3}$	$q_{\text{и}}$
Поток массы . . . . .	<i>кг/сек</i>	$M$
Удельный поток массы . . . . .	$\frac{кг}{m^2 \cdot \text{сек}}$	$q_M$
Вектор потока массы . . . . .	$\frac{кг}{m^2 \cdot \text{сек}}$	$\vec{q}_M$
Число степеней свободы движения частицы . . . . .	—	$n$
Энергия частицы . . . . .	<i>дж</i>	$\epsilon$
Масса частицы . . . . .	<i>кг</i>	$m$
Масса моля . . . . .	<i>кг</i>	$M$
Постоянная теплового состояния частицы . . . . .	<i>дж/град</i>	$k$
Постоянная теплового состояния моля (газовая постоянная) . . . . .	$\frac{кдж}{\text{моль} \cdot \text{град}}$	$R_M$

Наименование величин	Единица измерения	Условное обозначение
Теплоемкость при постоянном объеме, давлении . . . . .	$\frac{\text{кДжс}}{\text{кг} \cdot \text{град}}$	$c_V, c_P$
Отношение теплоемкостей при постоянном давлении и объеме . . . . .	—	$k = c_P/c_V$
Энергия единичной массы . . . . .	$\frac{\text{кДжс}}{\text{кг}}$	$E_Q$
Энтальпия единичной массы . . . . .	$\frac{\text{кДжс}}{\text{кг}}$	$i$
Энергия превращений массы (фазовых, химических) . . . . .	$\frac{\text{кДжс}}{\text{кг}}$	$E_{\text{превр}}$
Энергия активации . . . . .	$\text{кДжс/моль}$	$E_{\text{акт}}$
Изобарный термодинамический потенциал . . . . .	$\text{кДжс/моль}$	$Z$
Теплота парообразования . . . . .	$\text{кДжс/кг}$	$r$
Парциальная плотность компонента массы . . . . .	$\text{кг/м}^3$	$\rho_i$
Мольная концентрация компонента массы . . . . .	$\text{моль/м}^3$	$C_i$
Парциальные давления компонента массы . . . . .	$\frac{\text{н}}{\text{м}^2}$	$p_i$
Удельная производительность процесса превращения массы . . . . .	$\frac{\text{кг}}{\text{м}^3 \cdot \text{сек}}$	$q_{\text{превр}}$
Градиент: температуры . . . . .	$\frac{1}{\text{м}} \frac{\text{град}}{\text{м}}$	$\nabla$ или $\text{град} \frac{\nabla T}{\nabla T}$
плотности . . . . .	$\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} / \text{м}$	$\nabla \rho$
давления . . . . .	$\frac{\text{н}}{\text{м}^2} / \text{м}$	$\nabla p$
Оператор Лапласа: температуры . . . . .	$\frac{1}{\text{м}^2} \frac{\text{град}}{\text{м}^2}$	$\Delta$ или $\nabla^2$ $\Delta T$
плотности . . . . .	$\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} / \text{м}^2$	$\Delta \rho$
Дивергенция вектора: потока энергии . . . . .	$1/\text{м}$	$\text{div } \vec{q}$
потока массы . . . . .	$\frac{\text{кг}}{\text{м}^3 \cdot \text{сек}}$	$\text{div } \vec{q}_M$
количества движения . . . . .	$\frac{\text{кг}}{\text{м}^3 \cdot \text{сек}}$	$\text{div } (\vec{q}w)$
Ротор вектора (вихрь) . . . . .	$1/\text{м}^2$	$\text{rot}$
Давление . . . . .	$\frac{\text{н}}{\text{м}^2}$	$p$

Наименование величин	Единица измерения	Условное обозначение
Нормальное напряжение . . . . .	$\frac{н}{м^2}$	$\sigma_{i,x_i}$
Касательное напряжение . . . . .	$\frac{н}{м^2}$	$\sigma_{i,x_j}$
Коэффициент диффузионного переноса энергии (температуропроводность) . .	$м^2/сек$	$a$
Коэффициент диффузионного переноса массы ( $i$ -ого компонента) . . . . .	$м^2/сек$	$D_{i,j}$
Кинематическая вязкость . . . . .	$\frac{н \cdot сек}{м^2}$	$\nu$
Динамическая вязкость . . . . .	$\frac{вт}{м^2}$	$\eta$
Коэффициент теплопроводности . . . . .	$\frac{вт}{м \cdot град}$	$\lambda$
Коэффициент теплообмена (теплоотдачи)	$\frac{вт}{м^2 \cdot град}$	$\alpha$
Коэффициент массообмена (массоотдачи)	$м/сек$	$\alpha_0$
Коэффициент объемного расширения . .	$1/град$	$\beta$
Поверхностное натяжение жидкости . .	$н/м$	$\sigma$
Краевой угол смачивания . . . . .	—	$\theta$
Работа сил в единичном объеме . . . . .	$кдж/м^3$	$L$
Диссипативная функция . . . . .	$1/сек^2$	$\Phi_{диссип}$
Коэффициент сопротивления течению . .	—	$\zeta$
Коэффициент трения при течении . . .	—	$\xi$
Коэффициент аккомодации . . . . .	—	$\alpha_{акком}$
Относительная скорость скольжения при течении . . . . .	—	$u_s$
Коэффициент теплопередачи . . . . .	$\frac{вт}{м^2 \cdot град}$	$k$
Термическое сопротивление . . . . .	$град/\frac{вт}{м^2}$	$R$
Коэффициент теплоусвоения . . . . .	$\frac{вт}{м^2 \cdot град}$	$b$
Угловая частота колебания . . . . .	$рад/сек$	$\omega$
Период колебания . . . . .	$сек$	$z$
Радиус . . . . .	$м$	$r$
Диаметр . . . . .	$м$	$d$
Длина . . . . .	$м$	$L$
Толщина слоя . . . . .	$м$	$s$
Толщина пограничного слоя . . . . .	$м$	$\delta$
Безразмерная координата . . . . .	—	$y_*$
Безразмерная скорость . . . . .	—	$w_*$
Критерий скорости движения (критерий Маха) . . . . .	—	$M \equiv \frac{w}{a}$
Критерий Кнудсена . . . . .	—	$Kn \equiv \bar{l}/l$

Наименование величин	Единица измерения	Условное обозначение
Критерий физических свойств в процессах переноса импульса и тепла (Критерий Прандтля)	—	$Pr \equiv \frac{\nu}{a}$
Критерий физических свойств в процессах переноса импульса и массы (критерий Шмидта)	—	$Sc \equiv \frac{\nu}{D_{i,j}}$
Критерий Пекле: для переноса тепла	—	$Pe \equiv \frac{\omega l}{a}$
для переноса массы	—	$Pe \equiv \frac{\omega l}{D_{i,j}}$
Критерий Фурье: для переноса тепла	—	$Fo \equiv \frac{a\tau}{l^2}$
для переноса массы	—	$Fo \equiv \frac{D_{i,j}\tau}{l^2}$
Критерий Био: для переноса тепла	—	$Bi \equiv \frac{al}{\lambda_{-n}}$
для переноса массы	—	$Bi \equiv \frac{\alpha_Q l}{D_{i,j-n}}$
Критерий Нуссельта: для переноса тепла	—	$Nu \equiv \frac{al}{\lambda_{+n}}$
для переноса массы	—	$Nu \equiv \frac{\alpha_Q l}{D_{i,j+n}}$
Критерий Стентона: для переноса тепла	—	$St \equiv \frac{\alpha}{w c_p}$
для переноса массы	—	$St \equiv \frac{\alpha_Q}{w}$
Критерий Рейнольдса	—	$Re \equiv \frac{\omega l}{\nu}$
Критерий Фруда	—	$Fr \equiv \frac{\omega^2}{gl}$
Критерий Эйлера	—	$Eu \equiv \frac{\Delta p}{\rho \omega^2}$
Критерий Грасгофа: для переноса тепла	—	$Gr \equiv \frac{g l^3 T_F - T_\infty}{\nu^2 T_\infty}$

Наименование величин	Единица измерения	Условное обозначение
для переноса массы . . . . .	—	$Gr \equiv \frac{gl^3}{\nu^2} \frac{Q_\infty - Q_F}{Q_F}$
Критерий Вебера . . . . .	—	$We \equiv \frac{\rho \omega^2 l}{\sigma}$
Частота излучения . . . . .	1/сек	$\nu$
Длина волны излучения . . . . .	м	$\lambda$
Постоянная Планка . . . . .	дж·сек	$h$
Интенсивность энергии излучения абсолютно черного тела . . . . .	$\frac{вт}{м^2 \cdot стер}$	$B(\nu, T)$
Постоянная излучения . . . . .	$\frac{вт}{м^2 \cdot град^4}$	$\sigma_0$
Поглощаемость . . . . .	—	$A$
Прозрачность . . . . .	—	$D$
Отражательность . . . . .	—	$R$
Степень черноты излучения . . . . .	—	$\epsilon$
Удельный лучистый поток . . . . .	$\frac{вт}{м^2}$	$E$
Лучевое давление . . . . .	$\frac{n}{м^2}$	$P_{луч}$
Поток эффективного излучения . . . . .	вт	$Q_{эф}$
Поток падающего излучения . . . . .	вт	$Q_{пад}$
Поток собственного излучения . . . . .	вт	$Q_{соб}$
Поток результирующего излучения . . . . .	вт	$Q_{рез}$
Коэффициент отражения яркости падающего излучения . . . . .	—	$\rho$
Коэффициент облученности . . . . .	—	$\Phi_{i, j}$
Поверхность взаимного лучевого обмена . . . . .	м <sup>2</sup>	$H_{i, j}$
Пидкатриса рассеяния излучения . . . . .	—	$\gamma(\vec{l}, \vec{l})$
Относительное эффективное сечение ослабления интенсивности излучения . . . . .	—	$\delta\varphi$
Коэффициент ослабления интенсивности излучения . . . . .	1/м	$k$
Коэффициент поглощения излучения . . . . .	1/м	$\alpha$
Коэффициент рассеяния излучения . . . . .	1/м	$\beta$
Мощность собственного излучения среды в единичном объеме . . . . .	$\frac{вт}{м^3}$	$E_{изл}, \nu=1$
Поглощенное средой в единичном объеме внешнее падающее излучение . . . . .	$\frac{вт}{м^3}$	$E_{погл}, \nu=1$
Ядро интегрального уравнения излучения . . . . .	1/м <sup>2</sup>	$K(M, P)$
Разрешающее ядро, или резольвента, интегрального уравнения излучения . . . . .	1/м <sup>2</sup>	$G(M, P)$



*Раздел первый*

**ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА**

**(ЭНЕРГИИ, МАССЫ И ИМПУЛЬСОВ)**

## § 1. Общая характеристика процессов переноса

В различных отраслях науки и техники весьма большую роль играют явления переноса различных субстанций: энергии, массы, импульса или количества движения. Все процессы, протекающие во времени и в пространстве, так или иначе связаны с явлениями переноса, и поэтому их изучение необходимо лицам самой различной специальности.

Перенос энергии в пространстве, в котором находятся различные тела и среды, осуществляется с помощью тех или иных носителей энергии и в конечном счете всегда *происходит в сторону меньшей объемной плотности энергии*. Последняя величина определяет количество энергии в единичном объеме пространства, занятого той или иной средой, обозначается  $U$  и имеет единицу измерения  $дж/м^3$ .

Величиной, определяющей результирующий перенос энергии, является *удельный поток энергии*. Величина эта векторная и определяет количество энергии, переносимой сквозь единичную площадку поверхности в единицу времени в определенном направлении  $\vec{l}$ . Обозначается эта величина  $\vec{q}$  и имеет единицу измерения  $вт/м^2$ .

Перенос массы среды осуществляется путем диффузии или испускания частиц вещества (молекул, атомов), а также путем течения массы. Величиной, определяющей результирующий перенос массы, является *удельный поток массы*  $q_M$ . Величина эта также векторная и имеет единицу измерения  $кг/м^2сек$ .

Общий поток энергии, переносимой сквозь площадь поверхности  $F$ , определяется интегралом

$$Q = \int_{(F)} q_n dF \text{ вт}, \quad (1,1)$$

где  $q_n = \vec{q} \cos(\vec{l}, n)$  — нормальная составляющая вектора результирующего переноса энергии.

Так же определяется и общий поток массы:

$$M = \int_{(F)} q_{m, n} dF \frac{\kappa z}{сек}, \quad (1,2)$$

где  $q_{m, n} = \vec{q}_m \cos(\vec{l}, \vec{n})$  — нормальная составляющая вектора результирующего переноса массы среды.

Перенос импульсов осуществляется вследствие изменения количества движения текущих масс среды. Количество движения представляет собой удельный поток текущих масс среды ( $\rho \vec{\omega}$ ) и определяется произведением плотности среды ( $\rho$ ) на вектор скорости течения ( $\vec{\omega}$ ). Как будет показано далее (§ 17), перенос количества движения в слоях текущей среды обуславливает силу трения  $\vec{P}_{\text{трени}}$ , сложный вектор которой определяется соответствующими напряжениями.

Величины удельных потоков переноса энергии и массы, а также возникающая сила от изменения количества движения могут быть весьма различными. Например, величина удельного потока энергии находится в порядке: от  $10^0 \frac{вт}{м^2}$  и ниже (теплообмен животных и растений с окружающей средой) до  $10^8 \frac{вт}{м^2}$  и выше (в высокотемпературных реакторах, при очень высоких скоростях раскаленных газов, в атомной энергетике и т. п.).

Удельные потоки переноса массы также находятся в широком диапазоне изменения: от  $10^{-6} \frac{кг}{м^2сек}$  и ниже (диффузионный перенос газов в пористых телах) до  $10^4 \frac{кг}{м^2сек}$  и выше (струйный перенос масс воды и газа при больших скоростях течения и т. п.).

Большие удельные потоки переноса энергии возникают в случаях, когда носителями являются частицы больших энергий, перемещаемые с большой скоростью: потоки электронов, нейтронов, атомов и молекул при высоких температурах и т. п. Большими удельными потоками энергии сопровождаются также процессы фазовых, химических и атомных превращений вещества (конденсация паров, кипение жидкостей, сублимация, плавление, горение, деление и синтез атомных ядер).

Носителями энергии и, помимо различных элементарных частиц вещества (*молекулы, атомы, электроны, нейтроны и т. п.*), являются также *множества раздробленных частиц твердого тела* (различные сыпучие массы), *множества возмущенных масс в турбулентных потоках* жидкостей и газов (турбулентные «моли»). В качестве носителей энергии служат *волны упругих колебаний* частиц вещества среды или отдельных ансамблей частиц, *электромагнитные волны* излучения. Последние виды носителей энергии при сохранении волновых свойств могут рассмат-

риваться так же, как перемещаемые в пространстве частицы: ф о н о н ы энергии упругих колебаний, ф о т о н ы энергии излучения.

С к о р о с т ь п е р е м е щ е н и я н о с и т е л е й в п р о с т р а н с т в е м о ж е т б ы т ь в е с ь м а р а з л и ч н о й: от  $10^{-1}$  м/сек и ниже (медленное течение вязких жидкостей и газов) до  $300 \cdot 10^8$  м/сек (скорость света).

Характер перемещения носителей в различных телах и средах оказывается разнообразным. При достаточно большой концентрации частиц вещества множество перемещаемых носителей, взаимодействуя с множеством частиц вещества, отличается д и ф ф у з и о н н ы м характером перемещения с более или менее равномерной интенсивностью по всем направлениям пространства. Так, например, осуществляется диффузионный перенос молекул и атомов в газах и парах, перенос свободных электронов в металлах, перенос фотонов излучения в оптически плотных малопрозрачных средах и т. д.

Если перемещаемые в пространстве носители не встречаются частиц вещества среды, с которыми они могут взаимодействовать, то такой характер перемещения носителей называется л у ч е в ы м. Примерами такого характера перемещения носителей являются молекулярные пучки газа, лучи света и т. д.

Могут быть также случаи с м е ш а н н о г о характера перемещения носителей, когда часть носителей из всего множества имеет диффузионный характер перемещения в среде, а другая часть отличается лучевым характером. Так распространяется, например, энергия солнечного излучения в атмосфере Земли: часть коротковолновых носителей энергии солнечной радиации поглощается и рассеивается в атмосфере и поверхности земли не достигает.

В некоторых телах и средах перемещение носителей отличается *различной интенсивностью по направлениям*. Такой характер переноса энергии отвечает, например, теплопроводности монокристаллов.

Различные особенности перемещения носителей должны учитываться при детальном рассмотрении явлений переноса.

## ПЕРЕНОС ЭНЕРГИИ

## § 2. Различные виды переноса энергии

Перенос энергии различными носителями может осуществляться в разных условиях. В неподвижных телах перенос энергии осуществляется теми или иными носителями путем взаимодействия и обмена энергией с частицами вещества тела. Если при этом *перенос энергии происходит в условиях, близких к термодинамическому равновесию вещества*, определяемому *температурой* в каждом отдельном месте тела, то такой перенос энергии называется *теплопроводностью*.

Перенос энергии в неподвижных телах может осуществляться и при отсутствии локального термодинамического равновесия, но в этих условиях температура, отвечающая тепловому состоянию вещества тела, уже не является характерной величиной для определения переноса энергии. В этих условиях характерной величиной (как будет показано ниже) является объемная плотность энергии.

В различных подвижных средах перенос энергии, помимо теплопроводности, осуществляется перемещением масс среды в пространстве. Этот вид переноса энергии течением масс среды называют *конвективным переносом*, или *конвекцией*.

Помимо теплопроводности и конвекции, перенос энергии может осуществляться путем излучения и взаимодействия носителей энергии излучения с частицами вещества среды. Такой вид переноса энергии отвечает и *злучению*, или *радиации*, фотонов, эмиссии электронов, нейтронов и других частиц.

Все рассмотренные виды переноса энергии (теплопроводность, конвекция и излучение) во многих случаях осуществляются совместно. Например, в потоках жидкостей и газов осуществляется *конвективно-теплопроводный перенос тепла*. В потоках сред, из-

лучающих энергию (раскаленные газы), осуществляется *конвективно-радиационный перенос энергии*.

Во многих случаях перенос энергии сопровождается процессами 'освобождения или связывания энергии (переход в потенциальную форму) частицами вещества среды, а также процессами превращения энергии из одной формы в другую: например, при фазовых, химических и атомных превращениях компонентов среды, при воздействии различных сил, при излучении и поглощении энергии.

Предварительное, достаточно детальное ознакомление со всеми особенностями различных видов переноса энергии и ее превращениями необходимо для изучения курса теплопередачи.

### § 3. Теплопроводность

#### А. Характеристика множества носителей

В различных твердых телах, а также в неподвижных и подвижных жидких и газовых средах перенос энергии осуществляется множеством различных носителей путем обмена энергией с частицами вещества.

Множество тех или иных носителей энергии, находящихся в объеме тела или среды в условиях диффузионного переноса энергии теплопроводностью, можно рассматривать как статистическое множество носителей, имеющих среднюю скорость перемещения  $\bar{c}$ , среднюю энергию  $\bar{\epsilon}$  и средний свободный пробег  $\bar{l}$  между актами обмена энергией носителей с частицами вещества. Эти средние характеристики носителей в статистическом множестве отвечают определенному распределению величин  $c$ ,  $\epsilon$ ,  $l$ , которое меняется с изменением теплового состояния множества.

На рис. 1 представлены кривые распределения в статистическом множестве относительного количества носителей  $n_x = \frac{\delta N_x}{N_0}$  с признаком  $x$  по отношению к общему количеству носителей в единичном объеме пространства  $N_0$  в зависимости от величины признака  $x = c, \epsilon, l$ .

Характерной особенностью статистического множества носителей является то обстоятельство, что очень малой и очень больш-

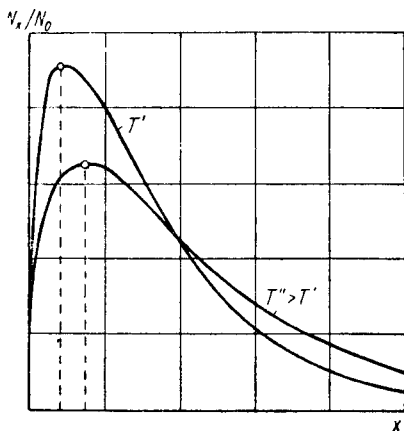


Рис. 1. Характер распределения относительного количества носителей

$$\frac{N_x}{N_0} \text{ с признаком } x$$

шой величиной признака  $x$  обладает очень малое количество носителей.

С изменением состояния множества носителей, которое в условиях термодинамического равновесия определяется температурой,

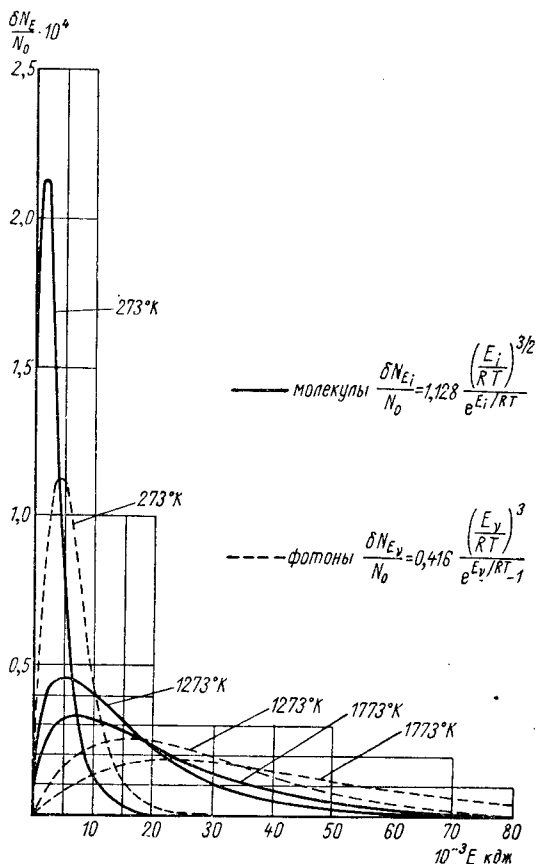


Рис. 2. Распределение газовых молекул и фотонов излучения с энергией  $E$  при термодинамическом равновесии

кривая распределения располагается так, что с повышением температуры максимальное значение  $\left| \frac{\delta N_x}{N_0} \right|$  сдвигается в сторону больших величин признака  $x$ .

На рис. 2 показано распределение энергии молекул газа и фотонов излучения, которые находятся в единичном объеме пространства в условиях термодинамического равновесия. Как видно, оба вида носителей энергии при одинаковой температуре отличаются различным положением максимума в кривой распределе-

ния: для фотонов излучения положение максимума отвечает большей энергии. Как показывает расчет, средняя энергия фотонов излучения при одинаковой температуре оказывается примерно в 2 раза выше средней энергии молекул газа. Рассматриваемые носители, однако, резко различаются своей скоростью перемещения. Если для молекул газа скорость перемещения носит статистический характер распределения, зависит от температуры и для различных газов при комнатной температуре имеет величину порядка  $10^2 \div 10^3$  м/сек, то все фотоны излучения независимо от температуры имеют одинаковую скорость перемещения: около  $300 \cdot 10^6$  м/сек.

### В. Определение удельного потока носителей

Наиболее детальной характеристикой потока носителей является интенсивность перемещения носителей в определенном направлении пространства. Величину интенсивности перемещения носителей  $j_l$  по направлению  $\vec{l}$  можно определить как вероятное

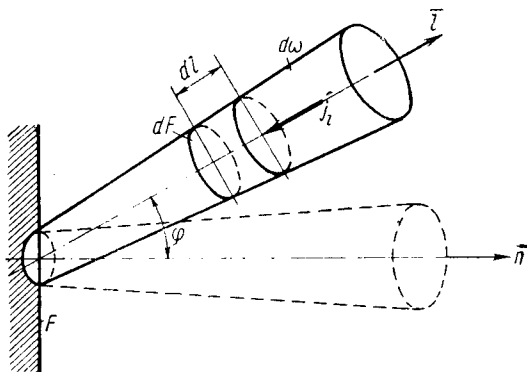


Рис. 3. К определению интенсивности перемещения носителей в направлении  $\vec{l}$

количество носителей, проходящих сквозь единичную площадку, для которой направление  $\vec{l}$  является нормалью  $\vec{n}$ , и поступающих из единичного пространственного угла, расположенного по оси  $\vec{l}$  (рис. 3). Единицей измерения величины интенсивности перемещения носителей по направлению в пространстве  $j_l$  служит

$$\frac{1}{\text{м}^2 \cdot \text{сек} \cdot \text{стер}}.$$

Пользуясь понятием интенсивности потока носителей по направлению, можно определить количество носителей, проходящих за время  $dt$  элементарный объем с основанием площади



$dF$  и высотой  $dl$ :

$$d^3N_l = j dF \cdot d\omega \cdot d\tau. \quad (3,1)$$

Объем рассматриваемого элементарного пространства (рис. 3) составляет

$$d^2V = dF \cdot dl.$$

Так как  $dl = \bar{c} \cdot d\tau$ , где  $\bar{c}$  — средняя скорость перемещения носителей, то  $d^2V = dF \cdot \bar{c} \cdot d\tau$ .

Отношение

$$\frac{d^3N_l}{d^2V} = \frac{1}{\bar{c}} j_l d\omega \frac{1}{\mu^3}$$

представляет собой вероятное количество носителей, находящихся в каждый момент времени в единичном объеме пространства и перемещаемых по направлению  $\vec{l}$  в пределах элементарного пространственного угла  $d\omega$ .

Следует отметить, что величины  $dF$ ,  $d^2V$  и  $d\omega$  предполагаются достаточно большими по сравнению с размерами носителей.

Количество носителей, находящихся в единичном объеме пространства и перемещаемых по всем направлениям, определяется интегралом:

$$N = \int_{(4\pi)} \frac{1}{\bar{c}} j_l d\omega. \quad (3,2)$$

При неизменной средней скорости перемещения носителей ( $\bar{c}$ ) и одинаковой интенсивности ( $j_l = j$ ) по всем направлениям пространства имеем:

$$N = \frac{1}{\bar{c}} 4\pi j, \quad (3,3)$$

откуда для определения интенсивности потока носителей при диффузионном характере их перемещения получаем следующую формулу:

$$j = \frac{1}{4\pi} \bar{c} N. \quad (3,4)$$

Зная величину  $j$ , по известной концентрации носителей в объеме ( $N$ ) и средней скорости перемещения ( $\bar{c}$ ) можно вычислить вероятное количество носителей, проходящих сквозь единичную площадку (рис. 3), или удельный поток носителей в направлении нормали к площадке  $\vec{n}$ :

$$q_{N, n} = \int_{(2\pi)} j_l \cos \varphi d\omega. \quad (3,5)$$

Элементарный телесный угол, как известно из геометрии, определяется отношением элементарной площадки  $dF$ , вырезанной элементарным телесным углом на сфере к квадрату радиуса  $r$  этой сферы:

$$d\omega = \frac{dF}{r^2}. \quad (3,6)$$

На рис. 4, иллюстрирующем определение телесного угла, величина элементарной площадки определяется произведением дуг:

$$dF = r d\varphi \cdot r \sin \varphi \cdot d\theta,$$

где  $\varphi$  — угол, дополнительный к углу широты;

$\theta$  — угол долготы.

Таким образом, для определения элементарного пространственного угла имеем следующую формулу:

$$d\omega = \sin \varphi \cdot d\varphi \cdot d\theta. \quad (3,7)$$

Если перемещение носителей в пространстве имеет диффузионный характер с равномерным распределением интенсивности по всем направлениям, то удельный поток носителей по направлению  $\vec{n}$  определяется следующей формулой:

$$q_{N, n} = j \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = \pi \cdot j, \quad (3,8)$$

или

$$q_{N, n} = \frac{1}{4} \bar{c} N \frac{1}{\text{м}^2 \text{сек}}. \quad (3,9)$$

Полученная формула не вполне согласуется с обычно принятым распределением перемещения носителей по отдельным направлениям в пространстве. При рассмотрении статистического множества носителей обычно считается, что по направлениям к каждой грани в единичном кубическом объеме перемещается  $1/6$  от всего количества падающих в нем носителей  $N$ .

Множитель  $1/6$  можно получить, если в вышеприведенную формулу для определения удельного потока носителей, перемещаемых по направлению  $\vec{n}$  нормали к единичной площадке, ввести направляющий косинус  $\cos(\vec{l}, \vec{n}) = \cos \varphi$ :

$$q_{N, n} = j \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} \sin \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{2}{3} \pi j, \quad (3,10)$$

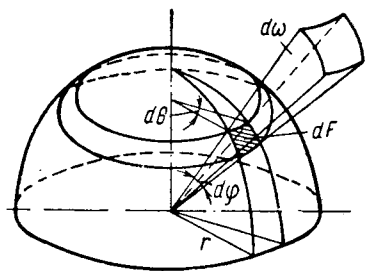


Рис. 4. К определению телесного угла

или

$$q_{N, n} = \frac{1}{6} \bar{c} N \frac{1}{m^2 \text{сек}} \quad (3,11)$$

Дополнительный множитель  $\cos \varphi$  приходится вводить в формулу (3,8) при рассмотрении переноса импульса носителей для определения давления газа, давления радиации, внутреннего трения, или вязкости, газа. При определении же переноса энергии и массы в формуле удельного потока (3,9) можно сохранить множитель  $1/4$ .

Следует отметить, что точная теория молекулярного переноса в неоднородных газах (энергии, массы и импульса молекул), помимо пошадания и выхода молекул из элементарного объема, учитывает сложное поведение молекул в объеме (молекулярные столкновения, изменение состояния при соударениях и т. д.).

Для множества иных носителей (не газовых молекул) точной теорией также должны быть учтены особые свойства и поведение носителей, условия обмена энергии носителей с частицами вещества и другие особенности.

### В. Определение удельного потока энергии

Предполагая диффузионный характер перемещения множества носителей с равномерно распределенной интенсивностью перемещения по всем направлениям пространства, рассмотрим перенос энергии в плоскопараллельном слое толщиной, равной среднему свободному пробегу носителей  $\bar{l}$  (рис. 5).

Элементарные носители энергии вносят и выносят сквозь единицу площади первой граничной поверхности рассматриваемого слоя следующее количество энергии:

$$q'_x = \frac{1}{2} \bar{c} N' \bar{\epsilon}' \frac{em}{m^2},$$

где  $N'$  и  $\bar{\epsilon}'$  — объемная концентрация и средняя энергия носителей на первой границе слоя ( $x$ ),  
 $\bar{c}$  — средняя скорость движения носителей энергии.

Рис. 5. К определению удельного потока носителей

Множитель  $1/2$  учитывает количество носителей, перемещаемых в обоих направлениях  $+x$  и  $-x$ . При этом для каждого направления в формуле для определения  $q_x$  принимается множитель  $1/4$ .

Количество энергии, выносимой и вносимой носителями сквозь единицу площади второй граничной поверхности рассматриваемо-

го слоя, составит:

$$q''_{x+l} = \frac{1}{2} \bar{c} N'' \bar{\epsilon}'',$$

где  $N''$  и  $\bar{\epsilon}''$  — объемная концентрация и средняя энергия носителей на второй границе слоя ( $x + \bar{l}$ ).

Разность количеств энергии ( $q'_x - q''_{x+l}$ ) определяет результирующий однократный обмен энергии носителей с частицами вещества в слое. Эта разность представляет также результирующий перенос энергии в рассматриваемый слой:

$$q_x = \frac{1}{2} \bar{c} (N' \bar{\epsilon}' - N'' \bar{\epsilon}'') \frac{v m}{M^2}. \quad (3,12)$$

Если  $q'_x - q''_{x+l} = 0$ , то объемная плотность энергии  $U = N \bar{\epsilon}$  на обеих границах слоя сохраняется неизменной и результирующий перенос энергии в слое  $q_x = 0$ .

При различных плотностях энергии на границах слоя удельный поток энергии в рассматриваемом слое определяется формулой:

$$q_x = \frac{1}{2} \bar{c} (U' - U''), \quad (3,13)$$

где  $U' = N' \bar{\epsilon}'$  и  $U'' = N'' \bar{\epsilon}''$  — объемные плотности энергии на границах слоя.

Полученная формула показывает, что в условиях диффузионного характера переноса энергии в среде удельный поток энергии определяется произведением средней скорости носителей энергии ( $\bar{c}$ ) на величину разности объемной плотности энергии носителей при обмене энергией с частицами среды ( $\delta U = U' - U''$ ):

$$q = \frac{1}{2} \bar{c} \delta U.$$

Переходя от рассматриваемого слоя толщиной  $\bar{l}$  к бесконечно малому элементарному слою толщиной  $dx$  и пользуясь простым линейным соотношением

$$\frac{\delta U}{\bar{l}} = - \frac{dU}{dx}$$

(знак минус для дифференциала  $dU$  учитывает падение объемной плотности энергии в направлении ее распространения), приходим к следующей формуле, определяющей перенос энергии в теле или среде в направлении  $x$ :

$$q_x = - \frac{1}{2} \bar{c} \bar{l} \frac{\partial U}{\partial x}. \quad (3,14)$$

В рассматриваемых условиях диффузионного характера переноса подобные же формулы получаются и для других направле-

ний распространения энергии  $y$  и  $z$ :

$$q_y = -\frac{1}{2} \bar{c} \bar{l} \frac{\partial U}{\partial y},$$

$$q_z = -\frac{1}{2} \bar{c} \bar{l} \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Величины  $q_x, q_y, q_z$  для распространения энергии в направлениях  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$  в каждом месте тела или среды можно рассматривать как проекции некоторого вектора  $\vec{q}$  в направлении  $\vec{l}$ , так что

$$\vec{q} \cos(\vec{l}, x) = q_x; \quad \vec{q} \cos(\vec{l}, y) = q_y; \quad \vec{q} \cos(\vec{l}, z) = q_z.$$

Вектор  $\vec{q}$  можно назвать *вектором диффузионного переноса энергии*.

Пользуясь ортами единичного вектора  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , можно написать:

$$\vec{q} = q_x \vec{i} + q_y \vec{j} + q_z \vec{k} = -\frac{1}{2} \bar{c} \bar{l} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} \right).$$

Величины  $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$ , представляющие изменение скалярной величины — объемной плотности энергии в направлениях  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ , определяются как проекции векторной величины градиента объемной плотности энергии в теле или среде  $\text{grad } U$ , который обозначают также  $\nabla U$ .

Таким образом, для определения вектора диффузионного переноса энергии получаем формулу:

$$\vec{q} = -a \nabla U \frac{cm}{m^2}, \quad (3,15)$$

где

$$a = \frac{1}{2} \bar{c} \bar{l} \frac{m^2}{сек} \quad (3,16)$$

представляет собой *коэффициент диффузионного переноса энергии*.

Следует отметить, что допущение диффузионного характера переноса энергии с равномерным распределением интенсивности переноса по всем направлениям в пространстве является первым приближением. В общем случае характер переноса энергии оказывается более сложным. При обмене энергией носителей с частицами вещества могут возникать касательные напряжения, которые обуславливают существование более сложного вектора, а именно — вектора второго ранга, или тензора, напряжений.

В некоторых телах интенсивность переноса энергии по направлениям резко различается. В монокристалле, например, интен-

сивность переноса энергии вдоль главной оси оказывается существенно больше интенсивности переноса в поперечном направлении. В этом и других подобных сложных случаях коэффициент переноса приобретает тензорный характер.

*Г. Некоторые особенности переноса тепла  
теплопроводностью*

· В условиях термодинамического равновесия вещества среды, определяемого температурой  $T$ , согласно *классической теории тепла*, средняя энергия носителей  $\bar{\epsilon}$ , независимо от их природы, определяется формулой:

$$\bar{\epsilon} = n \left( \frac{1}{2} kT \right),$$

где  $\frac{1}{2} kT$  — элементарная энергия любых различных форм движения носителей ( $k = 1,3803 \cdot 10^{-23} \cong 1,38 \cdot 10^{-23}$  дж/град,  $T$  — температура),

$n$  — множитель, учитывающий число степеней свободы возможных форм движения носителей.

Объемная плотность энергии определяется произведением:

$$U = N\bar{\epsilon} = Nn \left( \frac{1}{2} kT \right),$$

где  $N$  — число носителей энергии в единичном объеме.

Производная объемной плотности энергии по температуре определяет теплоемкость вещества в единичном объеме:

$$\frac{dU}{dT} = \rho c_V = Nn \frac{1}{2} k \frac{\partial \text{дж}}{\text{м}^3 \text{град}}.$$

Таким образом, из классической теории тепла следует, что теплоемкость не зависит от температуры.

Такое противоречие с опытом, как известно, устраняется *квантовой теорией тепла*, согласно которой энергия распределяется между носителями более сложно и элементарная энергия ( $\frac{1}{2} kT$ ) достигается лишь в пределе, при полном возбуждении различных форм движения частиц вещества.

Имея в виду, что

$$dU = \rho c_V dT,$$

для вектора диффузионного переноса энергии в условиях термодинамического равновесия получаем формулу:

$$\vec{q}_T = -a \nabla (\rho c_V T) \frac{\text{см}}{\text{м}^2}. \quad (3,17)$$

Произведение  $a \rho c_V = \lambda$  называют коэффициентом теплопроводности тела, единицей измерения которого служит  $\frac{\text{см}}{\text{м} \cdot \text{град}}$ .

## Формула

$$q_T = -\lambda \nabla T \frac{cm}{m^2} \quad (3,18)$$

выражает известную гипотезу Фурье для распространения тепла в телах. Согласно этой гипотезе, количество тепла, переносимого через единичную площадку в единицу времени, пропорционально градиенту температуры.

Коэффициент диффузионного переноса тепла

$$a = \frac{\lambda}{\rho c_V} \text{ м}^2/\text{сек} \quad (3,19)$$

называется коэффициентом температуропроводности тела.

При переносе тепла в газах средняя скорость носителей энергии — молекул газа — определяется из равенства кинетической энергии молекулы  $\left(\frac{m\bar{c}^2}{2}\right)$  и эквивалентного ей количества тепла  $\left(n \frac{1}{2} kT\right)$ :

$$\frac{m\bar{c}^2}{2} = n \frac{1}{2} kT.$$

Для трех возможных степеней свободы перемещения молекулы в пространстве множитель  $n = 3$ .

Имея в виду, что масса отдельных молекул газа определяется отношением

$$m = \frac{M_M}{N_M},$$

где  $M_M$  — масса одного «моля» газа,

$N_M$  — число молекул в одном «моле»  $\left(N_M = 6,024 \cdot 10^{26} \frac{1}{\text{моль}}\right)$ ,  
а произведение

$$N_M k = R_M = 8,3144 \approx 8,32 \frac{\text{кдж}}{\text{моль} \cdot \text{град}}$$

представляет собой универсальную газовую постоянную, для средней скорости перемещения молекул газа находим следующую формулу:

$$\bar{c} = \sqrt{3 \frac{R_M}{M_M} T} \text{ м/сек.} \quad (3,20)$$

Средняя длина свободного пробега молекул газа ( $\bar{l}$ ), как и других носителей энергии, определяется через условное «эффективное сечение» переноса ( $\Omega$ ) и через число носителей в единичном объеме ( $N$ ):

$$\bar{l} = \frac{1}{N\Omega}. \quad (3,21)$$

Эта формула может быть получена, исходя из следующих элементарных соображений.

Если число носителей, находящихся в каждый момент времени в единичном объеме пространства ( $N$ ), разделить на число элементарных слоев с толщиной, равной среднему пробегу носителей при однократных взаимодействиях с частицами вещества ( $\bar{l}$ ), то получим число мест однократных взаимодействий, отнесенное к единичной площади поперечного сечения  $\left(\frac{N}{1/\bar{l}}\right)$ . Это же число мест определяется отношением единичной площади поперечного сечения к площади эффективного сечения каждого взаимодействия  $\left(\frac{1}{\Omega}\right)$ . Из равенства

$$\frac{N}{1/\bar{l}} = \frac{1}{\Omega}$$

получаем формулу (3,21).

На основании (3,21) коэффициент диффузионного переноса энергии определяется формулой:

$$a = \frac{1}{2} \frac{\bar{c}}{N\Omega} \cdot \quad (3,22)$$

Чем больше средняя скорость перемещения носителей ( $\bar{c}$ ) и чем меньше суммарное эффективное сечение взаимодействий носителей с частицами вещества в единичном объеме ( $N\Omega$ ), тем больше коэффициент диффузионного переноса энергии ( $a$ ). При полном отсутствии взаимодействий понятие диффузионного переноса теряет смысл. В этом предельном случае не существует также и градиента объемной плотности энергии, и лучевой поток носителей определяется формулой (3,8).

Числовой множитель  $\left(\frac{1}{2}\right)$  в формулах (3,16) и (3,22) отвечает приближенному расчету. Но так как коэффициент переноса тепла обычно определяется экспериментально, то приближенный расчет числового множителя не влечет за собой каких-либо погрешностей.

Более важно отметить, что в актах однократного обмена энергией носителей с частицами вещества может и не успевать устанавливаться термодинамическое равновесие. При этом путь свободного пробега носителей  $\bar{l} = \bar{c}\tau$  не будет отвечать требуемому времени, так называемой релаксации микросистемы ( $\tau_* > \tau$ ).

Если, например, для переноса энергии поступательного движения молекул в газах еще можно предположить, что на пути среднего свободного пробега молекул осуществляется переход к термодинамически равновесному состоянию, то в отношении энергии вращательного и колебательного движения молекул время



перехода  $\bar{\tau} = \frac{l}{\bar{c}}$  может быть далеко не достаточным для необходимого времени релаксации микросистемы ( $\tau < \tau_*$  или  $\tau \ll \tau_*$ ).

В этих условиях для определения коэффициента переноса энергии требуется большой путь переноса  $l_* = \bar{c}\tau_*$ .

Для представления о величине среднего пути переноса газовых молекул между соударениями можно привести следующие характерные величины для воздуха при нормальных условиях (давление 760 мм рт. ст., температура 0° С).

Число молекул в единичном объеме  $N \cong 2,7 \cdot 10^{25} \frac{1}{\text{м}^3}$ ; средняя скорость перемещения молекул  $\bar{c} \cong 485$  м/сек; средний свободный пробег молекул  $\bar{l} = 0,85 \cdot 10^{-7}$  м ( $0,85 \cdot 10^{-4}$  мм); среднее время пробега молекул между соударениями  $\bar{\tau} \cong 0,175 \cdot 10^{-9}$  сек.

Таким образом, даже если время релаксации при переносах энергии в газах  $\tau_*$  будет на четыре порядка больше времени пробега молекул между соударениями ( $\frac{\tau_*}{\bar{\tau}} = 10^4$ ), то все же путь переноса  $l_* = \bar{c}\tau_*$  в газах при нормальных условиях будет достаточно мал ( $l_* < 1$  мм). С повышением давления путь переноса энергии в газах еще уменьшится.

Однако в разреженных газах и газах при очень высокой температуре путь переноса энергии  $l_*$ , отвечающий времени релаксации микросистемы, может быть значительным, особенно при переносе таких форм энергии, которые слабо меняются при соударениях молекул (энергия электронов и др.).

Особое значение путь переноса  $l_*$ , отвечающий времени релаксации микросистемы  $\tau_*$  в газах, может иметь в процессах переноса энергии в тонких пограничных слоях текущих масс газа у поверхности обтекаемых тел. При переносе энергии в тонком пограничном слое газа могут быть существенные отклонения от условий термодинамического равновесия. Например, ионизированные молекулы газа в условиях высокой температуры в отдалении от холодной стенки могут легко достигнуть стенки без существенной рекомбинации в пограничном слое.

При рассмотрении переноса энергии с участием других носителей (не газовых молекул) особенности переноса, связанные с релаксацией микросистем, также необходимо учитывать.

В особых случаях теплопроводности, когда длина пути переноса носителей энергии в среде соизмерима или даже больше размеров тела, формула (3,18) не удовлетворяет математическому описанию процесса теплопроводности и для этого требуются иные, более сложные теоретические предпосылки. Однако даже и в этих особых случаях распространения тепла приближенно все же удается применять формулу (3,18) для описания теплопроводности тела.

## § 4. Конвекция

В текущих средах (жидкостях, газах, раздробленных сыпучих массах твердых тел) перенос энергии, помимо теплопроводности, осуществляется перемещением масс среды. Такой конвективный перенос энергии наблюдается, например, при течении жидкостей и газов в различных каналах и при обтекании тел, при течениях воздуха внутри помещений, при различных перемещениях воздушных масс в атмосфере Земли, при течениях в водных пространствах морей и океанов и т. п.

Для определения конвективного переноса массы служит *удельный поток массы*

$$\vec{q}_{\text{конв } M} = \vec{\omega} \rho \frac{kg}{m^2 \text{сек}},$$

где  $\vec{\omega}$  — вектор скорости потока,

$\rho$  — плотность среды.

Удельный поток конвективного переноса тепла определяется произведением вектора конвективного переноса массы ( $\vec{q}_{\text{конв } M}$ ) на тепловую энергию единичной массы ( $c_V T$ ):

$$\vec{q}_{\text{конв } T} = \vec{\omega} \rho c_V T \frac{at}{m^2}. \quad (4.1)$$

Даже при небольших скоростях течения среды ( $\vec{\omega}$ ) удельный поток конвективного переноса тепла значительно превосходит удельный поток переноса тепла теплопроводностью среды ( $\vec{q}_{\text{конв } T} \gg \vec{q}_T$ ). В связи с этим конвективный перенос тепла играет преимущественную роль во многих случаях теплообмена.

Во многих случаях конвективный перенос тепла осуществляется потоками неоднородных сред: газо-жидкостных, паро-жидкостных, капельно-газовых, капельно-паровых, газо-песочных и т. д. (кипящие жидкости, конденсирующиеся пары, распыленные жидкости в газовых и паровых потоках, кипящий слой мелких зерен при продувании газом и т. п.).

Во всех этих и других неоднородных средах конвективный перенос тепла оказывается более сложным, чем в однородных средах жидкостей или газов.

Наряду с тепловой энергией единичной массы среды ( $c_V T$ ) конвекцией переносится также *кинетическая энергия* движущейся среды  $\left(\frac{\omega^2}{2}\right)$  и ее *потенциальная энергия* ( $E_p$ ), которая включает: *энергию давления* ( $p v$ ) и энергию возможных превращений отдельных компонентов среды  $\left(\frac{\sum \rho_i E_i}{\rho}\right)$ , где  $\rho_i$  — парциальная плотность отдельных компонентов,  $E_i$  — соответствующая энергия превращений). Таким образом, в общем случае *вектор конвективного переноса энергии* определяется произведением удельного потока массы

( $\omega Q$ ) на суммарную энергию единичной массы среды:

$$\vec{q}_{\text{конв } E} = \vec{\omega} Q \left( c_V T + p v + \frac{w^2}{2} + \frac{\sum Q_i E_i}{\rho} \right) \frac{\sigma m}{m^2}. \quad (4,2)$$

Как известно, сумма

$$c_V T + p v = i \frac{\partial \epsilon}{\partial \kappa_2}$$

представляет *энтальпию единичной массы среды* и поэтому вектор конвективного переноса энергии определяется формулой:

$$\vec{q}_{\text{конв } E} = \vec{\omega} Q \left( i + \frac{w^2}{2} + \frac{\sum Q_i E_i}{\rho} \right) \frac{\sigma m}{m^2}. \quad (4,3)$$

Необходимо иметь в виду, что при различии концентраций отдельных компонентов среды, в отдельных местах потока осуществляется диффузионный перенос компонентов, а следовательно, и диффузионный перенос потенциальной энергии возможных превращений. Вектор диффузионного переноса потенциальной энергии определяется аналогично вектору диффузионного переноса тепла:

$$\vec{q}_{\text{диф } E} = -D_{i,j} \nabla (Q_i E_i) \frac{\sigma m}{m^2}, \quad (4,4)$$

где  $D_{i,j}$  — коэффициент диффузии  $i$ -ого компонента среды.

## § 5. Турбулентный перенос энергии

В турбулентных потоках жидкостей и газов перенос тепла в значительной мере осуществляется неупорядоченным перемещением или дрейфом отдельных возмущенных клочкообразных масс среды в потоке. Эти дрейфующие, сравнительно большие, массы среды в потоке удается рассматривать как множество отдельных молярных или турбулентных носителей энергии, которые, перемещаясь в различных направлениях пространства, способны переносить энергию. Диффузионный характер дрейфующих турбулентных масс в потоке позволяет применить для определения удельного потока турбулентного переноса энергии формулы, аналогичные молекулярному переносу тепла:

$$\vec{q}_{\text{турб } U} = -a_{\text{турб}} \nabla \bar{U}, \quad (5,1)$$

$$\vec{q}_{\text{турб } T} = -\lambda_{\text{турб}} \nabla \bar{T}, \quad (5,2)$$

где  $\bar{U}$  — средняя во времени объемная плотность энергии среды в данном месте пространства,

$\bar{T}$  — средняя во времени температура среды,

$a_{\text{турб}}$  и  $\lambda_{\text{турб}}$  — коэффициенты турбулентного переноса тепла и теплопроводности.

Коэффициент турбулентного переноса тепла определяется аналогично коэффициенту молекулярного переноса: произведением средней скорости дрейфа ( $\bar{c}_{\text{турб}}$ ) на среднюю длину пути перемещения турбулентных масс при их взаимодействии ( $\bar{l}_{\text{турб}}$ ):

$$a_{\text{турб}} \sim \bar{c}_{\text{турб}} \cdot \bar{l}_{\text{турб}}.$$

Вследствие много большего пути переноса турбулентных масс в потоке среды по сравнению со средней длиной пути переноса молекулярных носителей в среде ( $\bar{l}_{\text{турб}} \gg \bar{l}_{\text{мол}}$ ), несмотря на существенно меньшую скорость дрейфа турбулентных молей ( $\bar{c}_{\text{турб}} < \bar{c}_{\text{мол}}$ ), коэффициенты турбулентного переноса тепла и турбулентной теплопроводности оказываются значительно большими коэффициентов  $a_{\text{мол}}$  и  $\lambda_{\text{мол}}$ .

Коэффициенты турбулентного переноса определяются экспериментально и, как показывает опыт, находятся в зависимости, от турбулентного состояния потока, определяемого скоростью течения масс ( $\omega_1$ ) и характерным геометрическим размером тела ( $l_1$ ), взаимодействующего с потоком (диаметр канала, размер обтекаемого тела):

$$a_{\text{турб}} = \kappa \omega_1 l_1. \quad (5,3)$$

В этой формуле для определения коэффициента турбулентного переноса тепла множитель  $\kappa$  находится экспериментально и, как оказывается, зависит от условий образования турбулентного потока (течение в каналах, обтекание тел, истечение струй) и в некоторой мере зависит от критерия Рейнольдса ( $Re = \frac{\omega_1 l_1}{\nu}$ , где  $\nu$  — кинематическая вязкость среды).

Энергия турбулентных молей ( $\epsilon_{\text{турб}}$ ) определяется энергией всего неоднородного множества молекулярных носителей, заключенных в турбулентных молях. В процессе переноса энергии турбулентными молями вещества в потоке среды одновременно осуществляется сложный нестационарный перенос энергии молекулярными носителями в самих турбулентных молях. В этих условиях интенсивный перенос турбулентных масс в потоке порождает значительную неоднородность температур в пространстве и во времени. Время уничтожения температурных неоднородностей зависит от размеров турбулентных молей, и для описания процесса турбулентного переноса тепла неизбежно приходится пользоваться осредненными значениями температуры. Особенно заметными температурные неоднородности в турбулентном потоке оказываются в местах больших градиентов температур, например у обтекаемой стенки с отводом или притоком тепла на поверхности.

Если среда в турбулентном потоке способна к тем или иным превращениям, то наряду с турбулентным переносом тепла осу-

ществляется турбулентный перенос потенциальной энергии пре-  
вращений компонентов среды:

$$\vec{q}_{\text{турб } E} = -D_{\text{турб}} \nabla (\rho_i E_i), \quad (5,4)$$

где  $D_{\text{турб}}$  — коэффициент турбулентного переноса  $i$ -ого компонента  
среды,

$\rho_i$  — парциальная плотность  $i$ -ого компонента,  
 $E$  — энергия превращения  $i$ -ого компонента.

## § 6. Излучение

В отличие от теплопроводности и конвективного переноса, перенос энергии излучением имеет совершенно иной характер. Носителями лучистой энергии являются электромагнитные волны, или в ином представлении — фотоны. Скорость перемещения этих носителей огромна и в вакууме приблизительно равна  $300 \cdot 10^6$  м/сек (скорость света). Так как все тела, находящиеся в пространстве, имеют температуру, превышающую абсолютный нуль, то все они в той или иной мере способны излучать энергию. Следовательно, в любом месте пространства всегда осуществляется перенос энергии излучением. Лучистый перенос энергии, как и в случаях теплопроводности и конвекции, можно также определить в е к т о р о м и з л у ч е н и я.

Однако простые диффузионные представления о перемещении носителей энергии излучения с равномерной интенсивностью во всех направлениях пространства здесь не всегда применимы, и вектор излучения в общем случае имеет сложный и н т е г р а л ь н ы й характер.

### *А. Перенос энергии излучением*

Интенсивность  $j_l(\nu)$  потока носителей энергии излучения можно определить как вероятное количество фотонов частоты  $\nu$ , переносимых сквозь единичную площадку по направлению  $\vec{l}$  нормали к площадке и поступающих из единичного пространственного угла, расположенного на оси  $\vec{l}$  (рис. 6). Интенсивность энергии излучения  $I_l(\nu)$  по направлению  $\vec{l}$  определяется произведением:

$$I_l(\nu) = j_l(\nu) \varepsilon(\nu), \quad (6,1)$$

где  $\varepsilon(\nu)$  — энергия носителей излучения частоты  $\nu$ .

При прохождении радиации в слое частиц вещества, которые способны взаимодействовать с радиацией, интенсивность энергии излучения  $I_l(\nu)$  изменяется. Если выделить элементарный слой толщиной  $\delta l$ , равной среднему расстоянию между частицами

вещества среды, которая способна поглощать и рассеивать радиацию (рис. 7), то после прохождения радиацией рассматриваемого слоя интенсивность ее ослабляется и может быть определена как

$$I_{l+\delta l}(\nu) = (1 - \delta\varphi_{\text{осл}}) I_l(\nu),$$

где  $\delta\varphi_{\text{осл}} = \frac{\Sigma\delta F_{\text{осл}}}{F}$  — относительное эффективное сечение ослабления радиации в рассматриваемом слое среды ( $\Sigma\delta F_{\text{осл}}$  — суммарная площадь эффективного сечения всех ослабляющих радиацию частиц вещества среды на площади  $F$  в слое  $\delta l$ ).

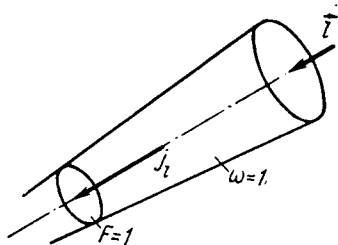


Рис. 6. К определению интенсивности потока носителей энергии излучения

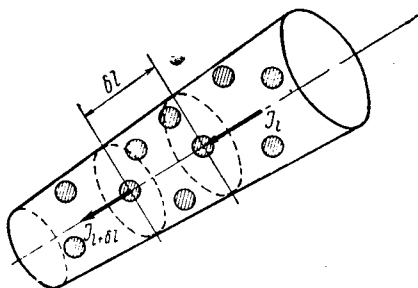


Рис. 7. К определению ослабления интенсивности энергии излучения в слое среды

Интенсивность энергии собственного излучения  $\delta B(\nu)$  частиц вещества среды в рассматриваемом слое толщиной  $\delta l$  определяется произведением относительного эффективного сечения  $\delta\varphi_{\text{изл}}$  лучеиспускания частиц среды в слое на интенсивность энергии собственного излучения вещества  $B(\nu)$ :

$$\delta B(\nu) = \delta\varphi_{\text{изл}} \cdot B(\nu),$$

где  $\delta\varphi_{\text{изл}} = \frac{\Sigma\delta F_{\text{изл}}}{F}$  — относительное эффективное сечение лучеиспускания в рассматриваемом слое среды ( $\Sigma\delta F_{\text{изл}}$  — суммарная площадь эффективного сечения всех излучающих частиц вещества среды на площади  $F$  в слое  $\delta l$ ).

Это собственное излучение вещества среды в слое увеличит интенсивность проходящего через слой излучения  $I_{l+\delta l}(\nu)$  так, что для него можно написать следующее равенство:

$$I_{l+\delta l}(\nu) = (1 - \delta\varphi_{\text{осл}}) I_l(\nu) + \delta\varphi_{\text{изл}} B(\nu).$$

Если не учитывать рассеянной радиации в направлении  $\vec{l}$  и ограничиться лишь собственным излучением среды, то раз-

НОСТЬ

$$I_{l+\delta l}(\nu) - I_l(\nu) = -\delta\varphi_{\text{осл}} I_l(\nu) + \delta\varphi_{\text{изл}} B(\nu)$$

представляет полное изменение интенсивности излучения в слое среды по направлению  $\vec{l}$ .

Допуская линейное соотношение

$$\frac{I_{l+\delta l}(\nu) - I_l(\nu)}{\delta l} = \frac{dI_l(\nu)}{dl},$$

получаем следующее уравнение переноса энергии излучения частоты  $(\nu)$  в ослабляющей и излучающей среде:

$$\frac{dI_l(\nu)}{dl} = -\frac{\delta\varphi_{\text{осл}}}{\delta l} I_l(\nu) + \frac{\delta\varphi_{\text{изл}}}{\delta l} B(\nu). \quad (6,2)$$

Величина  $\frac{\delta\varphi_{\text{осл}}}{\delta l} = \frac{\Sigma\delta F_{\text{осл}}}{F\delta l} \frac{m^2}{m^3}$  представляет собой *относительное эффективное сечение ослабления интенсивности радиации в элементарном слое*. Величину  $\frac{\delta\varphi_{\text{осл}}}{\delta l} = k(\nu)$  1/м называют коэффициентом ослабления среды для интенсивности проходящей радиации.

Ослабление интенсивности радиации в среде в общем случае вызывается *поглощением* и *рассеиванием* радиации частицами вещества. Если обозначить коэффициент ослабления интенсивности радиации вследствие поглощения  $\alpha(\nu)$ , а вследствие рассеяния —  $\beta(\nu)$ , то коэффициент общего ослабления определится суммой:

$$k(\nu) = \alpha(\nu) + \beta(\nu). \quad (6,3)$$

Величина  $\frac{\delta\varphi_{\text{изл}}}{\delta l} = \frac{\Sigma\delta F_{\text{изл}}}{F\delta l} \frac{m^2}{m^3}$  представляет собой *относительное эффективное сечение лучеиспускания вещества в элементарном слое*. Величину  $\frac{\delta\varphi_{\text{изл}}}{\delta l} = \varepsilon_*(\nu)$  1/м можно назвать коэффициентом собственного лучеиспускания слоя среды.

Пользуясь коэффициентами  $k(\nu)$  и  $\varepsilon_*(\nu)$ , уравнение переноса энергии излучения можно представить в следующем виде:

$$\frac{dI_l(\nu)}{dl} = -k(\nu) I_l(\nu) + \varepsilon_*(\nu) B(\nu). \quad (6,4)$$

Произведение коэффициента  $\varepsilon_*(\nu)$  на интенсивность собственного излучения вещества среды  $B(\nu)$  представляет интенсивность  $j_V(\nu)$  собственного излучения единичного объема среды.

Если вещество среды заметно не рассеивает радиацию, а только ее поглощает [ $\beta(\nu) \ll \alpha(\nu)$ ], то

$$\frac{dI_l(\nu)}{dl} = -\alpha(\nu) I_l(\nu) + \varepsilon_*(\nu) B(\nu). \quad (6,5)$$

Если вещество среды обладает только *тепловым, или температурным, излучением*, т. е. излучением, отвечающим тепловому состоянию среды (это излучение отвечает также излучению абсолютно черного тела), то в условиях общего *термодинамического равновесия* среды никакого изменения интенсивности радиации быть не может и, следовательно:

$$\frac{dI_l(\nu)}{dl} = 0,$$

или

$$\alpha(\nu) I_l(\nu) = \epsilon_*(\nu) B(\nu).$$

Так как в условиях *термодинамического равновесия интенсивность радиации частоты* ( $\nu$ ) *однозначно определяется температурой* ( $T$ ), не зависит от свойств среды и тождественно равняется интенсивности энергии излучения абсолютно черного тела при данной температуре  $B(\nu, T)$ , то в этих условиях

$$I_l(\nu) \equiv B(\nu) \equiv B(\nu, T).$$

В соответствии с этим в изотермической среде, способной только к температурному излучению, существует равенство

$$\alpha(\nu) = \epsilon_*(\nu). \quad (6,6)$$

Таким образом, приходим к важному выводу о том, что в условиях *термодинамического равновесия поглотительная и излучательная способности всех веществ для тепловой радиации одинаковы*. В этом заключается закон Кирхгофа для теплового излучения тел.

Если собственное излучение среды  $[\epsilon_*(\nu)B(\nu)]$  оказывается много меньше ослабляемого средой внешнего излучения  $[k(\nu)I_l(\nu)]$

$$\epsilon_*(\nu) B(\nu) \ll k(\nu) I_l(\nu),$$

то уравнение (6,4) переноса энергии излучения в среде переходит в известный закон Бугера:

$$\frac{dI_l(\nu)}{dl} = -k(\nu) I_l(\nu). \quad (6,7)$$

Интегрированием дифференциального уравнения

$$\frac{dI_l(\nu)}{I_l(\nu)} = -k(\nu) dl$$

в пределах заданной толщины слоя между точками  $A$  и  $M$  на пути  $s_{AM}$  (рис. 8), при неизменном коэффициенте ослабления радиации  $k(\nu)$ , получаем интегральную формулу закона Бугера:

$$I_{l, M}(\nu) = I_{l, A}(\nu) e^{-k(\nu)s_{AM}}. \quad (6,8)$$

Произведение  $k(\nu)s_{AM}$  представляет собой безразмерную *оптическую плотность* среды для проходящей через нее радиации.



Эту величину называют также критерием Бугера ( $Bu \equiv ks$ ).

Если коэффициент поглощения в рассматриваемом слое среды  $s_{AM}$  не сохраняется постоянным, то оптическая плотность слоя среды вычисляется интегралом

$$Bu = \int_A^M k(\nu, P) dl,$$

где  $k(\nu, P)$  — коэффициент ослабления радиации в текущем месте  $P$  слоя среды  $s_{AM}$  на расстоянии от  $A$  до  $M$ .

Отношение

$$\frac{I_{l, M}(\nu)}{I_{l, A}(\nu)} = D_{s_{AM}}(\nu) = e^{-\int_A^M k(\nu, P) dl} \quad (6,9)$$

определяет *пропускаемость*, или *прозрачность*, слоя среды толщиной  $s_{AM}$  с оптической плотностью  $Bu = \int_A^M k(\nu, P) dl$  для поступающей в слой радиации  $I_{l, A}(\nu)$ .

Величина

$$A(\nu) = 1 - D_{s_{AM}}(\nu) = 1 - e^{-\int_A^M k(\nu, P) dl} \quad (6,10)$$

определяет ослабляемость этого слоя.

Уравнение (6,4) для переноса энергии излучения можно проинтегрировать и в общем случае, когда собственное излучение среды играет вполне заметную или даже основную роль. Для интегрирования этого *линейного уравнения* достаточно применить следующие физические соображения.

Суммарная интенсивность радиации  $I_{l, M}(\nu)$ , поступающей по направлению  $\vec{l}$  в место  $M$  слоя среды  $s_{AM}$  (рис. 8), складывается из:

1) интенсивности радиации, поступающей в место  $M$  слоя среды  $s_{AM}$  с границы слоя  $A$ , ослабленной в  $e^{-\int_A^M k(\nu, P) dl}$  раз, и

2) суммарной интенсивности радиации, поступающей в место  $M$  от собственных излучений всех элементарных слоев среды в пунктах  $P$ , расположенных на расстоянии от  $A$  до  $M$ , ослабленных в  $e^{-\int_P^M k(\nu, P) dl}$  раз.

Таким образом, решение задачи представится следующим интегральным уравнением:

$$I_{l, M}(\nu) = I_{l, A} e^{-\int_A^M k(\nu, P) dl} + \int_A^M dl \cdot \epsilon_*(\nu, P) B_{l, P}(\nu) e^{-\int_P^M k(\nu, P) dl}, \quad (6,11)$$

где произведение  $dl \cdot \epsilon_*(\nu, P) B_{l, P}(\nu)$  представляет собственное излучение элементарного слоя среды в текущем месте  $P$ .

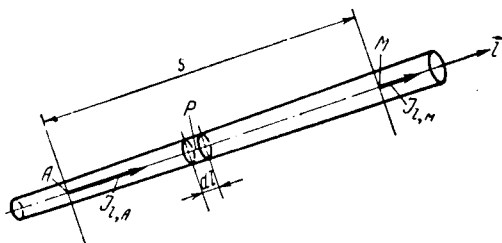


Рис. 8. К выводу интегральной формулы закона Бугера

Для чисто поглощающей среды [ $k(\nu) \equiv \alpha(\nu)$ ] и для собственного температурного излучения среды, подчиняющейся закону Кирхгофа [ $\epsilon_*(\nu) = \alpha(\nu)$ ], интегральное уравнение запишется:

$$I_{l, M} = I_{l, A}(\nu) e^{-\int_A^M k(\nu, P) dl} + \int_A^M dl \cdot \alpha(\nu, P) B_P(\nu, T) e^{-\int_P^M \alpha(\nu, P) dl} \quad (6,12)$$

Для изотермического слоя среды, у которого  $B(\nu, T) \gg I_{l, A}(\nu)$ ,

$$I_{s_{AM}}(\nu, T) = B(\nu, T) [1 - e^{-\alpha(\nu, T) s_{AM}}], \quad (6,13)$$

отношение

$$\frac{I_{s_{AM}}(\nu, T)}{B(\nu, T)} = 1 - e^{-\alpha(\nu, T) s_{AM}} = \epsilon_{s_{AM}}(\nu, T) \quad (6,14)$$

представляет степень черноты температурного лучеиспускания изотермического слоя среды толщиной  $s_{AM}$  с коэффициентом поглощения  $\alpha(\nu, T)$ .

Для слоя, у которого  $\alpha(\nu, T) s_{AM} \gg 1$ ,  $\epsilon_{s_{AM}}(\nu, T) \rightarrow 1$ ; для слоя, у которого  $\alpha(\nu, T) s_{AM} \ll 1$ ,  $\epsilon_{s_{AM}} \rightarrow \alpha(\nu, T) dl$ .

Уравнение переноса энергии излучения можно получить и в общем случае ее распространения при нестационарном процессе накопления или убыли лучистой энергии в рассматриваемом месте пространства. Для определения изменения интенсивности энергии излучения во времени и по направлению воспользуемся понятием так называемой *субстанциональной производной*, которая представляет собой полное изменение той или иной субстанции во времени вследствие ее накопления или убыли в данном месте и вследствие ее конвективного переноса. Применительно к изменению интенсивности энергии излучения частоты  $\nu$  в направлении  $\vec{l}$  имеем:

$$\frac{dI_l(\nu)}{d\tau} = \frac{\partial I_l(\nu)}{\partial \tau} + c \frac{\partial I_l(\nu)}{\partial l},$$

где  $c$  — скорость распространения энергии излучения. Имея в виду, что  $d\tau = \frac{dl}{c}$ , приходим к следующему равенству:

$$\frac{dI_l(\nu)}{dl} = \frac{1}{c} \frac{\partial I_l(\nu)}{\partial \tau} + \frac{\partial I_l(\nu)}{\partial l}. \quad (6,15)$$

В связи с этим уравнение переноса энергии излучения (6,4) для нестационарных процессов ее распространения запишется в виде следующего равенства:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_l(\nu)}{\partial \tau} + \frac{\partial I_l(\nu)}{\partial l} = -\alpha(\nu) I_l(\nu) + \epsilon_*(\nu) B(\nu). \quad (6,16)$$

Интенсивность энергии излучения в рассматриваемом месте пространства является сложной функцией трех координат  $x, y, z$ :

$$I_l(\nu) = I_l(\nu, x, y, z).$$

Согласно правилу дифференцирования сложных функций, имеем:

$$\frac{\partial I_l(\nu)}{\partial l} = \frac{\partial I_l(\nu)}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dl} + \frac{\partial I_l(\nu)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dl} + \frac{\partial I_l(\nu)}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dl}.$$

Вводя направляющие косинусы углов

$$\cos(\vec{l}, \widehat{x}) = \frac{dx}{dl}, \quad \cos(\vec{l}, \widehat{y}) = \frac{dy}{dl}, \quad \cos(\vec{l}, \widehat{z}) = \frac{dz}{dl},$$

уравнение переноса энергии излучения можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial I_l(\nu)}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x} [I_l(\nu) \cos(\vec{l}, \widehat{x})] + \frac{\partial}{\partial y} [I_l(\nu) \cos(\vec{l}, \widehat{y})] + \\ + \frac{\partial}{\partial z} [I_l(\nu) \cos(\vec{l}, \widehat{z})] = -\alpha(\nu) I_l(\nu) + \epsilon_*(\nu) B(\nu). \end{aligned} \quad (6,17)$$

Умножая все члены этого равенства на элементарный телесный угол  $d\omega$  и интегрируя в пределах полного пространственного угла  $\omega = 4\pi$ , получаем:

$$\frac{\partial U(\nu)}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_{(4\pi)} I_l(\nu) \cos(\vec{l}, x) d\omega \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \int_{(4\pi)} I_l(\nu) \cos(\vec{l}, y) d\omega \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \int_{(4\pi)} I_l(\nu) \cos(\vec{l}, z) d\omega \right] = -\alpha(\nu) cU(\nu) + E_V(\nu), \quad (6,18)$$

где  $U(\nu) = \frac{1}{c} \int_{(4\pi)} I_l(\nu) d\omega$  — объемная плотность лучистой энергии,

$E_V(\nu) = \int_{(4\pi)} \epsilon_*(\nu) B(\nu) d\omega$  — представляет собственное излучение среды, находящейся в единичном объеме.

Величины

$$\int_{(4\pi)} I_l(\nu) \cos(\vec{l}, x) d\omega, \quad \int_{(4\pi)} I_l(\nu) \cos(\vec{l}, y) d\omega, \quad \int_{(4\pi)} I_l(\nu) \cos(\vec{l}, z) d\omega$$

позволяют рассматривать их как проекции некоторого вектора  $\vec{q}_l(\nu)$ , который называют вектором лучистого потока энергии. Пользуясь ортами единичного вектора  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , вектор лучистого потока можно определить суммой:

$$\vec{q}_l(\nu) = q_{l,x}(\nu) \vec{i} + q_{l,y}(\nu) \vec{j} + q_{l,z}(\nu) \vec{k}. \quad (6,19)$$

Проекции вектора  $q_{l,x}(\nu), q_{l,y}(\nu), q_{l,z}(\nu)$  представляют собой результирующий перенос лучистой энергии сквозь проекцию площадки на плоскость, перпендикулярную направлениям  $x, y, z$ . Это легко видеть, если написать следующие равенства:

$$\left. \begin{aligned} \int_{(4\pi)} I_l(\nu) \cos(\vec{l}, x) d\omega &= \int_{(+2\pi)} I_{+l}(\nu) \cos(\vec{l}, x) d\omega - \\ - \int_{(-2\pi)} I_{-l}(\nu) \cos(\vec{l}, x) d\omega &= E_{+x}(\nu) - E_{-x}(\nu) = q_{l,x}(\nu), \\ \int_{(4\pi)} I_l(\nu) \cos(\vec{l}, y) d\omega &= \int_{(+2\pi)} I_{+l}(\nu) \cos(\vec{l}, y) d\omega - \\ - \int_{(-2\pi)} I_{-l}(\nu) \cos(\vec{l}, y) d\omega &= E_{+y}(\nu) - E_{-y}(\nu) = q_{l,y}(\nu), \end{aligned} \right\} \quad (6,20)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_{(4\pi)} I_l(\nu) \cos(\vec{l}, \hat{z}) d\omega &= \int_{+2\pi} I_{+l}(\nu) \cos(\vec{l}, \hat{z}) d\omega - \\ - \int_{(-2\pi)} I_{-l} \cos(\vec{l}, \hat{z}) d\omega &= E_{+z}(\nu) - E_{-z}(\nu) = q_{\pi, z}(\nu), \end{aligned} \right\}$$

где  $E_{+x}(\nu)$ ;  $E_{+y}(\nu)$ ;  $E_{+z}(\nu)$  — удельные лучистые потоки в направлениях  $+x$ ,  $+y$ ,  $+z$  сквозь проекцию площадки на плоскость, перпендикулярную  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ;

$E_{-x}(\nu)$ ;  $E_{-y}(\nu)$ ;  $E_{-z}(\nu)$  — то же в направлениях  $-x$ ,  $-y$ ,  $-z$ .

Применительно к задачам светотехники лучистый вектор был использован В. А. Фоком. В теории электромагнитного поля вектор переноса энергии известен как вектор Умова — Пойнтинга. Существование вектора, определяющего удельную плотность потока энергии в общем случае, установлено Н. А. Умовым.

Пользуясь вектором лучистого потока, уравнение распространения энергии излучения можно записать в виде:

$$\frac{\partial U(\nu)}{\partial \tau} + \frac{\partial q_{\pi, x}(\nu)}{\partial x} + \frac{\partial q_{\pi, y}(\nu)}{\partial y} + \frac{\partial q_{\pi, z}(\nu)}{\partial z} = E_V(\nu) - \alpha(\nu) cU(\nu), \quad (6,21)$$

или, применяя векторную операцию  $\operatorname{div} \vec{q}_{\pi}(\nu)$ , имеем:

$$\frac{\partial U(\nu)}{\partial \tau} + \operatorname{div} \vec{q}_{\pi}(\nu) = E_V(\nu) - \alpha(\nu) cU(\nu). \quad (6,22)$$

Это уравнение и является уравнением распространения энергии излучения частоты  $\nu$ . Оно выражает равенство, согласно которому накопление или убыль энергии излучения в единицу времени в единичном объеме пространства в сумме с величиной расхождения вектора лучистого потока представляет результирующее излучение среды в единице объема в рассматриваемый момент времени. При этом результирующее излучение определяется разностью собственного излучения среды  $E_V(\nu)$  и поглощенного ею излучения  $\alpha(\nu)cU(\nu)$  в единичном объеме.

Особый интерес представляет распространение лучистой энергии в условиях локального термодинамического равновесия среды. В этих условиях результирующее излучение в рассматриваемом месте равно нулю как для отдельных участков спектра ( $\nu$ ), так и для всего спектра частот излучения  $\nu$  от 0 до  $\infty$ :

$$E_V(T) - \alpha cU(T) = 0, \quad (6,23)$$

где  $E_V(T) = \epsilon_*(T)4\pi B(T)$  — температурное излучение среды в единичном объеме;

$U(T) = \frac{1}{c} 4\pi B(T)$  — объемная плотность температурного излучения.

Из равенства

$$E_V(T) = \alpha cU(T)$$

следует уже известное соотношение коэффициентов излучения и поглощения среды при температурном равновесии (закон Кирхгофа):

$$\frac{\epsilon_*}{\alpha} = 1. \quad (6,24)$$

При условии термодинамического равновесия уравнение распространения лучистой энергии представится в следующем виде:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \operatorname{div} \vec{q}_\pi = 0 \quad (6,25)$$

или в раскрытой форме это уравнение запишется:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\partial q_{\pi, x}}{\partial x} + \frac{\partial q_{\pi, y}}{\partial y} + \frac{\partial q_{\pi, z}}{\partial z} = 0.$$

Полученное уравнение представляет общую теорему Н. А. Умова о переносе энергии, согласно которой «всегда существуют три функции  $q_x$ ,  $q_y$ ,  $q_z$ , обладающие тем свойством, что сумма их первых производных по осям  $x$ ,  $y$ ,  $z$  дает уменьшение плотности энергии в единицу времени в данной точке тела. Эти функции могут быть названы токами энергии».

В общем случае при отсутствии термодинамического равновесия в среде для излучения всех возможных частот спектра от 0 до  $\infty$  уравнение распространения лучистой энергии запишется в виде:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \operatorname{div} \vec{q}_\pi = \int_{(4\pi)} d\omega \int_0^\infty \epsilon_*(\nu) B(\nu) d\nu - \int_{(4\pi)} d\omega \int_0^\infty \alpha(\nu) I_l(\nu) d\nu. \quad (6,26)$$

## § 7. Уравнение распространения энергии

### А. Общий случай распространения энергии

В общем случае перенос энергии различными носителями осуществляется в нестационарных условиях ее накопления или убыли и сопровождается разными действующими источниками энергии. Последними могут быть, например, электронагрев, работа сил внутреннего трения в текущей, сжимаемой и деформируемой среде и т. п.

Баланс энергии в общем случае ее распространения можно записать следующим равенством:

$$dQ_\tau = d(Q_{\text{диф}} + Q_{\text{конв}} + Q_{\text{луч}}) + dQ_\pi. \quad (7,1)$$

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Изменение энергии в объеме } V \\ \text{за время } d\tau, \text{ } d\varepsilon \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} \text{Приток энергии в объем } V \\ \text{диффузией, конвекцией и} \\ \text{излучением за время } d\tau, \\ \text{ } d\varepsilon \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{l} \text{Общая производность источников энергии в} \\ \text{в объеме } V \text{ за время } d\tau, \text{ } d\varepsilon \end{array} \right]$$

Рассмотрим подробнее отдельные члены записанного равенства:  
 1) изменение энергии в объеме  $V$  за время  $dt$  складывается из изменения тепловой энергии среды, находящейся в объеме  $V$ ,

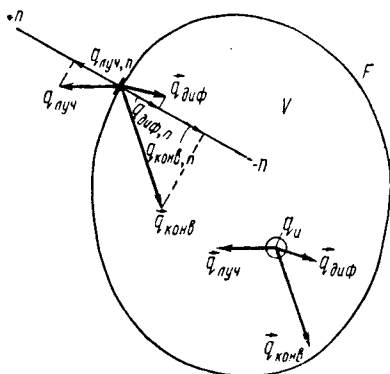


Рис. 9. К выводу уравнения распространения энергии

изменения ее кинетической энергии, изменения потенциальной энергии среды и изменения лучистой энергии ( $U_{\text{луч}}$ ) в объеме  $V$ :

$$dQ_{\tau} = \int_{(V)} d(\rho c_v T) dV + \int_{(V)} d\left(\rho \frac{\omega^2}{2}\right) dV + \int_{(V)} d(\rho E_n) dV + \int_{(V)} dU_{\text{луч}} dV; \quad (7,2)$$

2) результирующий перенос энергии диффузией, конвекцией и излучением осуществляется через ограничивающую поверхность  $F$  рассматриваемого объема  $V$  и за время  $d\tau$  составит следующую величину:

$$d(Q_{\text{диф}} + Q_{\text{конв}} + Q_{\text{луч}}) = - \oint_{(F)} (q_{\text{диф}, n} + q_{\text{конв}, n} + q_{\text{луч}, n}) dF \cdot d\tau, \quad (7,3)$$

где  $q_{\text{диф}, n}$ ,  $q_{\text{конв}, n}$ ,  $q_{\text{луч}, n}$  — проекции векторов диффузионного и конвективного переноса энергии, а также вектора излучения энергии на направление внешней нормали  $\vec{n}$  к элементу поверхности  $dF$  (рис. 9);

3) производительность источников энергии в объеме  $V$  за время  $d\tau$  представляет следующий интеграл:

$$dQ_{\text{и}} = \int_{(V)} q_{\text{и}}(V) dV d\tau, \quad (7,4)$$

где  $q_{\text{и}}(V) \frac{\text{вт}}{\text{м}^3}$  — удельная производительность, или мощность, всех источников энергии в данном месте объема  $V$ .

В результате подстановки (7,2), (7,3) и (7,4) в (7,1) получаем равенство

$$\int_{(V)} \left[ d(\rho c_V T) + d\left(\rho \frac{\omega^2}{2}\right) + d(\rho E_{\Pi}) + dU_{\text{луч}} \right] dV = \\ = - \oint_{(F)} (q_{\text{диф}, n} + q_{\text{конв}, n} + q_{\text{луч}, n}) dF \cdot d\tau + \int_{(V)} q_{\Pi}(V) dV d\tau. \quad (7,5)$$

Пользуясь теоремой Остроградского — Гаусса о преобразовании поверхностного интеграла в объемный, имеем:

$$\oint_{(F)} (q_{\text{диф}, n} + q_{\text{конв}, n} + q_{\text{луч}, n}) dF = \int_{(V)} \text{div}(\vec{q}_{\text{диф}} + \vec{q}_{\text{конв}} + \vec{q}_{\text{луч}}) dV,$$

где  $\text{div}(\vec{q}_{\text{диф}} + \vec{q}_{\text{конв}} + \vec{q}_{\text{луч}})$  — дивергенция, или расхождение, суммарного вектора переноса энергии в единичном объеме диффузией, конвекцией и излучением.

Пользуясь этим равенством, баланс энергии в рассматриваемом объеме  $V$  можно представить следующим интегралом:

$$\int_{(V)} \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \rho c_V T + \rho \frac{\omega^2}{2} + \rho E_{\Pi} + U_{\text{луч}} \right) + \right. \\ \left. + \text{div}(\vec{q}_{\text{диф}} + \vec{q}_{\text{конв}} + \vec{q}_{\text{луч}}) - q_{\Pi} \right] dV = 0. \quad (7,6)$$

Так как равенство нулю этого интеграла сохраняется для произвольного объема  $V$ , то оно будет выполняться и для любого кусочного объема.

При условии непрерывности изменения всех подынтегральных функций  $T$ ,  $E_{\Pi}$ ,  $U_{\text{луч}}$ ,  $\vec{q}_{\text{диф}}$ ,  $\vec{q}_{\text{конв}}$ ,  $\vec{q}_{\text{луч}}$ ,  $q_{\Pi}$  будет выполняться равенство нулю и всей подынтегральной суммы:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \rho c_V T + \rho \frac{\omega^2}{2} + \rho E_{\Pi} + U_{\text{луч}} \right) + \\ + \text{div}(\vec{q}_{\text{диф}} + \vec{q}_{\text{конв}} + \vec{q}_{\text{луч}}) - q_{\Pi} = 0. \quad (7,7)$$

Полученное равенство и представляет собой уравнение распространения энергии в различных телах и средах. Отдельные члены этого уравнения выражают изменения и результирующие переносы различных видов энергии в единичном объеме в единицу времени  $\frac{em}{m^3}$ ; рассмотрим их подробнее:

$E_{\Pi} = pv + \frac{\sum \rho_i E_i}{\rho}$  — потенциальная энергия единичной массы среды, включающая энергию давления  $\left( pv = \frac{p}{\rho} \right)$  и энергию возможных превращений в среде (фазовых, химических, атомных);



$\vec{q}_{\text{диф}} = \vec{q}_T + \vec{q}_{\text{диф}} E = -a \nabla (\rho c_V T) - \Sigma D_{i,j} \nabla (\rho_i E_i)$  — вектор диффузионного переноса энергии, представляющий суммарный диффузионный перенос тепла ( $\rho c_V T$ ) и потенциальной энергии возможных превращений в среде ( $\Sigma \rho_i E_i$ );

$\vec{q}_{\text{конв}} = \vec{\omega} \rho \left( i + \frac{\omega^2}{2} + \frac{\Sigma \rho_i E_i}{\rho} \right)$  — вектор конвективного переноса энергии, который включает конвективный перенос: энтальпии ( $i$ ), кинетической энергии  $\left( \frac{\omega^2}{2} \right)$  и потенциальной энергии возможных превращений  $\left( \frac{\Sigma \rho_i E_i}{\rho} \right)$  единичной массы среды;

$\vec{q}_{\text{луч}}$  — вектор лучистого потока энергии, определяемый составляющими  $q_{\text{луч}, x_i} = \int_0^{\infty} d\nu \int_{(4\pi)} I_l(\nu) \cos(\vec{l}, x_i) d\omega$  ( $i = 1, 2, 3$ ), где  $\nu$  — спектральная частота излучения,  $I_l(\nu)$  — интенсивность энергии излучения,  $d\omega$  — элементарный телесный угол;

$q_{\text{и}}$  — удельная производительность (мощность) различных источников энергии в единичном объеме (работа внутреннего трения, электронагрев и т. п.).

Имея в виду, что сумма  $c_V T + p\nu = c_p T \equiv i \frac{\partial \rho c}{\partial \rho}$  представляет собой энтальпию единичной массы среды, и заменив вектор переноса тепла  $a c_V \nabla (\rho c_V T)$  на эквивалентную величину  $a c_p \nabla (\rho i)$ , уравнение распространения энергии можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \rho \left( i + \frac{\omega^2}{2} + \frac{\Sigma \rho_i E_i}{\rho} \right) \right] + \text{div} \left[ \vec{\omega} \rho \left( i + \frac{\omega^2}{2} + \frac{\Sigma \rho_i E_i}{\rho} \right) \right] + \text{div} \left[ -a \nabla (\rho i) - \Sigma D_{i,j} \nabla (\rho_i E_i) \right] + \frac{\partial U_{\text{луч}}}{\partial \tau} + \text{div} \vec{q}_{\text{луч}} = q_{\text{и}}. \quad (7,8)$$

Если кинетическую энергию движения единичной массы среды  $\left( \frac{\omega^2}{2} \right)$  представить эквивалентной величиной энтальпии среды:

$$\frac{\omega^2}{2} = c_p \theta_{\text{кин}},$$

то можно ввести условное понятие кинетической температуры движущейся массы среды:

$$\theta_{\text{кин}} = \frac{\omega^2}{2c_p}. \quad (7,9)$$

Сумма температур, отвечающих тепловому состоянию среды ( $T$ ) и кинетической энергии движущихся масс среды ( $\theta_{\text{кин}}$ ), представит обобщенную условную температуру ( $T_*$ ):

$$T_* = T + \theta_{\text{кин}} \text{ } ^\circ\text{K}. \quad (7,10)$$

Эта условная температура отвечает тепловому состоянию полностью заторможенной среды и поэтому называется температурой торможения.

При больших скоростях перемещения масс среды или при движении тел в среде с большой скоростью кинетическая температура ( $\theta_{\text{кин}}$ ) может быть не только соизмеримой, но и значительно превышать температуру теплового состояния среды ( $\theta_{\text{кин}} > T$ ).

По пути введения условных температур для характеристики процессов переноса и превращения энергии можно пойти и далее. Можно, например, ввести условное понятие температур для энергий различных превращений компонентов в среде: фазовых, химических, атомных;

$$\Sigma \theta_{\text{превр}} = \theta_{\text{фаз}} + \theta_{\text{хим}} + \theta_{\text{ат}}, \quad (7,11)$$

где  $\theta_{\text{фаз}} = \frac{\rho_{\text{фаз}} E_{\text{фаз}}}{\rho c_p}$  — температура фазового превращения в среде;

$\theta_{\text{хим}} = \frac{\rho_{\text{хим}} E_{\text{хим}}}{\rho c_p}$  — температура химического превращения в среде;

$\theta_{\text{ат}} = \frac{\rho_{\text{ат}} E_{\text{ат}}}{\rho c_p}$  — температура атомного превращения в среде;

$\rho_{\text{фаз}}, \rho_{\text{хим}}, \rho_{\text{ат}}$  — парциальные плотности компонентов среды, подвергаемых соответствующим превращениям;

$E_{\text{фаз}}, E_{\text{хим}}, E_{\text{ат}}$  — энергии соответствующих превращений единичной массы компонентов;

$\rho c_p = \Sigma \rho_i c_{p_i}$  — сумма произведений парциальной плотности и теплоемкости отдельных компонентов среды (суммарная плотность среды  $\rho = \Sigma \rho_i$ ).

Таким образом, температура возможного теплового состояния движущейся среды, подвергаемой различным превращениям, представится суммой:

$$T_{**} = T + \theta_{\text{кин}} + \Sigma \theta_{\text{превр}} \text{ } ^\circ\text{K}. \quad (7,12)$$

Для сред, способных взаимодействовать с внешним излучением в различных частях спектра, сумма членов, представляющих изменение лучистой энергии в единичном объеме в единицу времени, определяется разностью энергии собственного излучения среды, находящейся в единичном объеме ( $E_{\text{изл}} V$ ), и энергии поглощенного средой внешнего падающего излучения ( $E_{\text{полг}} V$ ).

На этом основании имеем равенство

$$\frac{\partial U_{\text{луч}}}{\partial \tau} + \text{div } \vec{q}_{\text{луч}} = E_{\text{изл}} V - E_{\text{полг}} V, \quad (7,13)$$

где  $E_{\text{изл}} V = \int_{(4\pi)} d\omega \int_0^\infty \epsilon_*(\nu) B(\nu) d\nu$  — собственное излучение сре-

ды в единичном объеме:  $\varepsilon_*(\nu)$  — коэффициент собственного лучеиспускания,  $B(\nu)$  — интенсивность энергии собственного излучения частоты  $\nu$ ,  $d\omega$  — элементарный телесный угол,

$$E_{\text{погл } \nu} = \int_{(4\pi)} d\omega \int_0^{\infty} \alpha(\nu) I_l(\nu) d\nu - \text{поглощенное излучение среды в единичном объеме: } \alpha(\nu) - \text{коэффициент поглощения, } I_l(\nu) - \text{интенсивность энергии внешнего падающего излучения.}$$

Пользуясь понятием условных температур, уравнение распространения различных форм энергии, включая и энергию излучения, можно представить в следующей форме:

$$\frac{\partial \rho_{c_p} T_{**}}{\partial \tau} + \text{div} (\vec{\omega} \rho_{c_p} T_{**} - \lambda \nabla T - \Sigma D_i, j \nabla \rho_{c_p} \theta_{\text{превр}}) + E_{\text{изл } \nu} - E_{\text{погл } \nu} = q_n. \quad (7,14)$$

Целесообразно отметить, что это *общее интегро-дифференциальное уравнение распространения энергии* отражает существование связи различных изменений состояния текущей среды в любом месте со всеми окружающими местами пространства. Связь эта осуществляется через интенсивность собственного излучения среды в рассматриваемом месте  $[B(\nu)]$ , и интенсивность падающего излучения  $[I_l(\nu)]$  из окружения. Такая дальнедействующая связующая роль излучения позволяет проводить оптические измерения и управлять процессами изменения состояния среды с помощью радиационных воздействий.

### Б. Частные случаи распространения энергии

Для сред, неспособных к испусканию и поглощению энергии излучения (*лучепрозрачные среды*), а также для сред, малопрозрачных для излучения и *находящихся с излучением в термодинамическом равновесии* ( $\frac{\partial U_{\text{луч}}}{\partial \tau} + \text{div} \vec{q}_{\text{луч}} = 0$ ), уравнение распространения энергии запишется в виде:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \rho \left( i + \frac{w^2}{2} + \frac{\Sigma \rho_i E_i}{\rho} \right) \right] + \text{div} \left[ \vec{\omega} \rho \left( i + \frac{w^2}{2} + \frac{\Sigma \rho_i E_i}{\rho} \right) \right] + \text{div} [ -a \nabla (\rho i) - \Sigma D_i, j \nabla (\rho_i, E_i) ] = q_n. \quad (7,15)$$

Пользуясь понятием условных температур, это уравнение представится в иной форме:

$$\frac{\partial \rho_{c_p} T_{**}}{\partial \tau} + \text{div} (\vec{\omega} \rho_{c_p} T_{**} - \lambda \nabla T - \Sigma D_i, j \nabla \rho_{c_p} \theta_{\text{превр}}) = q_n. \quad (7,16)$$

В частном случае *стационарного режима и при отсутствии каких-либо источников энергии* (электронагрев, работа трения

и пр.) уравнение распространения энергии сводится к равенству

$$\operatorname{div}(\vec{\omega} \rho c_p T_{**} - \lambda \nabla T - \Sigma D_{i,j} \rho c_p \theta_{\text{превр}}) = 0. \quad (7,17)$$

Для *нейтральных сред*, неспособных к каким-либо превращениям компонентов с освобождением или связыванием энергии потенциальной формы ( $\Sigma \rho_i E_i = 0$ ) и без учета излучения, уравнение (7,16) запишется в виде:

$$\frac{\partial(\rho c_p T_{**})}{\partial \tau} + \operatorname{div}(\vec{\omega} \rho c_p T_{**} - \lambda \nabla T) = q_{\text{н}}. \quad (7,18)$$

Если, кроме того, скорость течения среды достаточно мала ( $\theta_{\text{кин}} \ll T$ ), то получаем следующее *уравнение конвективно-теплопроводного переноса тепла при нестационарном режиме с источниками*:

$$\frac{\partial(\rho c_p T)}{\partial \tau} + \operatorname{div}(\vec{\omega} \rho c_p T - \lambda \nabla T) = q_{\text{н}}. \quad (7,19)$$

В частном случае нейтральной неподвижной среды ( $\omega = 0$ ) получаем *уравнение распространения тепла теплопроводностью*:

$$\frac{\partial(\rho c_p T)}{\partial \tau} + \operatorname{div}(-\lambda \nabla T) = q_{\text{н}}. \quad (7,20)$$

Все эти частные формы уравнения распространения энергии являются исходными уравнениями при решении различных конкретных задач теплопередачи.

## § 8. Перенос энергии в среде на границе с поверхностью тела

Перенос энергии в среде на границе с поверхностью тела осложняется тем, что в приграничном слое носители энергии обмениваются не только с частицами среды, но и с частицами тела. Если, однако, число носителей энергии столь велико, а средний свободный пробег их в среде столь мал, что на обмене энергией в граничном слое среды не сказываются особенности обмена энергией на граничной поверхности тела, то диффузионный характер перемещения носителей в среде сохраняется во всех слоях среды до самой границы с поверхностью тела. При этом условии перенос энергии в граничном слое среды можно рассматривать на основе тех же соображений, которые были положены в основу вывода уравнения переноса энергии теплопроводностью (см. § 2).

Выделим элементарный слой среды на границе с телом толщиной, равной среднему пробегу носителей энергии (рис. 10). Допуская в этом слое, как и в других слоях, отдаленных от поверхности тела, диффузионный характер перемещения носителей энергии со средней скоростью  $\bar{c}$ , для определения результирующего переноса энергии в приграничном слое среды по направле-

нию нормали к поверхности  $F$  имеем следующую формулу:

$$q_{F, 1} = \frac{1}{2} \bar{c} (U_F - U_1), \quad (8,1)$$

где  $(U_F - U_1)$  — разность объемных плотностей энергии в приграничном элементарном слое среды.

Во всех последующих элементарных слоях среды, начиная от приграничного слоя, диффузионный перенос энергии по направлению

нормали к поверхности определяется аналогичными формулами удельных потоков тепла:

$$q_{F, 2} = \frac{1}{2} \bar{c} (U_1 - U_2),$$

.....

$$q_{F, \infty} = \frac{1}{2} c (U_n - U_\infty).$$

В пограничном слое среды у стенки осуществляется конвективный перенос тепла текущими элементарными слоями среды. При больших градиентах скоростей, возникающих в элементарных слоях при обтекании поверхности тел с очень большими скоростями, выделяется большое количество тепла трения. При соответствующих перепадах температур в погранич-

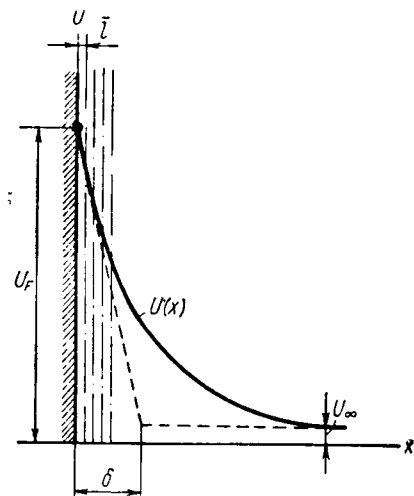


Рис. 10. К определению переноса энергии в среде на границе с поверхностью тела

ном слое могут иметь место различные превращения компонентов среды (фазовые, химические). Во всех указанных случаях удельные потоки тепла  $q_{F, 1}, q_{F, 2}, \dots$  в элементарных слоях пограничного слоя по направлению к стенке будут различными. Если, однако, заменить путь переноса энергии по направлению нормали к поверхности тела, на котором осуществляется перепад объемной плотности энергии  $(U_F - U_\infty)$ , условным слоем  $\delta$ , состоящим из  $n$  элементарных слоев  $\bar{l}$  с равномерным перепадом объемной плотности энергии в каждом элементарном слое

$$\frac{U_i - U_{i+1}}{\bar{l}} = \frac{U_F - U_\infty}{\delta},$$

т. е. допустить прямолинейный характер изменения объемной плотности энергии в пограничном слое (рис. 10), то для удельного потока переноса энергии к стенке получаем формулу:

$$q_F = \frac{1}{2} \bar{c} \bar{l} (U_F - U_\infty). \quad (8,2)$$

В условиях *локального термодинамического равновесия* в среде

$$U_F - U_\infty = \bar{q}c_V (T_F - T_\infty),$$

где  $\bar{q}c_V$  — средняя объемная теплоемкость среды,  
 $T_F - T_\infty$  — разность температур среды на границе с поверхностью тела и в отдалении от нее.

Имея в виду, кроме того, что  $\frac{1}{2} \bar{c}l = a$  представляет коэффициент диффузионного переноса тепла, а произведение  $a\bar{q}c_V = \lambda$  — коэффициент теплопроводности, приходим к следующей формуле переноса тепла с поверхности тела в окружающую среду:

$$q_F = \frac{\lambda}{\delta} (T_F - T_\infty). \quad (8,3)$$

Множитель  $\frac{\lambda}{\delta} = \alpha$  отражает эквивалентный перенос тепла теплопроводностью на пути перепада температур ( $T_F - T_\infty$ ) и представляет собой коэффициент теплообмена тела с окружающей средой:

$$q_F = \alpha (T_F - T_\infty). \quad (8,4)$$

Полученная формула отвечает известному закону Ньютона—Рихмана для определения теплоотдачи тел в окружающей среде. Множитель  $\alpha$  называют также коэффициентом теплоотдачи, единицей измерения которого служит

$$\frac{вт}{м^2град}.$$

Чем толще слой среды ( $\delta$ ), в котором осуществляется условный перенос энергии теплопроводностью с заданным перепадом температур ( $T_F - T_\infty$ ), тем меньше коэффициент теплоотдачи ( $\alpha$ ). Чем больше коэффициент теплопроводности среды ( $\lambda$ ), тем больше коэффициент теплоотдачи.

При обтекании тела средой слой с заданным перепадом температур располагается вблизи границы тела, и толщина этого слоя ( $\delta$ ) оказывается тем меньшей, чем больше удельный поток среды относительно поверхности тела ( $w\varrho$ ) (рис. 11).

Помимо скорости обтекания, на толщину пограничного слоя существенное влияние оказывают размеры и форма поверхности тела, а также температура среды. Все эти факторы соответствующим образом влияют и на коэффициент теплоотдачи ( $\alpha$ ). В третьей части курса будут подробно рассмотрены все факторы, определяющие коэффициент теплоотдачи для различных случаев обтекания тел различными средами. Здесь отметим лишь, что все те факторы, которые способствуют уменьшению пути переноса  $\delta$ , будут способствовать и повышению коэффициента теплоотдачи  $\alpha$ . Исходя из этих соображений, отыскиваются и способы интенсификации теплообмена.

Следует отметить, что в тонких пограничных слоях среды у стенки перенос энергии в некоторых случаях может осуществляться при отсутствии локального термодинамического равновесия, например при переносе энергии носителями, отличающимися большой энергией и скоростью перемещения. В этих условиях коэффициент теплоотдачи среды к поверхности тела будет более высоким.

Во многих случаях перенос энергии в среде на границе с поверхностью тела осложняется: помимо теплопроводности среды,

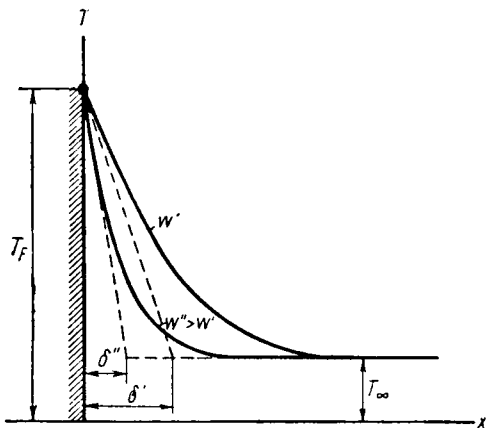


Рис. 11. Распределение температур в пограничном слое среды у стенки при различных скоростях течения

осуществляется радиационный перенос энергии, может осуществляться диффузионный и конвективный перенос энергии средой, истекающей из массы тела; на границе тела в среде могут иметь место химические и фазовые превращения (горение, сублимация, испарение, кипение жидкости, конденсация пара). Все эти и другие сложные условия приходится учитывать при рассмотрении конкретных задач переноса энергии на границе с поверхностью тела.

Для того чтобы судить, насколько различен коэффициент теплоотдачи в отдельных случаях переноса энергии, приведем некоторые его величины, полученные из опыта. В условиях естественной конвекции воздуха у поверхности плоской стенки при комнатной температуре  $\alpha = 10^0 \div 10^1 \text{ вт/м}^2\text{град}$ . В условиях вынужденного течения этого же воздуха в зависимости от скорости перемещения коэффициент теплоотдачи может быть  $\alpha = 10^1 \div 10^2 \text{ вт/м}^2\text{град}$ . При турбулентном течении жидкостей в трубах, в зависимости от рода жидкости и скорости течения, коэффициент теплоотдачи находится в широком диапазоне изменения от  $10^2$  до  $10^4 \text{ вт/м}^2\text{град}$ . В условиях кипения различных жидкостей

и конденсации паров величина  $\alpha$  находится в диапазоне  $10^3 \div 10^5 \text{ вт/м}^2\text{град}$  и выше.

В заключение следует отметить, что полученная формула для определения переноса энергии с поверхности тела в окружающую среду

$$q_F \sim c(U_F - U_\infty)$$

имеет общий характер для различных видов переноса энергии.

В четвертом разделе курса будет показано, что радиационный перенос энергии с поверхности излучающего тела в окружающую среду также определяется подобной формулой:

$$q_{F, \text{луч}} \sim \bar{c}(U_{F, \text{луч}} - U_{\infty, \text{луч}}),$$

где  $U_{F, \text{луч}}$  и  $U_{\infty, \text{луч}}$  — объемные плотности лучистой энергии на границе тела и в отдалении от него.

Таким образом, на основании детального рассмотрения различных видов переноса энергии приходим к выводу о том, что *результатирующий перенос энергии во всех случаях осуществляется в сторону меньшей объемной плотности энергии и пропорционален скорости носителя и разности объемных плотностей энергии на пути переноса.*



## ПЕРЕНОС МАССЫ

Перенос массы среды в пространстве может осуществляться как путем диффузионного проникновения отдельных носителей массы в сторону меньшей концентрации их, так и путем течения масс. Во всех случаях перенос массы сопровождается и переносом энергии, а во многих случаях и различными превращениями ее компонентов. Такой перенос массы осуществляется, например, в процессах испарения, кипения, конденсации, сублимации, окисления, горения и т. п. Перенос массы осуществляется также в различных природных процессах: в атмосфере Земли, в земной коре, в водоемах, в живых организмах, растениях и т. п. Знание закономерностей процессов переноса массы, сопутствующих переносу энергии, необходимо для расчета различных технологических реакторов и аппаратов.

Наиболее разработанной является теория переноса массы в газовых средах. Как и в случае переноса энергии, молекулярно-кинетическая теория газов позволяет выяснить основные закономерности явления переноса массы. Строгое изложение теории переноса массы в неоднородных газах сложно. Здесь, как и в теории переноса энергии, ограничимся упрощенными представлениями о переносе массы в неоднородных газовых средах.

### § 9. Диффузионный перенос массы газа

#### *А. Молекулярный перенос массы*

Для рассмотрения молекулярного диффузионного переноса массы в газе, состоящем из нескольких разнородных молекул, выделим элементарный плоскопараллельный слой толщиной  $\bar{l}_i$ , равной средней длине свободного пробега  $i$ -ых молекул газа.

В условиях равномерно распределенной интенсивности перемещения  $i$ -ых молекул газа во всех направлениях пространства

со средней скоростью  $\bar{c}_i$ , которая в изотермических условиях диффузии сохраняется неизменной, количество молекул, входящих и выходящих сквозь единицу площади первой границы рассматриваемого слоя, определяется формулой:

$$q_{x, i} = \frac{1}{2} \bar{c}_i N'_i \frac{[1]}{m^2 \text{сек}}, \quad (9,1)$$

где  $N'_i$  — объемная концентрация  $i$ -ых молекул газа на первой границе рассматриваемого слоя.

Количество молекул, выходящих и входящих сквозь единицу площади второй границы слоя, составит:

$$q''_{x+i, i} = \frac{1}{2} \bar{c}_i N''_i, \quad (9,2)$$

где  $N''_i$  — объемная концентрация  $i$ -ых молекул газа на второй границе рассматриваемого слоя.

Множитель  $1/2$  в этих формулах учитывает количество молекул, перемещаемых в обоих направлениях  $+x$  и  $-x$ .

Разность  $(q'_{x, i} - q''_{x+i, i})$  определяет результирующий перенос  $i$ -ых молекул газа после однократного соударения их в рассматриваемом слое.

Если масса  $i$ -ых молекул  $m_i$ , то формула для определения результирующего переноса массы  $i$ -ых молекул газа в рассматриваемом слое представится в следующем виде:

$$q_{x, i} = \frac{1}{2} \bar{c}_i (N'_i m_i - N''_i m_i) \frac{\text{кг}}{m^2 \text{сек}}. \quad (9,3)$$

Если концентрация  $i$ -ых молекул газа на обеих границах слоя сохраняется неизменной, то результирующий перенос массы в слое отсутствует:

$$q_{x, i} = 0.$$

Переходя от рассматриваемого слоя толщиной  $\bar{l}_i$  к элементарному слою толщиной  $dx$  и пользуясь простым линейным соотношением

$$\frac{N'_i - N''_i}{\bar{l}_i} = - \frac{dN_i}{dx},$$

а также имея в виду, что  $N_i m_i = \rho_i$  есть парциальная плотность массы  $i$ -ых молекул газа, для определения удельного потока массы  $i$ -ых молекул получаем следующую формулу:

$$q_{x, i} = - \frac{1}{2} \bar{c}_i \bar{l}_i \frac{\partial \rho_i}{\partial x} \frac{\text{кг}}{m^2 \text{сек}}. \quad (9,4)$$

В условиях диффузионного перемещения молекул аналогично определяются и удельные потоки массы  $i$ -ых молекул газа

и в других направлениях:

$$q_{y, i} = -\frac{1}{2} \bar{c}_i \bar{l}_i \frac{\partial Q_i}{\partial y};$$

$$q_{z, i} = -\frac{1}{2} \bar{c}_i \bar{l}_i \frac{\partial Q_i}{\partial z}.$$

Формула (9,4) выражает известную гипотезу Фика для определения диффузии в газах.

Величины  $q_{x, i}$ ,  $q_{y, i}$ ,  $q_{z, i}$  для диффузии  $i$ -ых молекул газа в направлениях  $x$ ,  $y$ ,  $z$  в каждом месте пространства можно рассматривать как проекции некоторого вектора  $\vec{q}_i$  в направлении  $\vec{l}$ , так что

$$\vec{q}_i \cos(\vec{l}, \hat{x}) = q_{x, i}; \quad \vec{q}_i \cos(\vec{l}, \hat{y}) = q_{y, i}; \quad \vec{q}_i \cos(\vec{l}, \hat{z}) = q_{z, i}.$$

Вектор  $\vec{q}_i$  называют вектором диффузии массы.

Величины  $\frac{\partial Q_i}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial Q_i}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial Q_i}{\partial z}$  представляют собой изменение скалярной величины парциальной плотности массы  $i$ -ых молекул газа в направлениях  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$ ,  $\vec{z}$  и определяются как проекции векторной величины *градиента парциальной плотности* среды  $\text{grad } Q_i$ , или  $\nabla Q_i$ .

Таким образом, для определения вектора диффузии массы получаем следующую формулу:

$$\vec{q}_i = -D_{i, j} \nabla Q_i \frac{\kappa z}{m^2 \text{сек}}. \quad (9,4')$$

Множитель  $D_{i, j} = \frac{1}{2} \bar{c}_i \bar{l}_i \text{ м}^2/\text{сек}$ , представляющий произведение средней скорости перемещения  $i$ -ых молекул газа ( $\bar{c}_i$ ) на среднюю длину пробега их ( $\bar{l}_i$ ), называется коэффициентом диффузионного переноса, или коэффициентом диффузии. Помимо параметров, определяющих состояние газа (температуры и давления), коэффициент диффузии  $i$ -ых молекул в газе зависит и от рода других компонентов газовой смеси. Поэтому целесообразно для коэффициента диффузии применять двойные индексы  $D_{i, j}$ , где под  $j$  понимается ряд других компонентов в газовой смеси.

### Б. Турбулентная диффузия

В турбулентном потоке неоднородной среды отдельные возмущенные массы дрейфуют в пространстве, и таким образом осуществляется диффузионный перенос массы среды большими

носителями — турбулентными молями. Турбулентную диффузию определяют аналогично молекулярной диффузии вектором турбулентного переноса массы:

$$\vec{q}_{\text{турб. } i} = -D_{\text{турб}} \nabla \bar{Q}_i, \quad (9,5)$$

где  $D_{\text{турб}}$  — коэффициент турбулентной диффузии, который аналогично другим коэффициентам переноса определяется произведением средней скорости дрейфа турбулентных масс среды ( $\bar{c}_{\text{турб}}$ ) на среднюю длину пути перемещения турбулентных носителей ( $\bar{l}_{\text{турб}}$ ).

Как и в случаях турбулентного переноса тепла, коэффициент турбулентной диффузии определяется экспериментально и зависит от скорости турбулентного потока ( $w_1$ ) и характерного размера тела ( $l_i$ ), с которым взаимодействует турбулентный поток:

$$D_{\text{турб}} = \kappa w_1 l_i \frac{m^2}{\text{сек}},$$

где множитель  $\kappa$  отвечает конкретным условиям турбулентной диффузии (течение в каналах, обтекание тел, струйное течение).

Как и в случаях турбулентной теплопроводности, коэффициент турбулентной диффузии масс определяется экспериментальным путем.

Вследствие значительно большего пути переноса турбулентных масс среды в сравнении с длиной пути переноса молекулярных носителей ( $\bar{l}_{\text{турб}} \gg l_{\text{мол}}$ ) коэффициент турбулентной диффузии оказывается много больше коэффициента молекулярной диффузии:

$$D_{\text{турб}} \gg D_{\text{мол}}$$

Перенос турбулентных масс в пространстве порождает значительную неоднородность концентрации  $i$ -го вещества среды и неизбежно сопровождается нестационарной внутренней молекулярной диффузией в отдельных турбулентных молях. Поэтому в описании процесса турбулентной диффузии приходится пользоваться осредненной парциальной плотностью  $\bar{Q}_i$ .

## 10. Уравнение переноса массы

В общем случае перенос массы среды, как и перенос энергии, осуществляется в нестационарных условиях ее накопления или убыли, а также в условиях различных превращений отдельных компонентов вещества среды.

Баланс массы в условиях переноса  $i$ -го вещества среды представляет равенство:

$$dM_i = d(M_{\text{диф } i} + M_{\text{конв } i}) + dM_{\text{превр } i}; \quad (10,1)$$

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Изменение массы} \\ i\text{-го вещества сре-} \\ \text{ды в объеме } V \\ \text{за время } d\tau, \text{ кг} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} \text{Приток массы} \\ i\text{-го вещества} \\ \text{в объеме } V \text{ диффу-} \\ \text{зией и конвекцией} \\ \text{за время } d\tau, \text{ кг} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{l} \text{Приток или убыль} \\ \text{массы } i\text{-го веще-} \\ \text{ства в объеме } V \\ \text{в результате раз-} \\ \text{личных превраще-} \\ \text{ний за время } d\tau, \text{ кг} \end{array} \right]$$

1) изменение массы  $i$ -го вещества в объеме  $V$  за время  $d\tau$  определяется интегралом:

$$dM_i = \int_{(V)} d\rho_i \cdot dV, \quad (10,2)$$

где  $\rho_i$  — парциальная плотность  $i$ -го вещества массы среды;

2) результирующий перенос массы  $i$ -го вещества диффузией и конвекцией осуществляется через ограничивающую поверхность  $F$  рассматриваемого объема  $V$  и за время  $d\tau$  составит:

$$d(M_{\text{диф } i} + M_{\text{конв } i}) = - \oint_{(F)} (q_{\text{диф } i, n} + q_{\text{конв } i, n}) dF \cdot d\tau, \quad (10,3)$$

где  $q_{\text{диф } i, n} = -D_i, j \frac{\partial \rho_i}{\partial n}$  и  $q_{\text{конв } i, n} = \omega_n \rho_i$  — проекции векторов диффузионного ( $\vec{q}_{\text{диф } i}$ ) и конвективного ( $\vec{q}_{\text{конв } i}$ ) переноса массы  $i$ -го вещества на направление внешней нормали  $\vec{n}$  к элементу поверхности  $dF$ ;

3) приток или убыль  $i$ -го вещества среды в объеме  $V$  за время  $d\tau$  в результате превращения среды представляет интеграл

$$dM_{\text{превр } i} = \int_{(V)} q_{\text{превр } i}(V) \cdot dV \cdot d\tau, \quad (10,4)$$

где  $q_{\text{превр } i}(V)$  — удельная производительность процесса превращения  $i$ -го вещества в данном месте объема  $V$ .

В результате подстановки (10,2), (10,3) и (10,4) в (10,1) получаем равенство:

$$\int_{(V)} d\rho_i dV = - \oint_{(F)} (q_{\text{диф } i, n} + q_{\text{конв } i, n}) dF \cdot d\tau + \int_{(V)} q_{\text{превр } i}(V) \cdot dV \cdot d\tau.$$

Согласно теореме Остроградского — Гаусса, заменяем поверхностный интеграл  $\oint_{(F)}$  на объемный  $\int_{(V)}$ :

$$\oint_{(F)} (q_{\text{диф } i, n} + q_{\text{конв } i, n}) dF = \int_{(V)} \text{div} (\vec{q}_{\text{диф } i} + \vec{q}_{\text{конв } i}) dV,$$

где  $\text{div}(\vec{q}_{\text{диф } i} + \vec{q}_{\text{конв } i})$  представляет дивергенцию или расхождение суммарного вектора переноса массы  $i$ -го вещества среды в единичном объеме путем диффузии и конвекции.

Пользуясь этим равенством, баланс массы  $i$ -го вещества среды в объеме  $V$  можно представить интегралом

$$\int_{(V)} \left[ \frac{\partial \rho_i}{\partial \tau} + \text{div}(\vec{q}_{\text{диф } i} + \vec{q}_{\text{конв } i}) - q_{\text{превр } i} \right] dV = 0. \quad (10,5)$$

Так как равенство нулю этого интеграла сохраняется для произвольного объема  $V$ , то оно будет выполняться и для любого кусочного объема. При условии непрерывности изменения всех подынтегральных функций  $\rho_i$ ,  $\vec{q}_{\text{диф } i}$ ,  $\vec{q}_{\text{конв } i}$ ,  $\vec{q}_{\text{превр } i}$  будет выполняться равенство нулю и всей подынтегральной суммы:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial \tau} + \text{div} \vec{q}_{\text{диф } i} + \text{div} \vec{q}_{\text{конв } i} - q_{\text{превр } i} = 0. \quad (10,6)$$

Полученное равенство представляет собой уравнение переноса  $i$ -го вещества среды в условиях его превращения. Отдельные члены этого уравнения представляют изменение и переносы  $i$ -го реагирующего вещества среды в единичном объеме в единицу времени [кг/м<sup>3</sup>сек].

В этом уравнении основной переменной величиной является парциальная плотность  $\rho_i$   $i$ -го реагирующего вещества среды.

Так как общая плотность среды в отдельных местах объема равняется сумме парциальных плотностей ее отдельных компонентов ( $\rho_i$ )

$$\rho = \sum \rho_i, \quad (10,7)$$

то в любом месте объема суммарный результирующий диффузионный перенос всех парциальных плотностей должен равняться нулю:

$$\sum \text{div} \vec{g}_{\text{диф } i} = 0.$$

Это условие отвечает взаимности диффузионного переноса компонентов среды в единичном объеме. В частном случае двухкомпонентной системы для одномерной диффузии имеем следующее условие взаимности диффузионных потоков:

$$g_{\text{диф } 1, 2} = g_{\text{диф } 2, 1},$$

или

$$-D_{1, 2} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} = -D_{2, 1} \frac{\partial \rho_2}{\partial x}.$$

Суммарная производительность процесса превращения всех веществ, согласно закону сохранения массы, также не может изменить общей плотности среды в объеме, и поэтому

$$\sum q_{\text{превр } i} = 0.$$

Таким образом, условие сохранения общей массы в единичном объеме требует соблюдения следующего равенства:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \operatorname{div}(\vec{w}\rho) = 0, \quad (10,8)$$

где  $\rho$  — общая плотность среды.

Уравнение (10,8) называют уравнением сплошности текущей среды; оно справедливо при условии, что текущие массы среды не имеют разрывов. Поэтому уравнение (10,8) называется также уравнением неразрывности.

В раскрытом виде уравнение (10,8) запишется:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x}(w_x \rho) + \frac{\partial}{\partial y}(w_y \rho) + \frac{\partial}{\partial z}(w_z \rho) = 0. \quad (10,9)$$

Для несжимаемой среды  $\rho = \text{const}$  в стационарных условиях течения уравнение сплошности переходит в более простое дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0 \quad (10,10)$$

или в векторной форме

$$\operatorname{div} \vec{w} = 0. \quad (10,11)$$

## § 11. Уравнение переноса массы в частных случаях

Уравнение (10,6) описывает различные случаи переноса массы. Ниже рассматриваются некоторые частные случаи уравнения переноса массы.

### А. Уравнение диффузии

При диффузии в неподвижных средах конвективный перенос массы отсутствует ( $\vec{q}_{\text{конв } i} = 0$ ), и уравнение (10,6) для этих условий запишется в виде:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \tau} + \operatorname{div} \vec{q}_{\text{диф } i} = q_{\text{превр } i}. \quad (11,1)$$

В раскрытом виде получаем следующее дифференциальное уравнение диффузии:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial x} \left( D_{i,j} \frac{\partial Q_i}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( D_{i,j} \frac{\partial Q_i}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( D_{i,j} \frac{\partial Q_i}{\partial z} \right) = q_{\text{превр } i}. \quad (11,2)$$

При условии постоянства коэффициента диффузии во всех местах среды имеем:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \tau} - D_{i,j} \Delta Q_i = q_{\text{превр } i}, \quad (11,3)$$

где  $\Delta Q_i = \frac{\partial^2 Q_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q_i}{\partial z^2}$  — оператор Лапласа.

В частном случае стационарной диффузии и при отсутствии в среде каких-либо процессов превращения массы

$$\Delta q_i = 0. \quad (11,4)$$

Решением этого дифференциального уравнения Лапласа является функция распределения парциальной плотности  $i$ -го вещества в среде  $q_i(x, y, z)$ .

Для случая стационарной диффузии  $i$ -го компонента в среде, находящегося в плоскопараллельном слое в поперечном направлении с постоянным коэффициентом диффузии  $D_{i,j}$ , решение дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 q_i}{dx^2} = 0 \quad (11,5)$$

дает следующую функцию распределения:

$$q_i(x) = C_1 + C_2 x,$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные интегрирования.

Последние можно определить по известной величине удельного потока диффузии  $q_{\text{диф } i}$  и известным концентрациям на границах слоя  $q_i'$  и  $q_i''$ .

При  $x=0$   $q_i' = C_1$ ; при  $x=s$   $q_i'' = q_i' + C_2 s$ , откуда  $C_2 = -\frac{q_i' - q_i''}{s}$ .

Удельный поток диффузии определяется формулой

$$q_{\text{диф } i} = -D_{i,j} \frac{dq_i}{dx} = -D_{i,j} C_2,$$

или

$$q_{\text{диф } i} = D_{i,j} \frac{q_i' - q_i''}{s}. \quad (11,6)$$

Распределение парциальной плотности  $i$ -го компонента среды при его диффузии в плоскопараллельном слое отвечает уравнению:

$$q_i(x) = q_i' - \frac{q_{\text{диф } i}}{D_{i,j}} x. \quad (11,7)$$

#### *Б. Уравнение диффузии в условиях конвективного переноса массы*

Уравнение диффузии в условиях конвективного переноса массы без каких-либо ее превращений в среде запишется в виде:

$$\frac{\partial q_i}{\partial \tau} + \text{div } \vec{q}_{\text{диф } i} + \text{div } \vec{q}_{\text{конв } i} = 0. \quad (11,8)$$

Особенно простым случаем является диффузионно-конвективный перенос массы в стационарном одномерном потоке с постоянной скоростью  $w$  и постоянным коэффициентом диффузии  $D_{i,j}$ .



Для этого случая имеем следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 q_i}{dx^2} - \frac{w}{D_{i,j}} \frac{dq_i}{dx} = 0. \quad (11,9)$$

Интегралом этого дифференциального уравнения является следующая функция распределения  $i$ -го вещества в среде:

$$q_i(x) = C_1 + C_2 e^{\frac{w}{D_{i,j}} x}, \quad (11,10)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные интегрирования.

Применительно к конвективно-диффузионному переносу  $i$ -го компонента среды, движущейся в направлении к поверхности  $F$ , расположенной поперек одномерного потока, произвольные постоянные интегрирования определяются заданными начальными плотностями текущей среды: начальной  $q_i'$  и конечной  $q_i''$  на границе с поверхностью  $F$  (рис. 12).

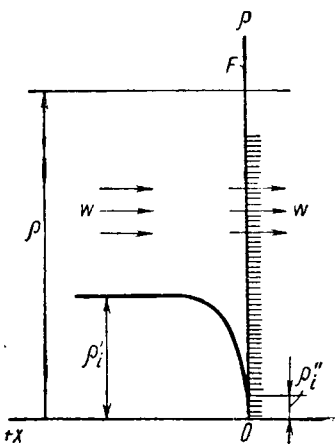


Рис. 12 Распределение парциальной плотности массы среды в одномерном потоке в условиях конвективно-диффузионного переноса массы

При  $x = 0$   $q_i'' = C_1 + C_2$ ;

при  $\frac{wx}{D_{i,j}} \gg 1$  или  $x \gg \frac{D_{i,j}}{w}$   $q_i' = C_1$ ,

откуда находим:

$$C_2 = -(q_i' - q_i'').$$

Таким образом, получаем следующее уравнение распределения концентрации в одномерном потоке среды:

$$q_i(x) = q_i' - (q_i' - q_i'') \exp\left(-\frac{wx}{D_{i,j}}\right). \quad (11,11)$$

Вычислим толщину граничного слоя, в котором осуществляется изменение концентрации  $i$ -го компонента среды, протекающей сквозь этот слой к поверхности тела, расположенного поперек потока. Для слоя, в котором осуществляется перепад парциальной плотности  $q_i$  на 99% от ее полного перепада ( $q_i' - q_i''$ ), или соответственно для отношения  $\frac{q_i' - q_i(x)}{q_i' - q_i''} = \frac{1}{100}$  (1%) находим:

$$\delta = 4,606 \frac{D_{i,j}}{w}.$$

Коэффициент диффузии различных газов находится в пределах от  $10^{-5}$  до  $10^{-6}$  м<sup>2</sup>/сек. Для скорости течения  $w = 1$  м/сек толщина граничного слоя оказывается менее 0,05 мм. Таким образом, диффузионный перенос вещества в набегающем потоке осуществляется в весьма тонком пограничном слое.

Удельный поток диффузионного переноса вещества в рассматриваемых условиях определяется выражением

$$q_{\text{диф } i} = -D_{i,j} \left. \frac{dQ_i}{dx} \right|_{x=0} = \omega (Q_i - Q_i^{\text{н}}) \frac{\kappa z}{m^2 \text{сек}}. \quad (11,12)$$

Сопоставляя полученную формулу с формулой переноса тепла к поверхности тела из окружающей среды:

$$q_{\text{T}} = \alpha_{\text{T}} (T_0 - T_{\text{F}}) \frac{\sigma m}{m^2},$$

замечаем аналогю в процессах переноса тепла и массы:

$$q_{\text{M}_i} = \alpha_{\text{M}_i} (Q_{i,0} - Q_{i,F}) \frac{\kappa z}{m^2 \text{сек}}. \quad (11,13)$$

Коэффициент  $\alpha_{\text{M}_i}$  называют коэффициентом массоотдачи, который имеет единицу измерения  $\text{м/сек}$ .

Для рассмотренного случая одномерного *сквозного потока* среды коэффициент массоотдачи определяется скоростью потока

$$\alpha_{\text{M}_i} = \omega \text{ м/сек}. \quad (11,14)$$

В условиях обтекания средой поверхности тела граничный слой с перепадом концентрации диффундирующего вещества в среде получается значительно большим, чем при сквозном течении. Соответственно уменьшается коэффициент массоотдачи:

$$\alpha_{\text{M}_i \text{обтек}} < \alpha_{\text{M}_i \text{сквозн}}.$$

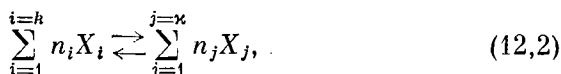
## § 12. Уравнение диффузии в условиях конвективного переноса массы и ее химического превращения

Уравнение (10,6) распространения концентрации вещества в условиях его химического превращения в текущей среде представляется в следующем виде:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \tau} + \text{div } \vec{q}_{\text{диф } i} + \text{div } \vec{q}_{\text{конвт}} = q_{\text{хим } i}, \quad (12,1)$$

где, кроме известных величин,  $q_{\text{хим } i}$  — удельная объемная производительность процесса химического превращения, или скорость химической реакции,  $\kappa \text{г/м}^3 \text{сек}$ .

Формула процессов химического превращения в реагирующей системе веществ записывается в следующем символическом виде:



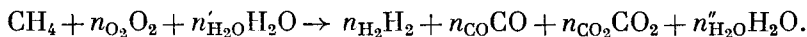
где  $X_i$  и  $X_j$  — исходные ( $i$ ) и конечные ( $j$ ) продукты реакции;  $n_i$  и  $n_j$  — соответствующие стехиометрические коэффициенты.

Этой формуле отвечает равенство, представляющее баланс молекулярных масс исходных ( $M_i$ ) и конечных ( $M_j$ ) продуктов реа-

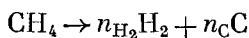
гирующей системы:

$$\sum_{i=1}^{i=h} n_i M_i = \sum_{j=1}^{j=\kappa} n_j M_j. \quad (12,3)$$

Химические превращения могут быть весьма разнообразными. Например, в условиях *термической диссоциации среды* получают продукты, содержащие более простые молекулярные образования, атомы и ионизированные частицы вещества. В *реакциях окисления углеводородов*, в зависимости от наличия кислорода в исходной системе веществ, могут получаться различные продукты. Например, в результате реакции *конверсии метана* с участием водяного пара получают следующие продукты:



Термический крекинг метана



дает углерод сажи и водород.

Удельная производительность, или скорость, химической реакции в каждый момент времени определяется результирующей скоростью прямой и обратной реакции:

$$q_{\text{хим } i, j} = q_{\text{хим } i} - q_{\text{хим } j} \frac{\kappa j}{\mu^3 \text{сек}}. \quad (12,4)$$

Скорости прямой и обратной реакций определяются *законом действующих масс* и *законом Аррениуса*, учитывающим влияние температуры. В соответствии с этими законами для определения  $q_{\text{хим } i}$  и  $q_{\text{хим } j}$  можно записать следующие формулы:

$$q_{\text{хим } i} = K_h e^{-\frac{E_{\text{акт } i}}{R_M T}} \cdot \prod_1^h q_i^{n_i}; \quad (12,5)$$

$$q_{\text{хим } j} = K_{\kappa} e^{-\frac{E_{\text{акт } j}}{R_M T}} \cdot \prod_1^{\kappa} q_j^{n_j}, \quad (12,6)$$

где  $K_h$  и  $K_{\kappa}$  — множители пропорциональности в формулах скоростей прямой и обратной реакций;

$h$  и  $\kappa$  — числа, представляющие порядок реакции;

$E_{\text{акт } i}$  и  $E_{\text{акт } j}$  — соответствующие энергии активации;

$R_M$  — газовая постоянная моля ( $R_M \cong 8,32 \frac{\text{кдж}}{\text{моль} \cdot \text{град}}$ );

$T$  — температура;

$\prod_1^h q_i^{n_i}$  и  $\prod_1^{\kappa} q_j^{n_j}$  — произведения концентраций реагирующих исходных ( $i$ ) и конечных ( $j$ ) компонентов среды в степенях,

соответствующих стехиометрическим коэффициентам ( $n_i$  и  $n_j$ ).

Величину  $\frac{E_{\text{акт}}}{R_M} = \theta_{\text{акт}}$  можно рассматривать как некоторую характерную температуру, отвечающую активному состоянию частиц вещества, вступающих в химическую реакцию. Например, для газовых реакций  $E_{\text{акт}} = 4 \cdot 10^4 \div 4 \cdot 10^5 \frac{\text{кдж}}{\text{моль}}$  и соответствующая характерная температура  $\theta_{\text{акт}} = 5 \cdot 10^3 \div 5 \cdot 10^4 \text{ К}$ . Эта температура на один-два порядка превышает среднюю кинетическую температуру всех газовых молекул.

В условиях термодинамического равновесия реагирующей системы веществ скорости прямой и обратной реакции одинаковы:

$$q_{\text{хим } i} = q_{\text{хим } j}. \quad (12,7)$$

Результирующая скорость процесса химического превращения в этих условиях равна нулю ( $q_{\text{хим } i, j} = 0$ ).

Из этого условия находится так называемая константа термодинамического равновесия реагирующей системы:

$$\frac{K_{\kappa} \prod_1^{\kappa} q_j^{n_j}}{K_k \prod_1^n q_i^{n_i}} = \exp \left( - \frac{E_{\text{акт } i} - E_{\text{акт } j}}{R_M T} \right).$$

Так как отношение коэффициентов пропорциональности  $\frac{K_{\kappa}}{K_k}$  для данной реагирующей системы представляет постоянное число, то в качестве константы термодинамического равновесия принимается размерное отношение:

$$K_{\text{равн } p} = \frac{\prod_1^{\kappa} q_j^{n_j}}{\prod_1^n q_i^{n_i}} = \frac{K_k}{K_{\kappa}} \exp \left( - \frac{E_{\text{акт } i} - E_{\text{акт } j}}{R_M T} \right). \quad (12,8)$$

Разность  $E_{\text{акт } i} - E_{\text{акт } j} = \Delta Z$  представляет собой изменение *изобарного термодинамического потенциала*, который для выбранного стандартного состояния реагирующей системы называется *нормальным средством*.

Так как для выбранного стандартного состояния изобарный термодинамический потенциал  $Z$  зависит только от температуры, то, следовательно, и *константа термодинамического равновесия определяется только температурой*.

Константы равновесия химических реакций выражают также через *молярные концентрации* реагирующих веществ:

$$C_i = \frac{Q_i}{M_i}, \quad C_j = \frac{Q_j}{M_j}, \quad (12,9)$$

где  $M_i, M_j$  — молекулярная масса;

$$K_{\text{равн } c} = \frac{\prod_1^{\kappa} c_j^{n_j}}{\prod_1^{\kappa} c_i^{n_i}}. \quad (12,10)$$

Для газов молярные концентрации связаны с *парциальными* давлениями:

$$C_i = \frac{p_i}{R_M T}. \quad (12,11)$$

В связи с этим константу равновесия для газовых реакций выражают также через парциальные давления реагирующих компонентов:

$$K_{\text{равн } p} = \frac{\prod_1^{\kappa} p_j^{n_j}}{\prod_1^{\kappa} p_i^{n_i}}. \quad (12,12)$$

При этом

$$K_{\text{равн } p} = K_{\text{равн } c} (R_M T)^{\sum n_j - \sum n_i}. \quad (12,13)$$

Сумма парциальных давлений всех компонентов газовой смеси определяет ее общее давление (закон Дальтона):

$$\sum_{i=1}^{i=k} p_i + \sum_{j=1}^{j=\kappa} p_j = p. \quad (12,14)$$

В условиях  $K_{\text{равн}} \approx 1$  результирующая скорость реакции определяется разностью скоростей прямой и обратной реакций:

$$q_{\text{хим } i, j} = K_{\text{к}} e^{-\frac{E_{\text{акт } i}}{R_M T}} \prod_1^k q_i^{n_i} - K_{\text{к}} e^{-\frac{E_{\text{акт } j}}{R_M T}} \prod_1^{\kappa} q_j^{n_j}. \quad (12,15)$$

В условиях  $K_{\text{равн}} \gg 1$  результирующая скорость реакции, или удельная производительность процесса химического превращения вещества, определяется лишь прямой реакцией:

$$q_{\text{хим } i} = K_{\text{к}} e^{-\frac{E_{\text{акт } i}}{R_M T}} q_1^{n_1} \cdot q_2^{n_2} \dots \quad (12,16)$$

Пользуясь этой формулой, уравнение распространения концентрации химически реагирующего вещества ( $Q_1$ ) в потоке напишем в следующем виде:

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \tau} + \text{div}(\vec{\omega} Q_1 - D_{1, j} \nabla Q_1) = K_{\text{к}} e^{-\frac{E_{\text{акт } 1}}{R_M T}} Q_1^{n_1} Q_2^{n_2} \dots \quad (12,17)$$

Уравнение это представляет собой баланс рассматриваемого реагирующего компонента массы среды, согласно которому долж-

но выполняться следующее равенство:

$$\left[ \begin{array}{c} \text{Изменение (на-} \\ \text{копление или} \\ \text{убыль) во вре-} \\ \text{мени веществ-} \\ \text{ва } Q_1 \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \text{Результирую-} \\ \text{щий конвек-} \\ \text{тивный и диф-} \\ \text{фузионный пе-} \\ \text{ренос веществ-} \\ \text{ва } Q_1 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \text{Удельная про-} \\ \text{изводитель-} \\ \text{ность веществ-} \\ \text{ва } Q_1 \end{array} \right]$$

Решение этого нелинейного дифференциального уравнения позволяет получить распределение концентрации реагирующего вещества в пространстве и во времени  $Q_1(x, y, z, \tau)$ . Так как удельная производительность процесса химического превращения ( $q_{\text{хим}}$ )

в сильной мере зависит от температуры ( $\sim e^{-\frac{E_{\text{акт}}}{R_M T}}$ ), то для решения задачи о распределении концентрации  $Q_1$  необходимо привлечь совместное уравнение распространения энергии и реагирующего вещества.

### § 13. Конвективно-диффузионный перенос энергии химически реагирующей среды

Освобождаемая или связываемая энергия в процессе химического превращения рассматриваемого вещества (*энергия реакции*), согласно закону сохранения энергии, находится как *разность энергий образования конечных и исходных продуктов* реагирующей системы:

$$E_{\text{хим } M_1} = \sum_{j=1}^{j=k} n_j E_{M_j} - \sum_{i=1}^{i=h} n_i E_{M_i} \frac{\text{кджс}}{\text{моль}}, \quad (13,1)$$

где  $E_{\text{хим } M_1}$  — энергия реакции одного моля реагирующего вещества  $M_1$ ;

$E_{M_j}$  и  $E_{M_i}$  — энергии образования соответствующих конечных и исходных продуктов реакций;

$n_j$  и  $n_i$  — соответствующие стехиометрические коэффициенты в формуле химической реакции.

Мощность, или удельная производительность, источника энергии химической реакции ( $q_{\text{хим } E} \frac{\text{вт}}{\text{м}^3}$ ) находится как произведение:

$$q_{\text{хим } E} = q_{\text{хим } Q_1} E_{\text{хим } Q_1}, \quad (13,2)$$

где  $q_{\text{хим } Q_1}$  — удельная производительность процесса химического превращения вещества  $Q_1$ ;

$E_{\text{хим } Q_1} = \frac{E_{\text{хим } M_1}}{M_1}$  — энергия реакции, отнесенная к единице массы реагирующего вещества,  $\frac{\text{кджс}}{\text{кг}}$  ( $M_1$  — молекулярная масса, или моль, реагирующего вещества).

Путем умножения всех членов уравнения распространения концентрации реагирующего вещества на энергию реакции  $E_{\text{хим } \rho_1}$  получаем соответствующее *уравнение распространения химической энергии*:

$$\frac{\partial (\rho_1 E_{\text{хим } \rho_1})}{\partial \tau} + \text{div} [\vec{\omega} \rho_1 E_{\text{хим } \rho_1} - D_{1, j} \nabla (\rho_1 E_{\text{хим } \rho_1})] = q_{\text{хим } E}. \quad (13,3)$$

Уравнение это выражает балансовое равенство:

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Изменение (на-} \\ \text{копление или} \\ \text{убыль) хими-} \\ \text{ческой энергии} \\ \text{во времени} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{l} \text{Результирующий} \\ \text{конвективный и} \\ \text{диффузионный} \\ \text{перенос химичес-} \\ \text{кой энергии} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} \text{Производитель-} \\ \text{ность, или моц-} \\ \text{ность, источника} \\ \text{химической энер-} \\ \text{гии} \end{array} \right]$$

Уравнение распространения концентрации химически реагирующих компонентов в потоке среды (уравнение 12,17) и соответствующее ему уравнение (13,3) для распространения химической энергии в потоке наряду с распространением энергии различных форм

$$\frac{\partial \rho_c T_*}{\partial \tau} + \text{div} (\vec{\omega} \rho_c T_* - \lambda \nabla T) + E_{\text{изл } V} - E_{\text{полг } V} = q_{\text{н}} - q_{\text{хим } E} \quad (13,4)$$

могут быть привлечены для решения задач о распределении концентраций и температур в потоке химически реагирующих сред.

Однако, если не ставить задачу о нахождении распределения концентраций реагирующих компонентов в потоке среды, а ограничиться *задачей переноса энергии*, то достаточно воспользоваться одним общим уравнением (7,14), которое включает и перенос химической энергии (левую часть уравнения 13,3). Такое рассмотрение переноса общей энергии дает возможность обойти весьма большие трудности, возникающие при решении совместной задачи о распределении температуры и концентрации реагирующих компонентов в среде.

Рассмотрим для примера задачу о конвективно-диффузионном переносе энергии в одномерном стационарном потоке химически реагирующей среды.

Если не учитывать энергии излучения и других источников энергии, то для одномерного потока с ограниченной скоростью ( $\theta_{\text{кин}} \ll T$ ) имеем следующее дифференциальное уравнение распространения энергии (записанное в форме изменения различных температур):

$$\omega \frac{d(T + \theta_{\text{хим}})}{dx} - \frac{d}{dx} \left( a \frac{dT}{dx} \right) - \frac{d}{dx} \left( D \frac{d\theta_{\text{хим}}}{dx} \right) = 0. \quad (13,4')$$

Допуская в первом приближении равенство коэффициентов диффузионного переноса энергии и массы ( $a \approx D$ ) и обозначая

$T_* = T + \theta_{\text{хим}}$ , имеем:

$$\frac{d^2 T_*}{dx^2} - \frac{w}{a} \frac{dT_*}{dx} = 0. \quad (13,5)$$

Применительно к переносу энергии потоком среды к поверхности тела с температурой  $T_F$ , расположенного поперек потока

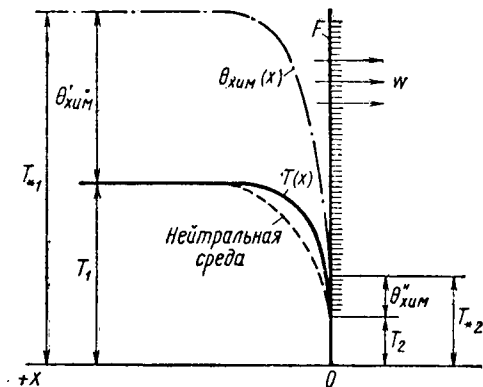


Рис. 13. Распределение температур в одномерном потоке среды, подвергаемой химическим превращениям

(сквозное течение, рис. 13), решение уравнения (13,5) находится в виде:

$$\frac{T_{*1} - T_*(x)}{T_{*1} - T_{*2}} = \exp\left(-\frac{w}{a} x\right), \quad (13,6)$$

где  $T_{*1} = T_1 + \theta'_{\text{хим}}$  — начальная суммарная условная температура среды ( $T_1$  — температура теплового состояния среды;  $\theta'_{\text{хим}} = \frac{q'_1 E_{\text{хим}}}{\rho c_p}$  — условная температура, отвечающая химической энергии среды при температуре  $T_1$ ;  $q'_1$  — начальная концентрация реагирующего компонента;  $\rho$  и  $c_p$  — плотность и теплоемкость среды);  
 $T_{*2} = T_2 + \theta''_{\text{хим}}$  — конечная суммарная условная температура среды ( $T_2$  — температура среды при равновесном тепловом состоянии со стенкой на поверхности;  $\theta''_{\text{хим}} = \frac{q''_1 E_{\text{хим}}}{\rho c_p}$  — условная температура, отвечающая химической энергии среды при температуре  $T_2$ ;  $q''_1$  — конечная концентрация реагирующего компонента).

Удельный поток энергии, переносимой к поверхности тела с температурой  $T_2$ , находится вычислением:

$$q_F = -\lambda \frac{\partial T_*}{\partial x} \Big|_{x=0} = w \rho c_p (T_{*1} - T_{*2}) \frac{w}{M^2}. \quad (13,7)$$



Произведение  $\omega c_p = \alpha$  представляет собой коэффициент теплоотдачи телу при сквозном течении среды  $\frac{вт}{м^2 \text{град}}$ .

Пользуясь обозначением  $\alpha$  и раскрывая  $T_{*1}$  и  $T_{*2}$ , приходим к следующей формуле:

$$q_F = \alpha (T_1 - T_2) + \alpha (\theta'_{хим} - \theta''_{хим}). \quad (13,8)$$

Таким образом, приходим к важному выводу о том, что *удельная теплоотдача при сквозном течении химически реагирующей среды складывается из теплоотдачи среды, отвечающей разности температур  $(T_1 - T_2)$ , и теплоотдачи, отвечающей разности условных химических температур среды  $(\theta'_{хим} - \theta''_{хим})$ .*

*При отсутствии химического превращения в среде* распределение температуры и удельная теплоотдача потока определяются формулами:

$$\frac{T_1 - T(x)}{T_1 - T_2} = \exp\left(-\frac{w}{a} x\right),$$

$$q_F = \alpha (T_1 - T_2),$$

где  $\alpha = \omega c_p$  — коэффициент теплоотдачи при сквозном течении.

Если раскаленная термически диссоциированная среда ( $T_1 + \theta'_{хим} > T_1$ ) движется по направлению к охлаждаемому телу с  $T_2 < T_1$  (рис. 13), то теплообмен такой среды со стенкой будет более интенсивным, чем для среды нейтральной. Такой случай отвечает, например, теплообмену охлаждаемой стенки с раскаленным потоком продуктов сгорания топлива при высоких температурах, превышающих температуру термической диссоциации; теплообмену потока плазмы с охлаждаемой стенкой и т. п.

Величина условной химической температуры различных сред, способных к химическому превращению, может быть весьма различной ( $\theta_{хим} \cong T$ ).

*Химическая температура среды определяется расчетом, исходя из условия термодинамического равновесия, отвечающего известной температуре теплового состояния среды ( $T_1$  и  $T_2$ ).*

Следует, однако, отметить, что для достижения термодинамического равновесия реагирующей системы за короткое время необходимо осуществить достаточно большое число актов обмена энергией частиц вещества. При весьма больших скоростях химических реакций могут быть существенные отклонения от термодинамического равновесия, и определение переноса энергии в этих условиях осложняется.

В отличие от рассмотренного сквозного течения среды через стенку при обтекании стенки средой с той же скоростью, коэффициент теплоотдачи будет значительно меньшим:

$$\alpha_{обтек} < \alpha_{сквозн} = \omega c_p \frac{вт}{м^2 \text{град}}.$$

Аналогично конвективному переносу тепла химически реагирующей средой можно рассматривать и конвективный перенос тепла средой, в которой осуществляются *фазовые превращения* компонентов с соответствующим освобождением или связыванием энергии ( $E_{\text{фаз}}$ ).

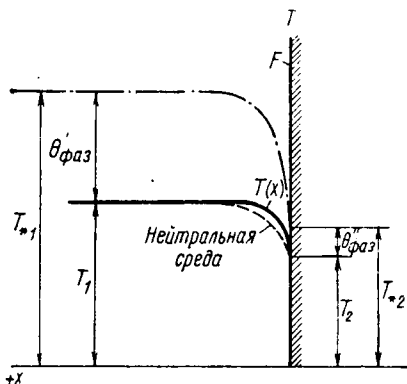


Рис. 14. Распределение температур в среде с конденсацией пара одного из компонентов

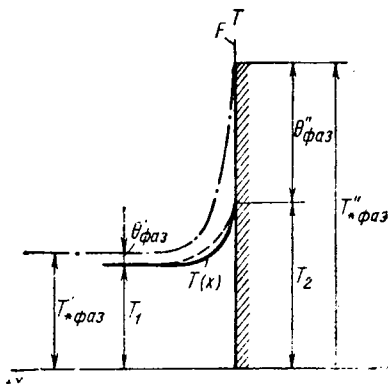


Рис. 15. Распределение температур в среде при испарении в ней капле жидкости

Удельная теплоотдача поверхности тела в этих условиях определяется формулой

$$q_F = \alpha (T_{*1} - T_{*2}) \frac{em}{m^2}, \quad (13,9)$$

где  $T_{*1} = T_1 + \theta'_{\text{фаз } i}$  — начальная суммарная условная температура среды ( $T_1$  — температура теплового состояния среды;  $\theta'_{\text{фаз } i} = \frac{q_i E_{\text{фаз } i}}{q c_p}$  — условная температура, отвечающая энергии фазового превращения  $E_{\text{фаз } i}$  компонента среды  $q_i$ ;  $q_i$  — начальная концентрация  $i$ -го компонента;  $q$  и  $c_p$  — плотность и теплоемкость среды);

$T_{*2} = T_2 + \theta''_{\text{фаз } i}$  — конечная суммарная условная температура среды ( $T_2$  — температура среды при равновесном тепловом состоянии со стенкой на поверхности);

$\theta''_{\text{фаз } i} = \frac{q_i E_{\text{фаз } i}}{q c_p}$  — условная температура, отвечающая энергии фазового превращения  $E_{\text{фаз } i}$  компонента  $i$ ;  $q_i$  — конечная концентрация  $i$ -го компонента).

Если начальная температура фазового превращения компонента в среде будет больше конечной ( $\theta'_{\text{фаз } i} > \theta''_{\text{фаз } i}$ ) и среда, притекающая к поверхности тела, будет охлаждаться (отвод тепла стенкой, рис. 14), то теплообмен такой среды с телом будет больше,

чем нейтральной среды. Такой случай отвечает *теплообмену газопаровой среды с капельной конденсацией пара* на поверхности стенки.

Если начальная температура фазового превращения компонента в среде будет меньше конечной ( $\theta_{\text{фаз } i} < \theta_{\text{фаз } i}'$ ) и среда, притекающая к стенке, будет нагреваться (приток тепла к стенке, рис. 15), то теплообмен такой среды со стенкой будет также больше, чем нейтральной среды. Такой случай отвечает теплообмену *газожидкостной среды с испарением капель жидкости* на поверхности стенки.

#### 14. Диффузионно-конвективный перенос пара в газовой среде при испарении жидкости на поверхности

Для определения переноса пара при испарении жидкости вместо парциальной плотности пара ( $\rho_{\text{п}}$ ) в газовой среде удобнее пользоваться соответствующей величиной парциального давления пара ( $p_{\text{п}}$ ), которое находится из его уравнения состояния в газовой фазе:

$$p_{\text{п}} = \rho_{\text{п}} \frac{R_{\text{м}} T}{M_{\text{п}}}, \quad (14,1)$$

где  $R = 8,32 \cdot 10^3 \frac{\text{дж}}{\text{моль} \cdot \text{град}}$  — универсальная постоянная;

$M_{\text{п}}$  — молекулярная масса пара,  $\frac{\text{кг}}{\text{моль}}$ .

$T$  — температура, °К.

В связи с этим для вектора диффузионного переноса пара в газовой среде имеем формулу

$$\vec{q}_{\text{диф п}} = -D_{\text{п, г}} \frac{M_{\text{п}}}{R_{\text{м}} T} \nabla p_{\text{п}} \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \text{сек}}$$

где  $D_{\text{п, г}}$  — коэффициент диффузии пара в газовой среде,  $\text{м}^2/\text{сек}$ .

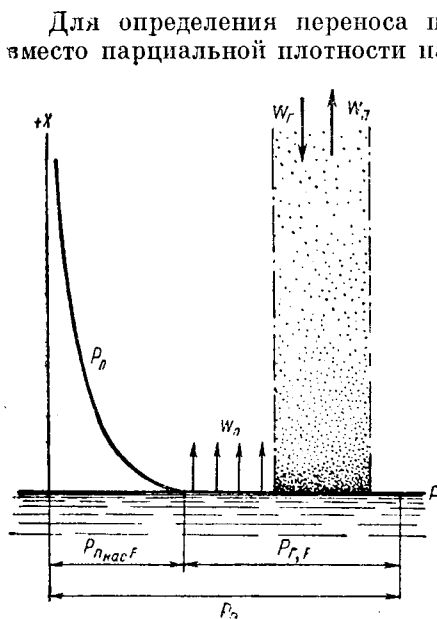


Рис. 16. К определению диффузионно-конвективного переноса паров при испарении жидкости

Рассмотрим процесс испарения жидкости с поверхности в окружающую среду (рис. 16). При меньшем парциальном давлении пара данной жидкости в газовой среде в местах, отдаленных от поверхности жидкости, по сравнению с парциальным давлением пара на границе, осуществляется диффузионный перенос пара в окружающей газовой среде.

Парциальное давление пара на границе газовой среды с жидкостью в условиях, близких к термодинамическому равновесию пара и жидкости, однозначно определяется температурой жидкости, отвечающей определенному давлению насыщенного пара. Величина  $p_{\text{п нас}} = f(t_{\text{ж}})$  находится из таблиц, представляющих термодинамические свойства пара.

Поток пара, выносимого с поверхности жидкости в окружающую газовую среду, создает соответствующий конвективный перенос пара в газовой среде:

$$q_{\text{конв п}} = \omega_{\text{п}} \rho_{\text{п}} = \omega_{\text{п}} p_{\text{п}} \frac{M_{\text{п}}}{R_{\text{м}} T}.$$

Суммарный перенос пара в газовой среде в направлении  $x$  по нормали к поверхности  $F$  составит:

$$q_{\text{п}} = \left( -D_{\text{п, г}} \frac{dp_{\text{п}}}{dx} + \omega_{\text{п}} p_{\text{п}} \right) \frac{M_{\text{п}}}{R_{\text{м}} T}.$$

При наличии градиента парциального давления пара и сохранении постоянства парциальных давлений в газовой среде ( $p_{\text{п}} + p_{\text{г}} = p_0$ , где  $p_0$  — общее давление) навстречу потоку пара осуществляется соответствующий диффузионный перенос газа:

$$q_{\text{диф г}} = -D_{\text{г, п}} \frac{M_{\text{г}}}{R_{\text{м}} T} \frac{dp_{\text{г}}}{dx}.$$

Так как для газа нет выхода сквозь поверхность жидкостей в ее массу (если не считать возможного растворения газа в жидкости), то диффузионный перенос газа в направлении к поверхности жидкости должен уравниваться обратным конвективным потоком газа:

$$q_{\text{конв г}} = \omega_{\text{г}} p_{\text{г}} \frac{M_{\text{г}}}{R_{\text{м}} T}.$$

Из равенства  $q_{\text{диф г}} = q_{\text{конв г}}$  находим

$$\omega_{\text{г}} = \frac{D_{\text{г, п}}}{p_{\text{г}}} \frac{dp_{\text{г}}}{dx}.$$

Так как  $p_{\text{г}} = p_0 - p_{\text{п}}$  и допуская равенства  $D_{\text{г, п}} = D_{\text{п, г}}$  и  $\omega_{\text{п}} = \omega_{\text{г}}$ , приходим к следующей формуле, определяющей диффузионно-конвективный поток пара при испарении жидкости в окружающую газовую среду:

$$q_{\text{п}} = -D_{\text{п, г}} \frac{dp_{\text{п}}}{dx} \frac{p_0}{p_0 - p_{\text{п}}} \frac{M_{\text{п}}}{R_{\text{м}} T}. \quad (14,2)$$

Эта формула известна как формула С т е ф а н а для одномерного стационарного диффузионно-конвективного потока пара в газовой среде.

При заданной температуре жидкости  $t_{\text{ж}}$  и известном парциальном давлении насыщенного пара на границе  $p_{\text{п нас}}$ ,  $F$ , а также

при известном парциальном давлении пара в отдалении от границы  $p_{п, l}$  в условиях стационарного режима можно проинтегрировать дифференциальное уравнение (14,2).

Разделив для этого переменные, имеем:

$$\frac{dp_{п}}{p_0 - p_{п}} = -q_{п} \frac{R_{м}T}{D_{п, г} M_{п} p_0} dx.$$

Интегрируя в пределах  $x = 0$  и  $x = l$ , находим:

$$\ln \frac{p_0 - p_{п, l}}{p_0 - p_{п, пас, F}} = q_{п} \frac{R_{м}T}{D_{п, г} M_{п} p_0} l.$$

Отсюда получаем:

$$q_{п} = \frac{D_{п, г} M_{п} p_0}{R_{м} T} \ln \frac{p_0 - p_{п, l}}{p_0 - p_{п, пас, F}} \frac{\kappa z}{m^2 \text{сек}}. \quad (14,3)$$

Эту формулу используют при экспериментальном определении коэффициента диффузии паров различных жидкостей.

### § 15. Перенос массы в среде на границе с поверхностью тела

Перенос массы в среде на границе с поверхностью тела во многих случаях осложняется процессами усвоения или выноса вещества. Скорость усвоения на поверхности тела с активным веществом его массы может ограничиваться скоростью химического реагирования переносимого вещества, процессами адсорбции или абсорбции в пограничном слое тела. В пограничном слое среды у поверхности тела перенос вещества так же, как и перенос энергии, осложняется по сравнению с переносом вещества в слоях, отдаленных от поверхности тела механизмом обмена. Если, однако, концентрация частиц переносимого вещества (молекул, атомов) столь велика, а средний свободный пробег этих частиц столь мал, что диффузионный характер переноса частиц сохраняется во всех слоях среды до самой границы, то для определения переноса вещества в пограничном слое можно использовать те же соотношения, которые были допущены при выводе формулы для определения вектора диффузионного переноса.

Вводя, как и в случае переноса энергии на границе тела со средой, *условный эквивалентный слой*  $\delta$ , в котором осуществляется равномерный перепад парциальной плотности переносимого вещества  $q_i$  от поверхности тела в окружающую среду:

$$\frac{q'_i - q''_i}{\bar{l}_i} = \frac{q_{i, F} - q_{i, \infty}}{\delta},$$

получаем следующую формулу для определения удельного потока массы:

$$q_{i, F} = \frac{1}{2} \frac{c_i \bar{l}_i}{\delta} (q_{i, F} - q_{i, \infty}).$$

Произведение  $\frac{1}{2} c_i l_i = D_{ij}$  представляет собой коэффициент диффузии  $i$ -го компонента вещества в среде.

Множитель  $\frac{D_{ij}}{\delta} = \alpha_i$  аналогично переносу энергии называют коэффициентом массоотдачи тела, или коэффициентом массообмена, единица измерения которого  $м/сек$ :

$$q_{i, F} = \alpha_i (Q_{i, F} - Q_{i, \infty}) \frac{кг}{м^2 сек} . \quad (15,1)$$

Можно заметить, что если определять удельный поток энергии, отдаваемой поверхностью тела в окружающую среду, формулой

$$q_{U, F} = \alpha_U (U_F - U_{\infty}) \frac{вт}{м^2} ,$$

где  $U_F$  и  $U_{\infty}$  — объемные плотности энергии среды на границе с поверхностью тела ( $U_F$ ) и в отдалении от нее ( $U_{\infty}$ ), то коэффициенты энергообмена  $\alpha_U$  и массообмена  $\alpha_i$  имеют одинаковую единицу измерения  $м/сек$ , представляющую единицу измерения скорости переноса.

Во многих случаях перенос массы в пограничном слое среды у поверхности тела осложняется конвективным переносом истекающего или притекающего вещества к поверхности тела. Истечение или приток вещества на поверхности пористого тела может осуществляться с неравномерной удельной плотностью потока. Такой сложный характер переноса вещества на границе имеет место, например, при горении слоя частиц топлива, при сублимации влажных тел в вакууме, при сушке нагреваемых тел, при испарении и кипении жидкостей, при конденсации пара и т. п. Все эти и другие осложнения процесса переноса массы на поверхности тела необходимо иметь в виду в теоретических и опытных исследованиях процессов массообмена.

## § 16. Перенос массы в пористых телах

Многие твердые тела пористой структуры оказываются вполне доступными для диффузионного переноса массы какого-либо вещества сквозь пористое тело (рис. 17). Например, диффузионный перенос газов и жидкостей сравнительно легко осуществляется в слоях песка, крошки и т. п. Многие строительные материалы и изделия (кирпич, дерево) оказываются также доступными для заметной диффузии газа, пара и жидкости. Диффузионный перенос массы газа и пара осуществляется через стенки строительных ограждений зданий, через стенки обмуровки печей и т. п.

Диффузионный перенос массы среды в пористых телах можно определять вектором диффузионного переноса:

$$\vec{q}_{диф, i, *} = -D_{i, *} \nabla \rho_i, \quad (16,1)$$

где  $D_{i, *}$  — коэффициент диффузионного переноса массы  $i$ -го вещества среды в пористом теле;

$\nabla \rho_i$  — градиент парциальной плотности  $i$ -го вещества в среде.

В некоторых случаях диффузионный перенос массы вещества среды в пористом теле сопровождается абсорбцией, фазовыми

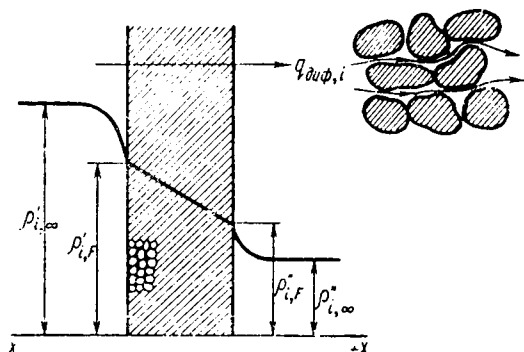


Рис. 17. К определению переноса массы в пористых телах

превращениями и т. д. Абсорбция имеет место, например, при переносе вещества в активных пористых телах. Фазовые превращения возникают, например, при диффузионном переносе водяного пара воздуха через строительные ограждения зданий и т. п. В холодных слоях наружных стен здания в зимнее время при диффузионном переносе водяного пара воздуха изнутри помещения наружу возможна конденсация водяного пара, намокание стен и их промерзание. Последнее нередко приводит к разрушению материала стен.

При нагревании влажных пористых тел осуществляется диффузионный перенос влаги, сопровождаемый испарением и выносом пара. Так осуществляется *сушка влажных материалов*.

В некоторых случаях диффузионный перенос массы вещества в пористом теле может сопровождаться химическим превращением массы. Так, например, осуществляется газификация пористой массы кусочков угля и т. п.

Уравнение, описывающее процесс диффузионного переноса  $i$ -го вещества среды в пористом теле, в общем случае нестационарных условий и различных химических, фазовых и других

превращений переносимого вещества запишется в виде следующего равенства:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \tau} + \operatorname{div} (\vec{q}_{\text{конв } i, *} + \vec{q}_{\text{диф } i, *}) = q_{\text{превр } i, *} \quad (16,2)$$

Равенство это представляет собой баланс вещества  $i$  в единичном объеме пористой массы:

$$\left[ \begin{array}{c} \text{Накопление или} \\ \text{убыль вещества } i, \\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3 \text{сек}} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \text{Результирующий} \\ \text{перенос вещества } i \\ \text{конвекцией и диф-} \\ \text{фузией, } \frac{\text{кг}}{\text{м}^3 \text{сек}} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \text{Объемная скорость} \\ \text{усвоения или выхо-} \\ \text{да вещества } i, \frac{\text{кг}}{\text{м}^3 \text{сек}} \end{array} \right]$$

Для одномерного потока конвективного переноса вещества сквозь пористую стенку при слабом диффузионном переносе по сравнению с конвективным переносом ( $q_{\text{диф } i, *} \ll q_{\text{конв } i, *}$ ) имеем следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x} (\omega Q_i) = q_{\text{превр } i, *} \quad (16,3)$$

Скорость усвоения или выхода различных веществ среды с парциальными плотностями  $Q_1, Q_2, \dots$  (при общей плотности среды  $Q = \sum Q_i$ ) при взаимодействии с активным веществом пористой массы тела может быть различной. Для каждой составляющей решение уравнения даст функцию распределения на пути переноса и во времени  $Q_i(x_i, \tau)$ . Таким образом, осуществляется разделение отдельных компонентов потока среды активным пористым телом. Явление это используется в хроматографических методах анализа компонентов различных сред.

Коэффициенты диффузионного переноса массы ( $D_{i, *}$ ) какого-либо вещества (газа, пара, жидкости) зависят от структуры пористого тела и определяются экспериментально. Так же экспериментально определяется способность пористой массы к взаимодействию с переносимыми веществами ( $q_{\text{превр } i, *}$ ).

Рассмотрим некоторые простейшие задачи переноса массы в пористых телах.

#### А. Диффузионный перенос массы

Концентрационный напор диффузионного переноса массы в пористом теле можно определить из условия диффузионного переноса вещества через пористую стенку в стационарных условиях и при отсутствии взаимодействия с пористой массой. Для этого случая имеем простейшее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d}{dx} \left( D_{i, *} \frac{dQ_i}{dx} \right) = 0 \quad (16,4)$$



или

$$-D_{i,*} \frac{d\varrho_i}{dx} = q_{\text{диф } i,*} = \text{const.}$$

Для однородной стенки и при неизменном коэффициенте диффузии получаем:

$$q_{\text{диф } i,*} = D_{i,*} \frac{\varrho'_i - \varrho''_i}{s}, \quad (16,5)$$

где  $s$  — толщина стенки.

Удельный поток диффузионного переноса компонента газовой среды с парциальным давлением  $p_i$  определяется формулой

$$q_{\text{диф } i,*} = D_{i,*} \frac{M_i}{R_M T} \frac{p'_i - p''_i}{s}, \quad (16,6)$$

где  $p'_i$  и  $p''_i$  — парциальные давления  $i$ -го компонента среды на обеих границах стенки;

$R_M$  — газовая постоянная одного моля;

$M_i$  — молекулярная масса  $i$ -го компонента.

Разность  $\frac{p'_i - p''_i}{s}$  представляет собой *удельный концентрационный напор диффузионного переноса вещества в пористом теле*.

Чтобы судить о величине концентрационного напора при диффузионном переносе вещества в пористом теле, подсчитаем его величину на примере диффузии водяного пара, содержащегося в воздухе, через пористую стенку строительных ограждений.

При температурах воздуха, граничащего с внутренней и наружной поверхностью стенки,  $t' = +18^\circ\text{C}$  и  $t'' = -20^\circ\text{C}$  и при относительной влажности воздуха  $\varphi' = \varphi'' = 60\%$  парциальные давления водяного пара составят:

$$p'_{\text{H}_2\text{O}} = \varphi' p'_{\text{H}_2\text{O, нас}} = 0,6 \cdot 2065 = 1240 \frac{\text{н}}{\text{м}^2},$$

$$p''_{\text{H}_2\text{O}} = \varphi'' p''_{\text{H}_2\text{O, нас}} = 0,6 \cdot 102,7 = 61,6 \frac{\text{н}}{\text{м}^2}.$$

Удельный концентрационный напор, отнесенный к 1 м толщины стенки, находим:

$$\frac{p'_{\text{H}_2\text{O}} - p''_{\text{H}_2\text{O}}}{s} = 2360 \frac{\text{н}}{\text{м}^2 \cdot \text{м}}.$$

Для кирпичной стенки толщиной 0,5 м при известном коэффициенте диффузионного переноса пара, отвечающем комнатной температуре

$$D_{\text{H}_2\text{O},*} = 0,36 \cdot 10^{-5} \frac{\text{м}^2}{\text{сек}},$$

удельный поток диффузионного переноса пара в стенке составит:

$$q_{\text{диф H}_2\text{O}, * } = \frac{0,35 \cdot 10^{-5} \cdot 18 \cdot 2360}{8,32 \cdot 10^3 \cdot 273} = 0,673 \cdot 10^{-7} \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \text{сек}} = 0,242 \frac{\text{г}}{\text{м}^2 \text{час}}.$$

Интересно отметить, что коэффициент диффузии пара в пористом теле — кирпиче — оказывается лишь на один порядок меньше коэффициента диффузионного переноса пара в воздухе при той же температуре.

### Б. Конвективный перенос массы в пористом теле

Если пористая перегородка отделяет пространства, заполненные однородным газом с одинаковой температурой, но при различном давлении, то в пористой перегородке осуществляется конвективный перенос массы газа в сторону меньшего давления.

В достаточно тонких каналах пор конвективный перенос массы газа осуществляется *молекулярным течением*, закономерность которого установлена Кнудсенем. Формула, определяющая удельный поток молекулярного течения газа, имеет следующий вид (см. стр. 107):

$$q_{\text{мол, теч}} = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{M}{3R_M T}} (p_1 - p_2) \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \text{сек}}, \quad (16,7)$$

где  $M$  — молекулярная масса газа;

$R_M$  — газовая постоянная моля;

$T$  — температура;

$p_1$  и  $p_2$  — давления газа, находящегося в пространствах перед и за перегородкой.

Удельный конвективный поток массы газа в пористой перегородке, отнесенный к единичной площади ее поверхности, составит меньшую величину. Газопроницаемость различных стенок обычно определяется экспериментально.

## ПЕРЕНОС ИМПУЛЬСОВ

Перенос импульсов, или количества движения, в потоках жидких и газовых сред вызывает касательные напряжения и сопровождается изменением давления. Знание закономерностей переноса импульса в текущих средах необходимо для решения различных гидродинамических и газодинамических задач, а также задач конвективного теплообмена.

Для газовых сред перенос импульсов можно рассмотреть на основе молекулярно-кинетической теории газов. Ограничимся, как и в теории переноса энергии и массы, упрощенным представлением о переносе импульсов в газах.

### § 17. Перенос импульсов в газах

#### А. Давление газа

Результирующий удельный поток множества молекул газа, переносимых через единичную площадку в обоих направлениях, согласно изложенному в § 2, составляет

$$q_{N, n} = \frac{1}{3} \bar{c} N \frac{1}{\text{м}^2 \text{сек}}.$$

При обмене импульсами молекул газа ( $m\bar{c}$ ) на рассматриваемой единичной площадке возникает *давление газа*:

$$p = q_{N, n} \cdot (m\bar{c}) = \frac{1}{3} N m \bar{c}^2. \quad (17,1)$$

Таким образом, давление газа пропорционально концентрации молекул ( $N$ ) и их кинетической энергии движения ( $m\bar{c}^2$ ).

При перемещении газа относительно поверхности тела или относительно других масс газа, движущихся с иной скоростью, в соседних слоях осуществляется перенос импульсов, вызванный различием скоростей, и возникает сила внутреннего трения.

Для рассмотрения переноса импульсов и определения внутреннего трения перемещаемых слоев газа с различной скоростью выделим элементарный слой толщиной  $\bar{l}$ , равной средней длине свободного пробега молекул газа (рис. 18).

В условиях диффузионного перемещения газовых молекул с равномерно распределенной интенсивностью во всех направлениях пространства результирующий перенос массы однородных молекул газа в рассматриваемом слое в направлении нормали к единичной площадке определяется формулой

$$q_x = \frac{1}{3} \bar{c} (N' m - N'' m) = \frac{1}{3} \bar{c} (q' - q''), \quad (17,2)$$

где  $\bar{c}$  — средняя скорость перемещения молекул;

$N'$  и  $N''$  — концентрации молекул на границах слоя;

$m$  — масса молекул;

$q'$  и  $q''$  — соответствующие плотности газа.

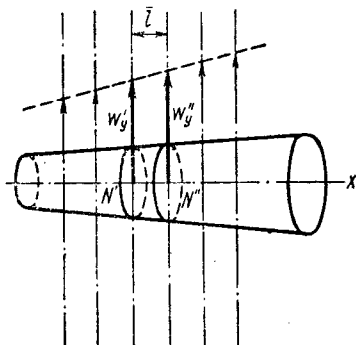


Рис. 18. К определению переноса импульсов в газе

Множитель  $1/3$  в формуле переноса импульсов, в отличие от переноса энергии и массы, выбран в соответствии с определением силового взаимодействия молекул, переносимых в рассматриваемый слой.

При различии в скоростях перемещения массы газа на границах рассматриваемого слоя  $w'$  и  $w''$  осуществляется перенос импульсов в слое, который определяется разностью  $w'q' - w''q''$  (разность количеств движения).

В результате переноса импульсов возникает сила *внутреннего трения* в текущем газе или *касательное напряжение* в направлении сдвига текущих слоев жидкости  $\vec{l}$ :

$$\sigma_t = \frac{1}{3} \bar{c} (w'_l q' - w''_l q'') \frac{\eta}{M^2}. \quad (17,3)$$

Переходя от рассматриваемого слоя толщиной  $\bar{l}$  к элементарному слою толщиной  $dn$  (где  $\vec{n}$  — направление нормали к  $\vec{l}$ )

и допуская линейное соотношение

$$\frac{w'_l q' - w''_l q''}{\bar{l}} = \frac{d(w_l q)}{dn},$$

получаем следующую формулу для определения касательного напряжения от внутреннего трения в газе:

$$\sigma_l = \frac{1}{3} \bar{c} \bar{l} \frac{\partial (w_l q)}{\partial n} \frac{\eta}{m^2}. \quad (17,4)$$

Множитель  $\frac{1}{3} \bar{c} \bar{l} = \nu \frac{m^2}{\text{сек}}$  представляет собой коэффициент переноса импульсов в газах, который называют кинематической вязкостью газа.

Формулу для определения касательного напряжения в текущих слоях газа и жидкостей записывают также через градиент скорости  $\left(\frac{\partial w_l}{\partial n}\right)$ :

$$\sigma_l = \eta \frac{\partial w_l}{\partial n} \frac{\eta}{m^2}, \quad (17,5)$$

где  $\eta = \nu q \frac{\kappa g}{\text{сек м}}$  или  $\frac{\eta \text{ сек}}{m^2}$  представляет собой коэффициент динамической вязкости среды.

Формула (17,5) выражает известную гипотезу *Ньютона* для определения силы внутреннего трения, или вязкости, жидкостей и газов.

Обмен импульсами при течении масс газа с различной скоростью осуществляется так, что наряду с *касательными напряжениями*  $\sigma_{\text{кас}}$  возникают *нормальные напряжения*  $\sigma_{\text{норм}}$ , в результате которых появляется давление на единичной площадке. Совокупность всех возникающих напряжений (касательных и нормальных) обуславливает в текущих средах существование *тензора напряжений*.

Следует отметить, что диффузионный характер переноса импульсов в среде с равномерным распределением интенсивности переноса во всех направлениях пространства имеет ограничения. Ограничения эти связаны с очень большими скоростями движения среды (скорости звука и выше) и очень малыми концентрациями молекул газа (разреженный газ).

При течениях масс газа с очень большими скоростями, превышающими скорость звука, перенос импульса и действие сил молекулярного трения в газе осложняется частичным «скольжением молекул». Эффект «скольжения молекул» в газе вызывается тем, что скорость звука по величине оказывается одного порядка со средней скоростью перемещения молекул в газе при данной температуре. Частота соударений молекул в слоях газа при этом уменьшается, и течение масс газа осуществляется с меньшим внутренним трением.

Скорость звука, как известно, отвечает скорости распространения импульсных возмущений в среде и определяется следующей формулой:

$$a^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}, \quad (17,6)$$

где  $p$  — давление газа;

$\rho$  — его плотность.

Для быстрых возмущений масс газа в среде изменение состояния газа подчиняется изоэнтропическому процессу:

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{const}, \quad (17,7)$$

где  $k = c_p/c_v$  — отношение теплоемкости при постоянном давлении и объеме.

Используя, кроме того, уравнение состояния газа

$$\frac{p}{\rho} = \frac{R_M T}{M}, \quad (17,8)$$

где  $R_M$  — газовая постоянная моля;

$M$  — молекулярная масса газа;

$T$  — температура,

находим:

$$a^2 = k \frac{R_M T}{M}, \quad (17,9)$$

откуда для определения скорости звука в газе получаем следующую формулу:

$$a = \sqrt{k \frac{R_M T}{M}}. \quad (17,10)$$

Средняя скорость перемещения молекул в газе, как известно, определяется формулой:

$$\bar{c} = \sqrt{3 \frac{R_M T}{M}}.$$

Таким образом, скорость звука оказывается одного порядка со средней скоростью перемещения молекул в газе:

$$a = \sqrt{\frac{k}{3}} \bar{c}. \quad (17,11)$$

Например, для *воздуха* в условиях комнатной температуры  $k \cong 1,4$  и

$$a \cong 0,7 \bar{c}.$$

Весьма важным в газовой динамике больших скоростей является скоростной критерий, представляющий собой отноше-

ние скорости движения масс ( $\omega$ ) к скорости звука ( $a$ ):

$$M = \frac{\bar{\omega}}{a} .$$

Особенности течений газовых масс оказываются различными при  $M < 1$  (дозвуковое течение) и  $M > 1$  (сверхзвуковое течение). Переходящая область  $M \approx 1$  (трансзвуковое течение) также связана со своими особенностями.

Как уже указывалось, при  $M > 1$  наблюдается явление «скольжения газа». Явление «скольжения газа» может наблюдаться и при  $M < 1$ , но при достаточно больших разрежениях газа ( $p \ll p_0$ , где  $p_0$  — атмосферное давление) или при размерах каналов, соизмеримых с длиной свободного пробега молекул ( $l \approx d$  — диаметр канала). В последнем случае приходится иметь дело с так называемым молекулярным течением. При этом роль внутреннего трения в газе уменьшается.

### § 18. Уравнение движения вязкой жидкости

Уравнение движения вязкой жидкости можно составить, если рассмотреть изменение количества движения и сумму всех дей-

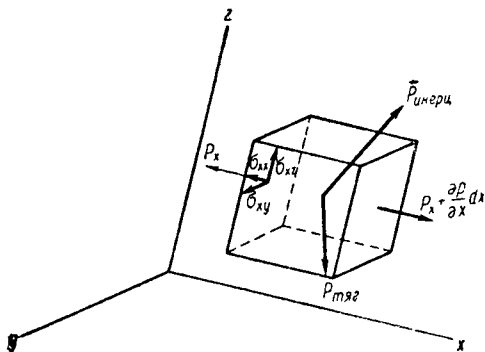


Рис. 19. К выводу уравнения движения вязкой жидкости

ствующих сил в элементарном объеме  $dV$ , который выберем в виде параллелепипеда с гранями  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , расположенными соответственно осям координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  (рис. 19).

*Изменение количества движения.* Результирующее изменение количества движения текущей среды в элементарном объеме, или ее импульс (сила инерции), определяется следующей формулой:

$$\vec{P}_{инерц} dV = \frac{D}{d\tau} (\vec{\omega} dV) , \quad (18,1)$$

где  $\frac{D}{d\tau}(\vec{\omega}Q)$  представляет субстанциональную производную количества движения среды ( $\vec{\omega}Q$ ), которая в проекциях на оси координат запишется следующими тремя составляющими:

$$\left. \begin{aligned} P_{\text{инерц. } x} &= \frac{D}{d\tau}(\omega_x Q) = \frac{\partial}{\partial \tau}(\omega_x Q) + \omega_x \frac{\partial}{\partial x}(\omega_x Q) + \\ &+ \omega_y \frac{\partial}{\partial y}(\omega_x Q) + \omega_z \frac{\partial}{\partial z}(\omega_x Q), \\ P_{\text{инерц. } y} &= \frac{D}{d\tau}(\omega_y Q) = \frac{\partial}{\partial \tau}(\omega_y Q) + \omega_x \frac{\partial}{\partial x}(\omega_y Q) + \\ &+ \omega_y \frac{\partial}{\partial y}(\omega_y Q) + \omega_z \frac{\partial}{\partial z}(\omega_y Q), \\ P_{\text{инерц. } z} &= \frac{D}{d\tau}(\omega_z Q) = \frac{\partial}{\partial \tau}(\omega_z Q) + \omega_x \frac{\partial}{\partial x}(\omega_z Q) + \\ &+ \omega_y \frac{\partial}{\partial y}(\omega_z Q) + \omega_z \frac{\partial}{\partial z}(\omega_z Q). \end{aligned} \right\} \quad (18,2)$$

*Сила тяготения.* Для массы среды в элементарном объеме сила тяготения определяется произведением плотности среды ( $Q$ ) на ускорение ( $\vec{g}$ ) движения в поле тяготения:

$$\vec{P}_{\text{тяг}} dV = \vec{g} dV. \quad (18,3)$$

*Сила внутреннего давления.* Результирующее изменение внутреннего давления при перемещениях среды в проекциях на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , как следует из рис. 19, представляется следующими тремя равенствами:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} dx (dy \cdot dz) &= -\frac{\partial p}{\partial x} \cdot dV, \\ -\frac{\partial p}{\partial y} dy (dx \cdot dz) &= -\frac{\partial p}{\partial y} \cdot dV, \\ -\frac{\partial p}{\partial z} dz (dx \cdot dy) &= -\frac{\partial p}{\partial z} \cdot dV. \end{aligned} \right\} \quad (18,4)$$

Произведения в скобках представляют собой площади трех граней параллелепипеда, по отношению к которым рассматривается результирующее изменение внутреннего давления.

Величины  $\frac{\partial p}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial p}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial p}{\partial z}$  представляют изменение скалярной величины — внутреннего давления среды ( $p$ ) по направлениям  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$ ,  $\vec{z}$ ; их можно определить как проекции векторной величины *градиента давления* —  $\text{grad } p$ , или  $\nabla p$ .

Таким образом, для определения результирующей силы изменения внутреннего давления среды получаем следующую формулу:

$$\vec{P}_{\text{давл}} dV = -\nabla p \cdot dV. \quad (18,5)$$



Сила трения. При перемещении масс среды в элементарном слое с различной скоростью возникают касательные напряжения:

$$\sigma_i = \eta \frac{\partial \omega_i}{\partial n},$$

где  $\eta$  — динамическая вязкость среды;

$\frac{\partial \omega_i}{\partial n}$  — изменение скорости течения в направлении  $\vec{n}$ , перпен-

дикулярном линиям тока  $\vec{l}$ .

Действие сил трения или касательных напряжений в элементарном объеме осложняется в условиях сжатия или расширения среды при изменении ее температуры и давления ( $\operatorname{div} \vec{\omega} \neq 0$ ), а также при изменении коэффициента вязкости среды ( $\frac{\partial \eta}{\partial x_i} \neq 0$ ;  $i = 1, 2, 3$ ). С учетом всех этих особенностей поведения среды составляющие сил трения в элементарном объеме могут быть представлены в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} P_{\text{трени, } x} \cdot dV &= \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \eta \left( 2 \frac{\partial \omega_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{\omega} \right) \right] + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial}{\partial y} \left[ \eta \left( \frac{\partial \omega_x}{\partial y} + \frac{\partial \omega_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \eta \left( \frac{\partial \omega_x}{\partial z} + \frac{\partial \omega_z}{\partial x} \right) \right] \right\} dV, \\ P_{\text{трени, } y} \cdot dV &= \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left[ \eta \left( 2 \frac{\partial \omega_y}{\partial y} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{\omega} \right) \right] + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial}{\partial z} \left[ \eta \left( \frac{\partial \omega_y}{\partial z} + \frac{\partial \omega_z}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \eta \left( \frac{\partial \omega_x}{\partial y} + \frac{\partial \omega_y}{\partial x} \right) \right] \right\} dV, \\ P_{\text{трени, } z} \cdot dV &= \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left[ \eta \left( 2 \frac{\partial \omega_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{\omega} \right) \right] + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial}{\partial x} \left[ \eta \left( \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + \frac{\partial \omega_x}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \eta \left( \frac{\partial \omega_y}{\partial z} + \frac{\partial \omega_z}{\partial y} \right) \right] \right\} dV. \end{aligned} \right\} \quad (18,6)$$

Помимо рассмотренных сил, на текущую среду в элементарном объеме  $dV$  могут действовать и другие силы, например силы магнитного поля ( $\vec{P}_{\text{магн}} \cdot dV$ ), давление радиации ( $\vec{P}_{\text{рад}} \cdot dV$ ) и т. п.

Сложение всех сил, действующих на текущую среду в элементарном объеме  $dV$ , приводит к следующему равенству, выражающему баланс сил:

$$\vec{P}_{\text{инерц}} \cdot dV = \left( \sum_1^k \vec{P}_i \right) dV, \quad (18,7)$$

где  $i = 1, 2, 3, \dots$  — индекс, отвечающий порядку наименования действующих сил;

$k$  — общее число действующих сил.

Рассматривая течение среды в поле тяготения под воздействием силы давления, с учетом силы внутреннего трения полу-

чаем следующее уравнение сохранения суммы сил или уравнение количества движения:

$$\vec{P}_{\text{инерц}} = \frac{D}{d\tau} (\vec{\omega} \rho) = \vec{P}_{\text{тяг}} + \vec{P}_{\text{давл}} + \vec{P}_{\text{трен}}. \quad (18,8)$$

В векторной форме это равенство сил запишется в следующем виде:

$$\frac{D}{d\tau} (\rho \vec{\omega}) = \rho \vec{g} - \nabla p + \vec{P}_{\text{трен}}. \quad (18,9)$$

В проекциях на оси координат  $x, y, z$  уравнение движения запишется:

$$\left. \begin{aligned} \frac{D}{d\tau} (\omega_x \rho) &= \rho g \cos(\vec{g}, \hat{x}) - \frac{\partial p}{\partial x} + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \eta \left( 2 \frac{\partial \omega_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{\omega} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \eta \left( \frac{\partial \omega_x}{\partial y} + \frac{\partial \omega_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \eta \left( \frac{\partial \omega_x}{\partial z} + \frac{\partial \omega_z}{\partial x} \right) \right] \right\}, \\ \frac{D}{d\tau} (\omega_y \rho) &= \rho g \cos(\vec{g}, \hat{y}) - \frac{\partial p}{\partial y} + \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left[ \eta \left( 2 \frac{\partial \omega_y}{\partial y} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{\omega} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \eta \left( \frac{\partial \omega_y}{\partial z} + \frac{\partial \omega_z}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \eta \left( \frac{\partial \omega_x}{\partial y} + \frac{\partial \omega_y}{\partial x} \right) \right] \right\}, \\ \frac{D}{d\tau} (\omega_z \rho) &= \rho g \cos(\vec{g}, \hat{z}) - \frac{\partial p}{\partial z} + \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left[ \eta \left( 2 \frac{\partial \omega_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{\omega} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \eta \left( \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + \frac{\partial \omega_x}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \eta \left( \frac{\partial \omega_y}{\partial z} + \frac{\partial \omega_z}{\partial y} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \right\} (18,10)$$

Для текущей несжимаемой жидкости без учета изменения динамической вязкости среды уравнение движения в векторной форме представится в следующем виде:

$$\rho \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \tau} + \vec{\omega} \rho (\vec{\omega}, \nabla) = \rho \vec{g} - \nabla p + \eta \Delta \vec{\omega}, \quad (18,11)$$

или

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \tau} + \vec{\omega} (\vec{\omega}, \nabla) = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{\omega}. \quad (18,12)$$

При помощи известной векторной операции «вихря» уравнение (18,12) можно упростить. Эта операция обозначается символом  $\operatorname{rot}$  и имеет следующий смысл, если ее выполнить над каким-либо вектором  $\vec{A}$ :

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k},$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — орты единичного вектора, направленные по осям координат  $x, y, z$ .

Так как в уравнении (18,12)  $\vec{g}$  есть постоянный вектор, то  $\operatorname{rot} \vec{g} = 0$ .

При помощи орт  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  можно написать:

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k}.$$

Операция «вихря» над  $\nabla p$  приводит к равенству:

$$\text{rot } \nabla p = \left( \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} \vec{i} \vec{k} - \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} \vec{j} \vec{k} \right) + \dots = 0.$$

Таким образом, после операции «вихря» член  $\left( \vec{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p \right)$  в уравнении (18,12) исключается и вместо этого уравнения получается следующее:

$$\text{rot } \frac{\partial \vec{w}}{\partial \tau} + \text{rot } \vec{\omega} (\vec{w}, \nabla) = \nu \text{rot } \Delta \vec{w}. \quad (18,13)$$

Это уравнение указывает, что *распределение скоростей (скоростное поле) в так называемых вынужденных потоках среды,*

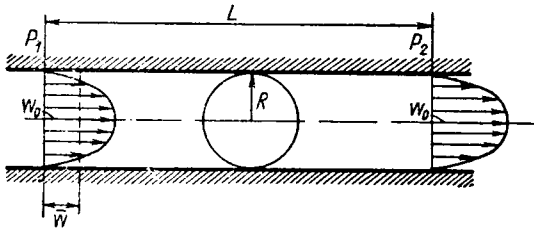


Рис. 20. Стабилизированное течение вязкой жидкости в трубе

которые осуществляются под напорным действием сил давления, не зависит от давления и определяется действием сил трения.

Покажем это на примере наиболее простого случая стабилизированного ламинарного течения однородной несжимаемой изотермической жидкости с постоянной вязкостью в горизонтально расположенной трубе неизменного сечения (рис. 20).

Для этих условий и стационарного режима течения имеем:

$$\text{div } \vec{v} = 0 \text{ (несжимаемая жидкость);}$$

$$\omega_y = 0, \omega_z = 0 \text{ (ламинарное течение в направлении оси трубы);}$$

$$\frac{\partial (w \rho)}{\partial \tau} = 0 \text{ (стационарный режим течения);}$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} = 0 \text{ (стабилизированное ламинарное течение);}$$

$$\cos(\vec{g}, \hat{x}) = 0 \text{ (горизонтально расположенная труба);}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \text{ и } \frac{\partial \eta}{\partial r} = 0 \text{ (постоянная вязкость).}$$

Соответственно этим условиям уравнение движения (18,10) запишется:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \eta \Delta \omega_x. \quad (18,14)$$

Для симметричного распределения скоростей в потоке оператор Лапласа для скорости представляется в цилиндрических координатах:

$$\Delta \omega_x = \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r}. \quad (18,15)$$

Давление ( $p$ ) по всему сечению одномерного потока жидкости сохраняется неизменным (не зависит от  $r$ ). В связи с этим дифференциальное уравнение

$$\frac{dp}{dx} = \eta \left( \frac{d^2 \omega}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\omega}{dr} \right) \quad (18,16)$$

должно удовлетворяться при условии, что обе части равенства представляют одну и ту же постоянную величину:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dx} &= C, \\ \eta \left( \frac{d^2 \omega}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\omega}{dr} \right) &= C. \end{aligned}$$

Постоянную величину  $C$  можно определить из условий заданного падения давления ( $p_1 - p_2$ ) в потоке по длине трубы ( $L$ ).

Для всех линий тока в трубе сохраняется линейное соотношение:

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{p_1 - p_2}{L} = -C.$$

Таким образом, приходим к следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2 \omega}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\omega}{dr} = -\frac{p_1 - p_2}{\eta L}. \quad (18,17)$$

Интегралом этого дифференциального уравнения является известная формула Гагена — Пуазейля:

$$\omega(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta L} (R^2 - r^2), \quad (18,18)$$

где  $R = \frac{d}{2}$  — радиус трубы.

Формула эта отвечает параболическому распределению скоростей в любом сечении стабилизированного ламинарного течения жидкости в трубе.

Расход жидкости находится интегрированием по сечению:

$$Q = \int_0^R \omega(r) 2\pi r dr = \frac{\pi R^4}{8\eta} \frac{p_1 - p_2}{L}. \quad (18,19)$$

Вводя среднюю скорость потока

$$\bar{\omega} = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{R^2}{8\eta} \frac{p_1 - p_2}{L}, \quad (18,20)$$

имеем следующую формулу распределения скоростей по сечению потока:

$$\omega(r) = 2\bar{\omega} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]. \quad (18,21)$$

Наибольшая скорость соответствует линии тока по оси трубы:

$$\omega_0 = 2\bar{\omega}. \quad (18,22)$$

Гидродинамическое сопротивление ламинарному течению жидкости в трубе находится по формуле

$$\frac{p_1 - p_2}{L} = \frac{8\eta \bar{\omega}}{R^2}. \quad (18,23)$$

Сопоставляя эту формулу с известной формулой сопротивления течению жидкости в трубах

$$\frac{p_1 - p_2}{L} = \xi \frac{1}{d} \rho \frac{\bar{w}^2}{2}, \quad (18,24)$$

находим коэффициент сопротивления ламинарному течению жидкости в трубах:

$$\xi = \frac{64}{Re}, \quad (18,25)$$

где  $Re = \frac{\bar{w}d}{\nu}$ .

Наряду с вынужденным напорным потоком жидкости представляет интерес так называемый *свободный поток* среды.

Свободный поток осуществляется, например, в поле тяготения при различии плотностей неравномерно нагретых масс среды. В этих условиях в среде возникает подъемная сила, определяемая разностью плотностей:

$$\vec{P}_{\text{под}} = -(\rho - \rho_{\infty}) \vec{g},$$

где  $\rho$  — плотность среды в рассматриваемом месте;

$\rho_{\infty}$  — то же, но в отдалении от места нагретой среды.

Если плотность среды изменяется обратно пропорционально температуре, как, например, для газов

$$\frac{\rho}{\rho_{\infty}} = \frac{T_{\infty}}{T} = 1 - \frac{T - T_{\infty}}{T} = 1 - \beta (T - T_{\infty}) \quad (18,26)$$

(где  $\beta = \frac{1}{T}$  — коэффициент объемного расширения газа, для жидкости  $\beta < \frac{1}{T}$ ), то для подъемной силы получаем формулу

$$\vec{P}_{\text{под}} = \rho_{\infty} \beta (T - T_{\infty}) \vec{g}. \quad (18,27)$$

Даже при сравнительно небольшом изменении плотности в различных местах неравномерно нагретой среды разность плотностей оказывается достаточной для того, чтобы возникающая подъемная сила ( $\vec{P}_{\text{под}}$ ) была соизмеримой с силами трения ( $\vec{P}_{\text{тр}})$ , давления ( $\vec{P}_{\text{давл}}$ ) и инерции ( $\vec{P}_{\text{инерц}}$ ).

В этих условиях уравнение движения с участием подъемной силы представится в следующем виде:

$$\text{rot } \frac{\partial \vec{w}}{\partial \tau} + \text{rot } \vec{w} (\vec{w}, \nabla) = \text{rot } \vec{g} \beta (T - T_{\infty}) + \nu \text{rot } \Delta \vec{w}. \quad (18,28)$$

Это уравнение указывает, что *распределение скоростей в потоках среды с участием подъемной силы не зависит от давления и определяется разностью температур и действием сил трения в жидкости.*

## § 19. Уравнение одномерного течения

Наиболее просто уравнение движения запишется для одномерного потока жидкости. По направлению тока  $\vec{l}$ , составляющему известный угол с направлением ускорения силы тяготения  $\vec{g}$  (рис. 21) в стационарных условиях, уравнение (18,10) представится в следующем виде:

$$\frac{d}{dl} \left( \rho \frac{w^2}{2} \right) = \rho g \cos(\vec{l}, \vec{g}) - \frac{dp}{dl} - P_{\text{тр}}, \quad (19,1)$$

где  $P_{\text{тр}}$  — результирующее действие силы трения, отнесенное к единичному объему.

Для возможности интегрирования этого дифференциального уравнения запишем его в следующем виде:

$$d \left( \rho \frac{w^2}{2} \right) = \rho g dl \cos(\vec{g}, \vec{l}) - dp - P_{\text{тр}} dl. \quad (19,2)$$

Интегрирование этого уравнения при *неизменной плотности среды*  $\rho$  в пределах между двумя заданными сечениями кана-

ла (1) и (2) приводит к следующему равенству:

$$\rho \frac{w_2^2}{2} - \rho \frac{w_1^2}{2} = -\rho g (z_2 - z_1) - (p_2 - p_1) - L_{\text{трени}},$$

где  $L_{\text{трени}}$  — результирующая работа сил трения в единичном объеме при течении жидкости в канале на заданной длине между сечениями (1) и (2).

Полученное равенство, записанное в форме

$$\rho \frac{w_1^2}{2} + p_1 + \rho g z_1 = \rho \frac{w_2^2}{2} + p_2 + \rho g z_2 + L_{\text{трени}}, \quad (19,3)$$

представляет собой известное *уравнение Бернулли* для текущей жидкости с учетом действия сил трения.

По физическому смыслу это уравнение можно рассматривать как сохранение энергии в единичном объеме: кинетической энер-

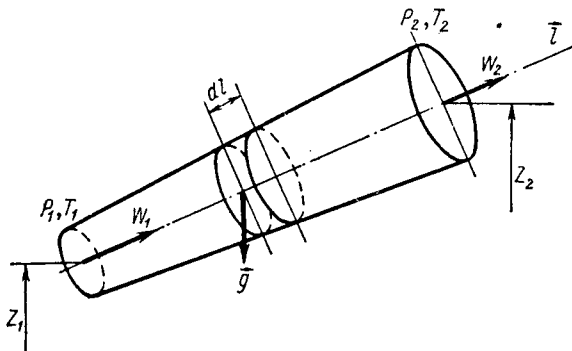


Рис. 21. К выводу уравнения Бернулли

гии  $\left(\rho \frac{w^2}{2}\right)$ , потенциальной энергии давления ( $p$ ) и потенциальной энергии массы единичного объема среды, находящейся в поле тяготения ( $\rho g z$ ).

Если вся работа трения переходит в тепло, то соответственно изменяется температура среды:

$$L_{\text{трени}} = \rho \bar{c}_v T_2 - \rho \bar{c}_v T_1 \frac{d\bar{m}}{m^3}.$$

В этих условиях *уравнение сохранения энергии для текущей несжимаемой среды* представится в следующем виде:

$$\rho \frac{w_1^2}{2} + p_1 + \rho g z_1 + \rho \bar{c}_v T_1 = \rho \frac{w_2^2}{2} + p_2 + \rho g z_2 + \rho \bar{c}_v T_2. \quad (19,4)$$

Для сжимаемой текущей среды  $\rho = \frac{1}{v} \neq \text{const}$  (где  $v$  — удельный объем среды), и уравнение (19,2) запишется в следующем

виде:

$$d\left(\frac{w^2}{2}\right) = gdl \cos(\vec{g}, \vec{l}) - vdp - \frac{P_{\text{тр}} dl}{\rho} =$$

$$= -gdz - vdp - dL_{\text{тр}, \rho}, \quad (19,5)$$

где  $d\left(\frac{w^2}{2}\right)$  — изменение кинетической энергии единичной массы текущей жидкости;

$gdz$  — изменение потенциальной энергии единичной массы среды, находящейся в поле тяготения;

$vdp$  — работа сил давления, затраченная на перемещение единичной массы среды по линии тока;

$dL_{\text{тр}, \rho}$  — работа сил трения для единичной массы перемещаемой среды вдоль линии тока.

Согласно первому закону термодинамики, имеем следующее равенство:

$$dQ = di - vdp, \quad (19,6)$$

где  $di = d(c_p T)$  — изменение энтальпии единицы массы среды;

$vdp$  — элементарная работа сил давления;

$dQ$  — тепло, сообщаемое или отводимое для единицы массы среды.

Таким образом, в соответствии с первым законом термодинамики уравнение (19,5) можно представить в следующем виде:

$$di + d\left(\frac{w^2}{2}\right) + gdz = dQ - dL_{\text{тр}, \rho}. \quad (19,7)$$

Сумма  $i + \frac{w^2}{2} + gz = c_v T + pv + \frac{w^2}{2} + gz$  представляет собой полную энергию единицы массы среды: тепловую энергию ( $c_v T$ ), потенциальную энергию давления ( $pv$ ), кинетическую энергию движения  $\left(\frac{w^2}{2}\right)$  и потенциальную энергию положения среды в поле тяготения ( $gz$ ).

Таким образом, для *сжимаемой текущей среды* уравнение сохранения энергии представится в следующем виде:

$$d\left(i + \frac{w^2}{2} + gz\right) = dQ - dL_{\text{тр}, \rho}. \quad (19,8)$$

В частном случае при условии *изоэнтропического* течения среды (отсутствие теплообмена и трения) уравнение (19,8) переходит в следующее:

$$d\left(i + \frac{w^2}{2} + gz\right) = 0. \quad (19,9)$$

Интегрирование этого уравнения в пределах между двумя заданными сечениями канала (1) и (2) приводит к следующему



равенству:

$$i_1 + \frac{w_1^2}{2} + gz_1 = i_2 + \frac{w_2^2}{2} + gz_2. \quad (19,10)$$

Пользуясь этим уравнением, можно, например, определить скорость изоэнтропического истечения газа из сопла. При  $z_1 = z_2$

$$\frac{w_2^2}{2} = \frac{w_1^2}{2} + (i_1 - i_2). \quad (19,11)$$

Отсюда для скорости истечения  $w_2$  получаем формулу

$$w_2 = \sqrt{w_1^2 + 2(i_1 - i_2)} \text{ м/сек.} \quad (19,12)$$

## § 20. Тепло трения и кинетическая температура среды, движущейся с большими скоростями

### *А. Тепло трения движущейся среды*

Тепло, возникающее в результате действия сил трения в единичном объеме, можно вычислить, рассматривая работу, обусловленную касательными и нормальными напряжениями текущей сжимаемой вязкой среды. При этом полная работа нормальных и касательных составляющих сил трения преобразуется частично в энергию давления и кинетическую энергию потока и частично переходит в тепло.

Полная работа нормальных и касательных составляющих сил трения в единичном объеме за 1 сек представляется суммой

$$L_{\text{тр}} = \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{xx}w_x + \sigma_{xy}w_y + \sigma_{xz}w_z) + \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_{yx}w_x + \sigma_{yy}w_y + \sigma_{yz}w_z) + \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_{zx}w_x + \sigma_{zy}w_y + \sigma_{zz}w_z), \quad (20,1)$$

$$\text{где } \left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \eta \left( 2 \frac{\partial w_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{w} \right) \\ \sigma_{yy} &= \eta \left( 2 \frac{\partial w_y}{\partial y} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{w} \right) \\ \sigma_{zz} &= \eta \left( 2 \frac{\partial w_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{w} \right) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{нормальные напряжения} \\ \text{(рис. 19),} \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xy} &= \eta \left( \frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x} \right) \\ \sigma_{yz} &= \eta \left( \frac{\partial w_y}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial y} \right) \\ \sigma_{xz} &= \eta \left( \frac{\partial w_z}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{касательные напряжения} \\ \text{(рис. 19).} \end{array}$$

Работа сил трения, преобразуемая в энергию давления и кинетическую энергию потока, определяется суммой:

$$L_{\text{трени, мех}} = \omega_x \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \right) + \omega_y \left( \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} \right) + \omega_z \left( \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right). \quad (20,2)$$

Соответственно этой работе изменяются давление и кинетическая энергия движущейся среды в единичном объеме:

$$L_{\text{трени, мех}} = \frac{D}{d\tau} \left( p + \rho \frac{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}{2} \right).$$

Работа сил трения, переходящая в тепло, находится как разность:

$$L_{\text{трени, тепл}} = L_{\text{трени}} - L_{\text{трени, мех}} = (\sigma_{xx} \frac{\partial w_x}{\partial x} + \sigma_{xy} \frac{\partial w_y}{\partial x} + \sigma_{xz} \frac{\partial w_z}{\partial x}) + (\sigma_{yx} \frac{\partial w_x}{\partial y} + \sigma_{yy} \frac{\partial w_y}{\partial y} + \sigma_{yz} \frac{\partial w_z}{\partial y}) + (\sigma_{zx} \frac{\partial w_x}{\partial z} + \sigma_{zy} \frac{\partial w_y}{\partial z} + \sigma_{zz} \frac{\partial w_z}{\partial z}). \quad (20,3)$$

Соответствующая этой работе мощность теплового источника от действия сил трения в текущей среде определяется произведением:

$$q_{\text{трени}} = \eta \Phi_{\text{диссип}} \frac{em}{m^3}, \quad (20,4)$$

где  $\eta$  — вязкость среды;

$\Phi_{\text{диссип}}$  — так называемая диссипативная функция

$$\Phi_{\text{диссип}} = 2 \left[ \left( \frac{\partial w_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial w_y}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_z}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_x}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right)^2. \quad (20,5)$$

Для наиболее простого случая — одномерного течения среды относительно плоской поверхности стенки неограниченных размеров — диссипативная функция определяется равенством

$$\Phi_{\text{диссип}} = \left( \frac{\partial w_x}{\partial y} \right)^2.$$

Соответствующая мощность теплового источника находится:

$$q_{\text{трени}} = \eta \left( \frac{\partial w_x}{\partial y} \right)^2 \frac{em}{m^3}. \quad (20,6)$$

При больших скоростях обтекания тел изменение скорости в тонком пограничном слое у поверхности тела может быть настолько большим, что мощность теплового источника от действия сил трения оказывается не только соизмеримой с различными видами переноса тепла в пограничном слое (например, теплопро-

водностью), но и может значительно их превышать. Так осуществляется нагрев тел, движущихся в газовой среде с большой скоростью.

### Б. Кинетическая температура движущейся среды

При движении среды с большими скоростями, как уже указывалось (§ 7), можно ввести понятие условной кинетической температуры, отвечающей кинетической энергии единичной массы движущейся среды  $\left(\frac{w^2}{2}\right)$ :

$$\theta_{\text{кин}} = \frac{w^2}{2c_p}.$$

При условии мгновенного (без тепловых потерь) торможения движущейся массы среды кинетическая температура отвечает также соответствующему повышению температуры теплового состояния заторможенной среды (температура торможения):

$$T_* = T + \theta_{\text{кин}} = T \left(1 + \frac{\theta_{\text{кин}}}{T}\right),$$

где  $\frac{\theta_{\text{кин}}}{T} = \frac{w^2}{2c_p T}$  — критерий кинетической температуры.

Пользуясь понятием критерия скорости движения среды  $M = \frac{w}{a}$  (где  $a = \sqrt{k \cdot \frac{R_M T}{M}}$  — скорость звука в газе), получаем формулу для определения температуры полного мгновенного торможения движущейся среды:

$$T_* = T \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right). \quad (20,7)$$

Для примера оценки заметной величины критерия кинетической температуры

$$\frac{\theta_{\text{кин}}}{T} = \frac{k-1}{2} M^2 \gg 0,01 \text{ (1\%)}$$

вычислим соответствующую скорость воздуха ( $k = 1,4$ ):

$$w \gg a \sqrt{\frac{2}{(k-1)100}} \gg 0,224a.$$

Для температуры  $T = 273^\circ \text{K}$  скорость звука в воздухе

$$a = \sqrt{k \cdot \frac{R_M T}{M}} = 333 \text{ м/сек.}$$

Следовательно,

$$w \gg 0,224 \cdot 333 = 75 \text{ м/сек.}$$

Таким образом, при скорости движения воздуха  $\omega \gg 75$  м/сек критерий кинетической температуры становится заметным ( $\frac{\theta_{кин}}{T} \gg 0,01$ ; 1%).

При движении воздуха с  $M = 1$  (звуковая скорость)

$$\frac{\theta_{кин}}{T} = 0,2 \text{ и } \theta_{кин} = 55^\circ.$$

При обтекании тел воздухом с весьма большими скоростями ( $M > 1$ ) кинетическая температура ( $\frac{\theta_{кин}}{T} \sim M^2$ ) может достигать весьма больших величин. Например, при  $M = 10$   $\theta_{кин} = 20 \cdot T \approx 5500^\circ\text{K}$ ; при  $M = 20$   $\theta_{кин} \approx 22000^\circ\text{K}$ .

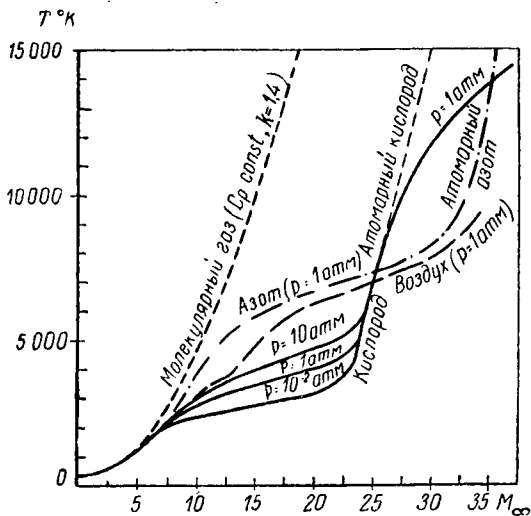


Рис. 22. Температура торможения в зависимости от числа  $M$  в условиях течения Куэтта [63]

Необходимо учитывать, что полное мгновенное торможение движущейся среды не достигается. Поэтому реализуемая кинетическая температура оказывается меньшей:

$$\theta_{кин \text{ реал}} = r \theta_{кин} = r \frac{k-1}{2} M^2 T,$$

где  $r$  — коэффициент восстановления кинетической температуры.

Коэффициент восстановления кинетической температуры определяется экспериментально применительно к конкретным случаям обтекания тел ( $r = 0,850 \div 0,995$ ).

При торможении в газе тел, движущихся с очень большими скоростями (сверхзвуковыми), температура торможения развивается настолько высокой, что газ подвергается термической диссоциации и ионизации молекул и атомов. Температура газа при этом снижается в соответствии с энергией диссоциации и ионизации ( $E_{\text{дисс } \rho_i}$ ) компонентов среды ( $Q_i$ ):

$$\theta_{\text{хим}} = \frac{\sum Q_i E_{\text{дисс } \rho_i}}{qc_p}.$$

В этих условиях температура теплового состояния газа при торможении тел, движущихся с очень высокой скоростью (сверхзвуковой), определяется формулой

$$T_{**} = T + \theta_{\text{кин}} - \theta_{\text{хим}}.$$

Заметная диссоциация молекул газа отвечает температуре, превышающей  $2000^\circ \text{K}$ , а ионизация частиц наблюдается при еще более высокой температуре.

На рис. 22 представлена полученная расчетом зависимость температуры торможения для различных чисел  $M$  и показано влияние термической диссоциации и ионизации газа.

## § 21. Перенос импульса на стенку или торможение текущей среды

Перенос импульса, или количества движения, текущей среды ( $\omega Q$ ) на стенку, вдоль которой перемещается среда (рис. 23) со скоростью в отдалении от стенки  $\omega_\infty$ , определяется из условий, аналогичных переносу энергии и массы на стенку.

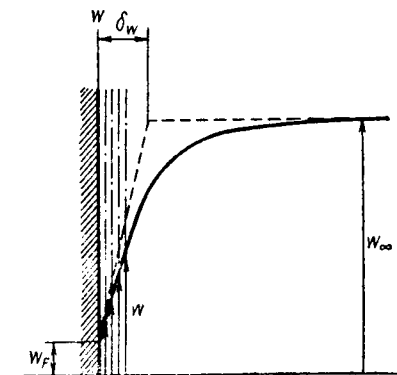


Рис. 23. К определению переноса импульса на стенку (торможение текущей среды)

При этом формула, определяющая удельную силу трения, отнесенную к единичной площади поверхности обтекаемого тела, находится в следующем виде:

$$\sigma_{F, n} = \frac{1}{3} \frac{\bar{c}l}{\delta_w} (\omega_\infty Q_\infty - \omega_F Q_F), \quad (21,1)$$

где  $\frac{1}{3} \bar{c}l = \nu$  — коэффициент переноса импульса, или коэффициент кинематической вязкости среды;

$\delta_w$  — условный эквивалентный пограничный слой среды, в

котором осуществляется перенос импульса с равномерным изменением количества движения;

$\omega_\infty Q_\infty$  — количество движения среды в отдалении от стенки;

$\omega_F Q_F$  — количество движения среды на границе с поверхностью стенки.

При условии полного торможения среды на стенке  $\omega_F Q_F = 0$  (течение без скольжения) удельная сила торможения определяется формулой

$$\sigma_{F, n} = \frac{1}{3} \frac{\bar{c} \bar{l}}{\delta_w} \omega_\infty Q_\infty. \quad (21,2)$$

Сила трения, возникающая при обтекании тела жидкостью, может быть определена так же, как некоторая доля динамической силы потока:

$$\sigma_{F, n} = \xi \frac{\rho \omega_\infty^2}{2}, \quad (21,3)$$

где  $\xi$  — коэффициент трения.

Из равенств (21,2) и (21,3) для коэффициента трения получаем следующее соотношение:

$$\xi = \frac{2}{3} \frac{\bar{c} \bar{l}}{\omega_\infty \delta_w}. \quad (21,4)$$

Так как  $\frac{1}{3} \bar{c} \bar{l} = \nu$ , а  $\frac{\omega_\infty x}{\nu} = Re_x$  — число Рейнольдса, отнесенное к расстоянию  $x$  от начала обтекания поверхности тела потоком, то коэффициент трения определяется формулой

$$\xi = \frac{2}{Re_x \frac{\delta_w}{x}}.$$

Из теории пограничного слоя применительно к обтеканию плоской стенки ламинарным потоком изотермической среды (§ 74) для толщины пограничного слоя известна формула

$$\frac{\delta_w}{x} = \frac{1}{0,332 \sqrt{Re_x}}.$$

Для коэффициента трения при обтекании плоской стенки ламинарным потоком среды получаем формулу

$$\xi = \frac{0,664}{\sqrt{Re_x}}.$$

Для коэффициента трения при стабилизированном течении изотермической жидкости в трубе из формулы Гагена — Пуазейля следует:

$$\xi_{\text{лам, труб}} = \frac{64}{Re_d}, \quad (21,5)$$

где  $Re_d = \frac{\bar{\omega}d}{\nu}$  — число Рейнольдса ( $\bar{\omega}$  — средняя скорость потока,  $d$  — диаметр трубы,  $\nu$  — кинематическая вязкость жидкости).

В условиях турбулентного потока изотермической жидкости в трубе коэффициент трения также находится в зависимости от числа  $Re = \frac{\bar{\omega}d}{\nu}$ ; однако степень влияния получается меньше, чем для ламинарного потока. Например, для гладких труб в диапазоне изменения  $Re < 10^5$

$$\xi_{\text{турб}} = \frac{0,3164}{Re^{0,25}} \quad (21,6)$$

Помимо числа  $Re$ , коэффициент трения турбулентного потока находится в зависимости от относительной шероховатости стенок

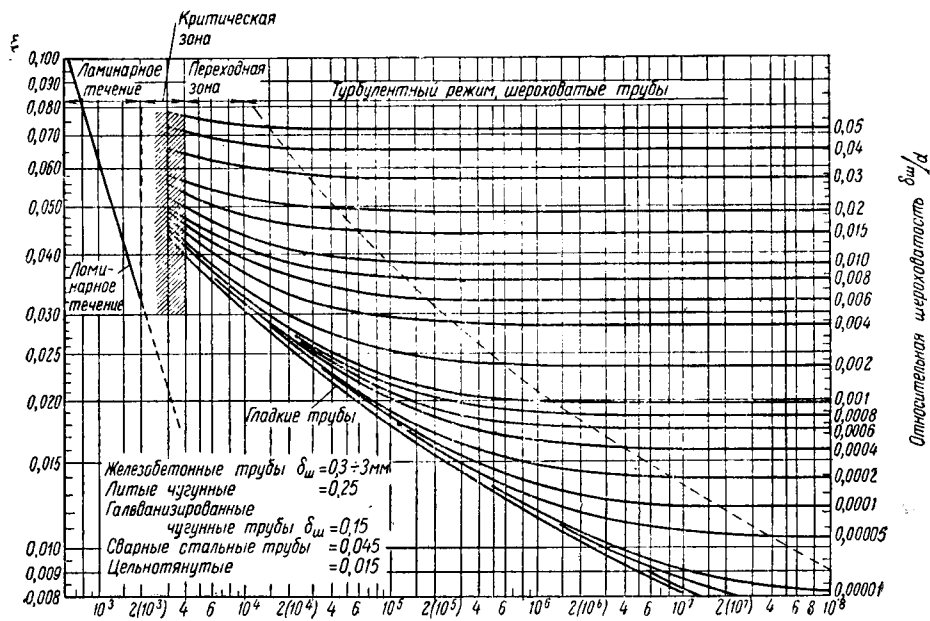


Рис. 24. Коэффициент трения при течении изотермической жидкости в трубах канала  $\delta_{ш}/d$ , где  $\delta_{ш}$  — характерный размер шероховатости стенок:

$$\xi_{\text{турб}} = f(Re, \delta_{ш}/d).$$

На рис. 24 представлены графики зависимости коэффициента трения от числа  $Re = \frac{\bar{\omega}d}{\nu}$  для условий изотермического течения

жидкости в трубах с различной относительной шероховатостью  $\left(\frac{\delta_{\text{шт}}}{d}\right)$ .

Как видно, в переходной области числа  $Re \approx 2300$  характер зависимости коэффициента торможения от числа  $Re$  заметно изменяется.

Для условий неизотермического течения среды при наличии теплообмена с поверхностью тела коэффициент трения, помимо прочих факторов, зависит от температурного поля текущей среды.

Течение газа с большими скоростями относительно поверхности тела, как уже отмечалось, происходит с некоторым скольжением, и коэффициент трения уменьшается.



### КОЭФФИЦИЕНТЫ ПЕРЕНОСА

На практике приходится встречаться с весьма различными телами и средами, в которых осуществляется перенос энергии, массы и импульса. Состояние тел и сред может изменяться как по виду фаз (твердое, жидкое, парообразное, газообразное, плазменное состояния), так и по параметрам состояния (давление, температура). *Перенос энергии* в различных телах и средах зависит от вида носителей, их скорости, характера перемещения носителей (диффузионный, конвективный, лучевой) и параметров состояния вещества. *Перенос массы и импульса* также зависит от скорости, характера перемещения частиц вещества и параметров состояния.

При определении удельных потоков *диффузионного переноса тепла*

$$\vec{q}_T = -a \nabla (\rho c_V T) \frac{\text{вт}}{\text{м}^2},$$

или

$$\vec{q}_T = -\lambda \nabla T,$$

диффузионного переноса массы отдельных компонентов вещества

$$\vec{q}_i = -D_i \nabla \rho_i \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \text{сек}},$$

при определении силы трения текущих слоев среды

$$\sigma_x = \nu \frac{\partial (\rho \omega_x)}{\partial y} \text{ н/м}^2,$$

или

$$\sigma_x = \eta \frac{\partial \omega_x}{\partial y},$$

важнейшее значение имеют *коэффициенты переноса*:

$a = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{м^2}{сек}$  — коэффициент переноса тепла, или температуропроводность вещества ( $\rho$  и  $c$  — плотность и теплоемкость вещества);

$\lambda \frac{вт}{м \cdot град}$  — коэффициент теплопроводности вещества;

$D_{i,j} \frac{м^2}{сек}$  — коэффициент диффузии  $i$ -го компонента вещества;

$\nu = \frac{\eta}{\rho} \frac{м^2}{сек}$  — коэффициент кинематической вязкости среды;

$\eta \frac{н \cdot сек}{м^2}$  — коэффициент динамической вязкости среды.

Коэффициенты переноса  $a$ ,  $\lambda$ ,  $D_{i,j}$ ,  $\nu$  и  $\eta$  являются физическими характеристиками (физическими параметрами) вещества и представляют его свойства в процессах переноса тепла, компонентов массы вещества и внутреннего трения текущих слоев среды. Коэффициенты эти определяются экспериментально и находятся в зависимости от факторов, определяющих состояние вещества (температура, давление). Ниже рассматриваются характерные особенности коэффициентов переноса различных веществ и анализируется зависимость их от различных факторов. Конкретные данные о коэффициентах переноса содержатся в различных справочниках теплофизических величин.

## § 22. Влияние температуры и давления на коэффициенты переноса в газах

Как было показано, все коэффициенты диффузионного переноса тепла, массы и импульса определяются произведением средней скорости носителей ( $\bar{c}$ ) на среднюю длину свободного пробега ( $\bar{l}$ ):

$$a, D, \nu \sim (\bar{c}\bar{l}).$$

Согласно кинетической теории газов, которая достаточно хорошо объясняет свойства и поведение газов при обычных давлениях и температурах, когда состояние газа близко к идеальному, средняя скорость перемещения молекул газа зависит от температуры:

$$\bar{c} = \sqrt{3 \frac{R_M T}{M}} \text{ м/сек},$$

где  $R_M \simeq 8,32 \frac{кдж}{моль \cdot град}$  — газовая постоянная одного моля;

$M$  — молекулярная масса газа;

$T$  — температура газа.

Средняя длина свободного пробега молекул газа определяется формулой

$$\bar{l} = \frac{1}{N\Omega},$$

где  $N$  — концентрация молекул в единичном объеме;  
 $\Omega$  — эффективное сечение переноса соударяющихся молекул.

Для каждого газа величина молекулярной массы неизменна; количество молекул в единичном объеме пропорционально давлению газа ( $p$ ) и обратно пропорционально температуре ( $T$ ).

При неизменном эффективном сечении переноса соударяющихся молекул для коэффициентов переноса тепла, массы и импульса имеем следующие пропорциональные соотношения:

$$a, D, \nu \sim \frac{T^{1,5}}{p}.$$

Как показывает опыт, влияние температуры для различных газов оказывается несколько большим, чем в степени 1,5. Показатель степени у температуры находится в диапазоне от 1,5 до 2.

Таким образом, коэффициенты переноса тепла, массы и импульса для различных газов зависят от температуры и давления, и эту зависимость можно представить в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} a(T, p) &= a_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^n \left( \frac{p_0}{p} \right), \\ D(T, p) &= D_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^n \left( \frac{p_0}{p} \right), \\ \nu(T, p) &= \nu_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^n \left( \frac{p_0}{p} \right), \end{aligned} \right\} \quad (22,1)$$

где  $a_0, D_0, \nu_0$  — коэффициенты переноса тепла, массы и импульса для различных газов при нормальном состоянии ( $T_0 = 273^\circ \text{K}$ ,  $p_0 = 760 \text{ мм рт. ст.}$ ).

Коэффициент динамической вязкости идеального газа не зависит от давления и изменяется лишь с температурой:

$$\eta = \nu \rho = \eta_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^{n-1}. \quad (22,2)$$

В связи с большой средней скоростью молекул ( $\bar{c}$ ) из всех двухатомных газов наибольшим коэффициентом переноса обладает водород ( $\text{H}_2$ ), а из одноатомных газов — атомарный водород ( $\text{H}$ ). Значительно меньшими коэффициентами переноса обладают газы с тяжелыми молекулами ( $\text{CO}_2, \text{SO}_2$ ).

При очень малых и очень больших давлениях газа на коэффициентах переноса сказываются особенности поведения молекул в разреженном и концентрированном газе по сравнению с идеальным. При очень низких давлениях газа ( $p \ll 1 \text{ ат}$ ) коэффициенты переноса определяются в соответствии с лучевым характером перемещения молекул. Большая концентрация молекул при больших давлениях газа приводит к заметному силовому взаимодействию молекул, которое оказывает влияние на коэффициенты переноса.

## § 23. Критерии физических свойств газа

В решении различных задач *конвективно-диффузионного переноса тепла* важную роль играет отношение коэффициентов переноса импульса ( $\nu = \frac{1}{3} \bar{c} \bar{l}$ ) и тепла ( $a_{cV} = \frac{1}{2} \bar{c} \bar{l}$ ). Отношение этих коэффициентов, рассчитанных согласно приближенной теории диффузионного переноса, является постоянным числом:

$$\frac{\nu}{a_{cV}} = \frac{2}{3} = 0,666 \dots \quad (23,1)$$

Как показывает точная теория диффузионного переноса в газах и подтверждает опыт, это характерное число  $\frac{\nu}{a_{cV}} = 0,666$  не удовлетворяется, особенно для простых одноатомных газов. В табл. 1 приводятся отношения  $\frac{\nu}{a_{cV}}$  для различных газов.

Т а б л и ц а 1

Газ	$\frac{\nu}{a_{cV}}$	Газ	$\frac{\nu}{a_{cV}}$
Водород $H_2$ . . . . .	0,521	Оксид азота $NO$ . . . . .	0,526
Гелий $He$ . . . . .	0,4	Кислород $O_2$ . . . . .	0,529
Метан $CH_4$ . . . . .	0,588	Аргон $Ar$ . . . . .	0,4
Аммиак $NH_3$ . . . . .	0,588	Двуокись углерода $CO_2$ . . . . .	0,596
Неон $Ne$ . . . . .	0,4	Закись азота $N_2O$ . . . . .	0,596
Оксид углерода $CO$ . . . . .	0,534	Сернистый газ $SO_2$ . . . . .	0,61
Этилен $C_2H_4$ . . . . .	0,642	Хлор $Cl_2$ . . . . .	0,556
Азот $N_2$ . . . . .	0,524	Криптон $Kr$ . . . . .	0,4
		Ксенон $Xe$ . . . . .	0,4

Для приближенного определения отношения  $\frac{\nu}{a_{cV}}$  может служить формула *Эйкена*:

$$\frac{\nu}{a_{cV}} = \frac{c_V \eta}{\lambda} = \frac{4}{9c_p/c_V - 5}, \quad (23,2)$$

где  $c_p/c_V$  — отношение теплоемкостей газа при постоянном давлении и постоянном объеме.

Отношение коэффициентов переноса импульса ( $\nu$ ) и тепла  $a_{c_p} = a_{cV} \frac{c_V}{c_p}$  называют критерием физических свойств газа в процессах конвективно-диффузионного переноса тепла, или критерием *Прандтля*:

$$Pr = \frac{\nu}{a_{c_p}}. \quad (23,3)$$

В решении задач конвективно-диффузионного переноса массы важную роль играет отношение коэффициентов переноса импульса ( $\nu = \frac{1}{3} \bar{c} \bar{l}$ ) и массы молекул ( $D_{i,j} = \frac{1}{2} \bar{c} \bar{l}$ ). Отношение этих коэффициентов, согласно приближенной теории, также представляет постоянное число:

$$\frac{\nu}{D_{i,j}} = \frac{2}{3} = 0,666 \dots \quad (23,4)$$

В действительности, однако, отношение  $\frac{\nu}{D_{i,j}}$  значительно отличается от числа 0,666 и оказывается различным для молекул газов с различной атомностью. Кроме того, это отношение зависит от состава газовой смеси, в которой осуществляется диффузия молекул  $i$ -го компонента газа.

Отношение коэффициентов переноса импульса ( $\nu$ ) и массы молекул ( $D_{i,j}$ ) называют критерием физических свойств газа в процессах конвективно-диффузионного переноса массы, или критерием Шмидта:

$$Sc = \frac{\nu}{D_{i,j}}.$$

В табл. 2 представлен критерий  $Sc$  для диффузии некоторых газов.

Т а б л и ц а 2

Диффундирующий газ (i)	Среда (j)	$Sc = \frac{\nu}{D_{i,j}}$	Диффундирующий газ (i)	Среда (j)	$Sc = \frac{\nu}{D_{i,j}}$
Хлористый водород HCl	Водяной пар H <sub>2</sub> O	0,81	Водяной пар H <sub>2</sub> O	Воздух	0,488
Аммиак NH <sub>3</sub>	Водяной пар H <sub>2</sub> O	1,5	Водород H <sub>2</sub>	Кислород O <sub>2</sub>	0,182
Аммиак NH <sub>3</sub>	Воздух	0,634	Водород H <sub>2</sub>	Азот N <sub>2</sub>	0,187
Двуокись углерода CO <sub>2</sub>	Водород H <sub>2</sub>	0,158	Бензол C <sub>6</sub> H <sub>6</sub>	Воздух	1,83
			Бензол C <sub>6</sub> H <sub>6</sub>	Двуокись углерода	1,37
Кислород O <sub>2</sub>	Азот N <sub>2</sub>	0,681	Бензол C <sub>6</sub> H <sub>6</sub>	Водород	3,26

В связи с одинаковым характером влияния температуры и давления газа на коэффициенты переноса  $a$ ,  $\nu$  и  $D_{i,j}$  критерии физических свойств  $Pr$  и  $Sc$  для газов, близких к идеальным, не зависят от давления и сравнительно слабо изменяются с температурой.

## § 24. Особенности переноса в разреженном газе

При очень малом давлении ( $p \ll 1 \text{ ат}$ ), в состоянии сильного разрежения газа, длина свободного пробега молекул ( $\bar{l}$ ) может

быть настолько большой, что становится соизмеримой или даже больше размеров тела ( $l$ ), которое находится в разреженном газе (критерий Кнудсена  $K = \frac{\bar{l}}{l} \geq 1$ ).

В этих условиях простые диффузионные представления о переносе тепла, массы и импульса теряют силу; интенсивность перемещения молекул по различным направлениям в сильно разреженном газе не сохраняется одинаковой; сказывается лучевой характер перемещения молекул. Перенос энергии на границе с поверхностью тела в разреженном газе осложняется отражением молекул с неполным обменом энергии с частицами тела; наблюдается явление температурного скачка. Течение разреженного газа относительно поверхности тела осуществляется со скольжением, и на границе наблюдается скачок скорости течения.

Явления переноса в разреженном газе еще более усложняются при течениях газа со скоростями ( $w$ ), превышающими скорость звука (критерий Маха  $M > 1$ ).

#### А. Перенос энергии в разреженном газе

В сильно разреженном газе у стенки ( $p \ll 1$  атм) молекулы перемещаются по направлению к стенке без соударений между собой и их можно рассматривать как поток частиц, аналогичных потоку фотонов при излучении тел без поглощения энергии излучения промежуточной средой. В этих условиях удельный поток энергии падающих молекул на единицу площади стенки определяется формулой:

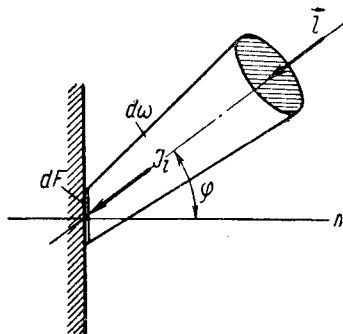


Рис. 25. К определению удельного потока молекул разреженного газа, падающих на стенку

$$q_{\text{пад}} = \int_{(2\pi)} I_l \cos \varphi d\omega,$$

где  $I_l = \frac{1}{4\pi} \bar{c} N \bar{\epsilon}$  — интенсивность энергии молекул, перемещаемых по направлению  $\vec{l}$  к стенке ( $N$  — концентрация молекул в пространстве,  $\bar{c}$  — скорость их перемещения,  $\bar{\epsilon}$  — средняя энергия молекул газа);

$\varphi$  — угол между направлением  $\vec{l}$  перемещения молекул и нормалью  $\vec{n}$  к стенке (рис. 25);

$d\omega = \sin \varphi d\varphi d\theta$  — элементарный телесный угол.

Выполняя интегрирование, находим:

$$q_{\text{пад}} = \frac{1}{4\pi} \bar{c} N \bar{\epsilon} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{4} \bar{c} N \bar{\epsilon}. \quad (24,1)$$

Если разреженный газ находится в состоянии термодинамического равновесия при температуре  $T$ , то средняя энергия молекул газа определяется формулой:

$$\bar{\epsilon} = n \frac{1}{2} kT,$$

где  $n$  — множитель, отвечающий числу степеней свободы движения молекулы с элементарной энергией  $\left(\frac{1}{2} kT\right)$ .

В этих условиях формула (24,1) запишется в виде:

$$q_{\text{пад}} = \frac{1}{4} \bar{c} N n \frac{1}{2} kT = \frac{1}{4} \bar{c} U = \frac{1}{4} \bar{c} (\rho c_V T), \quad (24,2)$$

где  $U = \rho c_V T$  — объемная плотность энергии в газе  $\left(\frac{\text{дж}}{\text{м}^3}\right)$ .

При полном обмене энергией падающих молекул газа на стенку с частицами вещества стенки результирующий перенос энергии к массе стенки определяется разностью потоков энергии молекул, падающих на стенку ( $q_{\text{пад}}$ ) и отраженных стенкой ( $q_{T_F}$ ) с энергией, отвечающей температуре стенки  $T_F$ :

$$q_{\text{рез. макс}} = q_{\text{пад}} - q_{T_F}. \quad (24,3)$$

При неполном обмене энергией молекул, падающих на стенку, с частицами вещества стенки результирующий перенос энергии к массе стенки определяется разностью:

$$q_{\text{рез}} = q_{\text{пад}} - q_{\text{отр. } T_{\text{отр}}}, \quad (24,4)$$

где  $q_{\text{отр. } T_{\text{отр}}}$  — удельный поток энергии молекул, отраженных стенкой при неполном обмене энергией, отвечающей  $T_{\text{отр}} > T_F$ .

Отношение  $\frac{q_{\text{рез}}}{q_{\text{рез, макс}}} = \alpha_{\text{ак}} \leq 1$  представляет собой способность усвоения энергии молекул стенкой и называется коэффициентом аккомодации.

Согласно уравнениям (24,3) и (24,4), для коэффициента аккомодации получаем следующую формулу:

$$\alpha_{\text{ак}} = \frac{q_{\text{пад}} - q_{\text{отр. } T_{\text{отр}}}}{q_{\text{пад}} - q_{\text{отр. } T_F}}. \quad (24,5)$$

При неизменной средней скорости падающих и отраженных молекул удельные потоки энергии при температурах  $T_F$  и  $T_{\text{отр}}$

определяются формулами:

$$\left. \begin{aligned} q_{\text{отр}, T_F} &= \frac{1}{4} \bar{c} (\rho c_V T_F), \\ q_{\text{отр}, T_{\text{отр}}} &= \frac{1}{4} \bar{c} (\rho c_V T_{\text{отр}}). \end{aligned} \right\} \quad (24,6)$$

В этих условиях коэффициент аккомодации определяется отношением разности температур:

$$\alpha_{\text{ак}} = \frac{T_{\infty} - T_{\text{отр}}}{T_{\infty} - T_F}. \quad (24,7)$$

Для вычисления коэффициента аккомодации, помимо температур газа  $T_{\infty}$  и стенки  $T_F$ , необходимо знать температуру отраженных молекул  $T_{\text{отр}}$ .

Теплоотдача сильно разреженного газа ( $K \gg 1$ ) определяется формулой:

$$\begin{aligned} q_{\text{рез}} &= q_{\text{пад}} - q_{\text{отр}}, \quad T_{\text{отр}} = \frac{1}{4} \bar{c} \bar{c}_V (T_{\infty} - T_{\text{отр}}) = \\ &= \alpha_{\text{ак}} \frac{1}{4} \bar{c} \bar{c}_V (T_{\infty} - T_F). \end{aligned} \quad (24,8)$$

Произведение  $\alpha_{\text{ак}} \frac{1}{4} \bar{c} \bar{c}_V = \alpha_F$  представляет коэффициент теплоотдачи стенки, и, следовательно, формула теплоотдачи разреженного газа запишется в обычном виде:

$$q_F = \alpha_F (T_{\infty} - T_F),$$

где  $\alpha_F$  — коэффициент теплоотдачи разреженного газа определяется произведением скорости движения молекул ( $\bar{c}$ ), плотности газа ( $\rho$ ), его теплоемкости ( $\bar{c}_V$ ) и коэффициента аккомодации ( $\alpha_{\text{ак}}$ ).

### Б. Температурный скачок

В результате неполного обмена энергий газовых молекул на стенке в приграничном слое газа (рис. 2б) наблюдается температурный скачок ( $T_{\text{отр}} - T_F$ ), который в соответствии с формулой (24,7) определяется так:

$$T_{\text{отр}} - T_F = (1 - \alpha_{\text{ак}}) (T_{\infty} - T_F). \quad (24,9)$$

Чем меньше коэффициент аккомодации  $\alpha_{\text{ак}}$ , тем больше температурный скачок в пограничном слое разреженного газа у стенки. При  $\alpha_{\text{ак}} = 0$  температурный скачок достигает предельной, наибольшей величины, равной разности температур газа и стенки:

$$(T_{\text{отр}} - T_F)_{\text{макс}} = T_{\infty} - T_F. \quad (24,10)$$

При  $\alpha_{\text{ак}} = 1$  температурного скачка в пограничном слое газа у стенки не существует.

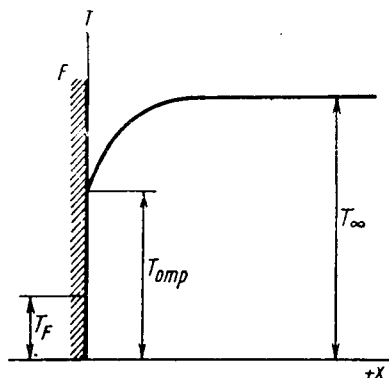


Измерения переноса тепла в слое разреженного воздуха, ограниченного различными металлическими стенками (бронза, алюминий, чугун), указывают для коэффициента аккомодации величины, изменяющиеся в зависимости от состояния поверхности от 0,87 до 0,97.

По данным Смолуховского, в тонких слоях газа коэффициент аккомодации изменяется от 0,1 до 1.

Существование температурного скачка в пограничных слоях сильно разреженного газа у стенки или в весьма тонких слоях газа атмосферного давления (например, газа, находящегося в порах слоев мельчайших зерен) связано со снижением результирующего переноса энергии. Не следует, однако, забывать о существовании другого вида переноса энергии через слой — излучения, которое во многих случаях играет решающую роль.

Рис. 26. К определению температурного скачка у стенки в разреженном газе



В. Свободное молекулярное течение разреженного газа

### В. Свободное молекулярное течение разреженного газа

Формула (24,1) для определения удельного потока энергии свободно перемещающихся молекул разреженного газа и падающих на единицу площади поверхности стенки может быть применена и для удельного потока массы свободно вытекающих молекул из отверстия тонкой перегородки, разделяющей газ обычного давления ( $p \gg 1 \text{ атм}$ ) от разреженного газа ( $p \ll 1 \text{ атм}$ ). Если диаметр отверстия и толщина перегородки будут значительно меньше длины свободного пробега молекул газа, то множество молекул газа, движущихся в обе стороны, будут свободно проходить отверстие перегородки без столкновений.

Удельные потоки массы молекул, проходящих отверстие перегородки (рис. 27) без обратного отражения от боковых стенок, определяются формулами:

$$q_{1,2} = \frac{1}{4} \bar{c}_1 N_1 m,$$

$$q_{2,1} = \frac{1}{4} \bar{c}_2 N_2 m,$$

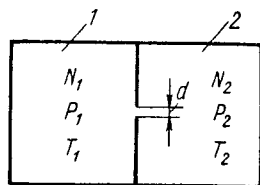


Рис. 27. К определению свободного течения молекул разреженного газа в отверстии перегородки

где  $q_{1,2}$  и  $q_{2,1}$  — удельные потоки массы молекул, проходящих отверстие перегородки в направлениях 1,2 и 2,1;

$\bar{c}_1$  и  $\bar{c}_2$  — средние скорости перемещения молекул газа в пространствах 1 и 2;

$N_1$  и  $N_2$  — соответствующие концентрации молекул газа;  
 $m$  — масса молекул газа.

Результирующий перенос массы молекул через единичную площадку отверстия составит:

$$q = q_{1,2} - q_{2,1} = \frac{1}{4} (\bar{c}_1 N_1 m - \bar{c}_2 N_2 m).$$

Имея в виду, что давления газа и скорости молекул определяются формулами:

$$p_1 = \frac{1}{3} N_1 m \bar{c}_1^2, \quad p_2 = \frac{1}{3} N_2 m \bar{c}_2^2,$$

$$\bar{c}_1 = \sqrt{3 \frac{R_M T_1}{M}}, \quad \bar{c}_2 = \sqrt{3 \frac{R_M T_2}{M}},$$

для результирующего переноса массы молекул через отверстие перегородки получаем следующую формулу:

$$q = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{M}{3R_M}} \left( \frac{p_1}{\sqrt{T_1}} - \frac{p_2}{\sqrt{T_2}} \right) \frac{\kappa g}{m^2 \text{сек}}. \quad (24,11)$$

Важно и интересно отметить, что даже при одинаковом давлении газа, разделенного перегородкой ( $p_1 = p_2$ ), но при различных температурах ( $T_1 \neq T_2$ ) перенос массы молекул газа осуществляется в сторону меньшей концентрации газовых молекул, т. е. в сторону большей температуры.

Перенос молекул газа в сторону меньшей концентрации при большей температуре называют термической диффузией и ей, в отличие от обычной изотермической диффузии. Процесс термической диффузии используется для разделения газов в газовых смесях.

При одинаковой температуре газа в обоих пространствах ( $T_1 = T_2 = T$ ), но при различном давлении ( $p_1 \neq p_2$ ) удельный поток переноса газа в условиях свободного перемещения молекул определяется формулой (формула Кнудсена):

$$q = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{M}{3R_M T}} (p_1 - p_2) \frac{\kappa g}{m^2 \text{сек}}. \quad (24,12)$$

### Г. Течение масс газа со скольжением

Перемещение масс разреженного газа относительно поверхности тела сопровождается скачком скорости перемещения на границе с поверхностью тела. Существование скачка скорости и явления скольжения газа вдоль стенки связано с частичным

свободным молекулярным течением разреженного газа. Особенно заметно скольжение текущих масс разреженного газа при скоростях перемещения ( $\omega$ ), превышающих скорость звука ( $a$ ), т. е., когда критерий  $M = \frac{\omega}{a} > 1$ .

Как показывает опыт и теория переноса импульса при течениях масс газа со скольжением, коэффициент сопротивления обтеканию тел разреженным газом оказывается меньшим, чем при обтекании этих же тел газом обычного давления.

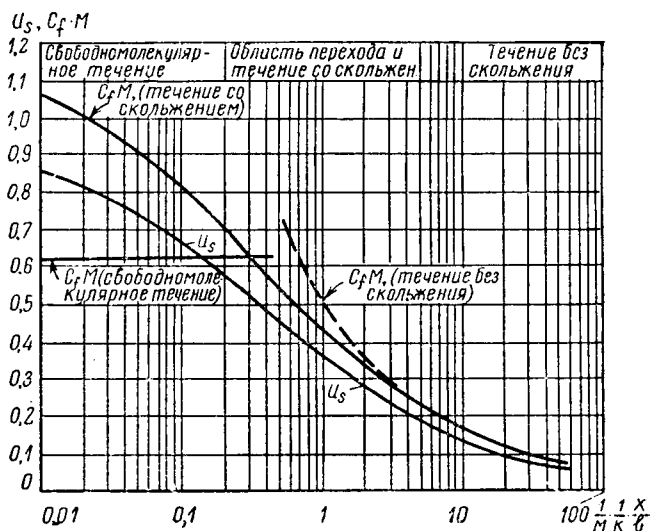


Рис. 28. Характеристики течения газа со скольжением:  $u_s$  — отношение скоростей течения;  $C_f \cdot M$  — характеристика трения при течениях [39]

Теория течения газа со скольжением рассматривается в специальных курсах газовой динамики [61]. Здесь ограничимся лишь рассмотрением результата решения задачи обтекания пластины газом в широком диапазоне изменения скорости потока.

На рис. 28 представлены графики безразмерной скорости скольжения газа ( $u_s = \frac{\omega_s}{\omega}$ ) и произведения коэффициента сопротивления ( $C_f$ ) на критерий Маха ( $M$ ) в зависимости от комплексного критерия:  $\frac{1}{M} \cdot \frac{1}{K} \cdot \frac{x}{l}$  (где критерий  $M = \frac{\omega}{a}$ , критерий Кнудсена  $K = \bar{l}/l$ ,  $\bar{l}$  — средний свободный пробег молекул,  $l$  — полная длина пластины,  $x$  — расстояние от встречной кромки пластины). На рис. 28 указаны области соответствующих течений газа: без скольжения, со скольжением и свободного молекулярного движения. Как видно из представленных данных, эффект скольжения

газа при обтекании пластины сказывается тем больше, чем больше длина свободного пробега газовых молекул и чем больше скоростной критерий  $M = \frac{w}{a}$ .

## § 25. Особенности переноса в плотных газах и парах

При очень больших давлениях ( $p \gg 1 \text{ атм}$ ) на переносе в газах сказывается силовое взаимодействие молекул. Особенности поведения молекул могут сказываться на переносе и при обычных давлениях, но при состояниях газов, близких к насыщенному пару, когда возможна ассоциация молекул. С понижением температуры и повышением давления по мере приближения состояния газа к насыщенному пару поведение газа все в большей мере отклоняется от свойств идеального газа. Характеристическое уравнение состояния идеального газа (уравнение Клапейрона — Менделеева) теряет силу, и для описания изменения состояния реального газа приходится привлекать иные уравнения (уравнение Ван дер Ваальса и др.).

Отклонение свойств реального газа от идеального сказывается соответствующим образом и на коэффициентах переноса энергии, массы и импульса.

Если, например, для идеального газа динамическая вязкость, как уже указывалось, не зависит от давления и изменяется только с температурой газа

$$\eta(T) = \eta_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^m,$$

то при больших давлениях и низких температурах на динамической вязкости газа начинает сказываться и давление. Влияние давления газа на динамическую вязкость может быть выражено формулой И. Ф. Голубева:

$$\eta(p, T) = \eta(T) + a \left( \frac{p_T}{T} \right)^n, \quad (25,1)$$

где  $\eta(T)$  — динамическая вязкость газа, не зависящая от давления;

$p_T$  — термическое давление газа, определяемое суммарным импульсом молекул, ударяющихся о стенку ( $p_T > p$ );

$a$  и  $n$  — величины, постоянные для каждого газа (табл. 3).

Уравнение (25,1) достаточно хорошо согласуется с экспериментальными данными динамической вязкости различных газов для давлений до 800 атм.

Термическое давление  $p_T$  для известных температур и давлений газа можно вычислить, пользуясь тем или иным уравнением состояния реального газа. Термическое давление может суще-

ственно превышать давление, под которым находится газ; причиной этого являются силы молекулярного взаимодействия, снижающие давление газа на стенку.

Таблица 3

Газ	$a$	$n$
Водород $H_2$ . . . . .	73	1,12
Азот $N_2$ . . . . .	567	1,12
Двуокись углерода $CO_2$	930	1,117
Аммиак $NH_3$ . . . . .	550	1,115
Метан $CH_4$ . . . . .	540	1,102
Этан $C_2H_6$ . . . . .	880	1,118
Пропан $C_3H_8$ . . . . .	1475	1,12
Этилен $C_2H_4$ . . . . .	1000	1,11

На рис. 29 представлены графики зависимости динамической вязкости азота от температуры и давления [11]. Как видно, до 50 атм давление слабо сказывается на динамической вязкости

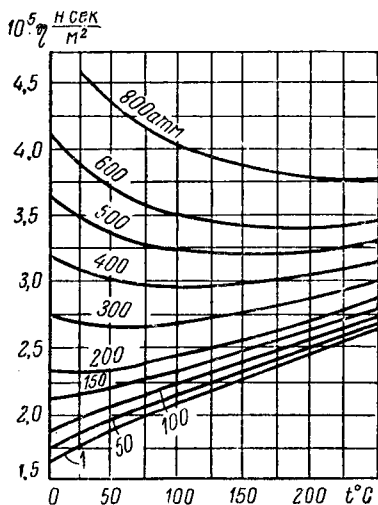


Рис. 29. Динамическая вязкость азота в зависимости от температуры и давления [11]

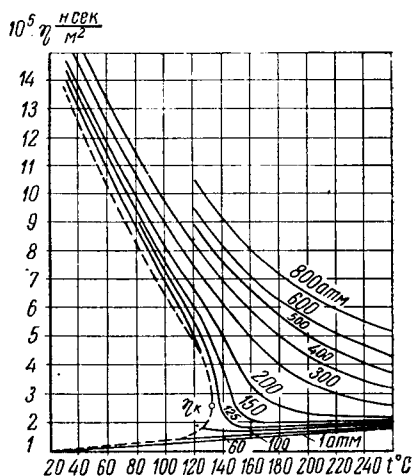


Рис. 30. Динамическая вязкость аммиака в зависимости от температуры и давления [11]

азота. При очень высоком давлении — 800 атм и при температуре менее  $50^\circ C$  динамическая вязкость азота более чем в 2,5 раза превышает вязкость азота при атмосферном давлении. На рис. 30 и 31 представлены графики зависимости динамической вязкости аммиака и водяного пара от температуры и давления. Как видно,

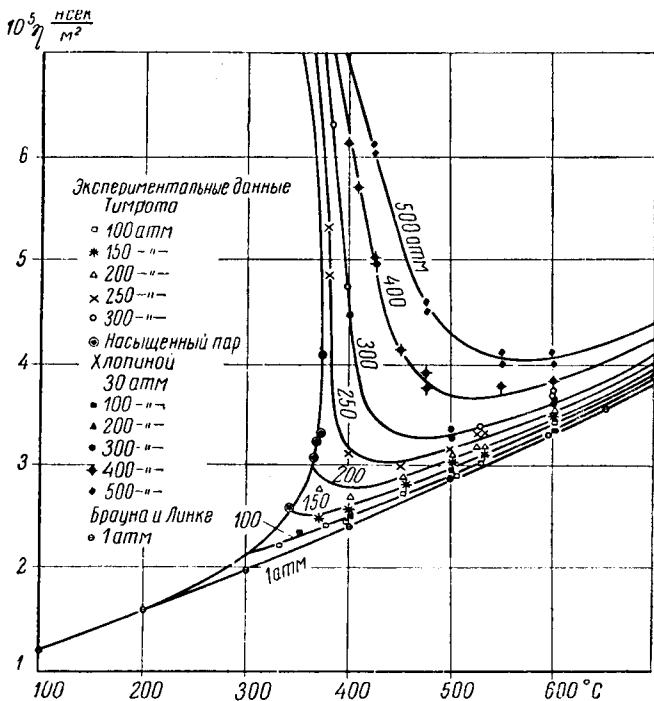


Рис. 31. Динамическая вязкость водяного пара в зависимости от температуры и давления [11]

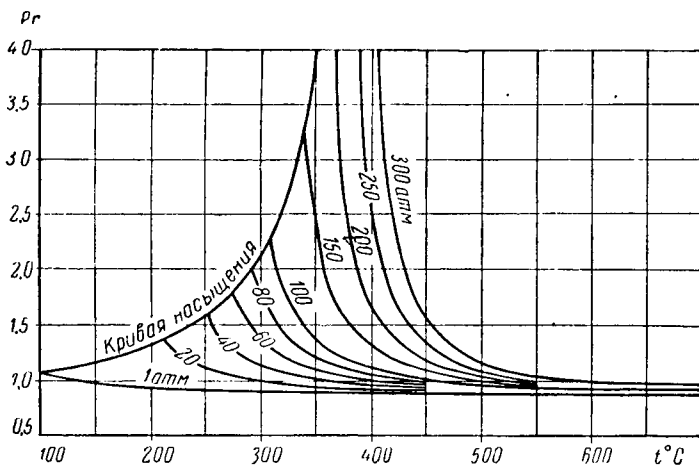


Рис. 32. Критерий физических свойств  $Pr \equiv \frac{\nu}{a}$  водяного пара в зависимости от температуры и давления [8]

по мере приближения к состоянию насыщения и жидкому состоянию динамическая вязкость газов особенно сильно зависит от температуры и давления. В состояниях, близких к насыщенным парам,

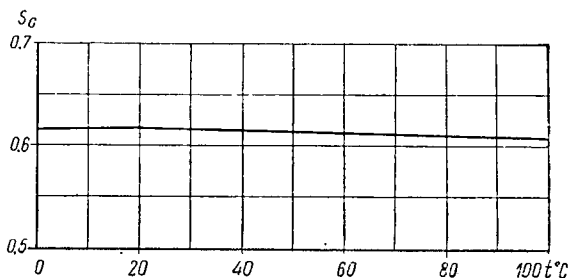


Рис. 33. Критерий физических свойств  $Sc \equiv \frac{\nu}{D_{ij}}$  водяного пара в воздухе в зависимости от температуры при  $p=760$  мм рт. ст.

у газов сильно меняются и другие физические параметры (плотность, теплоемкость, коэффициент теплопроводности, диффузии и т. п.). Соответственно меняются также и критерии физических свойств газа в процессах конвективно-диффузионного переноса тепла и массы (критерии  $Pr$  и  $Sc$ ) (рис. 32 и 33).

## § 26. Коэффициенты переноса в газовых смесях

Перенос энергии, массы и импульса в газовых смесях осложняется различием в скоростях перемещения молекул отдельных газов, а также различием средней длины свободного пробега молекул. Наиболее надежным является экспериментальное определение коэффициентов переноса в газовых смесях. Однако встречающийся весьма различный состав газовых смесей неизбежно требует экстраполяции полученных опытных данных по коэффициентам переноса. Большая практическая потребность определения коэффициентов переноса в расчетах и проектировании различных аппаратов и устройств заставляет прибегать к упрощенным методам определения коэффициентов переноса газовых смесей. В качестве такого упрощенного метода предлагается следующий.

Для газовой смеси заданного состава, по приближенной формуле Эйкена, определяется критерий физических свойств газа:

$$\left( \frac{\nu}{a_{cV}} \right)_{см} = \frac{4}{9(c_p/c_V)_{см} - 5}.$$

При этом теплоемкость газовой смеси для заданной температуры определяется суммированием парциальных теплоемкостей

отдельных компонентов:

$$c_{p_{см}} = \sum_{i=1}^{i=k} r_i c_{p_i} \frac{\text{кдж}}{\text{нм}^3 \text{град}},$$

где  $r_i$  и  $c_{p_i}$  — объемные доли и теплоемкость отдельных компонентов газовой смеси.

Теплоемкость при постоянном объеме определяется по формуле Майера:

$$c_p - c_v = \frac{R_M}{V_M},$$

где  $R_M$  — газовая постоянная моля;

$V_M = 22,4 \text{ нм}^3/\text{моль}$  — объем моля газа.

Кинематическая вязкость газовой смеси связана с динамической вязкостью соотношением:

$$\nu_{см} = \frac{\eta_{см}}{\rho_{см}}.$$

Плотность газовой смеси вычисляется по формуле:

$$\rho_{см} = \frac{M_{см}}{22,4},$$

где  $M_{см} = \sum_{i=1}^{i=k} r_i M_i$  — молекулярная масса газовой смеси ( $M_i$  — молекулярные массы компонентов смеси;  $r_i$  — объемные доли компонентов смеси).

Для определения динамической вязкости газовой смеси можно воспользоваться приближенным методом, который основан на использовании преобразованной формулы *Сезерленда — Тизена* для определения вязкости бинарной газовой смеси:

$$\eta_{см} = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{\eta_i}{1 + \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{j=i} n_j \Phi_{i,j}}, \quad (26,1)$$

где  $\eta_i$  — динамическая вязкость компонентов газовой смеси;

$n_i$  — концентрация молекул компонентов в смеси;

$\Phi_{i,j} = \frac{\left[ 1 + \left( \frac{\eta_i}{\eta_j} \right)^{1/2} \left( \frac{M_j}{M_i} \right)^{1/4} \right]^2}{\sqrt{2} \left( 1 + \frac{M_i}{M_j} \right)^{1/2}}$  — множитель, представляю-

щий в формуле (26,1) соотношения динамических вязкостей  $\left( \frac{\eta_i}{\eta_j} \right)$  рассматриваемого компонента ( $i$ ) со всеми другими ( $j$ ) и соответствующие соотношения молекулярных масс  $\left( \frac{M_j}{M_i} \right)$ .



Для определения динамической вязкости смеси по формуле (26,1) необходимо знать состав смеси ( $r_1, r_2, \dots$ ), молекулярные массы ( $M_i$ ) и динамическую вязкость компонентов ( $\eta_i$ ) газовой смеси.

Вычислив  $\eta_{см}$ , находим кинематическую вязкость смеси  $\nu_{см} = \frac{\eta_{см}}{\rho_{см}}$  и определяем коэффициент переноса тепла в газовой смеси по формуле:

$$(a_{cV})_{см} = \frac{9(c_p/c_V)_{см} - 5}{4} \nu_{см}.$$

Далее находим коэффициент теплопроводности газовой смеси:

$$\lambda_{см} = (a_{cV})_{см} \rho_{см} c_{V,см}.$$

**Пример.** Вычислить коэффициент теплопроводности газовой смеси следующего состава (газ конверсии метана):

Компоненты	Объемные доли, %	Молекулярная масса, кг/моль
CO <sub>2</sub>	1,89	44
CO	24,1	28
H <sub>2</sub>	43,48	2
N <sub>2</sub>	22,04	28
H <sub>2</sub> O	8,49	18

Вычисление провести для температур 200, 700 и 1300° С или соответственно 473, 973 и 1573° К.

Из справочника «Термофизические свойства веществ» (под ред. Н. Б. Варгафтика [8], табл. 1—2) выбираем динамическую вязкость отдельных компонентов и расчетом по формуле (26,1) находим динамическую вязкость газовой смеси для заданных температур.

Т а б л и ц а 4

Газы	Температура, °С			Единицы измерения
	200	700	1300	
CO <sub>2</sub>	22,05 · 10 <sup>-6</sup>	39,8 · 10 <sup>-6</sup>	58,9 · 10 <sup>-6</sup>	$\frac{\text{н} \cdot \text{сек}}{\text{м}^2}$
CO	24,3 · 10 <sup>-6</sup>	40,15 · 10 <sup>-6</sup>	55,95 · 10 <sup>-6</sup>	$\frac{\text{н} \cdot \text{сек}}{\text{м}^2}$
H <sub>2</sub>	12,14 · 10 <sup>-6</sup>	19,77 · 10 <sup>-6</sup>	27,4 · 10 <sup>-6</sup>	$\frac{\text{н} \cdot \text{сек}}{\text{м}^2}$
N <sub>2</sub>	24,25 · 10 <sup>-6</sup>	39,55 · 10 <sup>-6</sup>	54,9 · 10 <sup>-6</sup>	$\frac{\text{н} \cdot \text{сек}}{\text{м}^2}$
H <sub>2</sub> O	15,97 · 10 <sup>-6</sup>	37,85 · 10 <sup>-6</sup>	67,6 · 10 <sup>-6</sup>	$\frac{\text{н} \cdot \text{сек}}{\text{м}^2}$
Газовая смесь	23,1 · 10 <sup>-6</sup>	38,96 · 10 <sup>-6</sup>	55,75 · 10 <sup>-6</sup>	$\frac{\text{н} \cdot \text{сек}}{\text{м}^2}$

Далее для газовой смеси заданного состава находим объемный вес, кинематическую вязкость, теплоемкости  $c_p$  и  $c_v$  и коэффициент теплопроводности. Результаты вычисления представлены в табл. 5.

Т а б л и ц а 5

Физические параметры смеси	Единицы измерения	Температура, °С		
		200	700	1300
$10^6 \cdot \eta_{см}$	$n \cdot сек/м^2$	23,1	38,96	55,75
$\rho_{см}$	$кг/лм^3$	0,583	0,2833	0,175
$10^6 \cdot \nu_{см}$	$м^2/сек$	39,8	137,8	318,7
$c_p$	$кдж/кг \cdot град$	1,865	2,025	2,2
$c_v$	$кдж/кг \cdot град$	1,35	1,51	1,685
$(\nu/a_{c_v})_{см}$	—	0,54	0,566	0,592
$\lambda_{см}$	$вт/м \cdot град$	0,058	0,104	0,1582

Имея в виду монотонный характер изменения всех величин от температуры, для других температур физические параметры смеси можно найти графической интерполяцией.

## § 27. Коэффициенты переноса в жидкостях

В отличие от газообразного состояния вещества, в жидкостях, вследствие весьма большой концентрации молекул, происходит образование отдельных неустойчивых молекулярных структур. Образование молекулярных структур в жидкости усиливается по мере фазового перехода вещества из жидкого состояния в твердое. Наличие молекулярных структур в жидкостях приводит к тому, что молекулярное трение при течении жидкостей по сравнению с газами оказывается значительно большим. *Динамическая вязкость у жидкостей больше, чем у газов.* Однако вследствие значительно большей плотности жидкостей *кинематическая вязкость у жидкостей меньше, чем у газов.*

С понижением температуры жидкости структурные образования в ней усиливаются и вязкость жидкости заметно возрастает (рис. 34). Наоборот, с повышением температуры структурные образования в жидкости ослабевают и вязкость жидкости падает.

При наличии структурных образований в жидкостях перенос тепла, помимо молекулярных носителей, осуществляется также с участием нестройных упругих колебаний отдельных молекулярных ансамблей. С понижением температуры жидкости перенос тепла упругими колебаниями структурных ансамблей увеличивается. Вследствие этого коэффициент теплопроводности многих жидкостей повышается с понижением температуры (рис. 35).

Аномально в этом отношении ведут себя вода и глицерин. У глицерина коэффициент теплопроводности падает с понижением

температуры. У воды коэффициент теплопроводности возрастает с повышением температуры примерно до  $120^{\circ}\text{C}$ ; при этой температуре он достигает максимальной величины, т. е.  $\lambda = 0,686 \frac{\text{вт}}{\text{м}\cdot\text{град}}$ , и при дальнейшем повышении температуры коэффициент теплопроводности воды падает. При  $40^{\circ}\text{C}$  вода имеет минимальную теплоемкость. Вода по своим физическим свойствам, в сравнении с другими жидкостями, является более сложной жидкостью.

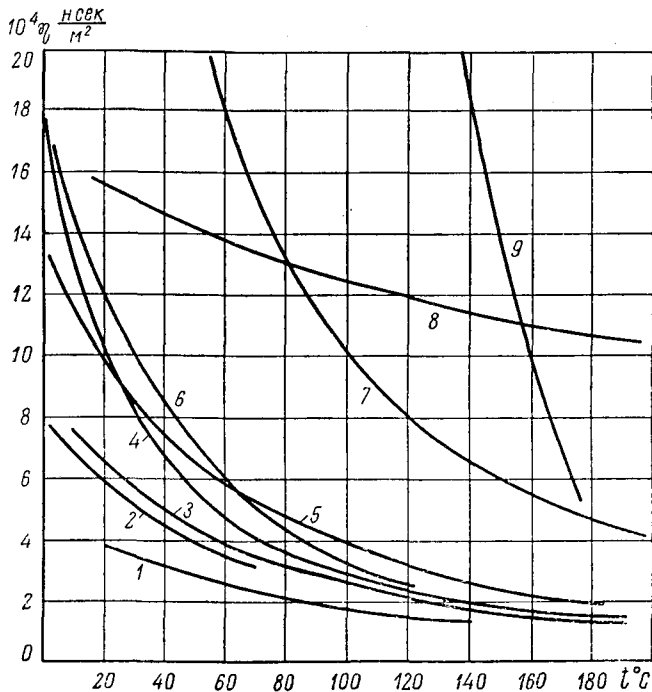


Рис. 34. Вязкость различных жидкостей в зависимости от температуры:

1 — метилацетат; 2 — метиловый спирт; 3 — бензол; 4 — вода; 5 — четыреххлористый углерод; 6 — этиловый спирт; 7 — дифенильная смесь (даутерм); 8 — ртуть; 9 — глицирин

Для жидкостей, вследствие значительного увеличения вязкости с понижением температуры, в особенности в области низких температур, критерий физических свойств  $Pr = \frac{\nu}{a}$  оказывается значительно большим, чем для газов ( $Pr = 0,5 \div 1$ ). Например, для воды при  $20^{\circ}\text{C}$   $Pr = 7,06$ ; для спирта —  $16,6$ ; смазочного машинного масла —  $3880$ ; глицирина —  $7250$ .

В сравнении с жидкостями — непроводниками электричества (различные жидкие углеводороды) — электропроводящие жидкие металлы отличаются много большими коэффициентами тепло-

проводности. Большой коэффициент теплопроводности у жидких металлов обусловлен весьма большой скоростью перемещения носителей энергии — свободных электронов. Критерий физических

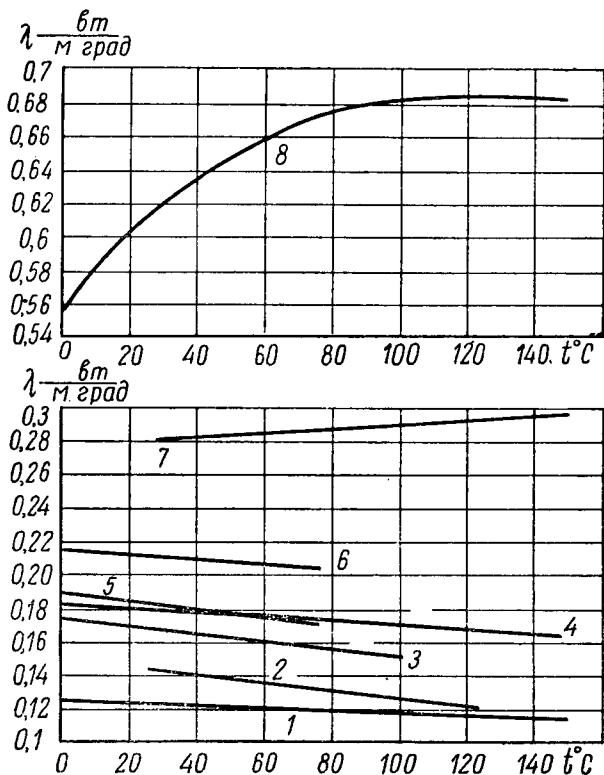


Рис. 35. Коэффициент теплопроводности различных жидкостей в зависимости от температуры:

1 — вазелиновое масло; 2 — бензол; 3 — ацетон; 4 — касторовое масло; 5 — спирт этиловый; 6 — спирт метиловый; 7 — глицерин; 8 — вода

свойств жидких металлов в конвективно-диффузионном переносе тепла оказывается много меньше, чем неэлектропроводящих жидкостей и газов ( $Pr \ll 1$ ).

## § 28. Коэффициент теплопроводности твердых тел

Перенос тепла в твердых телах в зависимости от рода и структуры тела (металлы, полупроводники и непроводящие тела пористого и монолитного строения) осуществляется различными носителями: колебательным движением частиц и их ансамблей, свободными электронами, фотонами радиации и т. п.

При одинаковом градиенте температур удельные потоки тепла в зависимости от рода твердого тела сильно различаются. В металлах и других электропроводящих телах (графит) при том же градиенте температур достигаются значительно большие удельные потоки тепла, чем в телах, полупроводящих и не проводящих электричества. В телах литого строения теплопроводность больше, чем в тех же телах пористого строения (бетон и пенобетон, стекло и пеностекло, литая и пористая пластмасса

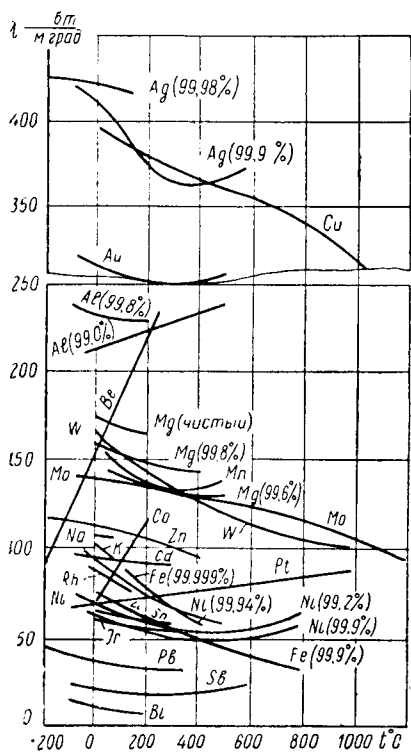


Рис. 36. Коэффициент теплопроводности различных металлов в зависимости от температуры

и т. п.). Характер влияния температуры на перенос тепла в металлах и неметаллах также оказывается различным.

#### А. Металлы и их сплавы

В металлах перенос тепла осуществляется преимущественно свободными электронами. Такое представление соответствует установленной для металлов закономерности, согласно которой отношение теплопроводности к электропроводности при заданной температуре у различных металлов сохра-

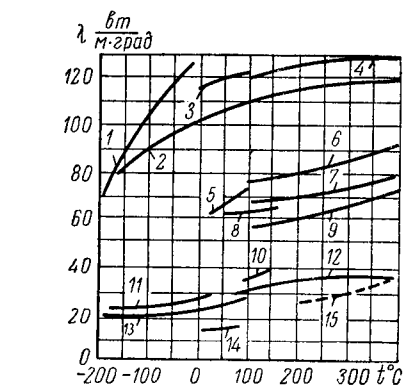


Рис. 37. Коэффициент теплопроводности различных сплавов в зависимости от температуры:

1 — латунь с 18% цинка; 2 — латунь с 30% цинка; 3 — латунь с 12% цинка; 4 — сплав хрома, никели и железа; 5 — бронза (85% Cu, 7% Zn, 6% Sn, 0,6% Ni); 6 — марганцовистая бронза (57% Cu, 37% Zn, 2,3% Mn); 7 — орудийная бронза (85% Cu, 9% Sn, 4% Zn); 8 — сплав олова с цинком (92% Sn, 8% Zn); 9 — фосфористая бронза (88% Cu, 11% Sn, 4% P); 10 — белый металл (88% Sn, 8% Sb, 4% Cu); 11 — константан (60% Cu, 40% Ni); 12 — монель-металл (67% Ni, 29% Cu); 13 — марганци (84% Cu, 1,2% Mn и 4% Ni); 14 — никелевая сталь с 30% Ni; 15 — жидкий сплав олова с цинком (92% Sn, 8% Zn) [8]

няется постоянным. Закономерность эта для многих металлов подтверждается экспериментально.

Для большинства металлов (рис. 36) коэффициент теплопроводности с увеличением температуры несколько уменьшается;

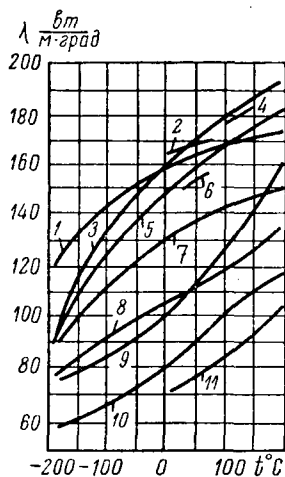


Рис. 38. Коэффициент теплопроводности алюминиевых сплавов в зависимости от температуры:

1 — алусил с 20% Si; 2 — силумин с 12,5% Si; 3 — дюралюминий (4% Cu, 0,5% Mg); 4 — альпаке с 13% Si; 5 — сплав с 15% Cu; 6 — сплав с 10% Zn и 2% Cu; 7 — литье с 8% Cu; 8 — термически обработанный сплав с 8% Mg; 9 — литье с 8% Mg; 10 — литье с 2% Mg; 11 — термически обработанный сплав с 14% Mg

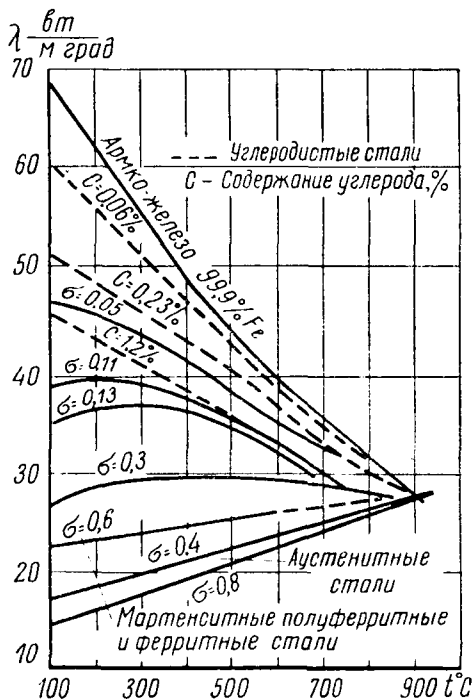


Рис. 39. Коэффициент теплопроводности различных углеродистых сталей и сталей с другими массами различных элементов:

$$\sigma = \frac{C}{12} + \frac{Si}{28} + \frac{Mn}{55} + \frac{Cr}{52} + \frac{Ni}{59} + \frac{W}{184} + \frac{Nb}{93} + \frac{Mo}{96} \quad [8]$$

соответственно уменьшается электропроводность и увеличивается электрическое сопротивление металлов.

Коэффициент теплопроводности *сплавов* (рис. 37 и 38) увеличивается с повышением температуры.

На рис. 39 и 40 представлены графики зависимости от температуры коэффициента теплопроводности некоторых углеродистых сталей и легированных сплавов.

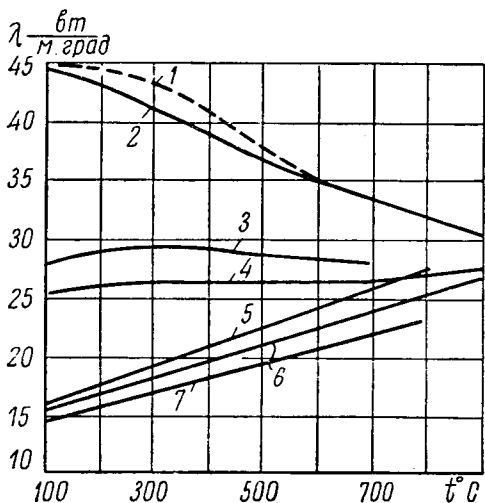


Рис. 40. Коэффициент теплопроводности легированных сталей в зависимости от температуры: 1 — 15ХФ; 2 — 12МХ; 3 — 4Х13; 4 — 2ХВ; 5 — ЭЯ1Т; 6 — ЭИ257; 7 — 721Х15 [8]

Коэффициент теплопроводности электропроводящего графита, как и у металлов, оказывается весьма большим и заметно падает с повышением температуры.

### Б. Полупроводники, кристаллические и аморфные тела

В твердых телах кристаллического строения, непроводниках электричества, перенос тепла осуществляется упругими колебаниями отдельных композиций атомов. В монокристаллах наблюдается различная интенсивность переноса тепла по различным направлениям.

В табл. 6 приведены данные о коэффициенте теплопроводности  $\frac{\text{вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}$  кристалла кварца по различным направлениям и для различных температур.

Как видно из данных табл. 6 коэффициент теплопроводности

кристалла кварца в направлении оси существенно больше, чем в поперечном к оси направлении. С повышением температуры различие коэффициентов теплопроводности по направлениям параллельно и перпендикулярно оси уменьшается.

Т а б л и ц а 6

$t$ °С	$\lambda_{\perp} \frac{вт}{м \cdot град}$ , перпендикулярно оси С	$\lambda_{\parallel} \frac{вт}{м \cdot град}$ , параллельно оси С	Отношение $\lambda_{\perp} / \lambda_{\parallel}$
0	0,67	1,13	1,69
100	0,503	0,797	1,58
200	0,419	0,629	1,50
300	0,362	0,503	1,43
400	0,31	0,419	1,35

В сложных комбинациях тел кристаллического строения коэффициент теплопроводности может по-разному меняться с температурой в различных диапазонах ее изменения.

В области высоких температур (более 800°С) перенос тепла в кристаллах (SiO<sub>2</sub>, Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> и др.) в большей мере осуществляется излучением энергии, и коэффициент лучистой теплопроводности кристаллов при высоких температурах может достигать величин, сравнимых с теплопроводностью металлов.

В аморфном состоянии твердое вещество по сравнению с кристаллическим строением отличается меньшим коэффициентом теплопроводности.

В полупроводниках наряду с переносом тепла колебаниями ансамблей частиц перенос энергии осуществляется также свободными электронами. В связи с этим коэффициент теплопроводности полупроводников по сравнению с непроводящими телами оказывается бóльшим.

### В. Тела пористого строения

Такие тела, как кирпич, бетон, керамика, различные огнеупорные материалы, шлак, асбест, шлаковая вата, хлопчатобумажная вата, шерсть и т. и., имеют пористое строение. Наличие пор не позволяет рассматривать такие тела как сплошную среду. Некоторые материалы (как, например, дерево) имеют неодинаковое строение в различных направлениях (вдоль и поперек волокон).

Сложный процесс распространения тепла в твердой массе тела (скелете) и в порах, заполненных газом или жидкостью, условно представляют одним общим усредненным коэффициентом теплопроводности. Этот средний коэффициент теплопроводности



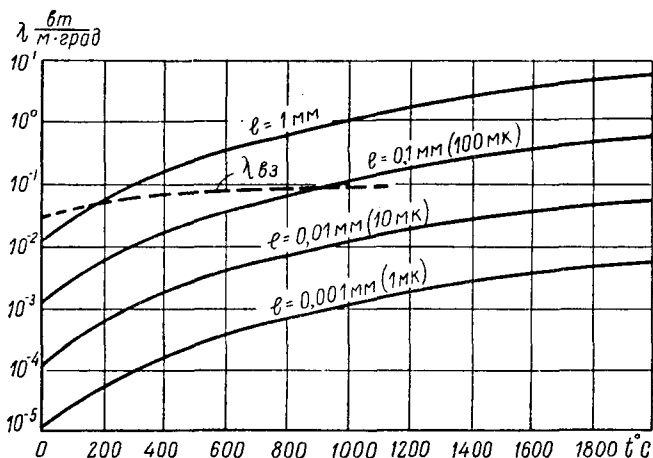


Рис. 41. Коэффициент теплопроводности при переносе энергии излучением в зависимости от температуры и средней длины свободного пробега фотонов  $l_{\phi}$ ;  $\lambda_{\text{вз}}$  — коэффициент теплопроводности воздуха

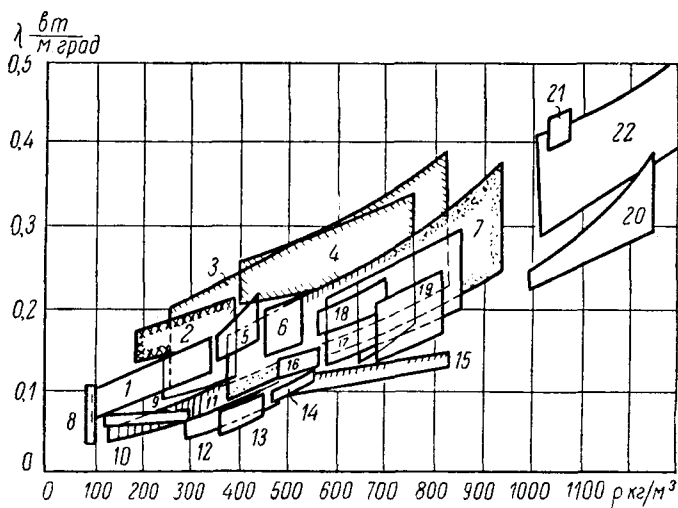


Рис. 42. Коэффициент теплопроводности некоторых строительных материалов в зависимости от плотности пористой массы (по данным [55]):

1 — торф; 2 — фибролит; 3 — пенобетон; 4 — кислосиликат; 5 — пенопемзобетон; 6 — пробковый кирпич; 7 — термозоляционный кирпич; 8 — шевелин; 9 — торфофлита; 10 — прессованный торф; 11 — шлаковая пробка; 12 — строморганик; 13 — тепловая штукатурка; 14 — пенобетон; 15 — гранулированный шлак; 16 — пеноглинит; 17 — алебастровая плита; 18 — пемзобетонный кирпич; 19 — газобетон; 20 — арктический туф; 21 — известково-трепельный органик; 22 — шлак

зависит от характера пор в материале, от среды, заполняющей поры, и в общем случае зависит от направления теплового потока (как, например, у дерева).

В сухом материале газы, заполняющие поры, имеют небольшой коэффициент теплопроводности ( $\lambda_{\text{газ}}$ ). Перенос тепла излучением

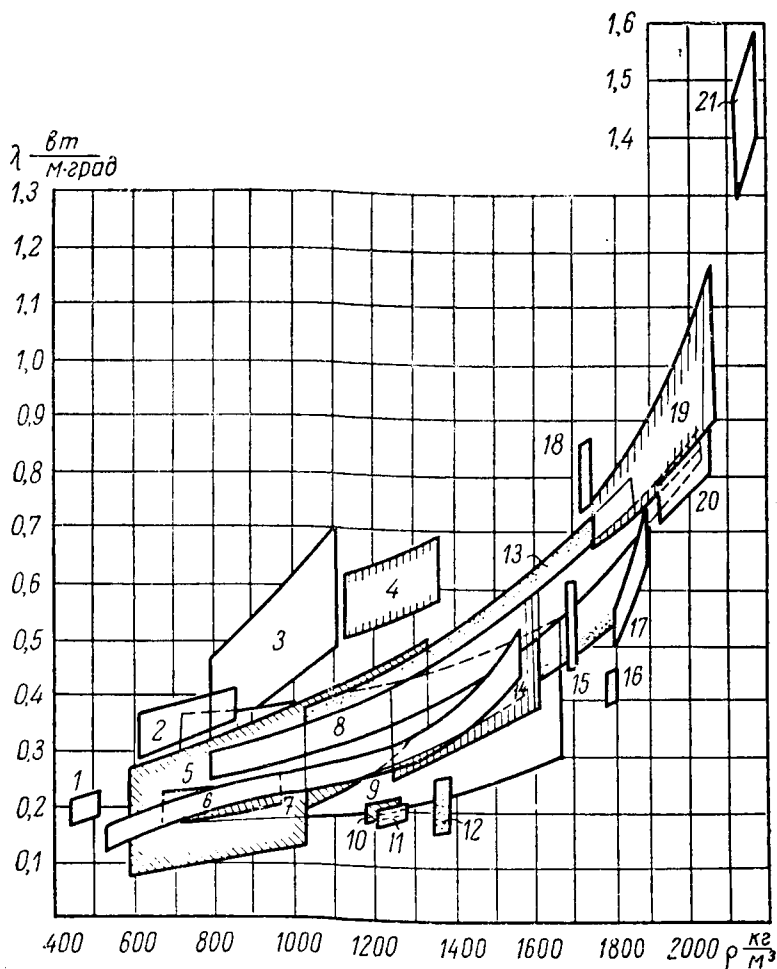


Рис. 43. Коэффициент теплопроводности строительных материалов в зависимости от плотности пористой массы (по данным [55]):

- 1 — асбоперлит; 2 — асбозурит; 3 — аэродоломит; 4 — известняк (параллельно слоям); 5 — трепельный кирпич; 6 — теплый раствор; 7 — глиногипсовый кирпич; 8 — глиногипс; 9 — теплый бетон; 10 — алебастровый кирпич; 11 — асбестовая штукатурка; 12 — кирпич из обожженной глины; 13 — ракушечник; 14 — известняк (перпендикулярно слоям); 15 — глина; 16 — болотная руда; 17 — красный кирпич; 18 — силикатный кирпич; 19 — известняк; 20 — кислотоупорный кирпич; 21 — песчаник

стенками пор при невысоких температурах (менее  $100^{\circ}$ ) также отвечает небольшому коэффициенту лучистой теплопроводности ( $\lambda_{\text{луч}}$ ). Последний, помимо температуры, зависит от расстояния между стенками пор и понижается с уменьшением их размера (рис. 41). Таким образом, следует ожидать, что коэффициент теплопроводности сухих пористых материалов будет уменьшаться с увеличением пористости. Опыт подтверждает эти соображения (рис. 42 и 43). Чем меньше пористость того или иного материала, тем больше коэффициент теплопроводности.

Значительное влияние на коэффициент теплопроводности материалов оказывает их влажность. Занолнение пор влагой, имеющей более высокий коэффициент теплопроводности, чем газы, заметно увеличивает коэффициент теплопроводности материала.

На рис. 44 представлен график зависимости коэффициента теплопроводности почвы различной пористости от влажности.

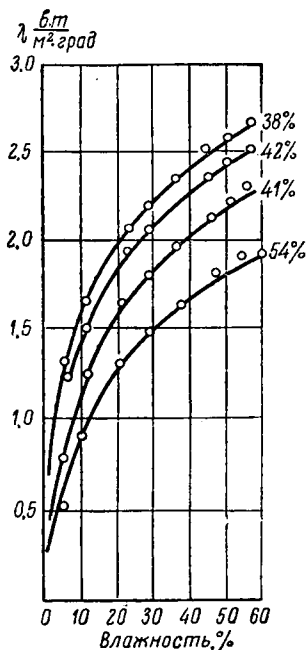


Рис. 44. Коэффициент теплопроводности почвы различной пористости в зависимости от влажности (по данным [58])

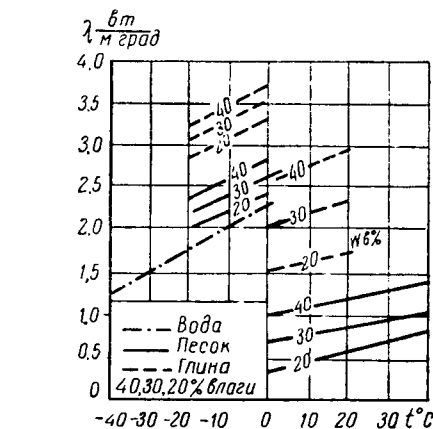


Рис. 45. Коэффициент теплопроводности песка и глины различной влажности в зависимости от температуры (по данным [58])

На рис. 45 представлен график влияния температуры и влажности на коэффициент теплопроводности песка и глины в диапазоне положительных и отрицательных температур ( $^{\circ}\text{C}$ ). Как видно, при температуре фазового перехода воды из жидкости в лед резко меняется коэффициент теплопроводности воды, и это сказывается и на резком изменении коэффициента теплопроводности влажной почвы.

Для различных пористых материалов, применяемых в области повышенных и высоких температур (различные теплоизоляционные и огнеупорные материалы), с повышением температуры коэффициент теплопроводности материала все в большей мере оказывает влияние лучистая теплопроводность (рис. 41). Однако сложный характер влияния температуры на перенос тепла в твердом скелете материала и в порах приводит к различной температурной зависимости коэффициента теплопроводности пористых материалов.

## МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЯВЛЕНИЙ ПЕРЕНОСА

### § 29. Условия однозначности для процессов в явлениях переноса

Аналитическое решение отдельных задач переноса энергии, массы и импульса может быть выполнено для конкретных заданных условий. Дифференциальные, интегральные или интегро-дифференциальные уравнения, описывающие те или иные частные случаи явлений переноса, в пределах этого частного случая никак не ограничивают самых разнообразных возможностей протекания явления. Это обстоятельство находит свое формальное выражение в том, что то или иное дифференциальное, интегральное или интегро-дифференциальное уравнение имеет бесчисленное множество отдельных решений, определяющих рассматриваемое частное явление с точностью до произвольных функций.

Для того чтобы из бесчисленного множества отдельных решений уравнений получить конкретное решение, отвечающее заданным условиям протекания явления, необходимо привлечь условия однозначности.

Условиями однозначности называют такие условия, которые однозначно, т. е. единственным образом, формулируют конкретные особенности рассматриваемой частной задачи. Эти конкретные особенности отличают изучаемое явление от множества других явлений этого же класса, описываемых той же системой уравнений.

Условия однозначности для явлений переноса энергии, массы и импульса включают:

1) геометрические особенности решаемой задачи; задается форма и размеры ограничивающих поверхностей тел или про-

странства, в котором осуществляется тот или иной сложный или простой процесс;

2) особенности протекания процесса во времени; задаются начальные условия процесса и условия протекания его во времени;

3) граничные особенности решаемой задачи; задается распределение отдельных величин, определяющих протекание процесса на границах (температур, состава среды, скоростей и т. п.);

4) физические и химические особенности среды, в которой осуществляются те или иные процессы; задается состав и известны физико-химические свойства среды, известны физические параметры среды, существенные для процесса, т. е. содержащиеся в дифференциальных и других уравнениях, а также в начальных и граничных условиях.

Присоединением условий однозначности к математическому описанию процесса дифференциальными и другими уравнениями заканчивается первый этап решения поставленной задачи. Строго говоря, необходимо еще доказать, что для составленных уравнений и присоединенных к ним условий однозначности существует *единственное решение*, т. е. что они составлены правильно. Математический анализ этого вопроса чрезвычайно сложен.

### § 30. Различные возможности решения задач явлений переноса

Сложный процесс в явлениях переноса в общем случае осуществляется в условиях движущейся, химически реагирующей, подвергаемой фазовым превращениям и излучающей среды. Тот или иной процесс в явлениях переноса протекает во взаимной связи отдельных частных процессов. В силу сложности исходной системы самих уравнений, описывающих всю совокупность процессов, а также нелинейности этих уравнений, которая связана с характером закономерностей отдельных процессов (например, химическими или другими реакциями) сложной зависимостью коэффициентов переноса и других физических параметров от температуры и давления, решение проблемы сложных процессов в явлениях переноса в настоящее время не может быть построено на основании математического решения задачи в строгом виде. Для решения отдельных частных задач переноса неизбежно приходится вводить те или иные упрощения и условности.

Одним из возможных путей исследования сложных процессов является построение такой упрощенной физической модели рассматриваемого явления, которая могла бы быть доступна аналитическому решению на основе исходных уравнений. Результат аналитического исследования модели сложного процесса позволяет вскрыть существующую «органическую связь» отдельных определяющих процессов и установить искомую функциональную

зависимость. Эта зависимость далее может быть привлечена для обобщения данных экспериментального исследования сложных процессов.

Роль физико-математического анализа в таком подходе к решению задач переноса существенно возрастает.

Привлечение физических моделей для аналитического решения различных задач явлений переноса может быть расширено использованием аналогий в математическом описании различных процессов переноса. Широкой известностью пользуются электрические и гидравлические интеграторы. В последнее время все шире привлекаются математические счетные машины.

Возможен и другой, во многих случаях более надежный, путь экспериментального исследования различных процессов в явлениях переноса. Представляется прежде всего возможным проводить непосредственное экспериментальное изучение влияния на протекание того или иного сложного процесса переноса отдельных существенных для рассматриваемого процесса величин. Существенные для процесса величины связаны друг с другом неизвестной функцией. Вид этой функции стремятся определить опытным путем, воспроизводя изучаемый процесс в лаборатории.

Однако такой путь непосредственного экспериментального решения различных задач переноса является весьма трудоемким и непрактичным, так как ряд существенных для сложного процесса величин содержит иногда до восьми и даже более величин. Найти связь между многими величинами опытным путем — дело исключительной сложности. Кроме того, результаты такого исследования будут пригодны только для тех условий протекания процесса, которые воспроизводились в лаборатории.

Здесь на помощь экспериментатору приходит теория подобия физических процессов. Теория подобия значительно упрощает постановку и проведение опытного изучения процесса, а также увеличивает ценность полученных результатов по следующим причинам:

1. Теория подобия указывает, что нет необходимости непосредственно изучать опытным путем связь между отдельными существенными для процесса величинами. Оказывается, значительно проще найти связь между безразмерными критериальными отношениями характерных величин, которые представляют критерии подобия. При этом количество критериев подобия, между которыми отыскивается функциональная связь, меньше количества самих характерных для данного процесса величин.

2. Теория подобия указывает, что пайдепная опытным путем связь между критериями подобия справедлива не только для тех условий протекания процесса, которые имели место в лабораторном экспериментальном исследовании, но и для бесчисленного количества других условий, которые подобны условиям проведенного эксперимента.

3. Теория подобия указывает правила построения моделей, которые будут подобны образцам.

Таким образом, теория подобия является научной основой постановки и обобщения результатов опытного изучения различных процессов. Разработка теории подобия для решения различных теплофизических проблем принадлежит покойному академику М. В. Кирпичеву.

### § 31. Понятие о подобии физических процессов

Понятие о подобии сложных физических явлений, в отличие от простого геометрического подобия, требует введения ряда новых представлений.

Если для геометрического подобия двух фигур, образованных прямыми линиями на плоскости, например треугольников, многоугольников и прочих фигур, достаточно равенства соответственных

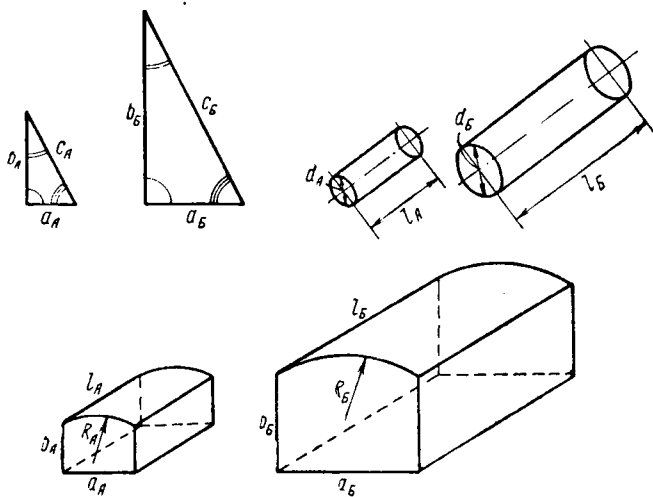


Рис. 46. Подобие различных геометрических фигур

углов и пропорциональности сторон (рис. 46), то для подобия физических процессов требуется соблюдение более сложных условий.

Например, для подобия процессов течения среды в трубах наряду с соблюдением подобия геометрических форм каналов требуется подобие полей скорости, а при наличии переносов тепла и массы — еще и подобие температурных полей и полей состава среды.

Если для подобия геометрических форм каналов требуется лишь одинаковое масштабное преобразование всех размеров



«образца», чтобы получить «модель», то для подобия скоростных и температурных полей, а также полей состава среды необходимо надлежащее преобразование всех тех параметров и величин, которые определяют скоростные и температурные поля, а также поля составов текущих масс жидкости или газа. При этом преобразование отдельных величин должно проводиться не независимо друг от друга, а во взаимной связи, указываемой законами, управляющими данным явлением.

Такую связь можно отыскать, руководствуясь математическим описанием процесса, состоящим из различных дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений и условий однозначности.

Основой теории подобия является исходное определение понятия о физическом подобии.

Два физических процесса  $A$  и  $B$  называют подобными друг другу, если для этих процессов выполняются следующие требования:

1. Математические описания обоих процессов отличаются друг от друга только численными значениями содержащихся в них именованных физических величин. Во всем остальном эти описания полностью совпадают друг с другом. При этом предполагается, что математические описания обоих процессов составлены при помощи одной и той же системы единиц измерения и одной и той же системы координат. Такие процессы можно называть *качественно одинаковыми*.

2. Сходственные величины  $\alpha_A$  и  $\alpha_B$  обоих процессов связаны *преобразованием подобия*:

$$\alpha_A = C_\alpha \alpha_B.$$

Коэффициент пропорциональности  $C_\alpha$  называют *масштабом*, или *линейной константой подобия*. Масштаб, или константа подобия, указывает, во сколько раз необходимо изменить ту или иную физическую величину, описывающую процесс  $B$ , для того, чтобы получить сходственную величину для подобного процесса  $A$ .

3. Выбор констант подобия ограничивается следующим условием. Если подвергнем преобразованию подобия безразмерное математическое описание процесса  $A$ , то получим безразмерное математическое описание процесса  $B$ , не содержащее масштабов, или констант подобия. Ниже это определение будет пояснено на конкретном примере.

## § 32. Критерии подобия в явлениях переноса

Для математического описания различных процессов переноса, которое представлено в главах I, II и III, был привлечен ряд таких фундаментальных определяющих величин, как удельные

потоки энергии, удельные потоки массы, объемные плотности энергии и массы, удельные производительности, или объемные скорости процессов фазовых, химических и атомных превращений, различные взаимодействующие силы и т. п. Поскольку эти и другие величины, а также результаты различных операций над ними в том или ином явлении переноса находятся во взаимной связи, устанавливаемой законами сохранения энергии, массы и импульса и другими опытными законами, то для сравнительной оценки отдельных участвующих в явлениях фундаментальных величин и результатов операций над ними можно установить соответствующие характеристические или критериальные отношения. Они представляют собой безразмерные отношения характерных величин, участвующих в явлениях переноса к какой-либо избранной для сравнения величине.

По смысловому понятию критериальная величина всегда может быть привлечена в качестве критерия подобия. Например, для сравнительной оценки интенсивностей конвективного переноса тепла  $q_{\text{конв}, l}$  и теплопроводности  $q_{\text{тепл}, l}$  текущей среды может служить критериальное отношение:

$$K_{\text{конв/тепл}} = \frac{q_{\text{конв}, l}}{q_{\text{тепл}, l}}$$

Из этого критериального отношения определяется критерий подобия конвективно-теплопроводного переноса тепла в различных текущих средах.

Критериальное отношение интенсивностей конвективного  $q_{\text{конв}, i, l}$  и диффузионного  $q_{\text{диф}, i, l}$  переноса массы вещества  $i$

$$K_{\text{конв } i/\text{диф } i} = \frac{q_{\text{конв } i}}{q_{\text{диф } i}}$$

может служить для определения критерия подобия конвективно-диффузионного переноса массы вещества в текущих средах.

Из критериального отношения сил инерции  $P_{\text{инерц}}$  и сил трения  $P_{\text{трэн}}$  в текущих средах

$$K_{\text{инерц/трэн}} = \frac{P_{\text{инерц}}}{P_{\text{трэн}}}$$

определяется критерий кинетического подобия текущих жидкостей.

Существуют различные методы получения критериев. Ниже излагается метод, который, как нам представляется, в наибольшей мере отвечает физическому смыслу и пониманию отыскиваемых критериев.

### § 33. Критерии подобия в процессах переноса тепла

#### А. Основные величины для определения критериев в процессах распространения тепла

Для определения различных видов переноса тепла в качестве основных величин используются соответствующие *удельные потоки тепла*  $\left(\frac{вт}{м^2}\right)$  в среде и на ее границе с поверхностью тела:

$\vec{q}_T = -\lambda \nabla T$  — удельный поток переноса тепла *теплопроводностью среды* ( $\lambda$  — коэффициент теплопроводности,  $\nabla T$  — градиент температуры в данном месте);

$\vec{q}_{\text{конв}} = \vec{\omega} \rho c_p T$  — удельный поток *конвективного переноса* тепла ( $\vec{\omega}$  — вектор скорости потока,  $\rho$  и  $c_p$  — плотность и теплоемкость среды);

$q_{F,+n} = -\lambda_{+n} \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{F,+n}$  — удельный поток переноса тепла *теплопроводностью среды на границе с поверхностью тела F* [ $\lambda_{+n}$  — коэффициент теплопроводности среды,  $+n$  — направление внешней нормали к поверхности (рис. 47)];

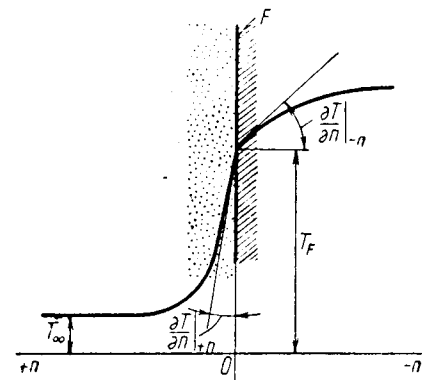


Рис. 47. К определению переноса тепла на границе среды со стенкой

$q_{F,-n} = -\lambda_{-n} \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{F,-n}$  — удельный поток переноса тепла *теплопроводностью тела на границе со средой* [ $\lambda_{-n}$  — коэффициент теплопроводности тела,  $-n$  — направление внутренней нормали к поверхности (рис. 47)];

$q_F = \alpha (T_F - T_\infty)$  — удельный поток *теплоотдачи на границе* среды с поверхностью тела ( $\alpha$  — коэффициент теплоотдачи,  $T_F - T_\infty$  — разность температур среды на границе со стенкой и в отдалении от нее);

$q_F = \omega_F \rho c_p (T_F - T_\infty)$  — удельный поток *теплоотдачи* на границе *при сквозном течении* среды в массе тела ( $\omega_F$  — скорость сквозного потока среды,  $\rho$  и  $c_p$  — плотность и теплоемкость среды).

В математическом описании процессов распространения тепла используются также *операции над величинами удельных потоков*, выражающие результирующие переносы тепла в единичном объеме в единицу времени  $\left(\frac{вт}{м^3}\right)$ :

$\text{div } \vec{q}_T = \text{div} (-\lambda \nabla T)$  — результирующий перенос тепла теплопроводностью;

$\text{div } \vec{q}_{\text{конв}} = \text{div} (\omega \rho c_p T)$  — результирующий конвективный перенос тепла.

Фундаментальными характеристиками в процессах распространения тепла являются также величины изменений различных форм энергии в единичном объеме в единицу времени  $\left(\frac{\text{вт}}{\text{м}^3}\right)$ . Например, изменение энтальпии среды  $\frac{\partial}{\partial \tau} (\rho c_p T)$ .

При переносах различных иных форм энергии, кроме тепла (кинетической энергии, энергии химических и фазовых превращений компонентов среды), в качестве фундаментальных характеристик могут быть привлечены *условные температуры*, отвечающие возможному тепловому состоянию среды, при полном переходе этих форм энергии в тепло:

$$T_{* \text{кин}} = T + \theta_{\text{кин}} - \text{температура торможения} \left( \theta_{\text{кин}} = \frac{w^2}{2c_p} \right);$$

$$T_{* \text{хим}} = T + \theta_{\text{хим}} - \text{температура в процессах химического превращения компонентов среды} \left( \theta_{\text{хим}} = \frac{Q_{\text{хим}} E_{\text{хим}}}{\rho c_p} \right);$$

$$T_{* \text{фаз}} = T + \theta_{\text{фаз}} - \text{температура в процессах фазовых превращений компонентов среды.}$$

### Б. Инварианты критериальных отношений

Различные критериальные отношения содержат те или иные характерные величины рассматриваемого физического или химического процесса и различные математические операции над ними. Для получения критериев из критериальных отношений различные символические операции над отдельными величинами можно опустить, сохранив сами размерные величины.

Таким образом получаем, например, критерий конвективно-теплопроводного переноса тепла:

$$K_{\text{конв/тепл}} = \frac{\omega \rho c_p T}{-\lambda \frac{\partial T}{\partial l}} \rightarrow \frac{\omega \rho c_p l}{\lambda} \equiv \frac{wl}{a};$$

критерий переноса тепла нестационарной теплопроводностью:

$$K_{\text{тепл/измен } T} = \frac{-\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial l^2}}{\frac{\partial}{\partial \tau} (\rho c_p T)} \rightarrow \frac{\lambda \tau}{\rho c_p l^2} \equiv \frac{a\tau}{l_2}.$$

и т. д.

Такое исключение операций над величинами, содержащимися в критериальных отношениях, обосновывается *инвариантностью*

безразмерных математических формул по отношению к масштабу величин, в них содержащихся. Покажем это на примере формул вышенаписанных критериальных отношений.

Вводя масштабы для всех величин, содержащихся в формулах  $K_{\text{конв/тепл}}$  и  $K_{\text{тепл/измен } T}$ , при переходе величины от одних значений  $A$  к другим  $B$ :

$$\frac{w_B}{w_A} = C_w, \quad \frac{\varrho_B}{\varrho_A} = C_\varrho, \quad \frac{c_{pB}}{c_{pA}} = C_{c_p}, \quad \frac{T_B}{T_A} = C_T,$$

$$\frac{\lambda_B}{\lambda_A} = C_\lambda, \quad \frac{l_B}{l_A} = C_l, \quad \frac{\tau_B}{\tau_A} = C_\tau$$

получаем следующие соотношения:

$$(K_{\text{конв/тепл}})_B = \frac{C_w C_\rho C_{c_p} C_l}{C_\lambda} \frac{w_A \varrho_A c_{pA} T_A}{-\lambda_A \frac{\partial T_A}{\partial l_A}} = \frac{C_w C_\rho C_{c_p} C_l}{C_\lambda} (K_{\text{конв/тепл}})_A,$$

$$(K_{\text{тепл/измен } T})_B = \frac{C_\lambda C_\tau}{C_\rho C_{c_p} C_l^2} \frac{-\lambda_A \frac{\partial^2 T_A}{\partial l_A^2}}{\frac{\partial}{\partial \tau_A} (\varrho_A c_{pA} T_A)} = \frac{C_\lambda C_\tau}{C_\rho C_{c_p} C_l^2} (K_{\text{тепл/измен } T})_A.$$

Условия инвариантности требуют:

$$(K_{\text{конв/тепл}})_B = (K_{\text{конв/тепл}})_A,$$

$$(K_{\text{тепл/измен } T})_B = (K_{\text{тепл/измен } T})_A,$$

следовательно,

$$\frac{C_w C_\rho C_{c_p} C_l}{C_\lambda} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{C_\lambda C_\tau}{C_\rho C_{c_p} C_l^2} = 1.$$

Отсюда находятся инварианты формул рассматриваемых критериальных отношений:

$$\frac{w_B l_B}{a_B} = \frac{w_A l_A}{a_A} = \frac{wl}{a}$$

и

$$\frac{a_B \tau_B}{l_B^2} = \frac{a_A \tau_A}{l_A^2} = \frac{a\tau}{l^2}.$$

Таким образом, формулам рассматриваемых критериальных отношений отвечают следующие инварианты:

$$K_{\text{конв/тепл}} \rightarrow \frac{wl}{a},$$

$$K_{\text{тепл/измен } T} \rightarrow \frac{\alpha \tau}{l^2}.$$

Инварианты критериальных отношений, так же как и сами отношения характерных величин сравниваемых процессов, отвечают условию подобия. Поэтому инварианты критериальных отношений называют критериями подобия.

### В. Различные критерии в процессах переноса тепла

На основании всего изложенного для процессов конвективного и теплопроводного переноса тепла в нейтральной среде, в общем случае нестационарного процесса, получаем следующие критерии подобия:

$K_{\text{конв/тепл}} \rightarrow \frac{\omega l}{\alpha} \equiv Pe$  — критерий подобия конвективно-теплопроводного переноса тепла в текущих средах, или критерий Пекле (Peclet);

$K_{\text{тепл/измен } T} \rightarrow \frac{\alpha \tau}{l^2} \equiv Fo$  — критерий подобия нестационарной теплопроводности тела, или критерий Фурье (Fourier);

$K_{\text{теплотд/теплопр, } +n} \rightarrow \frac{\alpha l}{\lambda_{+n}} \equiv Nu$  — критерий подобия переноса тепла на границе среды со стенкой, или критерий Нуссельта (Nusselt) ( $\lambda_{+n}$  — коэффициент теплопроводности среды);

$K_{\text{теплотд/теплопр, } -n} \rightarrow \frac{\alpha l}{\lambda_{-n}} \equiv Bi$  — критерий подобия переноса тепла на границе тела со средой, или критерий Био (Biot) ( $\lambda_{-n}$  — коэффициент теплопроводности тела);

$K_{\text{теплотд/конв}} \rightarrow \frac{\alpha}{\omega Q \rho_p} \equiv St$  — критерий подобия теплоотдачи конвекцией среды на границе со стенкой, или критерий Стентона (Stanton).

В процессах переноса энергии различных форм, переходящих в тепло, получаем следующие критерии подобия:

$K_{T^*_{\text{кин}}/T} \rightarrow 1 + \frac{\theta_{\text{кин}}}{T} \equiv \vartheta_{*_{\text{кин}}}$  — критерий температуры торможения в среде;

$K_{T^*_{\text{хим}}/T} \rightarrow 1 + \frac{\theta_{\text{хим}}}{T} \equiv \vartheta_{*_{\text{хим}}}$  — критерий температуры с химическими превращениями в среде;

$K_{T^*_{\text{фаз}}/T} \rightarrow 1 + \frac{\theta_{\text{фаз}}}{T} \equiv \vartheta_{*_{\text{фаз}}}$  — критерий температуры с фазовыми превращениями в среде.

Критериальные отношения и соответствующие критерии подобия можно получить из уравнения распространения энергии.

Поделив все члены уравнения (7,14), записанного без учета радиации, на член  $\text{div}(-\lambda \nabla T)$ , представляющий результирующий

перенос тепла теплопроводностью, получаем следующее равенство:

$$\frac{\partial q_{c_p} T_{**}}{\partial \tau} + \frac{\operatorname{div}(\vec{\omega} q_{c_p} T_{**})}{\operatorname{div}(-\lambda \nabla T)} + 1 + \frac{\operatorname{div}(\Sigma D \nabla q_{c_p} \theta_{\text{превр}})}{\operatorname{div}(-\lambda \nabla T)} = \frac{q_{\text{и}}}{\operatorname{div}(-\lambda \nabla T)}$$

Отдельным членам этого равенства отвечают следующие инварианты:

$$\frac{T_{**}}{T} \frac{l^2}{a\tau}; \quad \frac{\omega l}{a} \frac{T_{**}}{T}; \quad \frac{D}{a} \frac{\theta_{\text{превр}}}{T}; \quad \frac{q_{\text{и}} l^2}{\lambda T}$$

Таким образом, устанавливаем существование следующих критериев подобия в процессах распространения энергии:

**критерий**  $\frac{a\tau}{l^2}$ , который используется в решениях задач нестационарной теплопроводности;

**критерий**  $\frac{\omega l}{a}$ , который используется в решениях задач конвективно-теплопроводного переноса тепла;

**критерий**  $\frac{D}{a}$ , который используется в решениях задач тепло-массообмена;

**критерий**  $\frac{q_{\text{и}} l^2}{\lambda T}$ , который используется в решениях задач теплопроводности тел с источниками тепла;

**критерий**  $\frac{T_{**}}{T} = 1 + \frac{\theta_{\text{кин}}}{T} + \frac{\theta_{\text{хим}}}{T}$ , который используется в решениях задач о температурном поле в быстродвижущихся и химически реагирующих средах;

**критерий**  $\frac{\theta_{\text{превр}}}{T}$ , который используется при рассмотрении процессов с фазовыми превращениями среды.

### § 34. Критерии подобия в процессах переноса массы

Перенос массы вещества в текущей среде и на границе с телом осуществляется следующими потоками:

$\vec{q}_{\text{диф } i} = -D_{i,j} \nabla q_i$  — удельный поток диффузии  $i$ -го вещества в среде ( $D_{i,j}$  — коэффициент диффузии,  $\nabla q_i$  — градиент парциальной плотности  $i$ -го вещества в данном месте);

$\vec{q}_{\text{конв } i} = \vec{\omega} q_i$  — удельный поток конвективного переноса  $i$ -го вещества текущей средой ( $\vec{\omega}$  — вектор скорости потока);

$q_{F,+n,i} = -D_{i,j,+n} \frac{\partial q_i}{\partial n} \Big|_{F,+n}$  — удельный поток диффузионного переноса в среде на границе с поверхностью тела  $F$  ( $D_{i,j,+n}$  — коэффициент диффузии в среде,  $+n$  — направление внешней нормали к поверхности);

$q_{F, -n, i} = -D_{i, j, -n} \left. \frac{\partial Q_i}{\partial n} \right|_{F, -n}$  — удельный поток диффузионного переноса в массе тела на границе со средой ( $D_{i, j, -n}$  — коэффициент диффузии в теле,  $-n$  — направление внутренней нормали к поверхности);

$q_{F, i} = \alpha_i (Q_{i, F} - Q_{i, \infty})$  — удельный поток переноса массы на границе среды с поверхностью тела ( $\alpha_i$  — коэффициент массоотдачи,  $Q_{i, F} - Q_{i, \infty}$  — разность парциальных плотностей  $i$ -го вещества в среде на границе с телом и в отдалении от него);

$q_{F, i} = \omega_F (Q_{i, F} - Q_{i, \infty})$  — удельный поток переноса массы  $i$ -го вещества на границе при сквозном течении среды в массе тела ( $\omega_F$  — скорость сквозного потока среды).

**Результирующие переносы массы  $i$ -го вещества среды в единичном объеме в единицу времени**  $\left[ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3 \text{сек}} \right]$  определяются следующими операциями:

$\text{div } \vec{q}_{\text{диф } i} = \text{div} (-D_{i, j} \nabla Q_i)$  — результирующий перенос вещества диффузией;

$\text{div } \vec{q}_{\text{конв } i} = \text{div} (\vec{\omega} Q_i)$  — результирующий перенос вещества конвекцией.

Основной величиной в процессах химического реагирования в среде является *удельная производительность процесса химического превращения*:

$$q_{\text{хим}} = K_{\text{ке}} e^{-\frac{E_{\text{акт } i}}{R_{\text{м}} T}} Q_1^{n_1} Q_2^{n_2} \dots \frac{\text{кг}}{\text{м}^3 \text{сек}}.$$

Пользуясь вышеуказанными основными величинами в процессах распространения массы, находим следующие критерии подобия:

$K_{\text{конв } i/\text{диф } i} \rightarrow \frac{\omega l}{D_{i, j}} \equiv Pe_i$  — критерий подобия конвективно-диффузионного переноса массы  $i$ -го вещества в текущей среде (диффузионный критерий Пекле);

$K_{\text{диф } i/\text{измен } i} \rightarrow \frac{D_{i, j} \tau}{l^2} \equiv Fo_i$  — критерий подобия нестационарной диффузии массы (диффузионный критерий Фурье);

$K_{\text{массоотд } i/\text{диф } i, +n} \rightarrow \frac{\alpha_i l}{D_{i, j, +n}} \equiv Nu_i$  — критерий подобия диффузионного переноса на границе среды с телом (диффузионный критерий Нуссельта);

$K_{\text{массоотд } i/\text{диф } i, -n} \rightarrow \frac{\alpha_i l}{D_{i, j, -n}} \equiv Bi_i$  — критерий подобия диффузионного переноса в теле на границе со средой (диффузионный критерий Био);

$K_{\text{массоотд}/\text{конв}} \rightarrow \frac{\alpha_i}{\omega_F} \equiv St_i$  — критерий подобия массоотдачи веще-



ства на границе со стенкой (критерий Стентона для процесса массоотдачи).

Из критериальных отношений

$$K_{\text{хим } i/\text{конв } i} \rightarrow \frac{K_{\text{ке}} - \frac{E_{\text{акт } i}}{R_M T} \cdot \varrho_1^{n_1-1} \varrho_2^{n_2} \dots l}{\omega},$$

$$K_{\text{хим } i/\text{диф } i} \rightarrow \frac{K_{\text{ке}} - \frac{E_{\text{акт } i}}{R_M T} \cdot \varrho_1^{n_1-1} \varrho_2^{n_2} \dots l^2}{D_{i,j}}$$

выделяются критерии:

$\frac{E_{\text{акт}}}{R_M T} \equiv \frac{\theta_{\text{акт}}}{T}$  — критерий подобия температуры, отвечающей энергии активации;

$\frac{\omega}{K_{\text{ке}} - \frac{E_{\text{акт } 1}}{R_M T} \cdot \varrho_1^{n_1-1} \varrho_2^{n_2} \dots l} \equiv \frac{\tau_{\text{хим}}}{\tau_l}$  — критерий подобия времени хи-

мического реагирования среды в потоке ( $\tau_{\text{хим}} = \frac{1}{K_{\text{ке}} - \frac{E_{\text{акт } 1}}{R_M T} \cdot \varrho_1^{n_1-1} \varrho_2^{n_2} \dots}$  — время химической реакции,  $\tau_l$  —

время перемещения среды на заданном пути  $l$ );

$\frac{D_i \cdot j \tau_{\text{хим}}}{l^2} \equiv Fo_{\text{хим}}$  — критерий Фурье для диффузии компонента вещества среды  $i$ , отвечающего времени химического реагирования.

Из условия сохранения всей массы при нестационарном течении среды (уравнение неразрывности потока) получаем критерий подобия нестационарности потока:

$K_{\text{конв } \rho/\text{измен } \rho} \rightarrow \frac{\omega \tau}{l} \equiv \frac{\tau}{\tau_l}$  — критерий подобия относительного времени накопления или убыли массы ( $\tau_l = \frac{l}{\omega}$  — время перемещения среды на заданном пути  $l$ ).

### § 35. Критерии подобия в процессах переноса импульса

Рассматривая взаимодействие различных сил в текущих средах, можно установить соответствующие критериальные отношения для действующих сил.

Сила трения возникает в результате переноса импульсов при течении слоев среды с различной скоростью. Результирующее изменение касательных напряжений ( $\sigma_l = \eta \frac{\partial \omega_l}{\partial n}$ , где  $\eta$  — дина-

мическая вязкость среды,  $\omega_l$  — скорость течения в направлении  $\vec{l}$ ,  $n$  — направление нормали) в единичном объеме обуславливает силу трения  $\vec{P}_{\text{трени}}/\text{м}^3$ , составляющие которой выражаются произведениями вязкости на различные вторые производные составляющих скорости, например  $\eta \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial y^2}$ .

Сила инерции обусловлена изменением количества движения текущей среды во времени в единичном объеме  $\vec{P}_{\text{инерц}} = \frac{D(\omega Q)}{dt}$ .

Сила давления, представляющая результирующее изменение внутреннего давления среды в единичном объеме, определяется формулой  $\vec{P}_{\text{давл}} = -\nabla p$  ( $\nabla p$  — градиент внутреннего давления).

Сила тяготения массы среды в единичном объеме определяется произведением  $\vec{P}_{\text{тяг}} = \rho \vec{g}$ .

Подъемная сила, возникающая при различии плотности среды в данном месте ( $\rho$ ) и в окружающих местах ( $\rho_\infty$ ), определяется формулой  $\vec{P}_{\text{под}} = -(\rho - \rho_\infty) \vec{g}$ .

Помимо рассмотренных взаимодействующих сил в текущей среде, в общем случае могут существовать и другие силы: например, сила магнитного поля ( $\vec{P}_{\text{магн}}$ ), сила давления радиации ( $P_{\text{рад}}$ ) и т. п.

Пользуясь определением взаимодействующих сил, из соответствующих критериальных отношений получаем следующие критерии подобия:

$$K_{\text{инерц/трени}} = \frac{P_{\text{инерц}} \cdot l}{P_{\text{трени}} \cdot l} \rightarrow \frac{\omega Q l}{\eta} \equiv \frac{\omega l}{\nu} \equiv Re - \text{критерий Рейнольдса (Reynolds)} (\nu - \text{кинематическая вязкость среды, } l - \text{характерный размер});$$

$$K_{\text{инерц/тяг}} = \frac{P_{\text{инерц}}}{P_{\text{тяг}}} \rightarrow \frac{\omega^2}{gl} \equiv Fr - \text{критерий Фруда (Froud)};$$

$$K_{\text{давл/инерц}} = \frac{P_{\text{давл}}}{P_{\text{инерц}}} \rightarrow \frac{\Delta p}{\rho \omega^2} \equiv Eu - \text{критерий Эйлера (Euler)} (\rho - \text{плотность, } p - \text{давление});$$

$$K_{\text{магн/инерц}} = \frac{P_{\text{магн}}}{\rho \omega^2} - \text{критерий подобия силового взаимодействия магнитного поля с текущей средой};$$

$$K_{\text{рад/инерц}} = \frac{P_{\text{рад}}}{\rho \omega^2} - \text{критерий подобия взаимодействия давления радиации с текущей средой}.$$

Последние два критерия играют существенную или даже основную роль в текущих средах, подверженных действию достаточно сильных магнитных и радиационных полей.

Для условий свободного движения среды, возникающего в результате различия плотностей в данном месте ( $\rho$ ) и в окружении ( $\rho_\infty$ ), имеем следующий критерий подобия:

$$K_{\text{подъемн/инерц}} = \frac{P_{\text{подъемн}}}{P_{\text{инерц}}} \rightarrow \frac{\rho_\infty - \rho}{\frac{\rho}{w^2} \cdot \frac{gl}{g}}.$$

Полученный критерий подобия содержит уже известный критерий Фруда ( $Fr$ ) и новый критерий, представляющий относительную разность плотностей:  $\frac{\rho_\infty - \rho}{\rho}$ .

Если различие плотностей вызывается разностью температур среды при постоянстве давления, например в местах у поверхности тела ( $T_F$ ) и в отдалении от поверхности ( $T_\infty$ ), то критерий разности плотностей заменяется критерием разности температур  $\frac{T_F - T_\infty}{T_\infty}$  — для газов и  $\beta_\infty(T_F - T_\infty)$  — для жидкостей.

Для характеристики свободного движения среды, возникающего в результате различия температур, и в целях исключения скорости перемещения среды можно составить критериальное отношение взаимодействующих сил в свободном потоке:

$$\frac{P_{\text{инерц}}}{P_{\text{трэн}}} \cdot \frac{P_{\text{подъемн}}}{P_{\text{трэн}}} \rightarrow \frac{gl^3}{v^2} \frac{T_F - T}{T} \equiv Gr.$$

Полученный критерий подобия называется критерием Грасгофа (Grasgoff), который представляет собой произведение двух критериев: критерия  $\frac{gl^3}{v^2}$  и критерия разности температур  $\frac{T_F - T}{T}$  — для газов,  $\beta(T_F - T)$  — для жидкостей.

Для потоков двухфазных сред (например, газ — жидкость, пар — жидкость и т. п.) важную роль играет сила поверхностного натяжения жидкости. Процесс дробления жидких масс в потоке двухфазной среды осуществляется в результате взаимодействия инерционной силы, силы трения, силы тяготения и силы поверхностного натяжения. Размер раздробленных жидких масс в потоке находится в зависимости от соотношения сил инерции и поверхностного натяжения. Соответствующее критериальное отношение этих сил приводит к критерию Вебера (Weber):

$$K_{\text{инерц/натяж}} = \frac{P_{\text{инерц}}}{P_{\text{натяж}}} \rightarrow \frac{\rho w^2 l}{\sigma} \equiv We,$$

где  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения.

Помимо критерия Вебера, для потока двухфазной среды (газ — жидкость или пар — жидкость) важную роль играет также

критерий подобия различия плотностей обеих фаз  $\left(\frac{\rho' - \rho''}{\rho'}\right)$ , который представляет собой отношение подъемной силы и силы тяготения:

$$K_{\text{подъемн/тяг}} = \frac{\rho' - \rho''}{\rho'}$$

Все полученные критерии подобия позволяют оценить участие отдельных характерных величин или результирующих эффектов в явлениях переноса. Эти и другие критерии подобия с успехом используются как в аналитических решениях отдельных задач переноса, так и особенно широко при обобщении опытных данных, полученных в результате экспериментального изучения различных явлений переноса.

Для учета влияния на процессы переноса энергии, массы и импульса изменения различных физических параметров с температурой и давлением необходимо привлечь инварианты подобия, отвечающие соответствующим характеристическим уравнениям, отражающим влияние температуры и давления на параметры, например уравнения (12, 11).

### § 36. Критериальные уравнения физических процессов

Полученные критерии подобия связывают определенным образом несколько различных детальных независимых величин, применяемых в математическом описании физических и химических процессов. Например, критерий  $Re = \frac{\omega l}{\nu}$  связывает скорость перемещения, характерный линейный размер и кинематическую вязкость текущей среды. Поэтому число всех возможных критериев подобия с независимыми переменными и постоянными величинами будет всегда меньше числа всех детальных величин, применяемых в математическом описании тех или иных физических и химических процессов.

Между всеми детальными величинами, применяемыми для математического описания процессов, а следовательно, и между всеми критериями подобия, полученными для этих процессов, существует функциональная связь. Эту функциональную связь представляет решение дифференциальных, интегральных или интегро-дифференциальных уравнений, описывающих рассматриваемые процессы.

Существование функциональной связи между критериями подобия покажем на простейшем примере дифференциального уравнения стационарного течения несжимаемой изотермической жидкости без учета ускорения земного тяготения (течение в горизонтальном направлении).

Уравнение (18,12) движения среды в этих условиях имеет следующий вид:

$$\vec{\omega}(\vec{\omega}, \nabla) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{\omega},$$

где  $\vec{\omega}$  — вектор скорости потока;  
 $\rho$  — плотность среды;  
 $\nu$  — кинематическая вязкость среды.

Разделив все члены этого уравнения на первый член, представляющий инерционную силу, получаем следующее безразмерное дифференциальное уравнение:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\nabla p}{\vec{\omega}(\vec{\omega}, \nabla)} + \frac{\nu \Delta \vec{\omega}}{\vec{\omega}(\vec{\omega}, \nabla)} = 1. \quad (36,1)$$

Члены этого равенства приводят к следующим двум критериям:  $\frac{\Delta p}{\rho \omega^2} \equiv Eu$  (критерий Эйлера) и  $\frac{1}{\frac{\omega l}{\nu}} = \frac{1}{Re}$  (обратная величина

критерия Рейнольдса).

Так как дифференциальное уравнение (36,1) получено в результате определенных операций над величинами, содержащимися в критериальных отношениях, то можно утверждать, что существует такая функциональная связь между критериями  $Eu$  и  $Re$ , которая в результате операций над всеми функционально связанными величинами обязательно должна привести к уравнению (36,1). Следовательно, решением дифференциального уравнения (36,1) будет критериальное уравнение

$$Eu = f(Re). \quad (36,2)$$

При этом вид функции  $f$  получается в результате аналитического решения дифференциального уравнения (36,1).

Присоединение условий однозначности к решению уравнения (36,1) дает новые критериальные отношения.

В задачах течения изотермической жидкости в канале или при обтекании ею каких-либо тел задаются соотношения размеров канала или обтекаемых тел:

$$\frac{l_i}{l_0} \quad (i = 1, 2, 3),$$

где  $l_i$  — размер в одном направлении;  
 $l_0$  — характерный заданный размер.

Кроме того, задается начальное поле скоростей в потоке, которое в виде критериального отношения может быть представлено так:

$$\frac{\omega_{x_1, 1}}{\omega_1},$$

где  $\omega_{x_i,1}$  — скорость в любом месте начального сечения потока;  
 $\bar{\omega}_1$  — средняя скорость потока.

Для заданной начальной скорости потока ( $\bar{\omega}_1$ ), вязкости среды ( $\nu_1$ ) и известного характерного размера ( $l_{0,1}$ ) определяется критерий Рейнольдса:

$$Re = \frac{\bar{\omega}_1 l_{0,1}}{\nu_1}.$$

Изменение давления текущей жидкости целесообразно определять разностью заданного начального давления  $p_1$  и переменного давления  $p$ . В связи с этим определяется критерий Эйлера:

$$Eu = \frac{p_1 - p}{\rho_1 \bar{\omega}_1^2}.$$

Таким образом, конкретизированное решение задачи течения жидкости представится следующим критериальным уравнением:

$$Eu = \varphi \left( \frac{\omega_{x_i,1}}{\bar{\omega}_1}, Re_1, \frac{l_i}{l_{0,1}} \right), \quad (36,3)$$

где критерии

$$Eu = \frac{p_1 - p}{\rho_1 \bar{\omega}_1^2}, \quad Re_1 = \frac{\bar{\omega}_1 l_{0,1}}{\nu_1} \quad \text{и} \quad \frac{l_i}{l_{0,1}}$$

содержат величины, заданные условиями однозначности (начальными условиями);

величина  $p$  представляет искомое давление в потоке среды.

Определяемой величиной в рассматриваемой конкретной задаче течения жидкости в канале является давление жидкости ( $p$ ), которое содержится в критерии  $Eu$ . Поэтому в данных условиях критерий  $Eu$  является определяемым. Все другие критерии уравнения (36,3):  $Re_1, \frac{\omega_{x_i,1}}{\bar{\omega}_1}, \frac{l_i}{l_{0,1}}$  — являются определяющими.

Если в качестве искомой величины выбрать поле скоростей в потоке, то критериальное уравнение для этих условий запишется в виде:

$$\frac{\omega_{x_i,1}}{\bar{\omega}_1} = F \left( \frac{\omega_{x_i,1}}{\bar{\omega}_1}, Re_1, \frac{l_i}{l_{0,1}} \right), \quad (36,4)$$

где критерии

$$\frac{\omega_{x_i,1}}{\bar{\omega}_1}, \quad Re_1 = \frac{\bar{\omega}_1 l_{0,1}}{\nu_1}, \quad \frac{l_i}{l_{0,1}}$$

содержат величины, заданные условиями однозначности.

Подобные примеры использования критериальных уравнений для решения задач можно распространить на все физические процессы.

### § 37. Условия подобия физических процессов

Составленные критериальные уравнения для физических процессов позволяют определить условие подобия этих процессов. Это условие сводится к следующему.

*Если физические процессы подобны друг другу, то одноименные критерии подобия этих процессов имеют одинаковую величину.*

Докажем эту теорему на конкретном примере течения изотермической несжимаемой жидкости в трубе.

Пусть имеются две различные по своим размерам трубы  $A$  и  $B$  с гладкими стенками (рис. 48). В трубах протекают две раз-

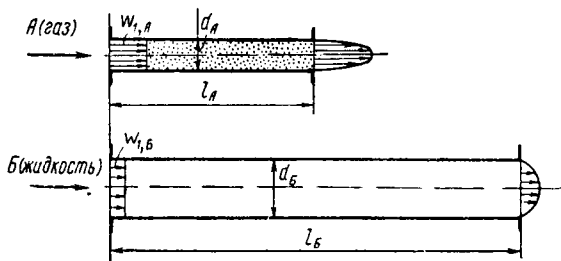


Рис. 48. Динамическое подобие течений различных изотермических сред в трубах

личные изотермические жидкости. Пусть известно, что оба потока подобны друг другу. Это означает, что для обоих потоков должны выполняться все три требования исходного определения понятия о подобии физических процессов (§ 31). Найдем условия, к которым приводит выполнение этих трех требований.

1. В соответствии с первым требованием подобные потоки должны быть качественно одинаковыми. Это означает, что их математические описания совпадают во всем, кроме содержащихся в них именованных чисел. Поэтому критериальные уравнения подобных потоков течения жидкостей в трубах запишутся в следующем виде:

$$\frac{\Delta p_A}{\rho_A \bar{\omega}_{1,A}^2} = f \left( \frac{\omega_{x_i, 1, A}}{\bar{\omega}_{1, A}}, \frac{\bar{\omega}_{1, A} d_A}{\nu_A}, \frac{l_A}{d_A} \right), \quad (37,1)$$

$$\frac{\Delta p_B}{\rho_B \bar{\omega}_{1, B}^2} = f \left( \frac{\omega_{x_i, 1, B}}{\bar{\omega}_{1, B}}, \frac{\bar{\omega}_{1, B} d_B}{\nu_B}, \frac{l_B}{d_B} \right). \quad (37,2)$$

2. Сходственные величины для обоих потоков связаны преобразованием подобия. Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \Delta p_B &= C_p \Delta p_A, & \rho_B &= C_\rho \rho_A, \\ \omega_B &= C_\omega \omega_A, & \nu_B &= C_\nu \nu_A, \\ \omega_{x_i, 1, B} &= C_\omega \omega_{x_i, 1, A}, & d_B &= C_d d_A, \\ & & l_B &= C_l l_A, \end{aligned} \right\} \quad (37,3)$$

где  $C_p, C_\omega, C_\rho, C_\nu, C_l$  — масштабы, или константы подобия, для соответствующих величин  $p, \omega, \rho, \nu, l$ .

3. Третье требование понятия о подобии физических явлений ограничивает выбор величин масштабов подобия  $C$  таким условием: подвергнув преобразованию подобия (37,3) критериальное уравнение для процесса  $A$  (уравнение 37,1), должны получить критериальное уравнение для процесса  $B$ , не содержащее масштабов подобия. Выполнение этого требования приводит к следующим равенствам:

$$\frac{C_p}{C_\rho C_\omega^2} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{C_\omega C_l}{C_\nu} = 1. \quad (37,4)$$

Условия (37,4) ограничивают свободу выбора масштабов подобия.

Используя соотношения (37,3), находим:

$$\left| \frac{\Delta p}{\rho \omega^2} \right|_B = \left| \frac{\Delta p}{\rho \omega^2} \right|_A, \quad (37,5)$$

$$\left| \frac{\bar{\omega} d}{\nu} \right|_B = \left| \frac{\bar{\omega} d}{\nu} \right|_A. \quad (37,6)$$

Кроме того, из (37,3) следует:

$$\left| \frac{l}{d} \right|_B = \left| \frac{l}{d} \right|_A, \quad (37,7)$$

$$\left| \frac{\omega_{x_i, 1}}{\omega_1} \right|_B = \left| \frac{\omega_{x_i, 1}}{\omega_1} \right|_A. \quad (37,8)$$

Равенства (37,5 — 37,8) выражают содержание *теоремы подобия физических процессов* применительно к течению жидкости в трубе. Одноименные критериальные отношения  $\frac{\Delta p}{\rho \omega^2}, \frac{\bar{\omega} d}{\nu}, \frac{l}{d}, \frac{\omega_{x_i, 1}}{\omega_1}$  имеют одинаковое численное значение для подобных друг другу потоков жидкости в канале.

Критерий Эйлера  $Eu = \frac{\Delta p}{\rho \omega^2}$  представляет динамическое подобие потоков или подобие полей давления.

Критерий Рейнольдса  $Re = \frac{\bar{\omega} d}{\nu}$  представляет кинетическое подобие потоков или подобие полей скорости в текущей вязкой среде.

Критерий  $\frac{l}{d}$  представляет геометрическое подобие каналов.

Критерий  $\frac{\omega_{x_i, 1}}{\omega_1}$  представляет подобие начальных полей скорости в потоках.



Таким образом, содержание теоремы о подобии применительно к потокам жидкости в каналах может быть сформулировано так: *подобные друг другу потоки жидкости обладают подобием геометрическим, кинетическим и динамическим*. Одноименные критерии, представляющие эти виды подобия в обоих потоках, одинаковы:

$$Re_B = Re_A = \text{idem (одно и то же)},$$

$$Eu_B = Eu_A = \text{idem},$$

$$\left| \frac{l}{d} \right|_B = \left| \frac{l}{d} \right|_A = \text{idem},$$

$$\left| \frac{\omega_{x_i, 1}}{\omega_1} \right|_B = \left| \frac{\omega_{x_i, 1}}{\omega_1} \right|_A = \text{idem}.$$

Условия подобия могут быть использованы при построении «модели» изучаемого процесса, которая будет подобна «образцу».

Исследование на моделях получило широкое распространение в самых различных областях техники. При этом сокращаются средства и время проведения экспериментальных работ, а получаемые результаты при надлежащем обобщении уверенно используются при проектировании и построении реальных объектов.

*Раздел второй*

**ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ  
И ТЕПЛОПЕРЕДАЧА  
ТЕЛ**

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

### § 38. Исходные понятия и дифференциальное уравнение теплопроводности

Перенос тепла теплопроводностью в каком-либо теле в зависимости от условий имеет различный характер. Если тепло распространяется так, что температура в отдельных местах тела сохраняется неизменной во времени, то процесс переноса тепла носит **стационарный характер**. Если температура в этих местах тела меняется со временем, то такой не установившийся во времени процесс переноса тепла называется **нестационарным**. Тело, внезапно подвергаемое какому-либо достаточно длительному тепловому воздействию, постепенно теряет особенности своего начального теплового режима, и по прошествии некоторого времени нестационарный тепловой режим тела находится в полном подчинении примененного теплового воздействия. Такой нестационарный тепловой режим тела называют **регулярным**. В некоторых случаях тело подвергается периодическому тепловому воздействию, и температура в отдельных местах тела периодически меняется во времени, совершая простые или сложные колебания. При этих условиях перенос тепла в теле носит **волнообразный характер**.

Тело может подвергаться тому или иному стационарному или нестационарному тепловому воздействию как от поверхностей, ограничивающих объем тела, так и от внутренних источников тепла, действующих в объеме тела. В последних случаях перенос тепла в теле называется **теплопроводностью с источниками**.

Со всеми указанными особенностями теплового режима тел (различных по форме и содержащемуся веществу в объеме) приходится встречаться при решении задач теплопроводности.

Основной величиной для определения переноса тепла теплопроводностью в теле служит удельный тепловой поток, который определяется формулой:

$$\vec{q}_T = -\lambda \nabla T, \quad (38,1)$$

где  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности тела или среды;  
 $\nabla T$  — градиент температуры.

Чтобы судить, насколько различна способность тел проводить тепло, укажем крайние значения коэффициента теплопроводности некоторых тел: слой неподвижного воздуха при комнатной температуре имеет  $\lambda = 0,02 \frac{\text{вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}$ ; медь —  $400 \frac{\text{вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}$ .

К плохим проводникам тепла, или теплоизоляторам, относят тела, имеющие  $\lambda < 0,2 \frac{\text{вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}$ ; хорошими проводниками тепла являются металлы, у которых  $\lambda > 20 \frac{\text{вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}$ .

Решение задачи теории теплопроводности в общем случае

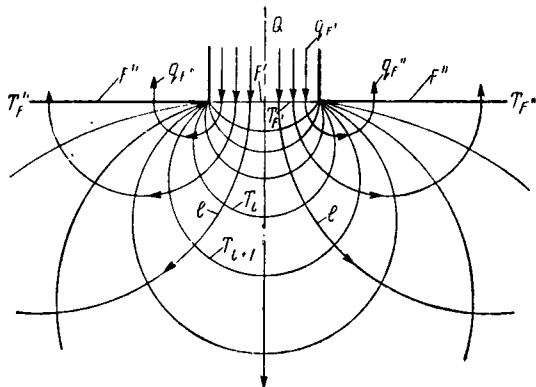


Рис. 49. Температурное поле в процессе распространения тепла теплопроводностью

сводится к нахождению распределения температур в теле в виде функции

$$T(x, y, z, \tau).$$

Для определения температурного поля тела в процессах распространения тепла теплопроводностью пользуются понятием *изотермических поверхностей*. В теле, в котором осуществляется перенос тепла, в любой момент времени можно выделить слои, ограниченные поверхностями с одинаковой температурой  $T_i$ ,  $T_{i+1}$  и одинаковым перепадом температур на поверхностях соответствующих слоев  $\Delta T_i$ ,  $\Delta T_{i+1}$ , ... (рис. 49).

Совокупность таких изотермических поверхностей в теле в любой момент времени представляет его температурное поле. При нагревании или охлаждении тела температура в отдельных местах его меняется со временем. Следовательно, в каждый последующий момент времени месторасположение изотермических поверхностей в теле также меняется. Температурное поле в этих случаях будет переменным во времени, или нестационарным. Неизменное во времени температурное поле отвечает стационарному тепловому режиму.

Сечение пространственного множества изотермических поверхностей тела какой-либо плоскостью оставляет след на плоскости

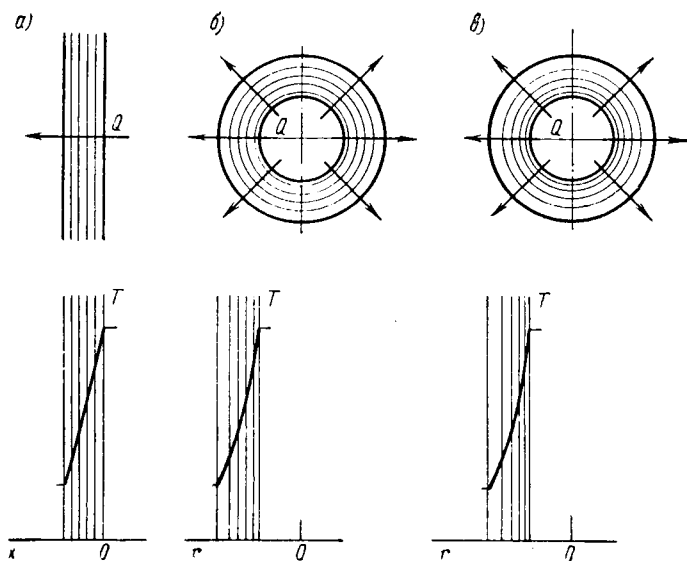


Рис. 50. Изотермические линии температурного поля при распространении тепла в простейших телах: а) плоскопараллельная стенка; б) стенка трубы; в) стенка сферической оболочки

сечения в виде множества *изотермических линий*. На рис. 50, а, б и в показана совокупность изотермических линий при распространении тепла в простейших случаях: плоскопараллельном, цилиндрическом и сферическом слоях.

Вдоль изотермических линий тепло в теле распространяться не может, и перенос тепла осуществляется лишь в направлениях от одной изотермической поверхности к другой в сторону понижения температуры. Кратчайший путь распространения тепла в изотропном теле в любом месте, очевидно, соответствует направлению нормали к изотермической поверхности. Удельный тепло-

вой поток в этом месте тела определяется формулой:

$$q_T = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}, \quad (38,2)$$

где  $\frac{\partial T}{\partial n}$  — градиент температуры по направлению нормали к изотермической поверхности.

Огибающие нормалей к изотермическим поверхностям на пути переноса тепла при последовательном переходе от одной изотермической поверхности к другой представляют собой *линии теплового тока*. Совокупность таких линий тока в теле представляет *тепловой поток*.

Баланс тепла в единичном объеме тела или среды при распространении тепла теплопроводностью приводит к следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\rho c_p T) + \operatorname{div} \vec{q}_T = q_{\text{и}}, \quad (38,3)$$

где  $\rho$  и  $c_p$  — плотность и теплоемкость вещества тела;

$\vec{q}_T = -\lambda \nabla T$  — вектор переноса тепла теплопроводностью.

Уравнение это представляет равенство:

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Изменение эн-} \\ \text{тальпии вещест-} \\ \text{ва в единичном} \\ \text{объеме в единицу} \\ \text{времени, } \frac{\text{вт}}{\text{м}^3} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{l} \text{Результирующий пе-} \\ \text{ренос тепла тепло-} \\ \text{проводностью в едн-} \\ \text{ичном объеме в едн-} \\ \text{ицу времени, } \frac{\text{вт}}{\text{м}^3} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} \text{Удельная произ-} \\ \text{водительность ис-} \\ \text{точников тепла в} \\ \text{единичном объ-} \\ \text{еме, } \frac{\text{вт}}{\text{м}^3} \end{array} \right]$$

В форме изменения температур уравнение теплопроводности представится в виде:

$$\frac{\partial (\rho c_p T)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_{\text{и}}, \quad (3,84)$$

где  $\lambda$  — коэффициент переноса тепла, или теплопроводность тела.

Эта форма дифференциального уравнения теплопроводности представляет математическое описание процесса изменения температуры во времени в любом месте тела, вызываемое результирующим переносом тепла и действующими источниками энергии.

Величина  $\sum_1^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \frac{\text{вт}}{\text{м}^3}$  представляет собой изменение энтальпии в единицу времени в любом месте тела от результирующего переноса тепла теплопроводностью в этом месте.

Величину  $q_{\text{и}} \frac{\text{вт}}{\text{м}^3}$  можно рассматривать как кажущееся изменение энтальпии в единицу времени в любом месте тела от действующих источников тепла в этом месте.

При отсутствии действующих источников тепла в теле дифференциальное уравнение теплопроводности запишется в виде:

$$\frac{\partial(\rho c_p T)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right). \quad (38,5)$$

Если температуропроводность тела  $a = \frac{\lambda}{\rho c_p}$  сохраняется постоянной, то уравнение теплопроводности можно записать:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \quad (38,6)$$

или

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \Delta T, \quad (38,6')$$

где

$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$  — дифференциальный оператор Лапласа.

Чтобы судить, насколько различна способность тел изменять температуру слоев при тепловом воздействии, приведем некоторые из наименьших и наибольших коэффициентов температуропроводности. Для сухого дерева, например,  $a = 0,972 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{сек}$ , а для серебра  $a = 1,7 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{сек}$ ; т. е. у дерева температуропроводность почти в 2000 раз меньше. Значительно больший коэффициент переноса тепла в серебре способствует более равномерному нагреванию или охлаждению его массы по сравнению с нагреванием или охлаждением слоев дерева. При нагревании куска дерева через некоторое время температура его внешних слоев станет близкой к температуре источника, а температура внутренних слоев за это время мало изменится. Такой же неравномерный нагрев массы вещества с малым коэффициентом температуропроводности вызывает термические напряжения в материале и ведет к его разрушению.

Дифференциальный оператор  $\Delta T$  имеет определенный физический смысл. Положительная или отрицательная его величина отвечает нагреванию ( $\frac{\partial T}{\partial \tau} > 0$ ) или охлаждению ( $\frac{\partial T}{\partial \tau} < 0$ ) тела в любом месте. Нулевое значение оператора ( $\Delta T = 0$ ) соответствует стационарному тепловому режиму —  $\frac{\partial T}{\partial \tau} = 0$ ; в этом случае распределение температур в теле сохраняется неизменным во времени.

Дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (38,7)$$

отвечает стационарной теплопроводности тела. Интегрированием

(38,7) находят функцию распределения температур, представляющую стационарное температурное поле в теле.

Для тел симметричной формы с кривой поверхностью (шар, цилиндр) целесообразно пользоваться *цилиндрическими* или *сферическими координатами*.

Для цилиндра координатами точки служат: радиус ( $r$ ), угол положения радиуса ( $\varphi$ ) и координата точки по направлению оси цилиндра ( $x$ ). Пользуясь этими координатами, дифференциальный оператор температуры для тел цилиндрической формы можно представить в следующем виде:

$$\Delta T_{\text{цил}} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (38,8)$$

Для шара координатами точки служат: радиус ( $r$ ), угол широты или соответствующий ему дополнительный угол ( $\varphi$ ) и угол долготы ( $\psi$ ). Пользуясь этими координатами, дифференциальный оператор температуры для тел сферической формы записываем в следующем виде:

$$\Delta T_{\text{сфер}} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\cos \psi}{r^2 \sin \psi} \frac{\partial T}{\partial \psi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \psi} \frac{\partial^2 T}{\partial \psi^2}. \quad (38,9)$$

### § 39. Начальные и граничные условия задач теплопроводности тел

В практических приложениях теории теплопроводности приходится встречаться с различными задачами. Условно эти задачи можно разделить на следующие три группы:

- 1) стационарная теплопроводность тел;
- 2) нестационарная теплопроводность тел;
- 3) температурные или тепловые волны.

Решение всех этих задач требует интегрирования дифференциального уравнения теплопроводности, которое описывает любые случаи распространения тепла. Для нахождения распределения температур в теле для конкретных условий распространения тепла требуется привлечь известные *краевые условия*.

К краевым условиям относятся:

- а) начальное распределение температур в теле, т. е. распределение температур до момента теплового воздействия на тело;
- б) граничное условие теплового воздействия на тело.

**Начальное распределение температур в теле** может быть разнообразным. Наиболее простой случай соответствует одинаковой температуре массы тела во всем объеме:

$$T(x, y, z, \tau_0) = T_a. \quad (39,1)$$



Такое условие может отвечать, например, начальному тепловому состоянию тел перед их разогревом в печах или охлаждением в холодильниках и т. п.

Для решения задач теплопроводности должна быть известна начальная температурная функция тела  $T_a(x, y, z, \tau_0)$ .

Граничное условие теплового воздействия на тело может быть также разнообразным. Обычно различают три рода граничных условий:

1) на поверхности тела поддерживается заданное *распределение температур*;

2) на поверхности тела поддерживается заданное *распределение удельных тепловых потоков*;

3) поверхность тела окружает *среда с заданной температурой* и коэффициентом теплоотдачи.

Кроме трех граничных условий теплового воздействия на тело, в современных задачах теплопроводности приходится встречаться еще с другими граничными условиями:

4) поверхность тела подвергается тепловому воздействию контактной теплопроводности другого тела;

5) при тепловом воздействии на поверхность тела осуществляется превращение его массы, и местоположение поверхности перемещается во времени.

Последний случай граничного условия отвечает так называемым фронтовым процессам теплопроводности с превращением массы тела (плавление, затвердевание, выгорание, сублимация и т. д.).

В общем случае граничное условие теплового воздействия на тело можно записать следующим равенством:

$$q_{+n, F, \tau} = q_{-n, F, \tau} \pm \omega_F \rho_{\text{превр}} E_{\text{превр}},$$

где  $q_{+n, F, \tau}$  и  $q_{-n, F, \tau}$  представляют удельные тепловые потоки на границе тела в направлении нормали к поверхности с наружной (+n) и внутренней (-n) стороны;

$\omega_F \rho_{\text{превр}}$  — удельный поток превращаемой массы тела ( $\omega_F$  — скорость перемещения фронта превращения,  $\rho_{\text{превр}}$  — плотность превращаемой массы тела);

$E_{\text{превр}}$  — энергия превращения единичной массы тела.

При отсутствии превращения массы тела поверхность теплового воздействия сохраняется неизменной во времени, и граничное условие определяется равенством:

$$q_{+n, F, \tau} = q_{-n, F, \tau}$$

Для граничного условия контактной теплопроводности это равенство запишется в виде:

$$-\lambda_{+n} \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{+n, F, \tau} = -\lambda_{-n} \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{-n, F, \tau}.$$

Применительно к граничному условию третьего рода для удельного теплового потока на поверхности тела можно записать следующие две формулы:

а) для переноса тепла на границе тела со средой:

$$q_{F, \tau} = \alpha (T_{F, \tau} - T_0), \quad (39,2)$$

где  $\alpha$  — коэффициент теплоотдачи в среде,

$T_{F, \tau}$  и  $T_0$  — температуры тела на поверхности и окружающей среды;

б) для переноса тепла в массе тела на границе:

$$q_{F, \tau} = -\lambda_{-n} \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{-n, F, \tau}, \quad (39,3)$$

где  $\lambda_{-n}$  — коэффициент теплопроводности тела,

$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{-n, F, \tau}$  — проекция градиента температуры на направление нормали к поверхности тела в момент времени  $\tau$ .

Из формул (39,2) и (39,3) для  $q_{F, \tau}$  составляем уравнение граничного условия третьего рода:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial n} \right|_{-n, F, \tau} = -\frac{\alpha}{\lambda} \theta_{F, \tau}, \quad (39,4)$$

где  $\theta_{F, \tau} = T_{F, \tau} - T_0$ ,  $\theta = T(x, y, z, \tau) - T_0$  — соответствующие разности переменной температуры тела и постоянной температуры окружающей среды  $T_0$ .

Это уравнение связывает распределение температур в массе тела с граничным условием теплового воздействия на его поверхность для любого момента времени. Такое граничное условие теплового воздействия на тело в задачах теплопроводности и теплопередачи тел встречается наиболее часто.

#### § 40. Решение дифференциального уравнения теплопроводности

Интегрирование линейного дифференциального уравнения теплопроводности в частных производных второго порядка представляет одну из классических задач математической физики.

Ограничимся здесь кратким изложением наиболее известного метода решения дифференциального уравнения теплопроводности, которое применительно к уравнению граничного условия (39,4) запишем в следующем виде:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \Delta \theta, \quad (40,1)$$

где  $\theta = T(x, y, z, \tau) - T_0$  — разность переменной температуры тела и постоянной температуры окружающей среды.

Как показал Фурье, целесообразно искать частное решение уравнения (40,1) в виде произведения двух функций:

$$\theta(x, y, z, \tau) = \theta(x, y, z) \cdot \theta(\tau). \quad (40,2)$$

Такой прием позволяет привести уравнение (40,1) к уравнению с разделением переменных.

Действительно, подставляя значение  $\theta(x, y, z, \tau)$  в виде (40,2) в (40,1), получаем:

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{\theta'(\tau)}{\theta(\tau)} = \frac{\Delta\theta(x, y, z)}{\theta(x, y, z)}. \quad (40,3)$$

В правой и левой частях этого равенства переменные разделены; при этом правая часть не зависит от времени  $\tau$ , а левая — от местоположения  $(x, y, z)$ . Такой результат возможен только лишь при условии, что обе части равенства (40,3) представляют одну и ту же величину, не зависящую от  $x, y, z$  и  $\tau$ . Выбор этой размерной величины ( $\frac{1}{m^2}$ ) произволен: она может быть положительной и отрицательной, действительной и мнимой.

Обозначая эту произвольную величину  $[-\varepsilon^2]$ , получаем следующие два частных дифференциальных уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \theta'(\tau) + \varepsilon^2 a \theta(\tau) &= 0, \\ \Delta\theta(x, y, z) + \varepsilon^2 \theta(x, y, z) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (40,4)$$

Решением первого обыкновенного дифференциального уравнения служит экспоненциальная функция:

$$\theta(\tau) = C e^{-\varepsilon^2 a \tau}. \quad (40,5)$$

Функция эта вполне удовлетворяет физическому смыслу задачи теплопроводности применительно к нагреванию и охлаждению тел, так как

$$\text{при } \tau \rightarrow \infty \quad e^{-\varepsilon^2 a \tau} \rightarrow 0, \quad \theta(\tau) \rightarrow 0.$$

Второе из уравнений (40,4) в простейшем случае одномерной схемы распространения тепла запишется в виде:

$$\theta''(x) + \varepsilon^2 \theta(x) = 0. \quad (40,6)$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение имеет частные решения в виде функций:  $\sin(\varepsilon x)$  и  $\cos(\varepsilon x)$  (в чем легко убедиться путем двукратного дифференцирования).

Из этих частных решений и решения (40,5) получаем решение дифференциального уравнения нестационарной теплопроводности (40,1) в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \theta(x, \tau) &= A e^{-\varepsilon^2 a \tau} \cos(\varepsilon x), \\ \theta(x, \tau) &= B e^{-\varepsilon^2 a \tau} \sin(\varepsilon x), \end{aligned} \right\} \quad (40,7)$$

где  $\varepsilon^2$  — произвольная размерная величина, которая применительно к задачам нагревания и охлаждения тел должна быть выбрана действительной, положительной;

$A$  и  $B$  — произвольные постоянные величины частных решений дифференциального уравнения теплопроводности, которые можно считать зависящими от произвольно выбираемой величины  $\varepsilon$  [ $A(\varepsilon)$  и  $B(\varepsilon)$ ].

Из этих, а также и других частных решений применительно к известным начальным и граничным условиям конкретных задач теплопроводности и составляется решение (40,1).

*Суммирование любого числа полученных частных решений линейного дифференциального уравнения дает новое его решение.* В этом заключается известный в математике принцип наложения, или суперпозиции.

Предполагая существование бесконечного множества частных решений вида (40,7), решение дифференциального уравнения теплопроводности для одномерного распространения тепла можно представить суммой для всего возможного спектра изменения величины  $\varepsilon$ :

$$\theta(x, \tau) = \sum_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_{\infty}} [A(\varepsilon_i) \cos(\varepsilon_i x) + B(\varepsilon_i) \sin(\varepsilon_i x)] e^{-\varepsilon_i^2 \alpha \tau}. \quad (40,8)$$

Такой результат решения уравнения теплопроводности указывает на возможность описания искомой непрерывной функции, представляющей распределение температур в теле, в виде суммы бесконечного множества членов ряда с тригонометрическими функциями (ряды Фурье). Параметры этих функций  $\varepsilon_i$ ,  $A(\varepsilon_i)$  и  $B(\varepsilon_i)$  следует выбирать так, чтобы удовлетворить известным краевым условиям рассматриваемой задачи.

Если произвольные постоянные  $A(\varepsilon_i)$  и  $B(\varepsilon_i)$ , которые предполагаются зависящими от величины  $\varepsilon_i$ , выбрать так, чтобы до момента теплового воздействия на тело ( $\tau_0$ ) удовлетворить начальному распределению температур в теле, а величину  $\varepsilon$  определить из заданного граничного условия рассматриваемой задачи, то полученное решение дифференциального уравнения теплопроводности оказывается единственным.

Следует заметить, что в связи с дискретным строением тел и ограниченной скоростью перемещения носителей энергии выбор координаты  $x$  и времени  $\tau$  в решении (40,8) ограничен. Координата  $x$  не может быть взята меньше  $\bar{l}$  — длины свободного пробега носителей энергии, а время — меньше  $\tau = \frac{\bar{l}}{c}$  — времени между актами однократного обмена энергией носителей с частицами тела.

Если размеры тела в направлениях  $+x$  и  $-x$  не ограничены, то краевые условия не ограничивают выбор параметрической величины  $\varepsilon_i$  в решении (40,8). Поэтому сумму членов ряда с дискрет-

ными значениями величины  $\varepsilon_i$  можно заменить интегралом в пределах изменения  $\varepsilon_i$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ :

$$\theta(x, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} [A(\varepsilon) \cos(\varepsilon x) + B(\varepsilon) \sin(\varepsilon x)] e^{-\varepsilon^2 a \tau} d\varepsilon. \quad (40,9)$$

С помощью известного из курса математики интеграла Фурье формулу (40,9) можно привести к следующему виду:

$$\theta(x, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \frac{1}{2\sqrt{\pi a \tau}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a\tau}} d\xi, \quad (40,10)$$

где  $f(\xi)$  — заданная начальная температурная функция в объеме тела;

$\frac{1}{2\sqrt{\pi a \tau}} \exp\left[-\frac{(\xi-x)^2}{4a\tau}\right]$  — фундаментальное решение дифференциального уравнения теплопроводности (уравнения параболического типа).

В диффузионном переносе тепла это фундаментальное решение имеет физический смысл в том, что диффузия носителей энергии подчиняется закону случайных процессов. Вероятность перемещения носителя энергии, начавшего движение в момент времени  $\tau=0$  из положения  $\xi=x$ , в момент времени  $\tau$  отвечает этому фундаментальному решению.

Конкретное решение некоторых задач нестационарной теплопроводности тел с применением решений (40,8) и (40,10) будет дано ниже.

## § 41. Определение расхода тепла

При решении задач нестационарной теплопроводности, помимо отыскания распределения температур в теле, необходимо определить расход тепла на нагревание тел или общую теплоотдачу при их охлаждении.

Для этой цели сначала определяется удельный поток тепла в различных местах на поверхности тела:

$$q_{F, \tau} = -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial n} \Big|_{F, \tau} \quad \text{или} \quad q_{F, \tau} = \alpha \theta_{F, \tau} \frac{6t}{M^2}.$$

Затем находится расход тепла за время  $\tau$  для всей площади поверхности тела  $F$ :

$$Q_{\tau} = \int_0^{\tau} d\tau \int_{(F)} q_{F, \tau} dF \quad \text{дж.} \quad (41,1)$$

В некоторых случаях для определения расхода тепла, или теплоотдачи тела, удобнее применить другой способ. Сначала находят изменение тепловой энергии в элементарном объеме тела  $dV$  в любой момент времени:

$$d^2Q = \rho c_V dT(x, y, z, \tau) dV,$$

где  $\rho c_V$  — теплоемкость единичного объема тела,  $\frac{\partial \text{дж}}{\text{м}^3 \text{град}}$ ;

$dT(x, y, z, \tau)$  — изменение температуры в рассматриваемом элементарном объеме.

Затем вычисляется расход тепла для всего объема тела за время  $\tau$ :

$$Q_\tau = \int_{(V)} dV \int_{T(x, y, z, \tau_0)}^{T(x, y, z, \tau)} \rho c_V dT(x, y, z, \tau) \text{ дж}. \quad (41,2)$$

Пользуясь средней теплоемкостью ( $\bar{\rho c_V}$ ), формулу (41,2) можно записать в следующем виде:

$$Q_\tau = \int_{(V)} \bar{\rho c_V} [T(x, y, z, \tau) - T(x, y, z, \tau_0)] dV \text{ дж}. \quad (41,3)$$

Зная распределение температур в теле в начальный момент ( $\tau_0$ ) и в любой последующий ( $\tau$ ), можно вычислить расход тепла за время  $(\tau - \tau_0)$  для тела заданного объема ( $V$ ).

## СТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ И ТЕПЛОПЕРЕДАЧА ТЕЛ

Теплопроводность и теплопередача в различных непрерывно действующих нагревательных и теплообменных аппаратах (котлах, подогревателях, холодильниках и т. п.), ограждающих конструкциях строительных сооружений при длительных неизменных температурах наружной и внутренней среды могут рассматриваться не зависящими от времени. В этих стационарных условиях теплового режима предполагается, что и прежде, начальное, распределение температур, которое существовало в элементах рассматриваемого устройства до установившегося во времени теплового воздействия, настолько потеряло свое значение, что распределение температур в элементах устройства определяется только неизменными во времени граничными условиями стационарной теплопередачи.

### § 42. Теплопроводность и теплопередача плоской стенки

Имеется плоская стенка, толщина которой значительно меньше линейных размеров ее поверхности (рис. 51). Стенка с одной стороны подвергается тепловому воздействию среды с температурой  $T_1$ , а с другой — воздействию среды с температурой  $T_2$ . Требуется найти распределение температур в стенке и определить ее удельную теплопередачу.

Для условий одномерного распространения тепла в стенке с постоянным коэффициентом теплопроводности ( $\lambda$ ) интеграл диф-

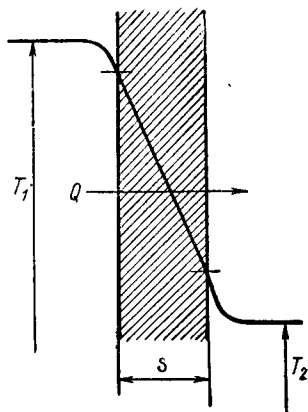


Рис. 51. К определению теплопроводности и теплопередачи плоской стенки

дифференциального уравнения стационарной теплопроводности

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$$

находится в виде прямолинейной функции температуры:

$$T = C_1 x + C_2.$$

Располагая начало координат на одной из поверхностей стенки (рис. 51), находим произвольные постоянные интеграла  $C_1$  и  $C_2$  из условий:

$$\text{при } x=0 \quad T = T' = C_2;$$

$$\text{при } x=s \quad T = T'' = C_1 s + T', \quad C_1 = -\frac{T' - T''}{s}.$$

Для распределения температур в плоской стенке получаем следующее уравнение:

$$T(x) = T' - (T' - T'') \frac{x}{s}. \quad (42,1)$$

Удельная теплопередача стенки определяется формулой:

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx} = \frac{\lambda}{s} (T' - T'') \frac{sm}{m^2}. \quad (42,2)$$

Используя граничные условия

$$q = \alpha_1 (T_1 - T'), \quad (42,3)$$

$$q = \alpha_2 (T'' - T_2) \quad (42,4)$$

и исключая  $T'$  и  $T''$  в формулах (42,2) — (42,4), получаем следующую формулу для определения теплопередачи стенки по заданным  $T_1$  и  $T_2$ :

$$q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{s}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}. \quad (42,5)$$

Числитель полученной формулы теплопередачи стенки представляет собой *температурный перепад* в процессе переноса тепла через стенку, знаменатель — сумму трех *сопротивлений переносу тепла* (термических сопротивлений) от внутренней среды к стенке ( $\frac{1}{\alpha_1}$ ), через стенку ( $\frac{s}{\lambda}$ ) и от стенки к наружной среде ( $\frac{1}{\alpha_2}$ ).

Единицей измерения термического сопротивления является  $\frac{[град]}{вт/м^2}$ ; она представляет собой требуемый перепад температуры  $[град]$  для осуществления единичного потока тепла  $[вт/м^2]$ . Очевидно, чем больше суммарное термическое сопротивление стенки, тем меньше будет ее теплопередача.

На рис. 51 представлено распределение температур в плоской стенке при заданных температурах окружающей среды по обе стороны стенки.



Полученное решение задачи теплопроводности и теплопередачи однослойной плоской стенки можно распространить и на случай многослойной стенки (рис. 52) при условии плотного прилегания отдельных слоев, без заметных дополнительных термических сопротивлений переносу тепла в этих местах.

Обозначая термические сопротивления отдельных слоев  $R_i = \frac{s_i}{\lambda_i}$  для определения теплопроводности плоской стенки имеем следующую формулу:

$$q = \frac{T' - T''}{\sum_1^n R_i}, \quad (42,6)$$

где  $n$  — число слоев стенки;

$\sum_1^n R_i$  — суммарное термическое сопротивление слоев.

Удельная теплопередача многослойной стенки определяется формулой:

$$q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_1^n R_i + \frac{1}{\alpha_2}}, \quad (42,7)$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — коэффициенты теплоотдачи на граничных поверхностях стенки с внутренней и наружной средой.

Так как удельный поток тепла  $q$  одинаков для всех слоев стенки, то соответствующие перепады температур в слоях  $\theta_i = T'_i - T''_i$  находятся из формулы:

$$\theta_i = qR_i, \quad (42,8)$$

где  $R_i$  — термическое сопротивление рассматриваемого слоя.

Перепады температур на границах плоской стенки определяются формулами:

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= T_1 - T'_1 = q \cdot \frac{1}{\alpha_1}, \\ \theta_2 &= T''_n - T_2 = q \cdot \frac{1}{\alpha_2}, \end{aligned} \right\} \quad (42,9)$$

где  $T_1$  и  $T_2$  — температуры окружающих сред;

$T'_1$  и  $T''_n$  — температуры граничных поверхностей стенки.

Таким образом, перепад температур определяется произведением удельного теплового потока на соответствующее термическое сопротивление.

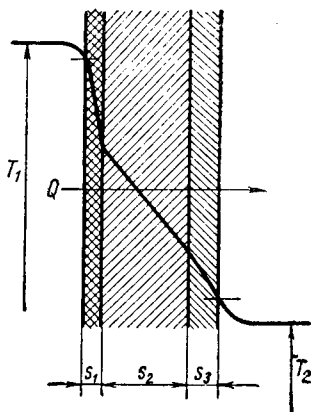


Рис. 52. К определению теплопроводности и теплопередачи многослойной плоской стенки

На рис. 52 представлено распределение температур в трехслойной плоской стенке.

Вводя обозначение в формуле (42,7)

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_1^n R_i + \frac{1}{\alpha_2}}, \quad (42,10)$$

формулу для определения теплопередачи стенки можно записать в более простом виде:

$$q = k (T_1 - T_2), \quad (42,11)$$

где  $k$  называют коэффициентом теплопередачи стенки, который имеет единицу измерения  $вт/м^2град$ , одинаковую с коэффициентом теплоотдачи  $\alpha$ .

В некоторых случаях одно из термических сопротивлений стенки оказывает наибольшее влияние на теплопередачу и все другие по сравнению с ним играют малозаметную роль, например:

$$\frac{1}{\alpha_1} \gg \sum R_i, \quad \frac{1}{\alpha_2};$$

$$\frac{1}{\alpha_2} \gg \sum R_i, \quad \frac{1}{\alpha_1}.$$

В этих случаях коэффициент теплопередачи в основном определяется наибольшим термическим сопротивлением, например:

$$k \approx \alpha_1 \quad \text{или} \quad k \approx \alpha_2.$$

В тех случаях, когда коэффициент теплопроводности однородного материала стенки заметно меняется с температурой  $\lambda(T)$ , теплопередачу стенки с переменным коэффициентом теплопроводности можно находить по обычной формуле, полученной для постоянного коэффициента теплопроводности, введя осредненное значение коэффициента теплопроводности

$$\bar{\lambda} = \frac{\int_{T_1}^{T_2} \lambda(T) dT}{T_1 - T_2}. \quad (42,12)$$

### § 43. Теплопроводность и теплопередача стенок труб

Имеется труба, длина которой значительно больше ее диаметра (рис. 53). Стенка трубы с внутренней стороны подвергается стационарному тепловому воздействию среды с температурой  $T_1$ , а с наружной — среды с температурой  $T_2$ .

Требуется найти распределение температур в стенке трубы и определить ее удельную теплопередачу на единицу длины.

При равномерном подводе и отводе тепла на поверхностях стенки изотермические линии в толще стенки имеют вид концентрических окружностей, а вектор теплового потока направлен по радиусу (рис. 53).

Удельный тепловой поток на единицу длины элементарного цилиндрического слоя стенки трубы определяется формулой:

$$Q_r = -\lambda \frac{dT_r}{dr} 2\pi r.$$

При переносе тепла в элементарном слое температура изменяется так, что каждую последующую температуру можно выразить через предыдущую добавлением линейного члена:

$$T_{r+dr} = T_r + \frac{dT_r}{dr} dr.$$

Соответственно определяется удельный тепловой поток:

$$\begin{aligned} Q_{r+dr} &= -\lambda \frac{dT_{r+dr}}{dr} 2\pi (r+dr) = \\ &= -\lambda \left( \frac{dT_r}{dr} + \frac{d^2T_r}{dr^2} dr \right) \cdot 2\pi (r+dr). \end{aligned}$$

В стационарных условиях переноса тепла и при отсутствии источников тепла в стенке имеем равенство:

$$Q_r = Q_{r+dr}.$$

Подставляя в это равенство значения  $Q_r$  и  $Q_{r+dr}$  и пренебрегая членом с множителем  $(dr)^2$  как бесконечно малой величиной второго порядка, приходим к следующему дифференциальному уравнению стационарной теплопроводности в цилиндрической стенке:

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = 0. \quad (43,1)$$

Это дифференциальное уравнение Лапласа в цилиндрических координатах отвечает осесимметричному потоку тепла в цилиндрической стенке [см. уравнение (38,8)].

Интеграл дифференциального уравнения (43,1) находится в виде логарифмической функции:

$$T = C_1 \ln \frac{r}{r_1} + C_2. \quad (43,2)$$

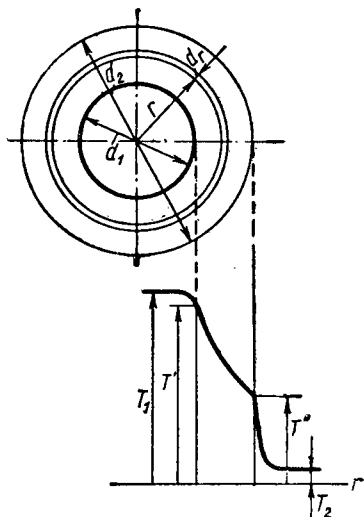


Рис. 53. К определению теплопроводности и теплопередачи стенки трубы

Произвольные постоянные этого интеграла определяются из условий:

$$\text{при } r = r_1 \quad T(r_1) = C_2;$$

$$\text{при } r = r_2 \quad T(r_2) = C_1 \ln \frac{r_2}{r_1} + C_2,$$

откуда находим

$$C_1 = - \frac{T(r_1) - T(r_2)}{\ln \frac{r_2}{r_1}},$$

$$C_2 = T(r_1).$$

Для распределения температур в цилиндрической стенке получаем следующее уравнение:

$$T = T(r_1) - [T(r_1) - T(r_2)] \frac{\ln r/r_1}{\ln r_2/r_1}. \quad (43,3)$$

Удельная теплопередача на единицу длины стенки трубы находится по формуле:

$$Q = -\lambda \frac{dT}{dr} \Big|_{r_1} 2\pi r_1 = 2\pi\lambda \frac{T(r_1) - T(r_2)}{\ln d_2/d_1}, \quad (43,4)$$

где  $d_1$  и  $d_2$  — внутренний и наружный диаметры трубы.

Используя граничные условия

$$Q = \pi d_1 \alpha_1 [T_1 - T(r_1)], \quad (43,5)$$

$$Q = \pi d_2 \alpha_2 [T(r_2) - T_2] \quad (43,6)$$

и исключая неизвестные  $T(r_1)$  и  $T(r_2)$  в формулах (43,4) — (43,6), получаем следующую формулу для определения теплопередачи стенки трубы по заданным  $T_1$  и  $T_2$ :

$$Q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{\pi d_1 \alpha_1} + \frac{1}{2\pi\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\pi d_2 \alpha_2}}. \quad (43,7)$$

Для многослойной стенки трубы аналогично плоской стенке теплопередача определяется формулой:

$$Q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{\pi d_1 \alpha_1} + \sum_1^n R_{\text{тр}} + \frac{1}{\pi d_n \alpha_2}}, \quad (43,8)$$

где  $\sum_1^n R_{\text{тр}} = \frac{1}{2\pi\lambda_1} \ln d_2/d_1 + \frac{1}{2\pi\lambda_2} \ln d_3/d_2 + \dots$  — суммарное тер-

мическое сопротивление всех слоев трубы;

$d_n$  — наружный диаметр последнего слоя.

Температурные перепады в слоях трубы аналогично плоской стенке определяются формулами:

$$\left. \begin{aligned} \theta_i &= T'_i - T''_i = QR_i, \\ \theta_1 &= T_1 - T'_1 = Q \frac{1}{\pi d_1 \alpha_1}, \\ \theta_2 &= T''_n - T_2 = Q \frac{1}{\pi d_2 \alpha_2}. \end{aligned} \right\} \quad (43,9)$$

На рис. 54 представлено распределение температур в стенке трубы.

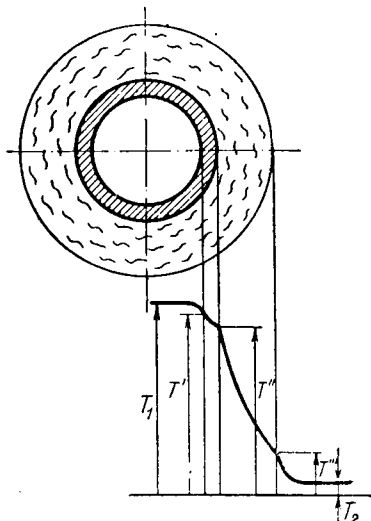


Рис. 54. Распределение температур в стенке многослойной трубы

Анализ теплопередачи труб.

1. Для стенок труб небольшой толщины по сравнению с внутренним диа-

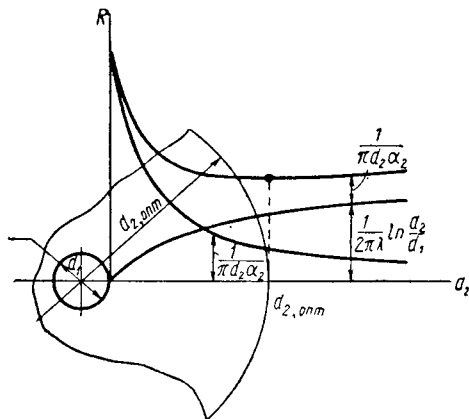


Рис. 55. К определению оптимального термического сопротивления стенки трубы

метром  $\frac{d_2 - d_1}{2} \ll d_1$  расчет теплопередачи можно проводить по формуле плоской стенки, полученной разверткой окружности среднего диаметра цилиндрической стенки:

$$Q \cong \pi \frac{d_2 + d_1}{d_2 - d_1} \lambda [T(r_1) - T(r_2)]. \quad (43,10)$$

По сравнению с точной формулой

$$Q = 2\pi\lambda \frac{T(r_1) - T(r_2)}{\ln d_2/d_1}$$

ошибка составит:

$$\delta Q_{\text{ошиб}} = \frac{Q_{\text{точн}} - Q_{\text{прибл}}}{Q_{\text{точн}}} = 1 - \frac{Q_{\text{прибл}}}{Q_{\text{точн}}} = 1 - 0,5 \frac{\frac{d_2 + 1}{d_1}}{\frac{d_2 - 1}{d_1}} \ln \frac{d_2}{d_1};$$

например, для  $\frac{d_2}{d_1} = 1,5$  ошибка составит всего 1,2%.

Таким образом, для расчета теплопередачи труб с  $\frac{d_2}{d_1} < 1,5$  можно пользоваться приближенной формулой (43,10).

2. Из формулы (43,7) видно, что с увеличением внешнего диаметра трубы  $d_2$  увеличивается термическое сопротивление слоя  $\left(\frac{1}{2\pi\lambda} \ln d_2/d_1\right)$  и уменьшается термическое сопротивление внешнего теплообмена трубы  $\left(\frac{1}{\pi d_2 \alpha_2}\right)$ . Следовательно, существует оптимальный диаметр, при котором суммарное термическое сопротивление оказывается наименьшим, а теплопередача — наибольшей (рис. 55).

Отыскивая экстремальное значение диаметра  $d_2$  из условия

$$\frac{\partial}{\partial d_2} \left( \frac{1}{2\pi\lambda} \ln d_2/d_1 + \frac{1}{\pi d_2 \alpha_2} \right) = \frac{1}{2\pi\lambda} \frac{1}{d_2} - \frac{1}{\pi \alpha_2 d_2^2} = 0,$$

находим:

$$(d_2)_{\text{опт}} = \frac{2\lambda}{\alpha_2}. \quad (43,11)$$

Этот оптимальный внешний диаметр трубы отвечает критерию Био:

$$(Bi)_{\text{опт}} = \frac{\alpha_2 (d_2)_{\text{опт}}}{\lambda} = 2. \quad (43,12)$$

При диаметре труб  $d_2 < (d_2)_{\text{опт}}$  увеличение толщины стенки трубы способствует повышению теплопередачи.

Для стальных труб с  $\lambda = 60$  *вт/м·град* и при  $\alpha_2 = 10 \frac{em}{m^2 \text{град}}$  (что отвечает теплообмену труб в условиях свободного потока воздуха) оптимальный диаметр оказывается очень большим:  $(d_2)_{\text{опт}} \cong 12$  м. При очень интенсивном теплообмене стальных труб с окружающей средой  $\alpha_2 \cong 10^4$  *вт/м<sup>2</sup>град* (что отвечает теплообмену труб в вынужденном потоке воды) оптимальный диаметр оказывается небольшим:  $(d_2)_{\text{опт}} \cong 12$  мм.

Для керамических или стеклянных труб с  $\lambda \cong 1$  *вт/м·град* и  $\alpha_2 \cong 10$  *вт/м<sup>2</sup>град* оптимальный диаметр  $(d_2)_{\text{опт}} \cong 0,2$  м.

Для тепловой изоляции с  $\lambda \cong 0,1$  *вт/м·град*, при  $\alpha_2 \cong 10$  *вт/м<sup>2</sup>град*  $(d_2)_{\text{опт}} \cong 20$  мм. Для диаметров цилиндрических оболочек изоляции меньше  $(d_2)_{\text{опт}}$  тепловая изоляция теряет свою роль, и при увеличении толщины оболочки изоляции теплопередача увеличивается (случай отвечает изоляции электрических проводов).

#### § 44. Теплопроводность и теплопередача сферических слоев

Имеется сферическая стенка (рис. 56), которая подвергается изнутри и снаружи стационарному воздействию среды с температурами  $T_1$  и  $T_2$ . Требуется найти распределение температур в сферической стенке и определить теплопередачу.

При равномерном подводе и отводе тепла на поверхностях сферической стенки изотермические поверхности в толще стенки имеют вид концентрических сфер, и вектор теплового потока направлен по радиусу (рис. 56).

Тепловой поток в элементарном сферическом слое определяется формулой:

$$Q_r = -\lambda \frac{dT_r}{dr} 4\pi r^2.$$

При переносе тепла в элементарном слое температура меняется, и ее изменение можно представить равенством:

$$T_{r+dr} = T_r + \frac{dT_r}{dr} dr.$$

Тепловой поток соответственно определяется формулой:

$$\begin{aligned} Q_{r+dr} &= -\lambda \frac{dT_{r+dr}}{dr} 4\pi (r+dr)^2 = \\ &= -\lambda \left( \frac{dT_r}{dr} + \frac{d^2T_r}{dr^2} dr \right) \times \\ &\quad \times 4\pi (r+dr)^2. \end{aligned}$$

В стационарных условиях переноса тепла и при отсутствии источников тепла имеем равенство:

$$Q_r = Q_{r+dr}.$$

Подставляя в это равенство значения  $Q_r$  и  $Q_{r+dr}$  и пренебрегая членами с множителями  $(dr)^2$  и  $(dr)^3$ , приходим к следующему дифференциальному уравнению стационарной теплопроводности сферического слоя:

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dT}{dr} = 0. \quad (44,1)$$

Это дифференциальное уравнение Лапласа отвечает радиально-симметричному потоку тепла в сферическом слое [см. уравнение (38,9)].

Интеграл дифференциального уравнения (44,1) находится в виде функции

$$T = C_1 \frac{1}{r} + C_2.$$

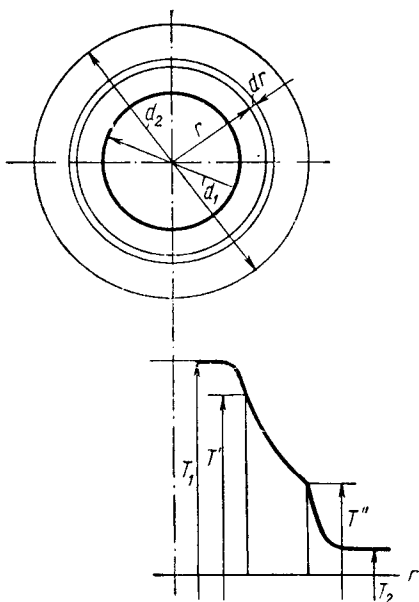


Рис. 56. К определению теплопроводности и теплопередачи сферической оболочки

Произвольные постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определяются из условий:

$$\text{при } r = r_1 \quad T(r_1) = C_1 \frac{1}{r_1} + C_2;$$

$$\text{при } r = r_2 \quad T(r_2) = C_1 \frac{1}{r_2} + C_2,$$

откуда находим:

$$C_1 = \frac{T(r_1) - T(r_2)}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}};$$

$$C_2 = T(r_1) - \frac{T(r_1) - T(r_2)}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \frac{1}{r_1}.$$

Для распределения температур в сферической оболочке получаем уравнение:

$$T(r) = T(r_1) - [T(r_1) - T(r_2)] \frac{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}. \quad (44,2)$$

Теплопередача сферической стенки находится согласно формуле:

$$Q = -\lambda \frac{dT}{dr} \Big|_{r=r_1} \pi d_1^2 = 2\pi\lambda \frac{T(r_1) - T(r_2)}{\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}}. \quad (44,3)$$

В ином виде эта формула запишется:

$$Q = \pi\lambda d_1 d_2 \frac{T(r_1) - T(r_2)}{s}, \quad (44,4)$$

где  $s$  — толщина сферической стенки.

Используя граничные условия

$$Q = \pi d_1^2 \alpha_1 [T_1 - T(r_1)], \quad (44,5)$$

$$Q = \pi d_2^2 \alpha_2 [T(r_2) - T_2] \quad (44,6)$$

и исключая неизвестные  $T(r_1)$  и  $T(r_2)$  в формулах (44,4) — (44,6), получаем следующую формулу для определения теплопередачи сферической стенки по заданным  $T_1$  и  $T_2$ :

$$Q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{\pi d_1^2 \alpha_1} + \frac{1}{2\pi\lambda} \left( \frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) + \frac{1}{\pi d_2^2 \alpha_2}}. \quad (44,7)$$



Соответственно для многослойной сферической стенки

$$Q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{\pi d_1^2 \alpha_1} + \sum_1^n R_{\text{сф}, i} + \frac{1}{\pi d_{n+1}^2 \alpha_2}}, \quad (44,8)$$

где  $\sum_1^n R_{\text{сф}, i} = \frac{1}{2\pi\lambda_1} \left( \frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) + \frac{1}{2\pi\lambda_2} \left( \frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_3} \right) + \dots$  — суммарное термическое сопротивление всех слоев сферической стенки;  $d_{n+1}$  — наружный диаметр последнего слоя.

Температурные перепады в слоях, как и в случаях плоской стенки и стенки трубы, определяются формулами:

$$\left. \begin{aligned} \theta_i &= T'_i - T''_i = QR_i; \\ \theta_1 &= T_1 - T' = Q \frac{1}{\pi d_1^2 \alpha_1}, \\ \theta_2 &= T''_n - T_2 = Q \frac{1}{\pi d_n^2 \alpha_2}. \end{aligned} \right\} \quad (44,9)$$

На рис. 56 представлено распределение температур в сферической стенке.

#### § 45. Теплопроводность и теплопередача полуограниченного массива с одной трубой

Труба диаметром  $d$  и неограниченной длины находится в однородном массиве на глубине  $h$  от его плоской поверхности  $F$ . Труба является источником теплового воздействия на массив. Требуется найти стационарное распределение температур в массиве при заданных температурах на поверхности трубы  $T_{\text{тр}}$  и на плоской поверхности массива  $T_F$ .

Дифференциальное уравнение распределения температур применительно к двумерному потоку тепла в массиве напишется в виде:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0. \quad (45,1)$$

Для решения рассматриваемой задачи удобно воспользоваться «методом источников» и «принципом наложения» для температурных полей. Сущность «принципа наложения» заключается в том, что если температурные поля, возбуждаемые действием тепловых источников, сосредоточенных в теле, описываются линейным дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

и если граничное условие теплообмена на поверхности также описывается линейным уравнением, то температурные поля, создаваемые отдельными источниками, оказываются независимыми друг от друга. При этом результирующее температурное поле, создаваемое от всего множества источников, находится путем сложения температурных полей, возбуждаемых в теле отдельными

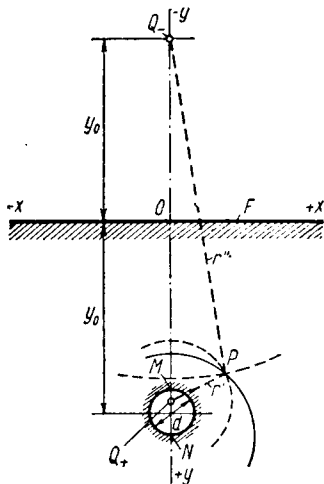


Рис. 57. К расчету теплопередачи трубы в полуограниченном массиве

источниками. Примером возможности применения этого принципа служит сам интеграл дифференциального уравнения теплопроводности формулы (40,9) и (40,10), который также можно рассматривать как результирующее температурное поле в неограниченном массиве, создаваемое от множества источников теплового воздействия в теле.

Представим в неограниченном однородном теле (рис. 57) тепловой источник в виде бесконечно тонкой трубки производительностью  $Q_+$  *вт/м*. Допустим, что на расстоянии  $2y_0$  от этого источника находится такой же производительности сток тепла  $Q_-$ . Линии теплового потока от источника к стоку, очевидно, пройдут через плоскость симметрии  $F$ .

При независимом действии теплового источника и стока в массиве каждый из них создает температурное поле, которое в плоскости поперечного сечения осей трубчатого источника и стока представляется в виде концентрических окружностей. Для любой точки тела, отстоящей на расстояние  $r'$  и  $r''$  от осей трубчатого источника и стока, температурная разность в местах  $r'$ ,  $y_0$  и  $r''$ ,  $y_0$  определяется формулами:

$$\theta(y_0, r') = Q_+ \frac{1}{2\pi\lambda} \ln \frac{y_0}{r'},$$

$$\theta(y_0, r'') = Q_- \frac{1}{2\pi\lambda} \ln \frac{y_0}{r''}.$$

При одновременном действии источника и стока результирующее температурное поле находится сложением частных температурных полей  $\theta(y_0, r')$  и  $\theta(y_0, r'')$ :

$$\theta(y_0, r') + \theta(y_0, r'') = \theta(x, y) = \frac{1}{2\pi\lambda} Q \ln \frac{r''}{r'}. \quad (45,2)$$

Располагая начало координат в точке  $O$  плоскости симметрии (рис. 57), для любой точки в теле имеем:

$$\begin{aligned} r' &= \sqrt{x^2 + (y_0 - y)^2}, \\ r'' &= \sqrt{x^2 + (y_0 + y)^2}, \\ \frac{r''}{r'} &= \sqrt{\frac{x^2 + (y_0 + y)^2}{x^2 + (y_0 - y)^2}}. \end{aligned}$$

Подставляя отношение  $\frac{r''}{r'}$  в (45,2), получаем:

$$\theta(x, y) = \frac{1}{2\pi\lambda} Q \ln \sqrt{\frac{x^2 + (y_0 + y)^2}{x^2 + (y_0 - y)^2}}. \quad (45,3)$$

Это и есть интеграл дифференциального уравнения стационарной теплопроводности (45,1) полубесконечного массива с трубчатым источником тепла производительностью  $Q$  *вт/м*.

Для изотермических линий в массиве имеем следующее уравнение:

$$\frac{x^2 + (y_0 + y)^2}{x^2 + (y_0 - y)^2} = e^{\frac{4\pi\lambda}{Q} \theta(x, y)}. \quad (45,4)$$

Для заданной производительности источника тепла  $Q$  и выбранной разности температур  $\theta_i(x, y)$  это уравнение с переменными  $x, y$  описывает окружность, центр которой отстоит от начала координат  $(y_0)$  тем дальше, чем меньше разность температур  $\theta_i(x, y)$ . Таким образом, для различных  $\theta(x, y)$  при заданном  $Q$  получаем семейство окружностей, представляющих температурное поле в массиве (рис. 58). Центры окружностей сдвинуты в глубину массива.

Если выделить одну из окружностей изотермических линий с диаметром, равным диаметру трубы  $d$ , то из уравнения (45,2) можно определить тепловой поток  $Q$ .

Предварительно определим отношение  $\frac{r''}{r'}$ , выразив его через диаметр трубы и глубину ее заложения в массиве. Для двух точек  $M$  и  $N$ , взятых на пересечении линии, соединяющей источник и сток с окружностью трубы (рис. 57), справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} \frac{r''(M)}{r'(M)} = \frac{r''(N)}{r'(N)} = \frac{r''(M) + d}{d - r'(M)}, \\ r''(M) - r'(M) = 2h - d. \end{aligned}$$

Решая эти уравнения совместно, после преобразований находим:

$$\frac{r''(M)}{r'(M)} = \frac{2h}{d} + \sqrt{\left(\frac{2h}{d}\right)^2 - 1}.$$

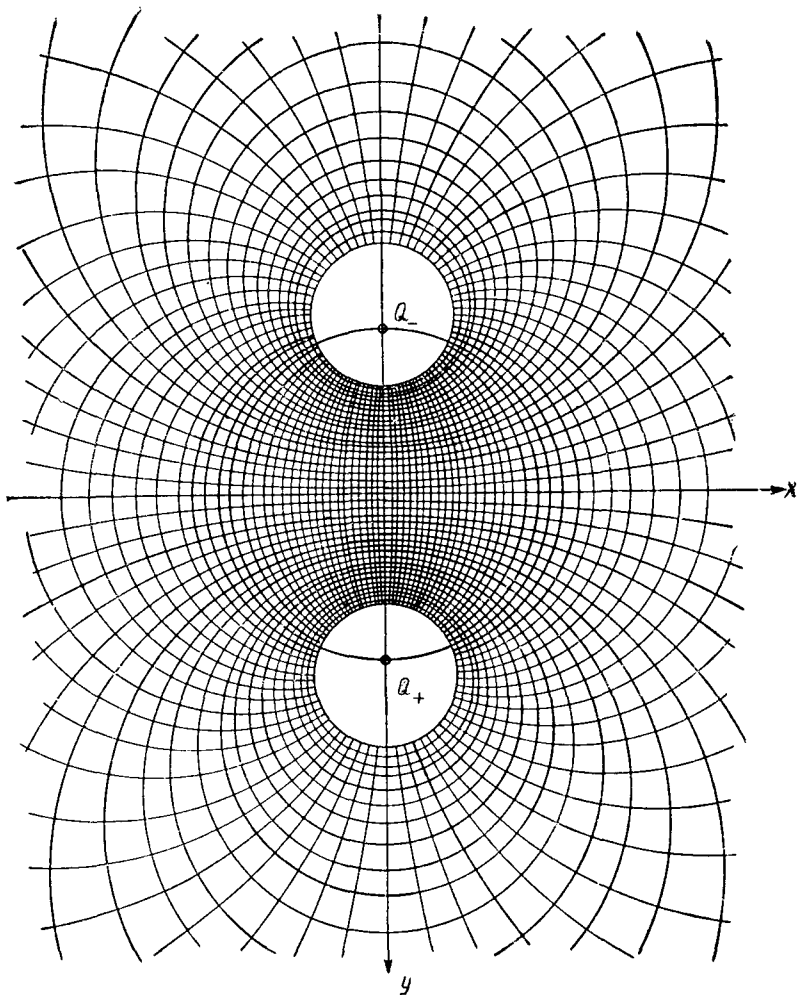


Рис. 58. Изотермические линии и линии тока у источника и стока тепла в массиве

Подставляя найденное отношение  $\frac{r''(M)}{r'(M)}$  в (45,2) и имея в виду, что  $\theta(x, y) = T_{\text{ТР}} - T_F$ , получаем:

$$Q = \frac{T_{\text{ТР}} - T_F}{\frac{1}{2\pi\lambda} \ln \left[ \frac{2h}{d} + \sqrt{\left(\frac{2h}{d}\right)^2 - 1} \right]} . \quad (45,5)$$

Эта формула применяется для расчета теплопередачи труб в грунте. При  $\left(\frac{2h}{d}\right)^2 \gg 1$ , формула (45,5) упрощается и переходит в следующую:

$$Q = \frac{T_{\text{ТР}} - T_F}{\frac{1}{2\pi\lambda} \ln \frac{4h}{d}} . \quad (45,6)$$

Можно заметить, что массив, окружающий трубу, оказывается равновеликим по термическому сопротивлению цилиндрической стенке с наружным диаметром  $d_{\text{ЭКВ}} = 4h$ .

Принятое условие одинаковой температуры во всех местах плоской поверхности массива  $F$  может быть достигнуто лишь при достаточно больших коэффициентах теплоотдачи окружающей среды с неизменной и одинаковой во всех местах температурой. Только при этом условии перепад температуры на поверхности массива и в окружающей среде оказывается достаточно мал:

$$\theta_F = T_F - T_0 = q_F \cdot \frac{1}{\alpha_F} .$$

Удельный тепловой поток на поверхности массива различен и имеет наибольшую величину в нормальном направлении к поверхности массива от оси трубы.

При ограниченном коэффициенте теплоотдачи  $\alpha_F$  температура на поверхности массива распределяется неравномерно. Наибольшая температура достигается в месте наибольшего удельного теплового потока, т. е. в месте кратчайшего пути переноса тепла (в точке  $O$ , рис. 57).

Приблизительно теплопередачу трубы можно определить и в том случае, если задается температура окружающей среды ( $T_0$ ) и известен одинаковый во всех местах поверхности массива коэффициент теплоотдачи ( $\alpha$ ). Для этой цели можно ввести такую эквивалентную толщину слоя массива, которая условно заменит внешнее термическое сопротивление:

$$\frac{s_{\text{ЭКВ}}}{\lambda} = \frac{1}{\alpha_F}$$

где  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности массива.

Вводя условный дополнительный слой массива  $s_{\text{ЭКВ}} = \frac{\lambda}{\alpha_F}$  в глубину заложения трубы

$$h_{\text{ЭКВ}} = h + \frac{\lambda}{\alpha_F}, \quad (45,7)$$

теплопередачу трубы  $Q$  можно определить по формуле (45,5) или (45,6).

Расчет температурного поля в массиве от стационарной теплопередачи трубы можно проводить по формуле:

$$\frac{T(x, y) - T_0}{T_{\text{ТР}} - T_0} = \frac{\ln \frac{x^2 + \left(y + \sqrt{h^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}\right)^2}{x^2 + \left(y - \sqrt{h^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}\right)^2}}{2 \ln \left[ \frac{2h}{d} + \sqrt{\left(\frac{2h}{d}\right)^2 - 1} \right]}. \quad (45,8)$$

В некоторых случаях массив оказывается неоднородным, например при передаче тепла от трубы, находящейся во влажном и мерзлом грунте. Расчет теплопередачи труб в таком грунте приходится проводить приближенно, с учетом изменения коэффициента теплопроводности от влажности и температуры. Помимо температурного поля, создаваемого тепловым потоком от нагретой трубы, в грунте существуют еще температурные поля от суточного и годичного теплового воздействия окружающей среды, а также от теплового потока нагретых внутренних масс.

#### ✓ § 46. Теплопроводность и теплопередача ряда труб в массиве

В некоторых технических устройствах встречается необходимость расчета теплопередачи ряда труб, находящихся в массиве, например при расчете массивных отопительных приборов лучистого отопления.

Ряд параллельно расположенных труб диаметром  $d$ , с расстоянием между осями  $s$ , погружен в однородный массив на глубину  $h$  от плоской поверхности массива  $F$  (рис. 59). Температура труб  $T_{\text{ТР}}$  и температура поверхности массива поддерживаются неизменными во времени и одинаковыми во всех местах. Требуется определить теплопередачу труб в массиве.

Для решения задачи применим рассмотренные выше «метод источников» и «принцип наложения». Предполагая внутри труб стационарные тепловые источники производительностью  $Q_+$ , поместим симметрично плоской поверхности  $F$  тепловые стоки такой же производительности (рис. 59). Согласно (45,2), для любой точки окружности трубы можно написать ряд температурных разностей относительно всех независимо действующих пар источ-

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= Q \frac{1}{2\pi\lambda} \ln \frac{r_1''}{r_1'} , \\ \theta_2 &= Q \frac{1}{2\pi\lambda} \ln \frac{r_2''}{r_2'} , \\ \theta_3 &= Q \frac{1}{2\pi\lambda} \ln \frac{r_3''}{r_3'} , \end{aligned} \right\} \quad (46,1)$$

где  $r_1', r_2', r_3', r_1'', r_2'', r_3''$  — расстояния от рассматриваемой точки трубы  $P$  (рис. 59) до отдельных источников и стоков.

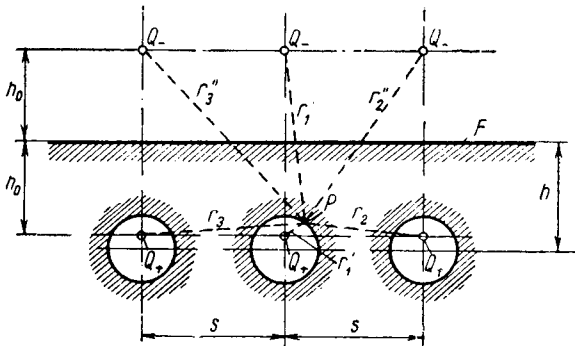


Рис. 59. К расчету теплопередачи ряда труб в полуграниченном массиве

При одновременном действии всех источников и стоков общую температурную разность в любой точке трубы можно найти суммированием:

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \dots = \theta(x, y) = Q \frac{1}{2\pi\lambda} \left( \ln \frac{r_1''}{r_1'} + \ln \frac{r_2''}{r_2'} + \ln \frac{r_3''}{r_3'} + \dots \right).$$

Откуда находим термическое сопротивление трубы в массиве:

$$R = \frac{1}{2\pi\lambda} \ln \left( \frac{r_1''}{r_1'} \cdot \frac{r_2''}{r_2'} \cdot \frac{r_3''}{r_3'} \dots \right).$$

При достаточно больших  $h/d$  и  $s/d$  приближенно можно принять изотермическую линию теплового потока от источника в виде окружности, совпадающей с окружностью трубы. Находя по известным  $h$  и  $s$  отношение расстояний до каждой пары источников и стоков, получаем следующую формулу для определения термического сопротивления массива, окружающего трубу:

$$R = \frac{1}{2\pi\lambda} \ln \left\{ 4 \frac{h}{d} \left[ 1 + \left( 2 \frac{h}{s} \right)^2 \right] \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( 2 \frac{h}{s} \right)^2 \right] \times \right. \\ \left. \times \left[ 1 + \frac{1}{9} \left( 2 \frac{h}{s} \right)^2 \right] \dots \right\}. \quad (46,2)$$

Первый множитель произведения под знаком логарифма ( $4 \frac{h}{d}$ ) соответствует термическому сопротивлению массива при наличии в нем одной трубы; каждый последующий множитель соответствует повышению термического сопротивления массива от присутствия симметрично расположенных двух других труб.

Пользуясь разложением в ряд известной функции гиперболического синуса, формулу (46,2) можно записать в виде:

$$R = \frac{1}{2\pi\lambda} \ln \left[ \frac{2}{\pi} \frac{s}{d} \operatorname{Sh} \left( 2\pi \frac{h/d}{s/d} \right) \right]. \quad (46,3)$$

На рис. 60 представлено термическое сопротивление массива с рядом находящихся в нем труб, вычисленное по формуле (46,3) при  $\lambda=1 \text{ вт/м град}$  и при различных отношениях  $s/d$  и  $h/d$ .

Термическое сопротивление массива увеличивается с глубиной заложения труб ( $h/d$ ) и уменьшается с увеличением расстояния между трубами ( $s/d$ ).

Теплопередачу одной из ряда труб в массиве можно приближенно определить и в том случае, если задается температура окружающей среды ( $T_0$ ) и известен коэффициент теплоотдачи на поверхности ( $\alpha_F$ ). Для этой цели достаточно ввести эквивалентную толщину слоя массива, равновеликую по термическому сопротивлению внешней теплоотдаче:

$$s_{\text{эКВ}} = \frac{\lambda}{\alpha_F},$$

где  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности массива.

Вводя такой условный дополнительный эквивалентный слой массива для глубины заложения трубы

$$h_{\text{эКВ}} = h + \frac{\lambda}{\alpha_F},$$

по формуле

$$Q = \frac{T_{\text{ТР}} - T_0}{\frac{1}{2\pi\lambda} \ln \left[ \frac{2}{\pi} \frac{s}{d} \operatorname{Sh} \frac{h/d}{s/d} \right]} \frac{\text{вт}}{\text{м}} \quad (46,4)$$

находим теплопередачу трубы.

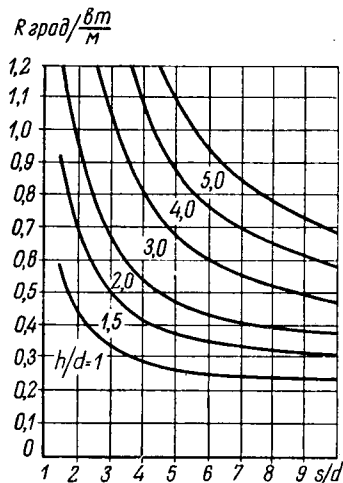


Рис. 60. Термическое сопротивление полуограниченного массива для передачи тепла от одной из ряда труб, находящихся в массиве

температура окружающей среды ( $T_0$ ) и известен коэффициент теплоотдачи на поверхности ( $\alpha_F$ ). Для этой цели достаточно ввести эквивалентную толщину слоя массива, равновеликую по термическому сопротивлению внешней теплоотдаче:



Величина среднего удельного потока тепла на плоской поверхности массива определяется формулой:

$$\bar{q}_F = \frac{Q}{s} \frac{вт}{м^2}. \quad (46,5)$$

Средняя температура поверхности массива находится из равенства:

$$\bar{T}_F = T_0 + \bar{q}_F \cdot \frac{1}{\alpha_F}. \quad (46,6)$$

На рис. 61 представлены результаты измерения температурного поля в массиве относительно трубы, находящейся между дву-

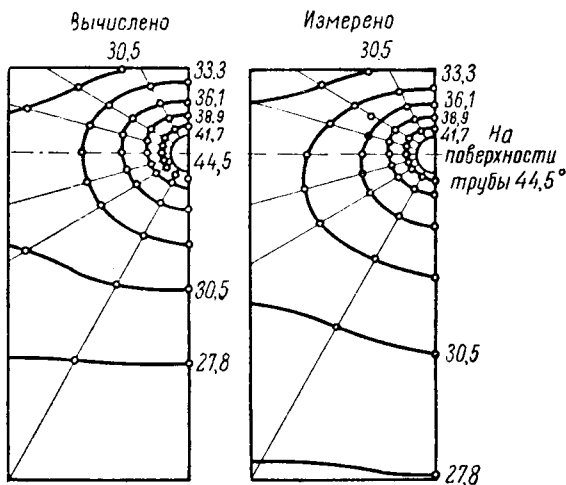


Рис. 61. Вычисленное и измеренное температурное поле при распространении тепла в массиве с нагреваемыми трубами

мя другими, такими же трубами в ряду ( $d=16$  мм,  $h=32$ ,  $s=152$  мм,  $s/d=9,5$ ;  $h/d=2$ ). На том же рис. 61 для сравнения представлено температурное поле, вычисленное по формуле распределения температур для трех труб в массиве:

$$\frac{T(x, y) - T_0}{T_{тр} - T_0} = \frac{\ln \left[ \frac{x^2 + (y_0 + y)^2}{x^2 + (y_0 - y)^2} \cdot \frac{(x-s)^2 + (y_0 + y)^2}{(x-s)^2 + (y_0 - y)^2} \cdot \frac{(x+s)^2 + (y_0 + y)^2}{(x+s)^2 + (y_0 - y)^2} \right]}{2 \ln \left\{ 4 \frac{h}{d} \left[ 1 + \left( 2 \frac{h/d}{s/d} \right)^2 \right] \right\}}.$$

## § 47. Теплопроводность и теплопередача стержня

К основанию стержня, имеющего постоянное поперечное сечение и изготовленного из однородного материала, подводится тепло так, что температура во всех местах начального сечения

одинакова:  $T_a$  (рис. 62). Стержень находится в среде также с неизменной температурой  $T_0$ . Допуская постоянство коэффициента теплопроводности материала стержня и коэффициента теплоотдачи для всей его поверхности, требуется найти распределение температур по длине стержня и определить его теплопередачу.

Решение задачи значительно упрощается, если не учитывать изменения температуры по сечению стержня, т. е. пользоваться схемой одномерного потока тепла. Это допущение будет тем ближе к действительности, чем меньше критерий Био для стержня

( $Bi \equiv \frac{\alpha \delta}{\lambda} \ll 1$ ;  $\alpha$  — коэффициент теплоотдачи с поверхности стержня в окружающую среду;  $\delta$  — толщина стержня;  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности материала стержня).

Критерий Био представляет собой отношение величин  $\frac{\alpha}{\lambda/\delta}$ , характеризующих интенсивность теплоотвода с поверхности стержня в окружающую среду по сравнению с интенсивностью притока тепла к поверхности стержня из его массы. Чем меньше критерий  $Bi$ , тем меньше будет отвод тепла с поверхности

охлаждаемого тела по сравнению с возможным притоком тепла изнутри. В связи с этим для  $Bi \ll 1$  в решении задачи теплопроводности стержня приближенно можно считать градиент температуры в поперечном сечении стержня достаточно малым по сравнению с градиентом температуры по оси стержня. При этом условии решение уравнения теплопроводности стержня сводится к задаче с одномерным потоком тепла.

Выделив элементарный слой толщиной  $dx$ , можно записать уравнение баланса тепла в этом слое стержня. Тепловой поток в элементарном слое в стационарных условиях изменяется за счет теплоотдачи с наружной поверхности:

$$Q_x = Q_{x+dx} + dQ_x$$

или

$$f\lambda \frac{d^2\theta}{dx^2} dx = u dx \cdot \alpha\theta,$$

где  $\theta = T(x) - T_0$  — разность температур стержня и окружающей среды.

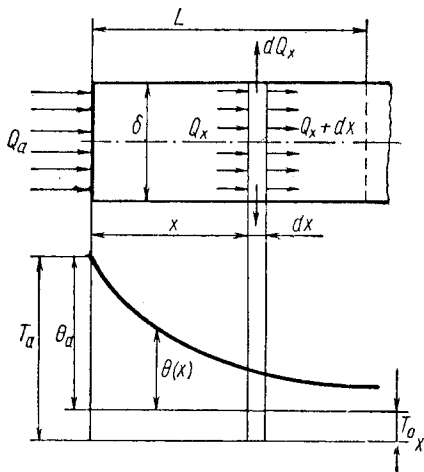


Рис. 62. К определению теплопроводности и теплопередачи стержня

Таким образом, приходим к следующему дифференциальному уравнению теплопроводности стержня:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0, \quad (47,1)$$

где  $m^2 = \frac{\alpha u}{\lambda f} \frac{1}{m^2}$  — размерный параметр уравнения.

Интеграл этого дифференциального уравнения находится в виде:

$$\theta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}. \quad (47,2)$$

**Стержень неограниченной длины**  $\left(\frac{L}{d_{\text{ЭКВ}}} \gg 1\right)$ . Из граничного условия при  $x \rightarrow \infty$   $\theta \rightarrow 0$  необходимо допустить  $C_1 = 0$ .

В начальном сечении стержня при  $x = 0$   $\theta(x) = \theta_a$ . Поэтому

$$C_2 = \theta_a.$$

Таким образом, для распределения температур в стержне получаем уравнение:

$$\theta(x) = \theta_a e^{-mx}. \quad (47,3)$$

Теплопередача стержня находится согласно формуле:

$$Q_a = -f\lambda \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=0} = \lambda m f \theta_a. \quad (47,4)$$

Теплопередача неограниченного стержня будет тем больше, чем выше начальная разность температур  $\theta_a$ , чем больше коэффициент теплопроводности стержня, параметр  $m$  и сечение  $f$  стержня.

На рис. 63 представлена безразмерная температура  $\frac{\theta(x)}{\theta_a}$  в зависимости от относительной длины стержня  $\frac{x}{d_{\text{ЭКВ}}}$  для различных критериев  $Bi \equiv \frac{\alpha d_{\text{ЭКВ}}}{\lambda}$ . При этом эквивалентный диаметр стержня определяется по формуле  $d_{\text{ЭКВ}} = \frac{4f}{u}$ , и безразмерное произведение  $mx$  получается равным:

$$mx = 2 \sqrt{Bi} \frac{x}{d_{\text{ЭКВ}}}.$$

**Стержень конечной длины.** Для стержня конечной длины (рис. 62) из граничных условий находим:

$$\text{при } x = 0 \quad \theta(x) = \theta_a = C_1 + C_2. \quad (47,5)$$

При  $x = L$  имеем уравнение граничного условия третьего рода:

$$\left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=L} = -\frac{\alpha}{\lambda} \theta_L.$$

Путем подстановки и дифференцирования получаем равенство:

$$C_2 e^{-mL} - C_1 e^{+mL} = \frac{\alpha}{\lambda m} (C_1 e^{+mL} + C_2 e^{-mL}). \quad (47,6)$$

Так как величина  $\frac{\alpha}{\lambda m} = \frac{1}{2} \sqrt{Bi}$ , то, согласно принятому выше

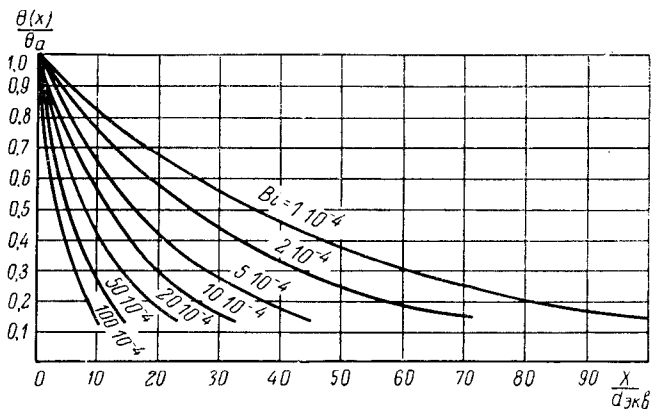


Рис. 63. К расчету теплопередачи стержня (безразмерная температура  $\frac{\theta(x)}{\theta_a}$  в зависимости от относительной длины стержня  $\frac{x}{d_{\text{экв}}}$  для различных критериев  $Bi \equiv \frac{\alpha d_{\text{экв}}}{\lambda}$ ).

условию  $Bi \ll 1$ , получаем следующее приближенное равенство:

$$C_1 e^{+mL} \approx C_2 e^{-mL}. \quad (47,7)$$

Путем совместного решения уравнений (47,5) и (47,7) находим произвольные постоянные интеграла:

$$C_1 = \frac{\theta_a}{1 + e^{+mL}}, \quad C_2 = \frac{\theta_a}{1 + e^{-mL}}.$$

Таким образом, для распределения температур в ограниченном стержне получаем следующее уравнение:

$$\theta(x) = \theta_a \frac{e^{+m(L-x)} + e^{-m(L-x)}}{e^{+mL} + e^{-mL}}. \quad (47,8)$$

Имея в виду, что

$$\frac{e^{+mL} + e^{-mL}}{2} = \text{ch}(mL) \quad \text{и} \quad \frac{e^{+m(L-x)} + e^{-m(L-x)}}{2} = \text{ch}[m(L-x)],$$

получаем:

$$\theta(x) = \theta_a \frac{\text{ch}[m(L-x)]}{\text{ch}(mL)}. \quad (47,9)$$

Для температуры на конце стержня при  $x = L$  имеем:

$$\theta_L = \theta_a \frac{1}{\operatorname{ch}(mL)}. \quad (47,10)$$

Теплопередача стержня ограниченной длины определяется формулой:

$$Q_a = -f\lambda \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=0} = f\lambda m \theta_a \operatorname{th}(mL). \quad (47,11)$$

Результат решения задачи о распространении тепла в стержне находит практическое применение в расчетах теплопередачи

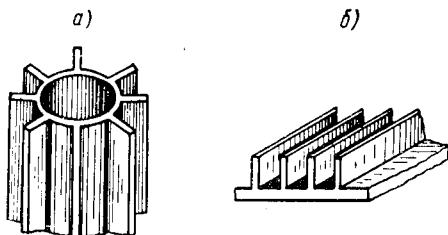


Рис. 64. Ребристая труба (а) и ребристая стенка (б)

призматических ребер. Путем устройства ребер на поверхностях нагрева тел можно значительно увеличить их теплопередачу (рис. 64).

Расчет теплопередачи стержней и ребер нужно рассматривать как приближенный. В действительности коэффициент теплоотдачи  $\alpha$  меняется по мере перехода от «горячих» к «холодным» местам стержня или ребер. Помимо этого, толщина ребер может меняться, как, например, у чугунных ребер, полученных отливкой в формах.

Задача о распространении тепла в стержне может быть решена и при любых значениях критерия теплообмена  $Bi = \alpha \frac{d_{\text{экв}}}{\lambda} \leq 1$ , когда приходится учитывать изменение температуры по сечению. Такое решение необходимо, например, при расчете теплопередачи толстых ребер, выполненных из материала с небольшим коэффициентом теплопроводности. Результат решения этой задачи приводится как частный случай решения другой, более сложной задачи в § 70.

#### § 48. Теплопроводность и теплопередача концентрических ребер

Рассмотрим концентрическое ребро из однородного материала (рис. 65). К основанию ребра подводится тепло так, что температура во всех местах основания поддерживается неизменной и рав-

ной  $T_a$ . Ребро находится в окружении среды также с неизменной температурой  $T_0$ . Допуская одинаковый коэффициент теплоотдачи для всех мест поверхности ребра, требуется найти распределение температур в ребре и определить его теплопередачу.

Если не учитывать изменения температуры по толщине ребра, то дифференциальное уравнение распространения тепла в цилин-

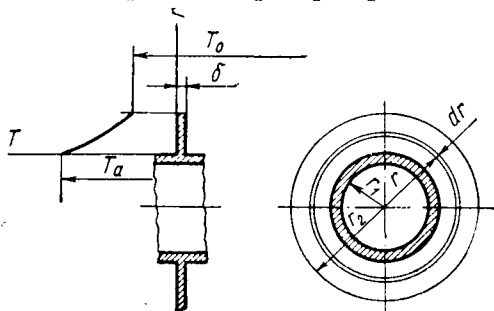


Рис. 65. К определению теплопроводности концентрических ребер

дрической шайбе, на основании баланса тепла в элементарном слое в соответствии с уравнениями (43,1) и (47,1), можно написать в следующем виде:

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} - m^2\theta = 0, \quad (48,1)$$

где  $m^2 = \frac{\alpha u}{\lambda f}$  — размерный параметр  $\left(\frac{1}{\text{м}^2}\right)$  (для тонких ребер  $m^2 \approx \frac{2\alpha}{\lambda\delta}$ , где  $\delta$  — толщина ребра).

Вводя новую безразмерную переменную  $\xi = imr$  с мнимым множителем  $i = \sqrt{-1}$ , дифференциальное уравнение (48,1) можно записать в ином виде:

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d\theta}{d\xi} + \theta = 0. \quad (48,2)$$

Это — дифференциальное уравнение Бесселя с нулевым безразмерным параметром. Решение его можно представить в цилиндрических функциях нулевого порядка, представляемых бесконечными рядами с мнимым аргументом ( $imr$ ):

$$\theta = C_1 J_0(imr) + C_2 i H_0(imr), \quad (48,3)$$

где  $J_0(imr)$  — функция Бесселя первого рода нулевого порядка с мнимым аргументом;  $iH_0(imr)$  — функция Ганкеля с мнимым аргументом.

Свойства этих функций таковы, что

$$\text{при } r=0 \quad J_0(imr) = 1, \quad iH_0(imr) \rightarrow \infty;$$

$$\text{при } r \rightarrow \infty \quad J_0(imr) \rightarrow 0, \quad iH_0(imr) \rightarrow \infty.$$

Числовое значение обеих функций для различных значений действительного множителя  $x = mr$  мнимого аргумента  $ix$  находится в математических справочниках специальных функций.

Произвольные постоянные  $C_1$  и  $C_2$  уравнения (48,3) определяются из граничных условий задачи при  $r = r_1$  и  $r = r_2$ .

Привлечение граничных условий к решению (48,3) приводит к формуле распределения температур в концентрическом ребре:

$$\theta(r) = \theta_a \frac{J_0(ix) H_1(ix_2) + iH_0(ix) iJ_1(ix_2)}{J_0(ix_1) H_1(ix_2) + iH_0(ix_1) iJ_1(ix_2)}, \quad (48,4)$$

где  $\theta = T_a - T_0$  — разность температур в основании ребра и окружающей среды;

$x = mr$ ,  $x_1 = mr_1$ ,  $x_2 = mr_2$  — безразмерные аргументы ребра;  
 $J_0(ix)$  и  $iJ_1(ix)$  — функции Бесселя нулевого и первого порядка;  
 $iH_0(ix)$  и  $H_1(ix)$  — функции Ганкеля нулевого и первого порядка.

Теплопередача ребра вычисляется согласно формуле:

$$Q_a = -2\pi r_1 \delta \lambda \left. \frac{d\theta}{dr} \right|_{r=r_1} = 2\pi r_1 \lambda m \delta \theta_a \frac{iJ_1(ix_1) H_1(ix_2) - H_1(ix_1) iJ_1(ix_2)}{J_0(ix_1) H_1(ix_2) + iH_0(ix_1) iJ_1(ix_2)}. \quad (48,5)$$

§ Все сказанное в § 47 настоящей главы о приближенности расчета теплопередачи ребер призматической формы относится также и к расчету теплопередачи концентрических ребер.

Задачу о распространении тепла в призматических и концентрических ребрах можно решить и для других профилей ребер (конических, параболических и др.), а также ребер с оптимальным расходом металла. Эти задачи рассматриваются в специальных курсах теплопроводности [64].

## § 49. Теплопроводность и теплопередача массива с плоской поверхностью

Плоская поверхность  $F$  массива на площади прямоугольной формы с размерами  $2a \times 2b$  (рис. 66) ограничена стенками и поддерживается в нагретом состоянии при неизменной и равномерно распределенной по поверхности температуре  $T'_F$ . Вне этой площади неограниченная плоская поверхность массива поддерживается при неизменной и также одинаковой во всех местах температуре  $T''_F < T'_F$ .

Считая массив однородным, требуется определить теплопередачу нагретой поверхности при распространении тепла в массиве.

Для решения поставленной задачи можно воспользоваться способом сложения тепловых потоков. Для этого рассмотрим сначала линии тепловых потоков в массиве, разделенном на своей плоской поверхности перегородкой неограниченной длины (рис. 66).

По одну сторону перегородки вся поверхность массива имеет заданную температуру  $T'_F$ , а по другую —  $T''_F$ . Вследствие симметрии линии тепловых потоков в массиве от поверхности с температурой  $T'_F$  к поверхности с температурой  $T''_F$  представляется в виде окружностей с центром в точке  $O_1$  (рис. 66). Изотермические линии при этом представляется в виде пучка лучей, исходящих из точки  $O_1$ .

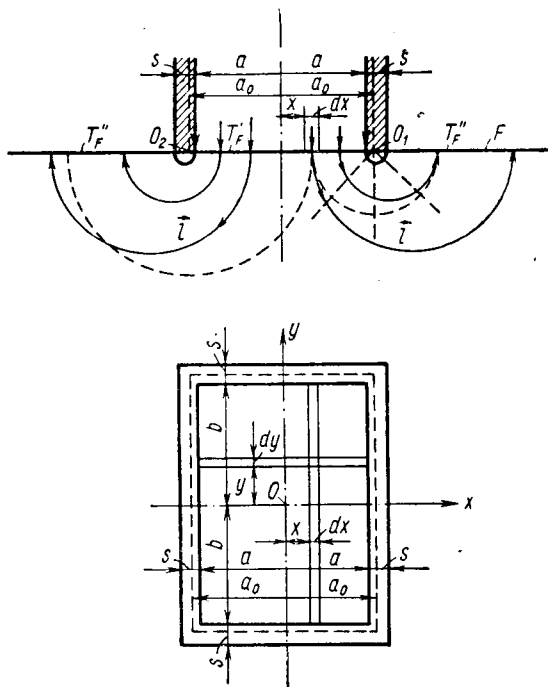


Рис. 66. К определению теплопроводности массива с плоской поверхностью при подводе тепла на ограниченной площади массива

Элементарный тепловой поток от полосы  $dx$ , взятой на нагретой поверхности массива на расстоянии  $(a_0 - x)$  от перегородки, для единичной длины полосы определяется формулой:

$$dQ_{x, O_1} = \lambda \frac{\theta_F}{\pi (a_0 - x)} dx \frac{6m}{m},$$

где  $\theta_F = T'_F - T''_F$  — разность температур поверхности массива по обе стороны перегородки;

$\lambda$  — коэффициент теплопроводности массива.

Если на нагретой поверхности массива перегородку поместить также и в точку  $O_2$ , отстоящую от точки  $O_1$  на расстоянии  $2a_0$ ,



то для элементарного теплового потока от полосы  $dx$  единичной длины относительно точки  $O_2$  можно записать формулу:

$$dQ_{x, O_2} = \lambda \frac{\theta_F}{\pi (a_0 + x)} dx \frac{em}{m}.$$

При наличии двух перегородок, ограничивающих нагретую поверхность массива, тепловой поток для полосы  $dx$  единичной длины находится сложением элементарных потоков тепла по обе стороны перегородок:

$$dQ_x = dQ_{x, O_1} + dQ_{x, O_2} = \lambda \theta_F \frac{1}{\pi} \frac{2a_0}{a_0^2 - x^2} dx \frac{em}{m}.$$

Удельный тепловой поток для единичной площади элементарной полосы находится в виде:

$$q_x = \frac{dQ_x}{dx} = \lambda \theta_F \frac{1}{\pi} \frac{2a_0}{a_0^2 - x^2} \frac{em}{m^2}.$$

Если полоса массива шириной  $2a$  будет ограничена на расстоянии  $2b$  двумя перегородками, расположенными перпендикулярно двум первым, то суммарный элементарный тепловой поток для полосы  $dy$  в направлении  $y$  определяется формулой:

$$dQ_y = \lambda \theta_F \frac{1}{\pi} \frac{2b_0}{b_0^2 - y^2} dy \frac{em}{m}.$$

Удельный тепловой поток для единичной площадки соответственно находится в виде:

$$q_y = \frac{dQ_y}{dy} = \lambda \theta_F \frac{1}{\pi} \frac{2b_0}{b_0^2 - y^2} \frac{em}{m^2}.$$

Удельную теплопередачу единичной площадки нагретой поверхности массива, ограниченной со всех четырех сторон, в первом приближении можно определить сложением удельных тепловых потоков  $q_x$  и  $q_y$ , в результате чего находим:

$$q_{x, y} = \lambda \theta_F \frac{1}{\pi} \left( \frac{2a_0}{a_0^2 - x^2} + \frac{2b_0}{b_0^2 - y^2} \right) \frac{em}{m^2}. \quad (49,1)$$

Общая теплопередача нагретой поверхности массива площадью  $2a \times 2b$  с учетом толщины ограничивающих стенок находится интегрированием:

$$\begin{aligned} Q_F &= 2 \int_0^a dQ_x 2b + 2 \int_0^b dQ_y 2a = \\ &= \frac{4}{\pi} \lambda \theta_F \left[ 2a_0 b \int_0^a \frac{dx}{a_0^2 - x^2} + 2b_0 a \int_0^b \frac{dy}{b_0^2 - y^2} \right] = \\ &= \frac{4}{\pi} \lambda \theta_F \left( b \ln \frac{a_0 + a}{a_0 - a} + a \ln \frac{b_0 + b}{b_0 - b} \right) em. \end{aligned} \quad (49,2)$$

Для достаточно малой толщины стенок по сравнению с размерами помещения  $s \ll 2a$  и  $s \ll 2b$  без заметной погрешности можно допустить, что точки  $O_1$  и  $O_2$  (рис. 66) находятся в середине толщины стенок, ограничивающих нагретую площадь массива  $F$ :

$$a_0 \approx a + s/2,$$

$$b_0 \approx b + s/2.$$

В связи с этим формулы (49,1) и (49,2) запишутся в виде:

$$q_{x, y} = \lambda \theta_F \frac{1}{\pi} \left[ \frac{2a+s}{\left(a + \frac{s}{2}\right)^2 - x^2} + \frac{2b+s}{\left(b + \frac{s}{2}\right)^2 - y^2} \right] \frac{cm}{m^2}, \quad (49,3)$$

$$Q_F = \lambda \theta_F \frac{4}{\pi} \left[ b \ln \left( 1 + 4 \frac{a}{s} \right) + a \ln \left( 1 + 4 \frac{b}{s} \right) \right] cm. \quad (49,4)$$

Если будут заданы температуры  $T_1$  и  $T_2$  среды, окружающей нагретую и охлаждаемую поверхности массива, находящиеся на

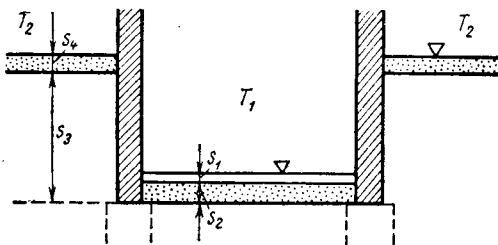


Рис. 67. К расчету теплопередачи массива при подводе тепла на углубленной площади поверхности

различных уровнях, и если на поверхностях массива находятся слои разнородного материала (рис. 67), то решение задачи усложняется. Приближенно теплопередачу массива в этих условиях можно рассчитать, введя для линий теплового потока ряд дополнительных эквивалентных участков:

$$\left. \begin{aligned} l_1 &= \frac{\lambda}{\alpha_1} + s'_1 \frac{\lambda}{\lambda'_1} + s''_1 \frac{\lambda}{\lambda''_1} + \dots, \\ l_2 &= \frac{\lambda}{\alpha_2} + s'_2 \frac{\lambda}{\lambda'_2} + s''_2 \frac{\lambda}{\lambda''_2} + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (49,5)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2$  — коэффициенты теплоотдачи среды, окружающей массив внутри и снаружи;

$s'_1, s''_1, \dots; s'_2, s''_2, \dots$  — толщины разнородных слоев на внутренней и наружной поверхностях массива;

$\lambda'_1, \lambda''_1, \dots; \lambda'_2, \lambda''_2, \dots$  — соответствующие коэффициенты теплопроводности материала слоев.

Формулы для расчета удельной и общей теплопередачи при этом получаются в следующем виде:

$$q_{x, y} = \lambda (T_1 - T_2) \frac{1}{\pi} \left( \frac{2A_0}{A_0^2 - x^2} + \frac{2B_0}{B_0^2 - y^2} \right) \frac{em}{m^2}, \quad (49,6)$$

$$Q = \lambda (T_1 - T_2) \frac{4}{\pi} \left( b \ln \frac{A_0 + a}{A_0 - a} + a \ln \frac{B_0 + b}{B_0 - b} \right) em, \quad (49,7)$$

где  $A_0 = a_0 + \frac{l_1 + l_2}{\pi}$ ;

$B_0 = b_0 + \frac{l_1 + l_2}{\pi}$ .

Температура в отдельных местах внутренней нагреваемой поверхности массива определяется разностью

$$T(x, y) = T_1 - q_{x, y} \cdot \frac{1}{\alpha_1}. \quad (49,8)$$

Согласно этому равенству, наименьшая температура поверхности получается в углу помещения, а наибольшая — в его середине (рис. 68).

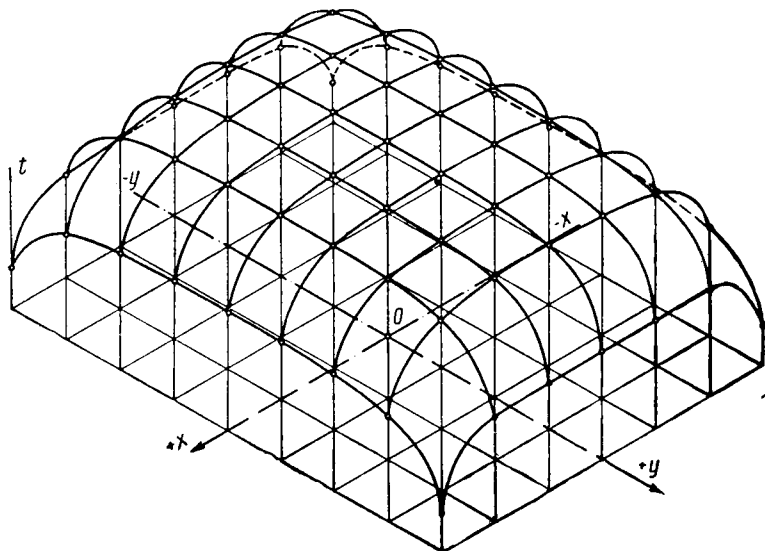


Рис. 68. Температурное поле в условиях теплопередачи на ограниченной площади массива

Рассмотренная задача находит практическое применение в расчетах теплопередачи полом помещений и в расчетах теплопотерь пода печей.

Необходимо отметить, что задача решалась приближенно; приближение в решении прежде всего заключается в том, что

пространственная задача распространения тепла в массиве заменяется простым сложением двух плоских задач. Такой способ решения дает некоторое завышение в расчете теплопередачи.

## § 50. Теплопроводность и теплопередача угловых стен

Теплопроводность и теплопередача в углах ограждающих плоских стенок значительно усложняется по сравнению с теплопроводностью и теплопередачей неограниченных плоских стенок. Если даже считать, что температуры  $T'$  и  $T''$  на внутренней

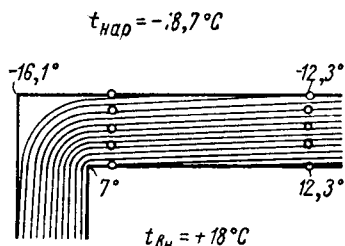


Рис. 69. Температурное поле угловой стены

и наружной поверхностях в углах плоских стенок во всех местах одинаковы, то и в этом простейшем случае решение задачи теплопроводности стенового угла оказывается затруднительным. Затруднения, возникающие в интегрировании дифференциального уравнения Лапласа для трехмерной задачи теплопроводности пространственного стенового угла и для двухмерной задачи теплопроводности плоского стенового угла, заставляют прибегать к различным

методам приближенного решения дифференциальных уравнений.

Если учесть, что конвективные токи окружающих сред в углу помещения имеют иную интенсивность по сравнению с плоской поверхностью стенки, а лучистый теплообмен значительно усложнен взаимно примыкающими стенками, то приходится отказаться от аналитического расчета теплопередачи стенового угла и ограничиться лишь обсуждением некоторого экспериментального материала. На рис. 69 представлено измеренное температурное поле кирпичных стен в углу помещения на уровне 1,5 м от пола при внутренней и наружной температуре воздуха  $+18$  и  $-18,7^\circ\text{C}$ . Изотермы проведены в стене через каждые  $2^\circ$ . Как показали измерения, температура на внутренней поверхности стены в отдалении от угла составляет  $+12,3$ , а температура в углу — лишь  $7^\circ\text{C}$ . Температура наружной поверхности стены в углу также заметно ниже, чем в отдалении от угла.

Такое распределение температур на поверхности стен в углу помещения происходит из-за значительного уменьшения термического сопротивления в угловом сопряжении стен, в результате чего удельный тепловой поток на внутренней поверхности стенового угла получается значительно большим, чем в отдалении от угла. Пониженная температура в углах внутренней поверхности наружных стен помещения нередко вызывает конденсацию влаги воздуха; стены в этих местах сыреют, теплопроводность их

заметно возрастает и передача тепла увеличивается. Устранить появление сырости в углах помещения можно, например, расположив здесь нагревательный прибор отопления.

### § 51. Теплопроводность и теплопередача плоскопараллельного слоя с источниками тепла

Имеется плоскопараллельный слой однородного вещества толщиной  $s$  с неограниченной поверхностью. В слое действуют источники тепла с удельной мощностью  $q_n \text{ вт/м}^3$ , равномерно распределенной по всему слою. С обеих сторон слой окружает среда с неизменной и одинаковой температурой  $T_0$ . Требуется найти распределение температур в слое и определить теплопередачу источников.

Дифференциальное уравнение одномерной стационарной теплопроводности однородного слоя с источниками тепла при постоянном коэффициенте теплопроводности запишется в следующем виде:

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{q_n}{\lambda} = 0. \quad (51,1)$$

Последовательным интегрированием находим:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dx} &= -\frac{q_n}{\lambda} x + C_1, \\ T(x) &= -\frac{q_n}{\lambda} \frac{1}{2} x^2 + C_1 x + C_2. \end{aligned}$$

Условие симметричности температурного поля в слое требует для  $x=0$

$$\frac{dT}{dx} = 0, \quad C_1 = 0.$$

Для  $x=s/2$  удельная теплоотдача поверхности слоя определяется формулой:

$$q_{x=s/2} = -\lambda \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=s/2} = q_n s/2. \quad (51,2)$$

Используя граничное условие третьего рода

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=s/2} = -\frac{\alpha}{\lambda} (T_{x=s/2} - T_0),$$

получаем равенство:

$$q_n s/2 = \alpha \left[ C_2 - \frac{q_n}{\lambda} \frac{1}{2} (s/2)^2 - T_0 \right],$$

откуда находим:

$$C_2 = T_0 + q_n s/2 \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2} \frac{s/2}{\lambda} \right).$$

Таким образом, приходим к следующему уравнению распределения температур в плоскопараллельном теплопроводном слое с источниками тепла:

$$T(x) = T_0 + q_n s/2 \left\{ \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2} \frac{s/2}{\lambda} \left[ 1 - \left( \frac{x}{s/2} \right)^2 \right] \right\}. \quad (51,3)$$

Интересно отметить, что в толстых слоях источники тепла даже небольшой удельной мощности  $q_n$  могут создать в середине слоя очень высокие температуры:

$$T_m = T_0 + q_n s/2 \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2} \frac{s/2}{\lambda} \right). \quad (51,4)$$

Температура на поверхности слоя определяется формулой:

$$T_{s/2} = T_0 + q_n \cdot s/2 \frac{1}{\alpha}. \quad (51,5)$$

## § 52. Теплопроводность и теплопередача тела цилиндрической формы с источниками тепла

В цилиндрическом теле неограниченной длины действуют равномерно распределенные источники тепла с удельной мощностью  $q_n$  *вт/м<sup>3</sup>*. Тело окружает среда с неизменной температурой  $T_0$ . Требуется найти распределение температур в цилиндре и определить теплопередачу источников.

Дифференциальное уравнение стационарной теплопроводности однородного цилиндра с источниками тепла при постоянном коэффициенте теплопроводности запишется в виде:

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{q_n}{\lambda} = 0. \quad (52,1)$$

Интеграл этого уравнения находится в виде:

$$T = - \frac{q_n}{\lambda} \frac{1}{4} r^2 + C_1 \ln r + C_2.$$

В соответствии с симметрией температурного поля при  $r=0$   $\left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=0} = 0$ , откуда находим  $C_1 = 0$ .

Для  $r = \frac{d}{2}$  теплоотдача с поверхности цилиндра на единицу длины определяется формулой:

$$Q = - \pi d \lambda \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=d/2} = \frac{1}{4} \pi d^2 q_n \frac{\text{см}}{\text{м}}. \quad (52,2)$$

Согласно уравнению граничного условия третьего рода, имеем следующее равенство:

$$\frac{1}{4} q_n d = \alpha \left[ C_2 - \frac{q_n}{\lambda} \frac{1}{4} \left( \frac{d}{2} \right)^2 - T_0 \right],$$

откуда находим:

$$C_2 = T_0 + \frac{1}{4} q_n d \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2} \frac{d/2}{\lambda} \right).$$

Следовательно, уравнение распределения температур в цилиндре находится в виде:

$$T(r) = T_0 + \frac{1}{4} q_n d \left\{ \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2} \frac{d/2}{\lambda} \left[ 1 - \left( \frac{r}{d/2} \right)^2 \right] \right\}. \quad (52,3)$$

Для определения температуры поверхности цилиндра получаем формулу:

$$T_{d/2} = T_0 + \frac{1}{4} q_n d \frac{1}{\alpha}. \quad (52,4)$$

### § 53. Теплопроводность и теплопередача полого цилиндра с источниками тепла

Если стенка полого цилиндра, в теле которого действуют равномерно распределенные источники тепла удельной мощностью  $q_n$  *вт/м<sup>3</sup>*, с внутренней и наружной стороны отдает тепло среде с неизменной во времени температурой  $T_1$  и  $T_2$ , то для решения задачи необходимо использовать следующие граничные условия.

Для внутреннего теплообмена при  $r = d_1/2$ :

$$T_{d_1/2} = -\frac{q_n}{\lambda} \frac{1}{4} \left( \frac{d_1}{2} \right)^2 + C_1 \ln \frac{d_1}{2} + C_2.$$

В соответствии с граничным условием

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=d_1/2} = -\frac{\alpha_1}{\lambda} (T_{d_1/2} - T_1),$$

имеем равенство:

$$-\frac{q_n}{\lambda} \frac{1}{2} \frac{d_1}{2} + C_1 \frac{1}{d_1/2} = -\frac{\alpha_1}{\lambda} \left[ C_2 + C_1 \ln \frac{d_1}{2} - \frac{q_n}{\lambda} \frac{1}{4} \left( \frac{d_1}{2} \right)^2 - T_1 \right].$$

Для наружного теплообмена при  $r = d_2/2$ :

$$T_{d_2/2} = -\frac{q_n}{\lambda} \frac{1}{4} \left( \frac{d_2}{2} \right)^2 + C_1 \ln \frac{d_2}{2} + C_2.$$

В соответствии с граничным условием третьего рода

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=\frac{d_2}{2}} = -\frac{\alpha_2}{\lambda} (T_{d_2/2} - T_2),$$

имеем равенство:

$$-\frac{q_n}{\lambda} \frac{1}{2} \frac{d_2}{2} + C_1 \frac{1}{d_2/2} = -\frac{\alpha_2}{\lambda} \left[ C_2 + C_1 \ln \frac{d_2}{2} - \frac{q_n}{\lambda} \frac{1}{4} \left( \frac{d_2}{2} \right)^2 - T_2 \right].$$

Из двух совместных уравнений граничных условий находим произвольные постоянные:

$$C_1 = -\frac{1}{A_1} \frac{\alpha_1}{\lambda} \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 \frac{\alpha_2}{\lambda} - A_2 \frac{\alpha_1}{\lambda}} + \frac{B_1}{A_1},$$

$$C_2 = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 \frac{\alpha_2}{\lambda} - A_2 \frac{\alpha_1}{\lambda}},$$

где

$$A_1 = \frac{1}{d_1/2} + \frac{\alpha_1}{\lambda} \ln \frac{d_1}{2};$$

$$A_2 = \frac{1}{d_2/2} + \frac{\alpha_2}{\lambda} \ln \frac{d_2}{2};$$

$$B_1 = \frac{q_{\text{н}}}{\lambda} \frac{1}{2} \frac{d_1}{2} \left( 1 + \frac{\alpha_1}{\lambda} \frac{1}{2} \frac{d_1}{2} \right) + \frac{\alpha_1}{\lambda} T_1;$$

$$B_2 = \frac{q_{\text{н}}}{\lambda} \frac{1}{2} \frac{d_2}{2} \left( 1 + \frac{\alpha_2}{\lambda} \frac{1}{2} \frac{d_2}{2} \right) + \frac{\alpha_2}{\lambda} T_2.$$

Уравнение распределения температур в цилиндрической стенке находится в виде:

$$T(r) = -\frac{q_{\text{н}}}{\lambda} \frac{1}{4} r^2 + C_1 \ln r + C_2. \quad (53,1)$$

Теплопередача цилиндрической стенки для единичной длины находится суммированием наружной и внутренней теплоотдачи:

$$\begin{aligned} Q &= -\pi d_2 \lambda \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=d_2/2} + \pi d_1 \lambda \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=d_1/2} = \\ &= \pi d_2 \lambda \left( \frac{q_{\text{н}}}{\lambda} \frac{1}{2} \frac{d_2}{2} - C_1 \ln \frac{d_2}{2} \right) - \pi d_1 \lambda \left( \frac{q_{\text{н}}}{\lambda} \frac{1}{2} \frac{d_1}{2} - C_1 \ln \frac{d_1}{2} \right). \end{aligned} \quad (53,2)$$

Если температуры сред внутри и снаружи полого цилиндра будут одинаковыми, то  $C_1=0$ , и общая теплопередача полого цилиндра составит:

$$Q = \frac{\pi}{4} (d_2^2 - d_1^2) q_{\text{н}} \frac{\text{см}}{\text{м}}, \quad (53,3)$$

т. е. общая теплоотдача равняется суммарной производительности источников в объеме цилиндра.

При отсутствии в цилиндрической стенке источников тепла ее теплопередача определяется переносом тепла от внутренней к наружной среде и находится по известной формуле:

$$Q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{\pi d_1 \alpha_1} + \frac{1}{2\pi \lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\pi d_2 \alpha_2}} \frac{\text{см}}{\text{м}}.$$



## § 54. Теплопроводность и теплопередача шара с источниками тепла

Тело сферической формы с равномерно распределенными по всему объему источниками тепла удельной мощностью  $q_{\text{н}}$  *вт/м<sup>3</sup>* находится в окружающей среде с неизменной во времени температурой  $T_0$ . Требуется найти распределение температур в массе шара и определить теплопередачу.

Дифференциальное уравнение стационарной теплопроводности однородного тела сферической формы с источником тепла при постоянном коэффициенте теплопроводности запишется в виде:

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{q_{\text{н}}}{\lambda} = 0. \quad (54,1)$$

Интеграл этого уравнения находится в виде:

$$T = -\frac{q_{\text{н}}}{\lambda} \frac{1}{6} r^2 + C_1 \frac{1}{r} + C_2.$$

При  $r=0$   $\left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=0} = 0$  и, следовательно,  $C_1=0$ . Для  $r=d/2$ , согласно уравнению граничного условия третьего рода, имеем равенство:

$$q_{\text{н}} \frac{1}{3} \frac{d}{2} = \alpha \left[ C_2 - \frac{q_{\text{н}}}{\lambda} \frac{1}{6} \left( \frac{d}{2} \right)^2 - T_0 \right],$$

откуда находим:

$$C_2 = T_0 + \frac{q_{\text{н}}}{\lambda} \frac{1}{3} \frac{d}{2} \left( \frac{\lambda}{\alpha} + \frac{1}{2} \frac{d}{2} \right).$$

Таким образом, распределение температур в массе шара представится уравнением:

$$T(r) = T_0 + \frac{q_{\text{н}}}{\lambda} \frac{1}{3} \frac{d}{2} \left\{ \frac{\lambda}{\alpha} + \frac{1}{2} \frac{d}{2} \left[ 1 - \left( \frac{r}{d/2} \right)^2 \right] \right\}. \quad (54,2)$$

Температура на поверхности шара определяется формулой:

$$T_{d/2} = T_0 + q_{\text{н}} \frac{1}{3} \frac{d}{2} \frac{1}{\alpha}. \quad (54,3)$$

Теплопередача шара составит:

$$Q = -\pi d^2 \lambda \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=d/2} = \frac{1}{6} \pi d^3 q_{\text{н}} \text{ вт}. \quad (54,4)$$

Температура в центре шара находится по формуле:

$$T_{r=0} = T_0 + \frac{q_{\text{н}}}{\lambda} \frac{1}{3} \frac{d}{2} \left( \frac{\lambda}{\alpha} + \frac{d}{4} \right). \quad (54,5)$$

Важно и интересно отметить, что для сферических тел больших диаметров, даже при малой удельной производительности источ-

ников тепла, температура в центре шара может достигнуть весьма больших величин.

Все рассмотренные задачи теплопроводности тел с источниками тепла решались при постоянном коэффициенте теплопроводности вещества. Если учитывать степенной характер изменения коэффициента теплопроводности с температурой

$$\lambda = \lambda_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^n,$$

то решение задачи существенно усложняется. Более просто решается задача, если пользоваться зависимостью коэффициента теплопроводности от температуры, представленной в виде формулы:

$$\lambda = \lambda_0 (1 + AT).$$

Результаты решений задач теплопроводности с переменным коэффициентом теплопроводности приводятся в [10].

### § 55. Теплоотдача тел в условиях электронагрева

При прохождении электрического тока в проводящем теле осуществляется нагрев его массы и происходит теплоотдача с поверхности тела в окружающую среду. Количество выделяемого тепла при силе тока  $I$  а и напряжении  $E$  в находится произведением:

$$Q = I \cdot E \text{ вт.} \quad (55,1)$$

В соответствии с законом Ома  $I = \frac{E}{R}$  (где  $R$  — сопротивление электропроводящего тела в омах), для определения тепловыделения в проводящем теле получаем формулу Д ж о у л я и Л е н ц а:

$$Q = I^2 R \text{ вт.} \quad (55,2)$$

Для проводников с постоянным поперечным сечением электрическое сопротивление определяется формулой:

$$R = \frac{\rho L}{f} \text{ ом,} \quad (55,3)$$

где  $\rho \frac{\text{ом}}{\text{м}} / \text{мм}^2$  — удельное электрическое сопротивление материала;  
 $f$  — площадь поперечного сечения проводника;  
 $L$  — длина проводника.

С повышением температуры электрическое сопротивление тел увеличивается и обычно отвечает формуле:

$$\rho = \rho_0 (1 + \beta t), \quad (55,4)$$

где  $\rho_0$  — удельное электрическое сопротивление при  $0^\circ \text{C}$ ;  
 $\beta$  — температурный коэффициент сопротивления.

Пользуясь формулами (55,2) и (55,3), находим удельную мощность источников электронагрева в проводнике постоянного сечения:

$$q_{и, эл} = i^2 \rho \frac{em}{m^3}, \quad (55,5)$$

где  $i = \frac{I}{f}$  — плотность тока.

Отсюда следует, что удельная мощность источников электронагрева в проводниках пропорциональна квадрату плотности тока и удельному электрическому сопротивлению тел.

Теплоотдача тела с источниками электронагрева определяется формулой:

$$Q = F\alpha(T_F - T_0) \text{ вт}$$

или для проводников постоянного поперечного сечения:

$$Q = uL\alpha(T_F - T_0), \quad (55,6)$$

где  $u$  — периметр сечения проводника;

$L$  — длина проводника;

$\alpha$  — коэффициент теплоотдачи в окружающую среду;

$T_F - T_0$  — разность температур тела на поверхности и окружающей среды.

В условиях стационарного режима теплоотдача тел уравнивается тепловыделением источников электронагрева:

$$Q = q_{и} f L. \quad (55,7)$$

Из равенств (55,6) и (55,7) находим температуру проводника в условиях стационарного электронагрева:

$$T_F = T_0 + \frac{qf}{\alpha u} i^2 \text{ }^\circ\text{К}. \quad (55,8)$$

Из условия допустимой температуры нагрева проводника ( $T_F = T_{\text{макс}}$ ) определяется допустимая плотность тока:

$$i_{\text{макс}} = \sqrt{(T_{\text{макс}} - T_0) \frac{\alpha u}{qf} \frac{a}{\text{мм}^2}}. \quad (55,9)$$

## НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ТЕЛ

Нестационарная теплопроводность тел отвечает не установившемуся во времени тепловому режиму, создаваемому тем или иным тепловым воздействием на тело. Особенно часто приходится встречаться с нестационарной теплопроводностью при нагревании или охлаждении тел, когда до начала соответствующего воздействия на тело во всей его массе была одинаковая температура. Ниже рассматриваются задачи нестационарной теплопроводности

тел простейшей формы (плоскопараллельная стенка, цилиндр и шар) при нагревании или охлаждении их в окружающей среде с неизменной во времени температурой  $T_0$ .

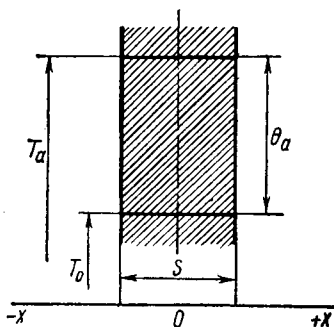
### § 56. Нагревание или охлаждение плоской стенки

Имеется стенка, выполненная из однородного материала и ограниченная плоскопараллельными поверхностями, линейные размеры которых много больше толщины стенки  $s$ . Внезапно с обеих сторон стенка подвергается тепловому воздействию (нагреванию или охлаждению)

Рис. 70. К решению задачи о нагревании или охлаждении плоской стенки

окружающей среды с неизменной во времени температурой  $T_0$ . Предполагая, что к началу теплового воздействия среды на стенку последняя во всех местах имела одинаковую температуру  $T_a$ , требуется найти распределение температуры в стенке в любой момент времени и определить расход тепла.

Так как стенка по условиям задачи должна изменять температуру симметрично по обе стороны, то начало координат целесообразно поместить в середине стенки, в точке  $O$  (рис. 70).



Решение дифференциального уравнения нестационарной теплопроводности

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

применительно к условиям одномерной задачи [уравнение (40,8)] запишется в виде:

$$\theta(x, \tau) = \sum_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_{\infty}} [A(\varepsilon_i) \cos(\varepsilon_i x) + B(\varepsilon_i) \sin(\varepsilon_i x)] e^{-\varepsilon_i^2 a \tau},$$

где  $\theta(x, \tau) = T(x, \tau) - T_0$  — разность переменной температуры в любом месте стенки и постоянной температуры окружающей среды;

$\varepsilon_i$  — положительная размерная величина;

$A(\varepsilon_i)$  и  $B(\varepsilon_i)$  — произвольные постоянные, зависящие от  $\varepsilon_i$ .

Функция  $\sin(\varepsilon_i x)$  есть *нечетная* функция, так как при переходе от  $+x$  к  $-x$  меняется знак этой функции. Функция  $\cos(\varepsilon_i x)$  в таком определении есть функция *четная*. При симметричном изменении температуры стенки по обе стороны от начала координат в решении задачи нестационарной теплопроводности стенки следует ограничиться лишь одной четной функцией:

$$\theta(x, \tau) = \sum_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_{\infty}} A(\varepsilon_i) \cos(\varepsilon_i x) e^{-\varepsilon_i^2 a \tau}. \quad (56,1)$$

Используя граничное условие третьего рода

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=\pm s/2} = -\frac{\alpha}{\lambda} \theta_{x=\pm s/2}$$

для любого частного решения дифференциального уравнения  $A(\varepsilon_i) \cos(\varepsilon_i x) e^{-\varepsilon_i^2 a \tau}$ , имеем равенство:

$$\varepsilon_i \operatorname{tg}(\varepsilon_i s/2) = \frac{\alpha}{\lambda}.$$

Обозначая безразмерную величину  $\varepsilon_i s/2 = \delta_i$  и имея в виду, что  $\frac{\alpha s/2}{\lambda} \equiv Bi$  (критерий Био), получим:

$$\delta_i \operatorname{tg} \delta_i = Bi. \quad (56,2)$$

Это трансцендентное уравнение имеет бесконечное множество корней  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_i, \dots$ , каждый из которых удовлетворяет граничному условию рассматриваемой задачи. Решается это уравнение путем подбора значений  $\delta_i$  или графически. В табл. 7 даны первые пять корней  $\delta_i$  уравнения (56,2) для различных значений критерия  $Bi$ .

$Bi = \frac{\alpha s/2}{\lambda}$	$\delta_1$	$\delta_2$	$\delta_3$	$\delta_4$	$\delta_5$
	$1,57 = \frac{\pi}{2}$	$4,71 = 3 \frac{\pi}{2}$	$7,85 = 5 \frac{\pi}{2}$	$11 = 7 \frac{\pi}{2}$	$14,15 = 9 \frac{\pi}{2}$
1000	1,57	4,71	7,84	10,98	14,13
100	1,56	4,66	7,77	10,88	14,00
50	1,54	4,62	7,70	10,78	13,87
20	1,50	4,49	7,49	10,51	13,55
10	1,43	4,30	7,22	10,20	13,22
4	1,26	3,93	6,81	9,78	12,87
1,0	0,86	3,42	6,43	9,52	12,65
0,5	0,65	3,29	6,36	9,47	12,61
0,1	0,31	4,17	6,30	9,43	12,57
0,01	0,10	3,14	6,28	9,42	12,57
0	0	$3,14 = \pi$	$6,28 = 2\pi$	$9,42 = 3\pi$	$12,57 = 4\pi$

Таким образом, применяя граничное условие (56,2), решение (56,1) запишем в виде:

$$\theta(x, \tau) = \sum_{i=1}^{i=\infty} A_i(\delta_i) \cos\left(\delta_i \frac{x}{s/2}\right) e^{-\delta_i^2 \frac{\alpha \tau}{(s/2)^2}}, \quad (56,3)$$

где  $\delta_i$  — корни уравнения (56,2), а безразмерный параметр  $\frac{\alpha \tau}{(s/2)^2}$ , характеризующий нестационарную теплопроводность, называется критерием Фурье  $\left[F_0 \equiv \frac{\alpha \tau}{(s/2)^2}\right]$ .

Множитель в решении (56,3)  $e^{-\delta_i^2 F_0}$  определяет изменение температуры стенки во времени. Если рассматривать распределение температур в стенке в начальный момент времени при  $\tau = 0$ , то решение (56,3) должно отвечать заданному начальному распределению температур в стенке:

$$\theta_a = \sum_{i=1}^{i=\infty} A(\delta_i) \cos\left(\delta_i \frac{x}{s/2}\right). \quad (56,4)$$

Из этого краевого условия определяются постоянные коэффициенты  $A(\delta_i)$  ряда (56,4), который является равномерно сходящимся. Доказательство сходимости этого ряда можно найти в курсах математического анализа.

Для отыскания коэффициентов  $A(\delta_i)$  умножаем обе части ряда (56,4) на  $\cos\left(\delta_i \frac{x}{s/2}\right)$  и интегрируем все члены получен-

ного равенства в пределах от  $-s/2$  до  $+s/2$ :

$$\begin{aligned} \theta_a \int_{-s/2}^{+s/2} \cos \left( \delta_i \frac{x}{s/2} \right) dx &= A(\delta_1) \int_{-s/2}^{+s/2} \cos \left( \delta_1 \frac{x}{s/2} \right) \cos \left( \delta_i \frac{x}{s/2} \right) dx + \\ &+ A(\delta_2) \int_{-s/2}^{+s/2} \cos \left( \delta_2 \frac{x}{s/2} \right) \cos \left( \delta_i \frac{x}{s/2} \right) dx + \\ &+ \dots \dots \dots + \\ &+ A(\delta_i) \int_{-s/2}^{+s/2} \cos^2 \left( \delta_i \frac{x}{s/2} \right) dx + \\ &+ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Вычисляя отдельные интегралы, находим:

$$\begin{aligned} \int_{-s/2}^{+s/2} \cos \left( \delta_i \frac{x}{s/2} \right) dx &= 2 \frac{s/2 \sin \delta_i}{\delta_i}; \\ \int_{-s/2}^{+s/2} \cos \left( \delta_1 \frac{x}{s/2} \right) \cos \left( \delta_i \frac{x}{s/2} \right) dx &= 0; \\ \int_{-s/2}^{+s/2} \cos^2 \left( \delta_i \frac{x}{s/2} \right) dx &= s/2 \left( 1 + \frac{1}{2\delta_i} \sin 2\delta_i \right). \end{aligned}$$

В результате этих операций находим произвольные постоянные:

$$A(\delta_i) = \theta_a \frac{2 \sin \delta_i}{\delta_i + \sin \delta_i \cos \delta_i}.$$

Таким образом, приходим к следующему окончательному решению рассматриваемой задачи:

$$\theta(x, \tau) = \theta_a \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{2 \sin \delta_i}{\delta_i + \sin \delta_i \cos \delta_i} \cos \left( \delta_i \frac{x}{s/2} \right) e^{-\delta_i^2 F_0}. \quad (56,5)$$

Кажущаяся громоздкость вычисления этой суммы членов ряда в большинстве случаев облегчается тем, что заметный вклад дают лишь несколько первых членов, а для малых критериев  $Bi \ll 1$  (тонкие стенки с большой теплопроводностью) достаточно точное решение получается даже при одном первом члене суммы ряда (56,5).

Температура в середине стенки находится при  $x=0$ :

$$\theta_m(\tau) = \theta_a \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{2 \sin \delta_i}{\delta_i + \sin \delta_i \cos \delta_i} e^{-\delta_i^2 F_0}. \quad (56,6)$$

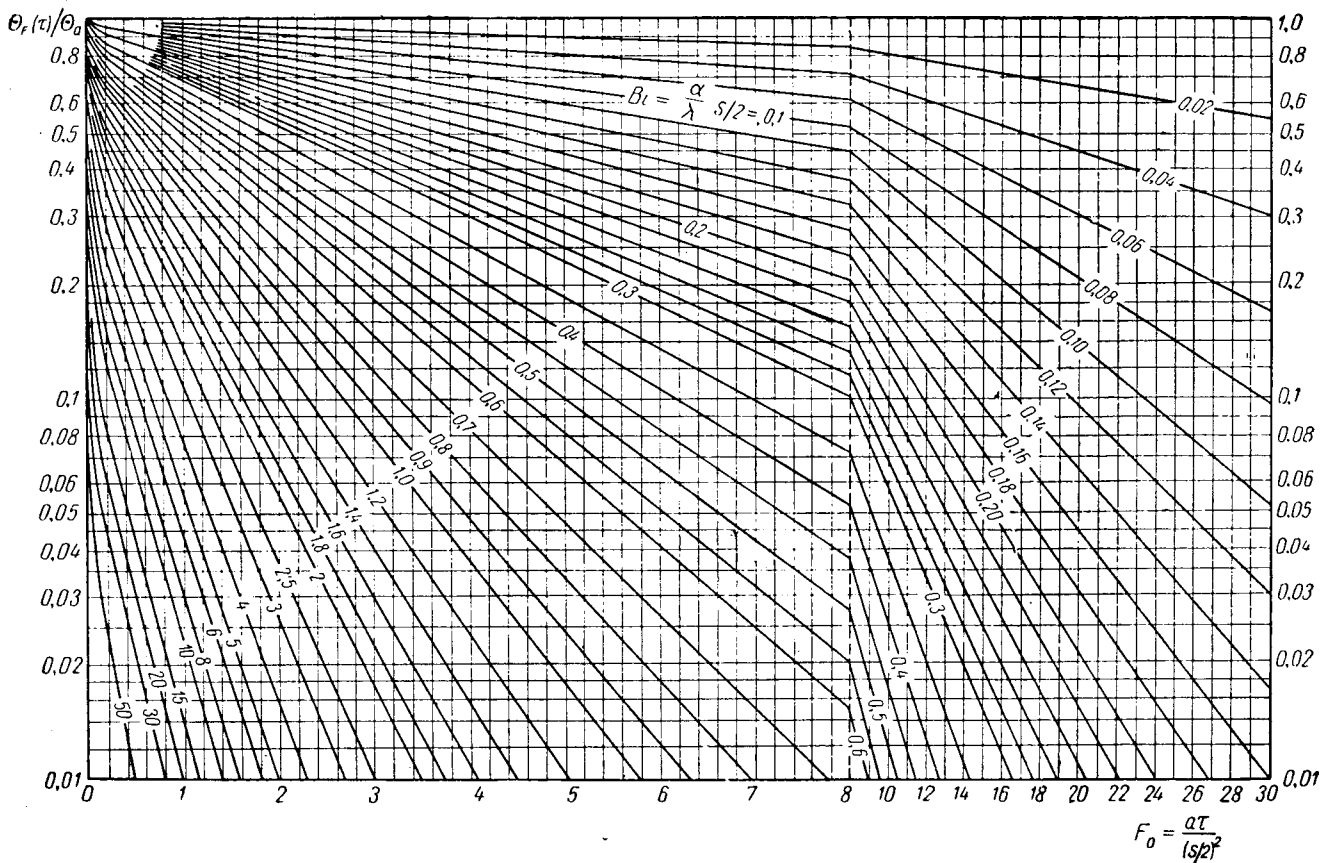


Рис. 71. Температурная функция поверхности нагреваемой или охлаждаемой плоской стенки



Температура поверхности стенки находится при  $x = \pm s/2$ :

$$\theta_F(\tau) = \theta_a \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{2 \sin \delta_i \cos \delta_i}{\delta_i + \sin \delta_i \cos \delta_i} e^{-\delta_i^2 Fo}. \quad (56,7)$$

Расход тепла стенкой за время  $\tau$  с обеих сторон определяется интегрированием:

$$Q_\tau = \int_{(V)} qc [\theta_a - \theta_\tau] dV.$$

Для единичной площади поверхности стенки получаем:

$$Q_\tau = qcs\theta_a \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{2 \sin \delta_i}{\delta_i + \sin \delta_i \cos \delta_i} (1 - e^{-\delta_i^2 Fo}) \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial m^2}, \quad (56,8)$$

где  $qcs\theta_a = Q_0 \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial m^2}$  — общий расход тепла за время полного нагревания или охлаждения стенки.

Для удобства расчетов нестационарной теплопроводности плоской стенки составлены различные вспомогательные графики, представляющие функции:

$$\frac{\theta(x, \tau)}{\theta_a} = f\left(Fo, Bi, \frac{x}{s/2}\right)$$

и

$$\frac{Q_\tau}{Q_0} = \varphi(Fo, Bi).$$

На рис. 71 и 72 представлены графики для определения температурных функций  $\frac{\theta_F(\tau)}{\theta_a}$  и  $\frac{\theta_m(\tau)}{\theta_a}$  на поверхности и в середине стенки в зависимости от критерия  $Fo \equiv \frac{a\tau}{(s/2)^2}$  для различных критериев  $Bi \equiv \frac{as/2}{\lambda}$ .

Так как критерий Фурье, входящий в экспоненциальную функцию, пропорционален времени теплового воздействия на тело при нестационарной теплопроводности, то можно заметить, что изменение температуры на поверхности стенки имеет быстрый темп вначале и замедляется в конце. Изменение температуры в середине стенки всегда отстает от изменения температуры на ее поверхности. Это отставание тем значительнее, чем больше критерий  $Bi$  (чем толще стенка и чем больше коэффициент теплоотдачи  $\alpha$ ).

Вычислив для отдельных моментов времени температуры в середине и на поверхности стенки, можно провести линии изменения

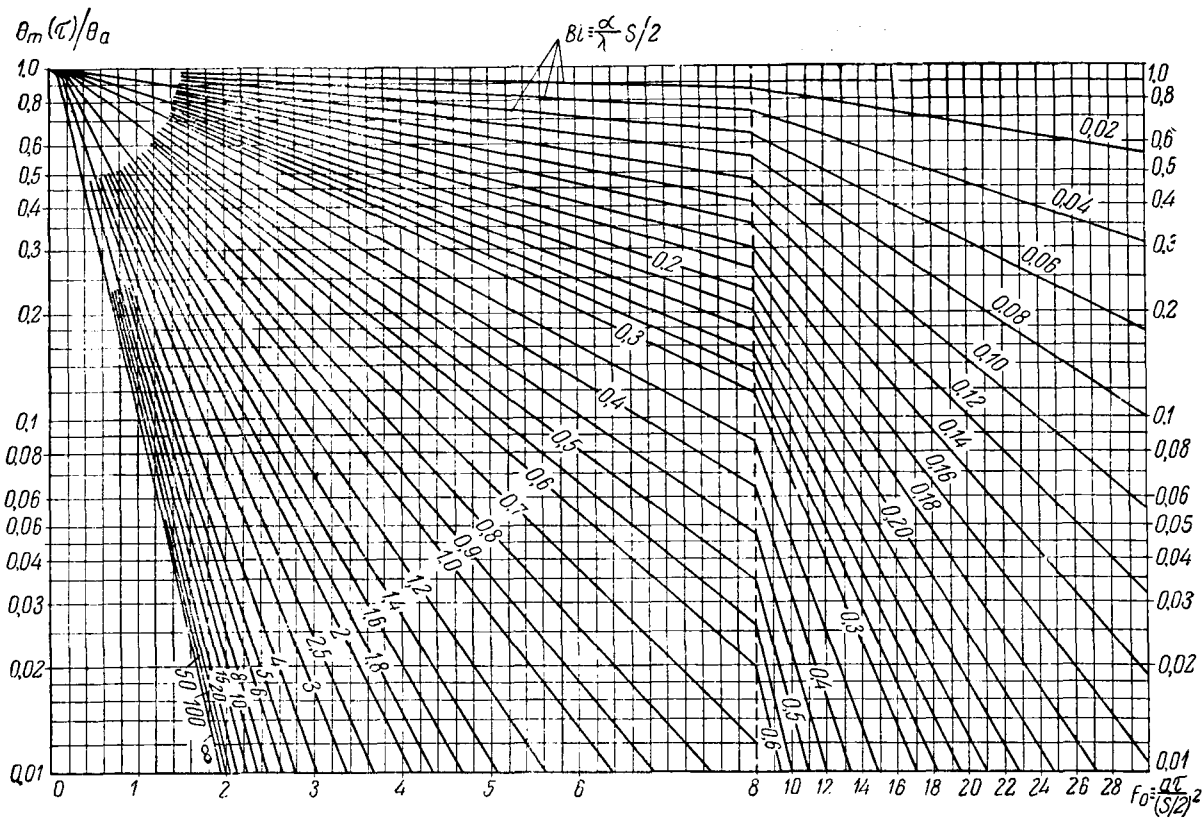


Рис. 72. Температурная функция середины нагреваемой или охлаждаемой плоской стенки

температуры в толщине стенки. Для этой цели на поверхности стенки и в ее середине наносятся точки, отвечающие вычисленным температурам (рис. 73). Имея в виду, что наклон линий изменения температур в толще стенки от поверхности определяется уравнением граничного условия

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_F = -\frac{\alpha}{\lambda} \theta_F(\tau) = -\frac{\theta_F(\tau)}{\lambda/\alpha},$$

замечаем, что для любой  $\theta_F(\tau)$  на поверхности величина  $\left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_F$ , определяющая наклон линий в толще стенки, представляет направле-

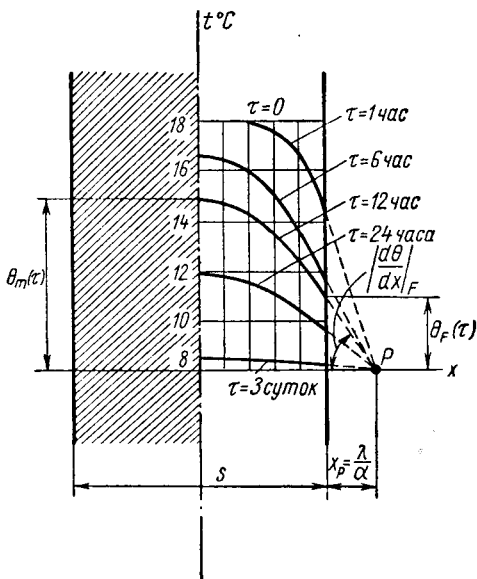


Рис. 73. К расчету температурного поля охлаждаемой плоской стенки

ние луча, исходящего из точки  $P$ , отстоящей от поверхности стенки на расстояние  $x_p = \frac{\lambda}{\alpha}$  и имеющей  $\theta = 0$  (рис. 73). Проведя из точки  $P$  лучи, соответствующие вычисленным  $\theta(\tau)$  для отдельных моментов времени, наносим линии изменения температур в толще стенки. В середине стенки  $\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0$ , и температурные линии в этом месте имеют симметричный изгиб.

На рис. 74 представлен график  $\frac{Q\tau}{Q_0} = f(Bi, Fo)$ , пользуясь которым можно вычислить расход тепла стенкой с обеих сторон при ее охлаждении или нагревании.

Все полученные уравнения для расчета распределения температур при двухстороннем нагревании или охлаждении плоской стенки, а также уравнение для ее теплоотдачи *сохраняются и для одностороннего теплового воздействия на стенку при условии,*

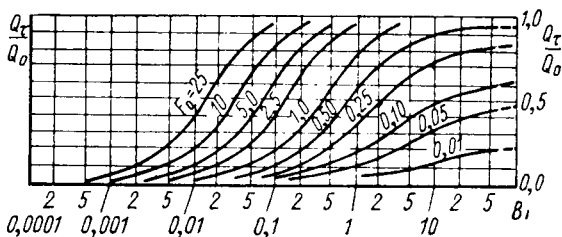


Рис. 74. К расчету расхода тепла при нагревании или охлаждении плоской стенки

что другая сторона стенки имеет достаточно совершенную изоляцию. В этом случае необходимо вместо  $s/2$  подставлять в формулы полную толщину стенки  $s$ .

**Пример.** Вычислить распределение температур в кирпичной стене толщиной  $s=0,5$  м, если температура среды по обе стороны стены внезапно понизится с  $+18$  до  $+8^\circ\text{C}$ . Физические параметры кирпичной кладки:  $\lambda=0,815$  *вт/м·град*;  $\rho=1500$  *кг/м<sup>3</sup>*;  $c=0,839$  *кдж/кг·град* ( $a = \frac{\lambda}{\rho c} = 0,647 \cdot 10^{-6}$  *м<sup>2</sup>/сек*). Коэффициент теплоотдачи для условий свободного потока воздуха у поверхности стены  $\alpha=8,15$  *вт/м<sup>2</sup>град*.

Находим критерий

$$Bi \equiv \frac{\alpha s/2}{\lambda} = 2,5.$$

При вычислении корней трансцендентного уравнения

$$\delta_i \operatorname{tg} \delta_i = 2,5$$

ограничиваемся четырьмя первыми, так как остальные корни оказывают малозаметное влияние на величину суммы формулы распределения температур.

Решая уравнение (56,2) подбором, находим:

$$\delta_1 = 1,14; \delta_2 = 3,73; \delta_3 = 6,64; \delta_4 = 9,65,$$

или в градусах соответственно  $65^\circ,3$ ;  $214^\circ$ ;  $381^\circ$ ;  $554^\circ$ .

Для  $\tau = 1$  час критерий Фурье

$$Fo \equiv \frac{a\tau}{(s/2)^2} = 0,0372.$$

Из уравнения (56,7) для величины  $F_0 = 0,0372$  ( $\tau = 1$  час) находим:

$$\begin{aligned} \frac{\theta_F(\tau)}{\theta_a} &= \frac{2 \sin 65^\circ, 3}{1,14 + \sin 65^\circ, 3 \cos 65^\circ, 3} \cos 65^\circ, 3 \cdot e^{-1,14^2 \cdot 0,0372} + \\ &+ \frac{2 \sin 214^\circ}{3,73 + \sin 214^\circ \cos 214^\circ} \cos 214^\circ \cdot e^{-3,73^2 \cdot 0,0372} + \\ &+ \frac{2 \sin 381^\circ}{6,64 + \sin 381^\circ \cos 381^\circ} \cos 381^\circ \cdot e^{-6,64^2 \cdot 0,0372} + \\ &+ \frac{2 \sin 554^\circ}{9,65 + \sin 554^\circ \cos 554^\circ} \cos 554^\circ \cdot e^{-9,65^2 \cdot 0,0372} = \\ &= 0,476 + 0,131 + 0,0186 + 0,0015 = 0,627. \end{aligned}$$

Температура на поверхности стены соответственно находится:

$$t_F(\tau) = 8 + 10 \cdot 0,627 = 14^\circ, 27 \text{ C.}$$

За это же время ( $\tau = 1$  час) температурная функция для середины стены будет:

$$\frac{\theta_m(\tau)}{\theta_a} = 1,135 - 0,158 + 0,0199 - 0,00155 = 0,999$$

или соответственно

$$t_m(\tau) = 8 + 10 \cdot 0,999 = 18^\circ \text{ C.}$$

Таким образом, через 1 час внезапного охлаждения стены температура на ее поверхности понизится приблизительно на  $4^\circ$ , а температура в середине почти не изменится.

Для сокращения дальнейших вычислений температуры стены пользуемся графиками рис. 71 и 72 и для различных  $\tau$  находим:

$$\frac{\theta_m(\tau)}{\theta_a} \text{ и } \frac{\theta_F(\tau)}{\theta_a}.$$

Таблица 8

$\tau$ , час	$F_0$	$\frac{\theta_m(\tau)}{\theta_a}$	$\frac{\theta_F(\tau)}{\theta_a}$	$t_m(\tau)$ , °C	$t_F(\tau)$ , °C
1	0,0372	0,999	0,627	18	14,3
6	0,223	0,88	0,38	16,8	11,8
12	0,446	0,69	0,29	14,9	10,9
24	0,892	0,39	0,17	11,9	9,7
72	2,67	0,05	0,02	8,5	8,2

Через 3 суток температура на поверхности и в середине стены почти сравняется с температурой окружающей среды. Результаты вычисления температур в охлаждаемой стене можно представить графически (рис. 73).

## § 57. Нагревание или охлаждение цилиндра

Цилиндр диаметром  $d$  и неограниченной длины, выполненный из однородного материала и имеющий во всех местах одинаковую температуру  $T_a$ , внезапно подвергается тепловому воздействию (нагреванию или охлаждению) окружающей среды с неизменной во времени температурой  $T_0$ . Требуется найти распределение температур в цилиндре во времени и определить расход тепла.

Дифференциальное уравнение нестационарной теплопроводности в цилиндрических координатах для симметричной задачи запишется в виде:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right). \quad (57,1)$$

Представляя решение этого уравнения произведением двух функций

$$\theta(r, \tau) = \theta(r) \cdot \theta(\tau),$$

получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \theta'(\tau) + \varepsilon^2 a \theta(\tau) &= 0, \\ \theta''(r) + \frac{1}{r} \theta'(r) + \varepsilon^2 \theta(r) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (57,2)$$

Решением первого из уравнений (57,2) является экспоненциальная функция

$$\theta(\tau) = e^{-\varepsilon^2 a \tau}.$$

Второе уравнение представляет собой *дифференциальное уравнение Бесселя*; его решением являются цилиндрические функции нулевого порядка: первого рода  $-J_0(\varepsilon r)$  и второго рода  $-H_0(\varepsilon r)$ , представляемые бесконечными рядами. Обе функции — периодические, с убывающей амплитудой, причем  $J_0(\varepsilon r)$  — функция *четная*, а  $H_0(\varepsilon r)$  — функция *нечетная*. Отбрасывая нечетную функцию, как непригодную по своим свойствам для рассматриваемой задачи, находим частное решение уравнения (57,1):

$$\theta(r, \tau) = A(\varepsilon) J_0(\varepsilon r) e^{-\varepsilon^2 a \tau}. \quad (57,3)$$

Используя граничное условие третьего рода

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} \Big|_{r=d/2} = -\frac{\alpha}{\lambda} \theta_{r=d/2}, \quad (57,4)$$

дифференцированием (57,3) и подстановкой результата в (57,4) после сокращения получаем:

$$\varepsilon \frac{J_1\left(\varepsilon \frac{d}{2}\right)}{J_0\left(\varepsilon \frac{d}{2}\right)} = \frac{\alpha}{\lambda}.$$

Обозначая безразмерное произведение  $\varepsilon \frac{d}{2} = m$  и имея в виду, что  $\frac{\alpha}{\lambda} \cdot \frac{d}{2} \equiv Bi$ , приходим к следующему трансцендентному уравнению:

$$m \frac{J_1(m)}{J_0(m)} = Bi. \quad (57,5)$$

Это уравнение имеет бесконечное множество корней  $m_1, m_2, \dots, m_i, \dots$ , удовлетворяющих граничному условию рассматриваемой задачи, которые можно использовать для представления решения дифференциального уравнения (57,1) в виде следующего ряда:

$$\theta(r, \tau) = \sum_{i=1}^{i=\infty} A_i(m_i) J_0\left(m_i \frac{r}{d/2}\right) e^{-m_i^2 F_0},$$

где  $m_i$  — корни уравнения (57,5);

$F_0 \equiv \frac{\alpha \tau}{(d/2)^2}$  — критерий Фурье для цилиндра.

Определяя аналогично плоскопараллельному слою постоянные коэффициенты этого ряда  $A_i(m_i)$  по заданному начальному распределению температур в цилиндре [при  $\tau = 0$ ,  $\theta(r) = \theta_a$ ], получаем окончательное решение задачи:

$$\theta(r, \tau) = \theta_a \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{2J_1(m_i)}{m_i [J_0^2(m_i) + J_1^2(m_i)]} J_0\left(m_i \frac{r}{d/2}\right) e^{-m_i^2 F_0}. \quad (57,6)$$

Для температуры на оси цилиндра при  $r = 0$ :

$$\theta_m(\tau) = \theta_a \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{2J_1(m_i)}{m_i [J_0^2(m_i) + J_1^2(m_i)]} e^{-m_i^2 F_0}. \quad (57,7)$$

Температура поверхности цилиндра находится из (57,6), положив  $r = d/2$ :

$$\theta_F(\tau) = \theta_a \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{2J_1(m_i) J_0(m_i)}{m_i [J_0^2(m_i) + J_1^2(m_i)]} e^{-m_i^2 F_0}. \quad (57,8)$$

Расход тепла, воспринятого цилиндром при нагревании или отданного при его охлаждении, для единичной длины цилиндра за время  $\tau$  находится интегрированием:

$$Q_\tau = \int_{(V)} q_c [\theta_a - \theta(r, \tau)] dV = \frac{\pi d^2}{4} q_c \theta_a \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{4J_1^2(m_i)}{m_i^2 [J_0^2(m_i) + J_1^2(m_i)]} (1 - e^{-m_i^2 F_0}). \quad (57,9)$$

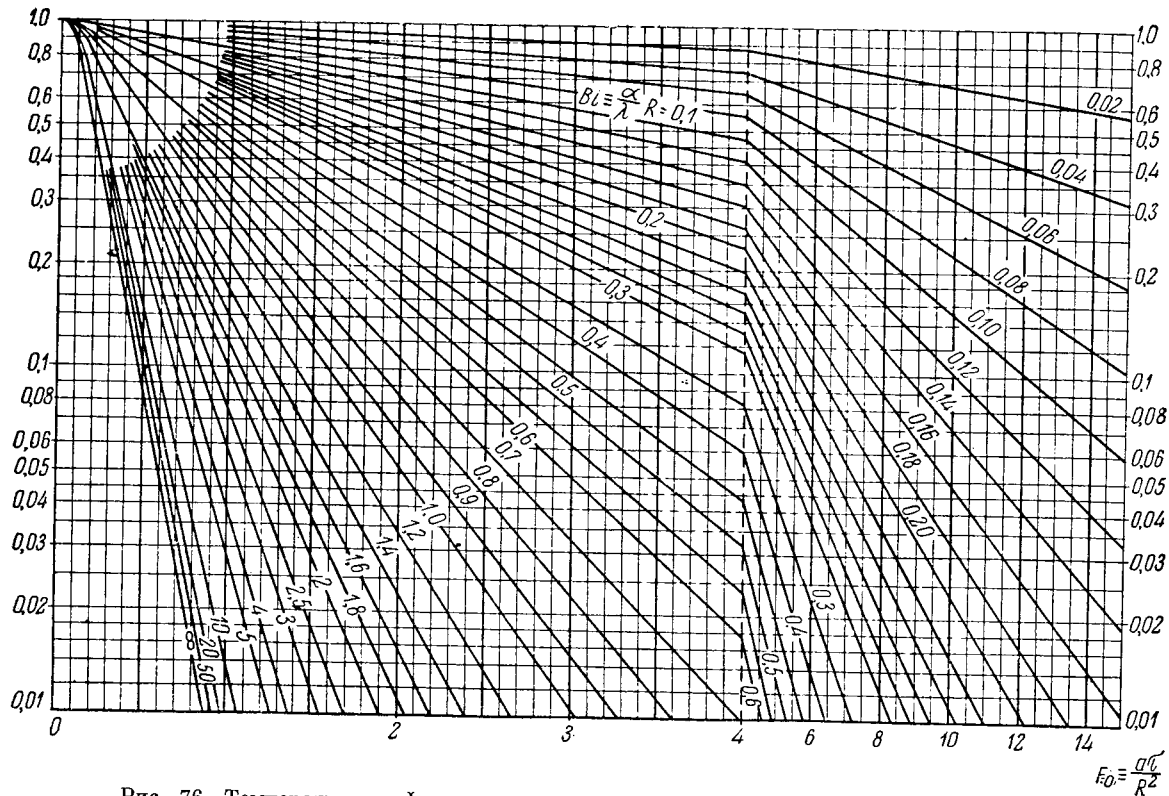


Рис. 76. Температурная функция оси нагреваемого или охлаждаемого цилиндра



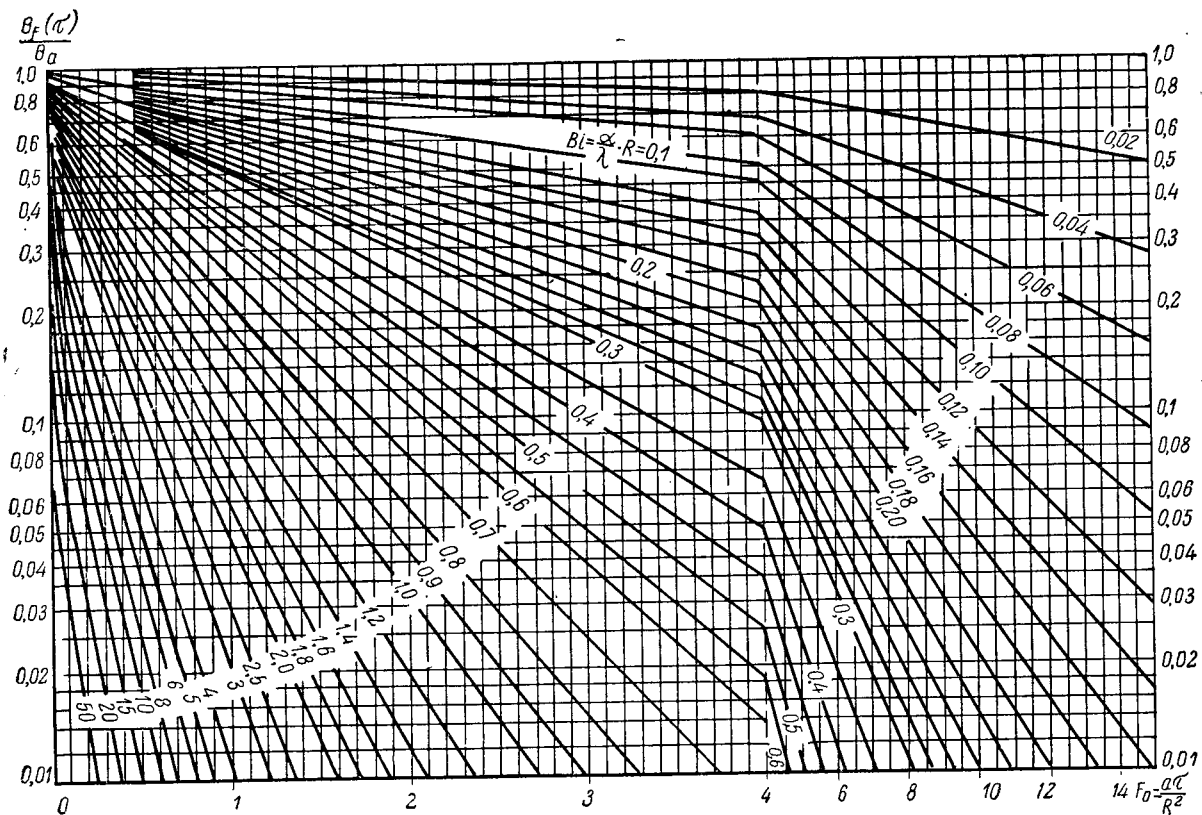


Рис. 75. Температурная функция поверхности нагреваемого или охлаждаемого цилиндра

На рис. 75 и 76 представлены графики для определения температурных функций  $\frac{\theta_F(\tau)}{\theta_a}$  и  $\frac{\theta_m(\tau)}{\theta_a}$  на поверхности и на оси цилиндра в зависимости от критерия  $Fo$  для различных критериев  $Bi$ .

На рис. 77 представлен график для определения расхода тепла цилиндром.

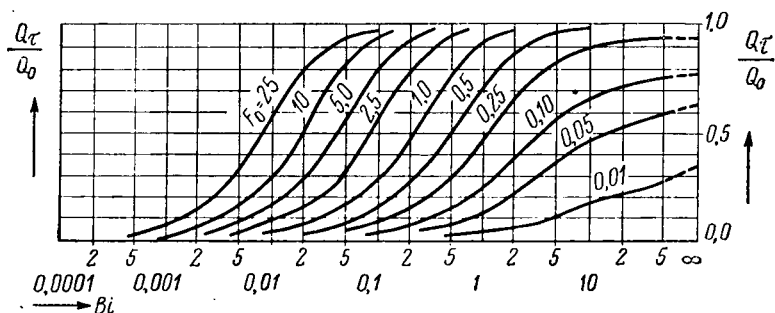


Рис. 77. К расчету расхода тепла при нагревании или охлаждении цилиндра

**Пример.** Найти распределение температур в бетонной колонне диаметром  $d = 0,5$  м, если внезапно температура окружающей среды понизится с  $+20$  до  $-20^\circ\text{C}$ . Физические параметры бетона:  $\lambda = 0,885$  вт/м·град;  $\rho = 2100$  кг/м<sup>3</sup>;  $c = 0,88$  кдж/кг·град ( $\alpha = 0,478 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/сек). Коэффициент теплоотдачи для условий свободного потока воздуха с учетом излучения  $\alpha = 8,15$  вт/м<sup>2</sup>град.

Вычислившем находим критерий  $Bi = \frac{8,15 \cdot 0,25}{0,885} = 2,3$ .

Пользуясь таблицами функций Бесселя, вычисляем корни трансцендентного уравнения:

$$m_i \frac{J_1(m_i)}{J_0(m_i)} = 2,3.$$

При этом ограничиваемся четырьмя первыми корнями, так как остальные дают малозаметный вклад в сумму членов ряда (57,7):

$$m_1 = 1,67, \quad m_2 = 4,35, \quad m_3 = 7,33, \quad m_4 = 10,40;$$

$$J_0(m_1) = +0,415, \quad J_0(m_2) = -0,352, \quad J_0(m_3) = +0,286, \quad J_0(m_4) = -0,243;$$

$$J_1(m_1) = +0,576, \quad J_1(m_2) = -0,188, \quad J_1(m_3) = +0,091, \quad J_1(m_4) = -0,055$$

Пользуясь формулой (57,8), вычисляем температурную функцию для поверхности охлаждаемого цилиндра через 1 час време-

ни ( $F_0 = 0,0275$ ):

$$\begin{aligned} \frac{\theta_F(\tau)}{\theta_a} = 2 \left[ \frac{0,415 \cdot 0,576}{1,67(0,415^2 + 0,576^2)} e^{-1,67^2 \cdot 0,0275} + \right. \\ \left. + \frac{0,352 \cdot 0,188}{4,35(0,352^2 + 0,188^2)} e^{-4,35^2 \cdot 0,0275} + \right. \\ \left. + \frac{0,286 \cdot 0,091}{7,33(0,286^2 + 0,091^2)} e^{-7,33^2 \cdot 0,0275} + \right. \\ \left. + \frac{0,243 \cdot 0,055}{10,4(0,243^2 + 0,055^2)} e^{-10,4^2 \cdot 0,0275} \right] = \\ = 2(0,262 + 0,057 + 0,009 + 0,001) = 0,658. \end{aligned}$$

Температура на поверхности колонны будет:

$$t_F = (-20) + 40 \cdot 0,658 = -20 + 26,3 = +6^\circ,3 \text{ C.}$$

За это же время температурная функция на оси цилиндра:

$$\frac{\theta_m(\tau)}{\theta_a} = 2(0,632 - 0,162 + 0,031 - 0,004) = 0,995 \approx 1.$$

Соответствующая температура на оси колонны равна:

$$t_m = (-20) + 40 = +20^\circ \text{ C,}$$

т. е. через 1 час времени охлаждения колонны температура на ее оси еще не изменится, на поверхности заметно понизится.

Для сокращения дальнейших вычислений пользуемся графиками рис. 75 и 76 и находим  $\frac{\theta_m(\tau)}{\theta_a}$  и  $\frac{\theta_F(\tau)}{\theta_a}$  для отдельных моментов времени охлаждения колонны.

Таким образом, колонна на поверхности почти полностью успевает охладиться через 1 сутки, а в середине — через 3 суток. Распределение температур в охлаждаемой колонне для отдельных моментов времени представлено на рис. 78.

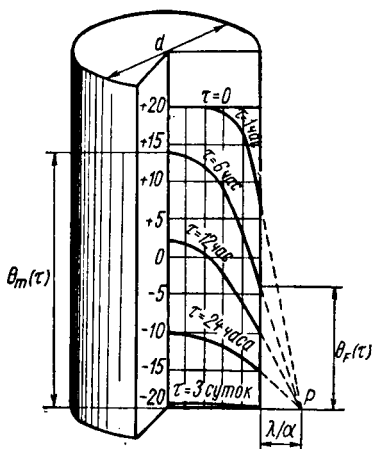


Рис. 78. К расчету температурного поля охлаждаемого цилиндра

Таблица 9

$\tau$ , час	$F_0$	$\frac{\theta_m(\tau)}{\theta_a}$	$\frac{\theta_F(\tau)}{\theta_a}$	$t_m$ , °C	$t_F$ , °C
1	0,0275	1	0,658	+20	+6,3
6	0,165	0,85	0,4	+14	-4
12	0,33	0,55	0,25	+2	-10
24	0,66	0,25	0,12	-10	-15,2
72 (3 суток)	1,98	0,007	0	-19,7	-20

## § 58. Нагревание или охлаждение шара

Имеется шар из однородного материала диаметром  $d$  с одинаковой во всех местах температурой  $T_a$ . Внезапно шар подвергается одинаковому во всех местах поверхности нагреванию или охлаждению средой с неизменной во времени температурой  $T_0$ . Требуется найти распределение температур в шаре в любой момент времени от начала теплового воздействия среды.

Дифференциальное уравнение нестационарной теплопроводности для шара применительно к условиям симметричной задачи запишется в виде:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{2\partial \theta}{r \partial r} \right). \quad (58,1)$$

Применяя для решения этого уравнения, как и в случаях плоской стенки и цилиндра, способ разделения переменных, получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \theta'(\tau) + \varepsilon^2 a \theta(\tau) &= 0, \\ \theta''(r) + \frac{2}{r} \theta'(r) + \varepsilon^2 \theta(r) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (58,2)$$

Решением первого уравнения является экспоненциальная функция

$$\theta(\tau) = e^{-\varepsilon^2 a \tau}.$$

Второе уравнение имеет следующее решение:

$$\theta(r) = A(\varepsilon) \frac{\sin(\varepsilon r)}{\varepsilon r} + B(\varepsilon) \frac{\cos(\varepsilon r)}{\varepsilon r}.$$

Отбрасывая второй член этой суммы как нечетную функцию, меняющую знак при переходе от  $+r$  к  $-r$ , получаем следующее частное решение (58,1):

$$\theta(r, \tau) = A(\varepsilon) \frac{\sin(\varepsilon r)}{\varepsilon r} e^{-\varepsilon^2 a \tau}.$$

Используя граничное условие третьего рода

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial r} \right|_{r=d/2} = -\frac{\alpha}{\lambda} \theta_F,$$

находим:

$$\varepsilon \frac{d}{2} \operatorname{ctg} \left( \varepsilon \frac{d}{2} \right) = 1 - \frac{\alpha d/2}{\lambda}.$$

Обозначая безразмерное произведение  $\varepsilon \frac{d}{2} = n$  и  $\frac{\alpha d/2}{\lambda} \equiv Bi$ , имеем следующее трансцендентное уравнение:

$$n \operatorname{ctg} n = 1 - Bi. \quad (58,3)$$

Это уравнение имеет бесконечное множество корней  $n_1, n_2, \dots$   
 $\dots n_i, \dots$ , удовлетворяющих граничному условию задачи.

Представляя решение (58,1) в виде ряда

$$\theta(r, \tau) = \sum_{i=1}^{i=\infty} A_i(n_i) \frac{\sin\left(n_i \frac{r}{d/2}\right)}{n_i \frac{r}{d/2}} e^{-n_i^2 Fo},$$

где  $n_i$  — корни уравнения (58,3),

$$Fo \equiv \frac{a\tau}{(d/2)^2} \text{ — критерий Фурье,}$$

и определяя постоянные коэффициенты этого ряда  $A_i(n_i)$  (по методу, аналогичному с плоскопараллельной стенкой) по заданному начальному распределению температур в шаре при  $\tau=0$ ,  $\theta(r)=\theta_a$ , приходим к следующему окончательному решению задачи:

$$\theta(r, \tau) = \theta_a \sum_{i=1}^{i=\infty} 2 \frac{\sin n_i - n_i \cos n_i}{n_i - \sin n_i \cos n_i} \frac{\sin\left(n_i \frac{r}{d/2}\right)}{n_i \frac{r}{d/2}} e^{-n_i^2 Fo}. \quad (58,4)$$

Для температурной функции в центре шара получаем:

$$\theta_m(\tau) = \theta_a \sum_{i=1}^{i=\infty} 2 \frac{\sin n_i - n_i \cos n_i}{n_i - \sin n_i \cos n_i} e^{-n_i^2 Fo}, \quad (58,5)$$

для поверхности шара:

$$\theta_F(\tau) = \theta_a \sum_{i=1}^{i=\infty} 2 \frac{\sin n_i - n_i \cos n_i}{n_i - \sin n_i \cos n_i} \cdot \frac{\sin n_i}{n_i} e^{-n_i^2 Fo}. \quad (58,6)$$

Расход тепла на нагревание шара или тепло, отведенное при охлаждении, находится интегрированием:

$$Q_\tau = \int_{(V)} qc(\theta_a - \theta_r) dV = \frac{1}{6} \pi d^3 qc \theta_a \sum 6 \frac{\sin n_i - n_i \cos n_i}{n_i^2 (n_i - \sin n_i \cos n_i)} (1 - e^{-n_i^2 Fo}). \quad (58,7)$$

На рис. 79 и 80 представлены температурные функции нестационарной теплопроводности шара:  $\frac{\theta_m(\tau)}{\theta_a}$  и  $\frac{\theta_F(\tau)}{\theta_a}$ , а на рис. 81 представлен график для определения расхода тепла на нагревание шара.

**Пример.** Определить время нагревания от 0 до температуры 100°С кусочка угля сферической формы диаметром 20 мм, поступающего в горячий газовый поток с температурой 300°С; средние физические параметры угля:  $\bar{\lambda} = 0,175 \text{ вт/м}\cdot\text{град}$ ;  $\bar{\rho} = 1400 \text{ кг/м}^3$ ;  $\bar{c} = 1,3 \text{ кдж/кг}\cdot\text{град}$  ( $a = 0,096 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{сек}$ ); средний

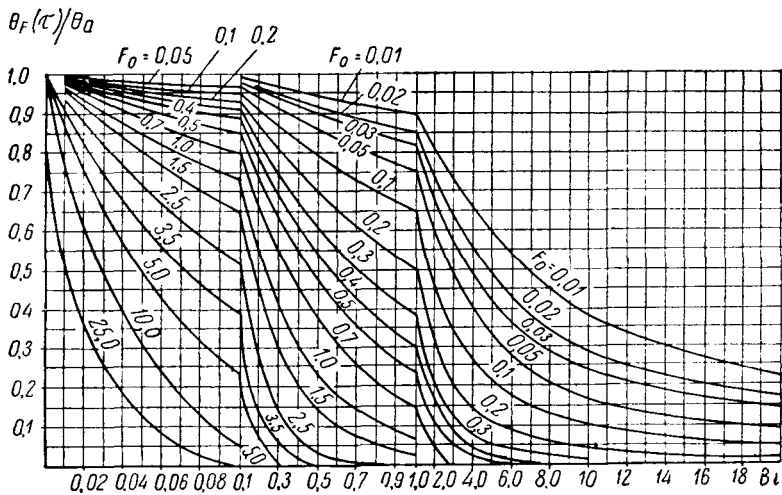


Рис. 79. Температурная функция поверхности нагреваемого или охлаждаемого шара

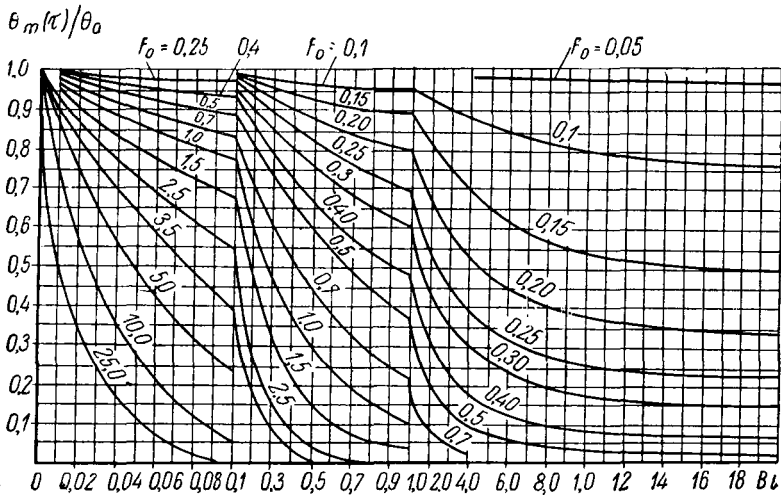


Рис. 80. Температурная функция центра нагреваемого или охлаждаемого шара

коэффициент теплоотдачи  $\alpha = 58,2 \text{ вт/м}^2 \cdot \text{град}$ . Вычислением находим критерий  $Bi = 3,33$ .

Из условия задачи имеем:

$$\frac{\theta_F(\tau)}{\theta_a} = \frac{100}{300} = 0,333.$$

Пользуясь графиком рис. 79, получаем  $Fo \approx 0,09$  и определяем соответствующее время нагревания кусочка:

$$\tau = \frac{Fo (d/2)^2}{a} = 93,5 \text{ сек } (\approx 1,5 \text{ мин}).$$

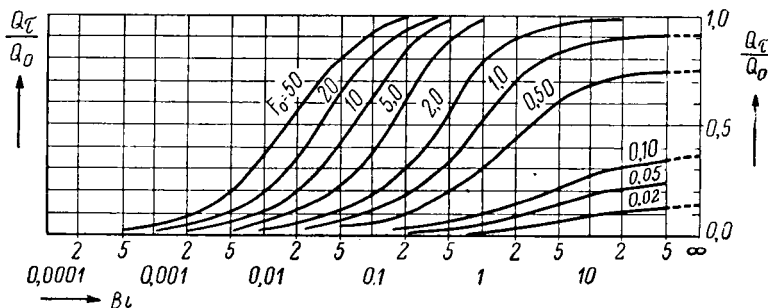


Рис. 81. К расчету расхода тепла при нагревании или охлаждении шара

За это время температура середины кусочка, как это следует из графика рис. 80, изменится:

$$\frac{\theta_m(\tau)}{\theta_a} \approx 0,9 \text{ или } t_m(\tau) = 300 - 0,9 \cdot 300 = 30^\circ \text{ С.}$$

Кусочек угля в горячем газовом потоке начнет высыхать с поверхности слоя значительно раньше, чем он прогреется в середине.

## § 59. Нестационарная теплопроводность тел сложной формы

Имея решения задач нестационарной теплопроводности для тел простой формы (плоская стенка, цилиндр и шар), можно найти решение и для тел более сложной формы, как, например, параллелепипеда, куба, цилиндра, ограниченного торцовыми поверхностями, и т. п. Решения эти находятся путем произведения температурных функций, найденных для простых тел.

Это можно показать на следующем примере. Рассмотрим неограниченную плоскую стенку, для которой получено решение  $\theta(x, \tau)$ . Это решение удовлетворяет дифференциальному

уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \theta(x, \tau) = a \frac{\partial^2}{\partial x^2} \theta(x, \tau). \quad (59,1)$$

Для координаты  $y$  (место  $x, y$  в стенке, рис. 82)  $\theta(y, \tau)$  также удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \theta(y, \tau) = a \frac{\partial^2}{\partial y^2} \theta(y, \tau). \quad (59,2)$$

Для тела, форма которого составлена пересечением двух плоскопараллельных слоев (рис. 82) (неограниченный прямоугольный стержень), дифференциальное уравнение нестационарной теплопроводности запишется в виде:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right). \quad (59,3)$$

Решение этого уравнения можно представить в виде произведения двух температурных функций:

$$\frac{\theta(x, y, \tau)}{\theta_a} = \frac{\theta(x, \tau)}{\theta_a} \cdot \frac{\theta(y, \tau)}{\theta_a}. \quad (59,4)$$

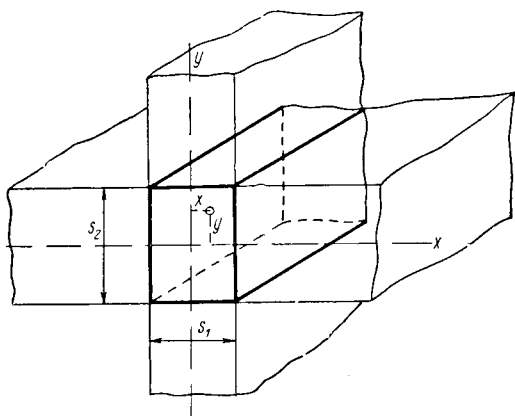


Рис. 82. К расчету нестационарной теплопроводности стержня прямоугольного сечения и неограниченной длины

Действительно, путем дифференцирования представленного решения по  $x, y, \tau$  получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta(x, y, \tau)}{\partial x^2} &= \frac{\theta(y, \tau)}{\theta_a} \frac{\partial^2 \theta(x, \tau)}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2 \theta(x, y, \tau)}{\partial y^2} &= \frac{\theta(x, \tau)}{\theta_a} \frac{\partial^2 \theta(y, \tau)}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial \theta(x, y, \tau)}{\partial \tau} &= \frac{\theta(x, \tau)}{\theta_a} \frac{\partial \theta(y, \tau)}{\partial \tau} + \frac{\theta(y, \tau)}{\theta_a} \frac{\partial \theta(x, \tau)}{\partial \tau}. \end{aligned}$$



Имея в виду (59,1) и (59,2), последнее равенство запишем:

$$\frac{\partial \theta(x, y, \tau)}{\partial \tau} = a \theta(x, \tau) \frac{\partial^2 \theta(y, \tau)}{\partial y^2} + a \theta(y, \tau) \frac{\partial^2 \theta(x, \tau)}{\partial x^2}.$$

Подставляя найденные производные в (59,3), приходим к тождеству:

$$\begin{aligned} \frac{\theta(x, \tau)}{\theta_a} \frac{\partial^2 \theta(y, \tau)}{\partial y^2} + \frac{\theta(y, \tau)}{\theta_a} \frac{\partial^2 \theta(x, \tau)}{\partial x^2} &\equiv \\ &\equiv \frac{\theta(y, \tau)}{\theta_a} \frac{\partial^2 \theta(x, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\theta(x, \tau)}{\theta_a} \frac{\partial^2 \theta(y, \tau)}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

Следовательно, (59,4) является решением (59,3).

Подобным образом можно показать, что применительно к условиям нагревания и охлаждения трехмерных тел решение

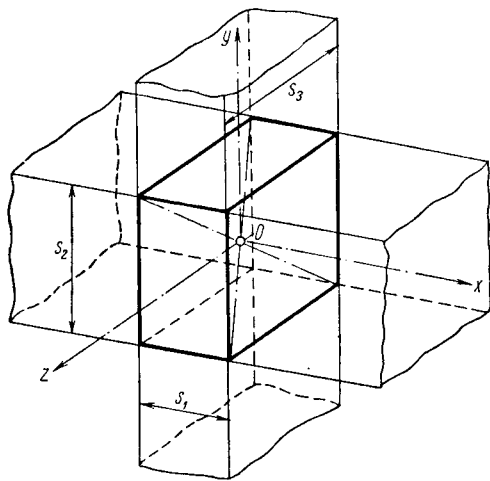


Рис. 83. К расчету нестационарной теплопроводности параллелепипеда

дифференциального уравнения нестационарной теплопроводности также можно представить в виде произведения температурных функций трех сопряженных плоских стенок с началом координат в середине образованного тела (рис. 83):

$$\frac{\theta(x, y, z, \tau)}{\theta_a} = \frac{\theta(x, \tau)}{\theta_a} \cdot \frac{\theta(y, \tau)}{\theta_a} \cdot \frac{\theta(z, \tau)}{\theta_a}, \quad (59,5)$$

где  $\frac{\theta(x, \tau)}{\theta_a}$ ,  $\frac{\theta(y, \tau)}{\theta_a}$  и  $\frac{\theta(z, \tau)}{\theta_a}$  находятся согласно решению (56,5) для соответствующих значений  $x$ ,  $y$  и  $z$ .

Так же находится и распределение температур в цилиндре, ограниченном торцовыми поверхностями:

$$\frac{\theta(r, x, \tau)}{\theta_a} = \frac{\theta(r, \tau)}{\theta_a} \cdot \frac{\theta(x, \tau)}{\theta_a}, \quad (59,6)$$

где  $\frac{\theta(r, \tau)}{\theta_a}$  находится согласно решению (57,6), а  $\frac{\theta(x, \tau)}{\theta_a}$  — согласно (56,5) при расположении начала координат в центре тяжести однородного цилиндра.

Все рассмотренные решения задач нестационарной теплопроводности могут быть получены и иными методами. Особенно эффективным методом оказывается метод преобразования Лапласа, примеры применения которого к решению задач теплопроводности можно найти в [35].

### § 60. Нагревание и охлаждение тел при малых критериях Био ( $Bi \ll 1$ )

При малых критериях  $Bi \equiv \frac{\alpha l/2}{\lambda}$ , например для тонких металлических стенок, проволок или шариков, температура на поверхности и в середине нагреваемого или охлаждаемого тела почти не различается.

В этом можно убедиться, если вычислить температурную функцию  $\frac{\theta_F(\tau)}{\theta_m(\tau)}$ . Для тонкой пластины результат вычисления получается достаточно точным, если ограничиться одним первым членом суммы уравнения (56,5) и (56,6):

$$\frac{\theta_F(\tau)}{\theta_m(\tau)} = \cos \delta_1.$$

Так как  $\delta \operatorname{tg} \delta = Bi$ , а при малых  $Bi$   $\delta$  получается также малым, то  $\cos \delta \approx 1$ . Следовательно,

$$\frac{\theta_F(\tau)}{\theta_m(\tau)} \approx 1.$$

При этих условиях для изменения температуры плоскопараллельной стенки во времени имеем равенство:

$$-\frac{s}{2} \rho c d\theta = \alpha \theta d\tau,$$

или

$$\frac{d\theta}{\theta} = -\frac{\alpha}{s/2 \rho c} d\tau.$$

Интегрируя в пределах от 0 до  $\tau$  и от  $\theta_a$  до  $\theta$ , находим:

$$\ln \frac{\theta}{\theta_a} = -\frac{\alpha \tau}{s/2 \rho c} = -\frac{\alpha s/2}{\lambda} \frac{\lambda \tau}{\rho c (s/2)^2} = -Bi \cdot Fo,$$

откуда получаем:

$$\theta = \theta_a e^{-Bi \cdot Fo}; \quad \tau = \frac{(s/2)^2}{a} \frac{\ln \frac{\theta_a}{\theta}}{Bi}. \quad (60,1)$$

Аналогично находим для тонких цилиндров:

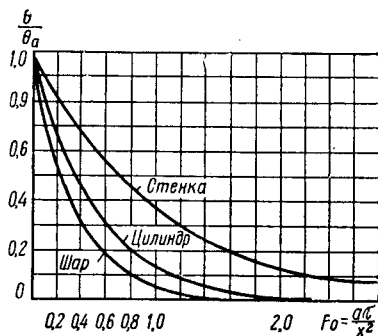
$$\theta = \theta_a e^{-2Bi \cdot Fo}; \quad \tau = \frac{1}{2} \frac{(d/2)^2}{a} \frac{\ln \frac{\theta_a}{\theta}}{Bi} \quad (60,2)$$

и для шара:

$$\theta = \theta_a e^{-3Bi \cdot Fo}; \quad \tau = \frac{1}{3} \frac{(d/2)^2}{a} \frac{\ln \frac{\theta_a}{\theta}}{Bi}. \quad (60,3)$$

Из полученных решений следует, что при одинаковой толщине пластины, цилиндра и шара цилиндр будет нагреваться и охлаждаться в 2 раза, а шар — в 3 раза быстрее плоской стенки. Это отношение 1 : 2 : 3 времени нагревания или охлаждения пластины, цилиндра и шара соответствует отношению поверхности к объему этих тел, которое также равно 1 : 2 : 3.

На рис. 84 представлены кривые температурных функций  $\frac{\theta}{\theta_a}$  для пластины, цилиндра и шара в зависимости от критерия  $Fo$  при малых значениях  $Bi$ .



### § 61. Нагревание и охлаждение тел при больших критериях $Bi$ ( $Bi \gg 1$ )

При больших значениях критерия  $Bi = \frac{\alpha l/2}{\lambda}$ , например при нагревании или охлаждении тел контактом или при больших коэффициентах теплоотдачи температура поверхности тела будет близка к температуре окружающей среды. Это подтверждается тем, что для плоской стенки при больших значениях  $Bi$  корни уравнения

$$\delta_i \operatorname{tg} \delta_i = Bi$$

получаются близкими к числам:

$$\frac{\pi}{2}; \quad 3 \frac{\pi}{2}; \quad 5 \frac{\pi}{2}; \quad 7 \frac{\pi}{2}, \dots$$

Рис. 84. Температурная функция нагреваемых или охлаждаемых тел (плоской стенки, цилиндра и шара) при  $Bi \ll 1$

и для всех этих корней

$$\sin \delta_i \cos \delta_i \approx 0.$$

При этом все члены суммы в (56,7) будут близки нулю, а потому

$$\frac{\theta_F(\tau)}{\theta_a} \approx 0 \text{ или } t_F \approx t_0.$$

Для середины плоской стенки температурная функция получается в виде следующего ряда:

$$\begin{aligned} \frac{\theta_m(\tau)}{\theta_a} = & \frac{4}{\pi} e^{-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 Fo} \left[ 1 - \frac{1}{3} e^{-8\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 Fo} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{5} e^{-24\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 Fo} - \frac{1}{7} e^{-48\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 Fo} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (61,1)$$

Для критерия  $Fo \geq 0,2$  выражение в скобках можно принять с достаточной точностью за единицу и

$$\frac{\theta_m(\tau)}{\theta_a} = \frac{4}{\pi} e^{-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 Fo}. \quad (61,2)$$

Отсюда можно определить время нагревания или охлаждения середины стенки до  $\theta_m$ :

$$\tau = \frac{4}{\pi^2} \frac{(s/2)^2}{a} \ln \left( \frac{4}{\pi} \frac{\theta_a}{\theta_m} \right). \quad (61,3)$$

Для цилиндра при больших критериях  $Bi$  корни уравнения

$$m_i \frac{J_1(m_i)}{J_0(m_i)} = Bi$$

получаются близкими к числам: 2,405, 5,52, 8,654, 11,792, и для всех этих значений  $J_0(m_i) \approx 0$ , а  $J_1(m_i)$  соответственно получаются: +0,519; -0,340; +0,271; -0,232.

Для оси цилиндра температурная функция получается в виде следующего ряда:

$$\begin{aligned} \frac{\theta_m(\tau)}{\theta_a} = & 1,6 e^{-2,405^2 Fo} [1 - 0,665 e^{-24,7 Fo} + \\ & + 0,552 e^{-69,2 Fo} - 0,392 e^{-133,2 Fo} + \dots]. \end{aligned} \quad (61,4)$$

Для критерия  $Fo \geq 0,2$  выражение в скобках можно принять с большой точностью за единицу и написать:

$$\frac{\theta_m(\tau)}{\theta_a} = 1,6 e^{-5,79 Fo}. \quad (61,5)$$

Отсюда можно определить время нагревания или охлаждения середины цилиндра до  $\theta_m$ :

$$\tau = \frac{(d/2)^2}{5,79 a} \ln \left( 1,6 \frac{\theta_a}{\theta_m} \right). \quad (61,6)$$

Для шара при больших критериях  $Bi$  корни уравнения

$$n_i \operatorname{ctg} n_i = 1 - Bi$$

получаются близкими к числам:

$$\pi; 2\pi; 3\pi; 4\pi; \dots$$

и, следовательно,

$$\sin n_i = 0,$$

а  $\cos n_i$  соответственно равен:

$$-1; +1; -1; +1.$$

Для середины шара температурная функция получается в виде следующего ряда:

$$\frac{\theta_m(\tau)}{\theta_a} = 2e^{-\pi^2 Fo} [1 - e^{-3\pi^2 Fo} + e^{-8\pi^2 Fo} - e^{-15\pi^2 Fo} + \dots]. \quad (61,7)$$

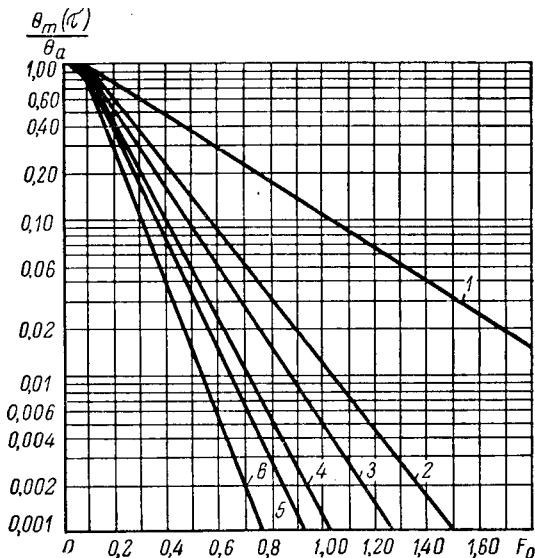


Рис. 85. Температурная функция середины нагреваемых или охлаждаемых тел различной формы при  $Bi \gg 1$ :

- 1 — плоская стенка; 2 — стержень квадратного сечения; 3 — цилиндр неограниченной длины; 4 — куб; 5 — цилиндр с длиной, равной диаметру; 6 — шар

Для критерия  $Fo \geq 0,2$  выражение в скобках с большой точностью можно принять за единицу и написать:

$$\frac{\theta_m(\tau)}{\theta_a} = 2e^{-\pi^2 Fo}. \quad (61,8)$$

Отсюда можно определить время нагревания или охлаждения середины шара до  $\theta_m$ :

$$\tau = \frac{(d/2)^2}{\pi^2 a} \ln \left( 2 \frac{\theta_a}{\theta_m} \right). \quad (61,9)$$

На рис. 85 представлена температурная функция  $\frac{\theta_m(\tau)}{\theta_a}$  в зависимости от критерия  $Fo$ , при  $Bi \rightarrow \infty$  для пластины, цилиндра и шара, а также для некоторых других геометрических форм тел.

## § 62. Регулярный режим нагревания и охлаждения тел

Все рассмотренные выше задачи о нагревании и охлаждении тел различной формы были решены при условии наиболее простого начального теплового состояния тела, а именно, когда температура во всех местах тела была одинаковой. Если в начальный момент времени нагревания или охлаждения однородного тела температура будет распределяться по какому-либо известному закону

$$\theta_a = \theta_a(x, y, z),$$

то решение уравнения теплопроводности может быть представлено в виде следующего ряда:

$$\theta(x, y, z, \tau) = \sum_{i=1}^{i=\infty} A_i \theta_i(x, y, z) e^{-m_i \tau}, \quad (62,1)$$

где  $A_1, A_2, \dots A_i \dots$  — постоянные, зависящие от начального теплового состояния тела и определяемые из этого краевого условия;

$\theta_i(x, y, z)$  — температурные функции только координат;  
 $m_1, m_2, \dots m_i \dots$  — положительные размерные величины, определяемые из граничных условий задачи, причем  $m_1 < m_2 < m_3 < \dots m_i < \dots$

Анализируя характер зависимости температур от времени в отдельных точках тела, можно заметить, что по прошествии некоторого времени от начала нагревания или охлаждения тела температура во всех его точках будет в основном определяться только одним первым членом ряда:

$$\theta(x, y, z, \tau) = A_1 \theta_1(x, y, z) e^{-m_1 \tau}. \quad (62,2)$$

С этого момента времени нагревания или охлаждения тела начальное распределение температур в теле теряет свое значение, и ход процесса управляется лишь условиями на границе. При этом температура во всех местах тела находится в зависимости от формы тела, его физических параметров и условий теплооб-

мена на границе. Такой характер нагревания или охлаждения тела называют **регулярным тепловым режимом**.

Скорость изменения температуры во времени в отдельных местах тела в условиях регулярного теплового режима сохраняется неизменной:

$$\frac{d\theta(x, y, z, \tau)}{d\tau} = -m_1 A_1 \theta_1(x, y, z).$$

Для каких-либо двух последовательных моментов времени

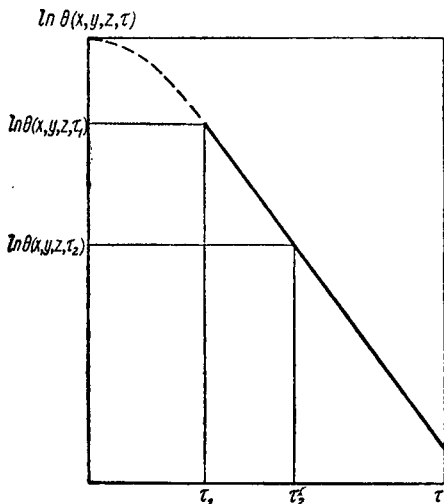


Рис. 86. Температурная функция в условиях регулярного режима нагревания или охлаждения тел

регулярного теплового режима тела в каждой его точке можно записать:

$$\tau_1 = -\frac{1}{m_1} \ln \frac{\theta_1(x, y, z, \tau_1)}{A_1 \theta_1(x, y, z)},$$

$$\tau_2 = -\frac{1}{m_1} \ln \frac{\theta_2(x, y, z, \tau_2)}{A_1 \theta_1(x, y, z)}.$$

Из этих равенств путем вычитания находим величину характеризующую темп регулярного режима:

$$m_1 = \frac{\ln \theta_1(x, y, z, \tau_1) - \ln \theta_2(x, y, z, \tau_2)}{\tau_2 - \tau_1} = \frac{\ln \frac{\theta_1(x, y, z, \tau_1)}{\theta_2(x, y, z, \tau_2)}}{\tau_2 - \tau_1}. \quad (62,3)$$

Полученная формула позволяет определить величину  $m_1$  из опыта путем измерения температуры в какой-либо точке тела для двух последовательных моментов времени регулярного режима.

В координатах  $\ln \theta(x, y, z, \tau)$  и  $\tau$  температурная функция для регулярного режима представляется прямой линией (рис. 86).

Для малых критериев Био ( $Bi \ll 1$ ) из уравнений (60,1 — 60,3) находим:

$$\left. \begin{array}{l} \text{для пластины} \\ m_1 = \frac{a}{(s/2)^2} Bi; \\ \text{для цилиндра} \\ m_1 = \frac{2a}{(d/2)^2} Bi; \\ \text{для шара} \\ m_1 = \frac{3a}{(d/2)^2} Bi. \end{array} \right\} \quad (62,4)$$

Для больших критериев Био ( $Bi \gg 1$ ), согласно уравнениям (61,3), (61,6) и (61,9), получаем:

$$\left. \begin{array}{l} \text{для пластины} \\ m_1 = \frac{\pi^2}{4} \frac{a}{(s/2)^2}; \\ \text{для цилиндра} \\ m_1 = 5,79 \frac{a}{(d/2)^2}; \\ \text{для шара} \\ m_1 = \pi^2 \frac{a}{(d/2)^2}. \end{array} \right\} \quad (62,5)$$

В общем случае для определения темпа регулярного режима служит формула

$$m_1 = \psi \frac{a}{l^2},$$

где  $\psi$  — функция от критерия  $Bi$  и формы тела;  
 $a$  — коэффициент температуропроводности тела;  
 $l$  — условный геометрический размер тела.

Следовательно, произведение

$$m_1 \tau = \psi \frac{a\tau}{l^2} = \psi Fo = f(Bi, Fo) \quad (62,6)$$

в общем случае для тел заданной формы включает оба определяющих критерия:  $Fo$  и  $Bi$ .

Пользуясь методом регулярного режима, можно определять экспериментально коэффициенты температуропроводности различных материалов, а также и другие теплофизические параметры. Для этого проще всего создать условия нагревания или охлаждения выбранного образца материала при весьма больших критериях  $Bi$ . Такие условия сравнительно легко создать для материалов с небольшими коэффициентами теплопроводности (пористые, сыпучие материалы и пр.), помещая их (в соответствующей защит-



ной оболочке) в нагреваемую или охлаждаемую жидкость (воду, масло, расплавленные металлы и пр.) и применяя соответствующие побудители движения жидкости (мешалки и пр.).

В зависимости от формы испытуемого образца материала (характеризуемой фактором формы  $\psi$ ), по замеренным температурам за интервал времени нагревания или охлаждения  $\Delta\tau$  и по полученной величине  $m_1$  коэффициент температуропроводности  $a$  находится по формуле:

$$a = m_1 \frac{l^2}{\psi}.$$

Г. М. Кондратьев разработал методы регулярного режима для определения тепловых свойств различных материалов (теплоизоляторов, металлов, жидкостей), а также коэффициентов теплоотдачи отдельных тел и промышленных объектов [24].

### § 63. Нестационарная теплопроводность полуограниченного массива

Массив, ограниченный плоской поверхностью и не ограниченный в нормальном к поверхности направлении  $+x$ , называется

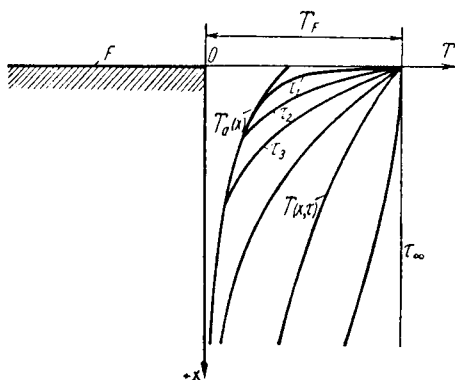


Рис. 87. К определению нестационарной теплопроводности полуограниченного массива

полуограниченным массивом, или полубесконечным телом, для распространения тепла в направлении  $+x$ . Такой однородный полуограниченный массив с плоской поверхностью неограниченных размеров (рис. 87), имеющий в начальный момент времени заданное распределение температур  $T_a(x)$ , подвергается на поверхности внезапному тепловому воздействию при сохранении в дальнейшем неизменной во времени температуры поверхности  $T_F$ . Требуется найти распределение температур в массиве.

В решении дифференциального уравнения нестационарной теплопроводности

$$T(x, \tau) - T_F = \theta(x, \tau) = \sum_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_{\infty}} [A(\varepsilon_i) \cos(\varepsilon_i x) + B(\varepsilon_i) \sin(\varepsilon_i x)] e^{-\varepsilon_i^2 a \tau}$$

применительно к условиям рассматриваемой задачи для возможности удовлетворения начального краевого условия (при  $\tau=0$  и  $x=0$ ,  $\theta=0$ ) необходимо положить  $A(\varepsilon_i)=0$  и принять решение в виде:

$$\theta(x, \tau) = \sum_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_{\infty}} B(\varepsilon_i) \sin(\varepsilon_i x) e^{-\varepsilon_i^2 a \tau}.$$

Так как размеры тела в направлении  $+x$  неограниченны, то другого краевого условия не существует, и в связи с этим приходится использовать весь спектр бесконечного множества величин  $\varepsilon_i$ , записав решение уравнения теплопроводности в виде интеграла:

$$\theta(x, \tau) = \int_0^{\infty} B(\varepsilon) \sin(\varepsilon x) e^{-\varepsilon^2 a \tau} d\varepsilon. \quad (63,1)$$

Для начального условия ( $\tau=0$ ):

$$T_a(x) - T_F = \theta_a(x) = \int_0^{\infty} B(\varepsilon) \sin(\varepsilon x) d\varepsilon. \quad (63,2)$$

Для функции, представляющей распределение определяемой величины в бесконечно протяженной системе существует интеграл Фурье, который применительно к температурному полю в полубесконечном массиве в начальный момент времени запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \theta_a(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \theta_a(\xi) d\xi \int_0^{\infty} \sin(\varepsilon x) \sin(\varepsilon \xi) d\varepsilon = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin(\varepsilon x) d\varepsilon \int_0^{\infty} \theta_a(\xi) \sin(\varepsilon \xi) d\xi. \end{aligned} \quad (63,3)$$

Из сравнения (63,2) с (63,3) получаем:

$$B(\varepsilon) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \theta_a(\xi) \sin(\varepsilon \xi) d\xi.$$

Следовательно, для определения температурного поля в полубесконечном массиве необходимо вычислить интеграл:

$$\theta(x, \tau) = \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon^2 a \tau} \sin(\varepsilon x) d\varepsilon \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \theta_a(\xi) \sin(\varepsilon \xi) d\xi.$$

Этот интеграл можно записать также в таком виде:

$$\theta(x, \tau) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \theta_a(\xi) \left[ \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon^2 a \tau} \sin(\varepsilon x) \sin(\varepsilon \xi) d\varepsilon \right] d\xi.$$

Вычислением находим:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon^2 a \tau} \sin(\varepsilon x) \sin(\varepsilon \xi) d\varepsilon &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon^2 a \tau} \cos[\varepsilon(\xi - x)] d\varepsilon - \\ &- \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon^2 a \tau} \cos[\varepsilon(\xi + x)] d\varepsilon = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{a\tau}} \left( e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a\tau}} - e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4a\tau}} \right). \end{aligned}$$

При этом используется известный интеграл:

$$\int_0^{\infty} e^{-\varepsilon^2 a \tau} \cos[\varepsilon(\xi \pm x)] d\varepsilon = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a\tau}} e^{-\frac{(\xi \pm x)^2}{4a\tau}}.$$

Таким образом, приходим к следующему решению задачи:

$$\theta(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a\tau}} \int_0^{\infty} \theta_a(\xi) \left[ e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a\tau}} - e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4a\tau}} \right] d\xi. \quad (63,4)$$

Если начальная температура массива во всех местах будет одинаковой, то

$$\theta_a(\xi) = \theta_a.$$

Принимая далее  $\varepsilon = \frac{\xi \mp x}{2\sqrt{a\tau}}$  с переменной  $\xi$  и имея в виду, что, соответственно принятому значению  $\varepsilon$ ,  $\xi = \varepsilon^2 2\sqrt{a\tau} \pm x$ , находим дифференциал переменной величины:

$$d\xi = 2\sqrt{a\tau} d\varepsilon.$$

Заменяя нижний предел интегрирования в формуле (63,4) с  $\xi = 0$  на  $\varepsilon = \mp \frac{x}{2\sqrt{a\tau}}$  и сохраняя верхний предел, так как для

$\xi \rightarrow \infty \quad \varepsilon \rightarrow \infty$ , приходим к следующей формуле:

$$\theta(x, \tau) = \theta_a \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \int_{-\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}}^{\infty} e^{-\varepsilon^2} d\varepsilon - \int_{\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}}^{\infty} e^{-\varepsilon^2} d\varepsilon \right) = \theta_a \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}}^{+\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}} e^{-\varepsilon^2} d\varepsilon,$$

или, иначе,

$$\theta(x, \tau) = \theta_a \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}} e^{-\varepsilon^2} d\varepsilon. \quad (63,5)$$

Полученная функция

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}} e^{-\varepsilon^2} d\varepsilon \equiv \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{a\tau}} \right) \equiv \psi \left( \frac{x}{2\sqrt{a\tau}} \right)$$

представляет собой Гауссов интеграл ошибок (функция Крампэ).

Свойства функции Крампэ (рис. 88) таковы, что для  $\frac{x}{2\sqrt{a\tau}} = 0 \quad \psi \left( \frac{x}{2\sqrt{a\tau}} \right) = 0$ ; для  $\frac{x}{2\sqrt{a\tau}} \rightarrow \infty \quad \psi \left( \frac{x}{2\sqrt{a\tau}} \right) \rightarrow 1$ .

Таким образом, нестационарное температурное поле, возникающее в полуограниченном массиве от теплового воздействия, на поверхности определяется температурной функцией:

$$\frac{\theta(x, \tau)}{\theta_a} = \frac{T(x, \tau) - T_F}{T_a - T_F} = \psi \left( \frac{x}{2\sqrt{a\tau}} \right). \quad (63,6)$$

На рис. 89 представлены кривые температурной функции

$$\frac{T_a - T(x, \tau)}{T_a - T_F} = 1 - \psi \left( \frac{x}{2\sqrt{a\tau}} \right)$$

в массиве сухого песчаного грунта ( $a = 0,75 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{сек}$ ) для различных моментов времени.

Удельный поток тепла на поверхности массива определяется формулой:

$$q_F(\tau) = -\lambda \left. \frac{\partial \theta(x, \tau)}{\partial x} \right|_F.$$

Дифференцированием находим:

$$\left. \frac{\partial \theta(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=0} = \theta_a \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2\sqrt{a\tau}} e^{-\frac{x^2}{4a\tau}} \Big|_{x=0} = \theta_a \frac{1}{\sqrt{\pi a\tau}}.$$

Таким образом, для определения удельного потока тепла на поверхности массива получаем формулу:

$$q_F(\tau) = (T_F - T_a) \sqrt{\frac{\lambda_{0c} \epsilon m}{\pi \tau}} \cdot \quad (63,7)$$

Согласно этой формуле, удельный поток тепла в массиве от теплового воздействия на поверхности получается очень большим в начальные моменты времени, а в дальнейшем уменьшается.

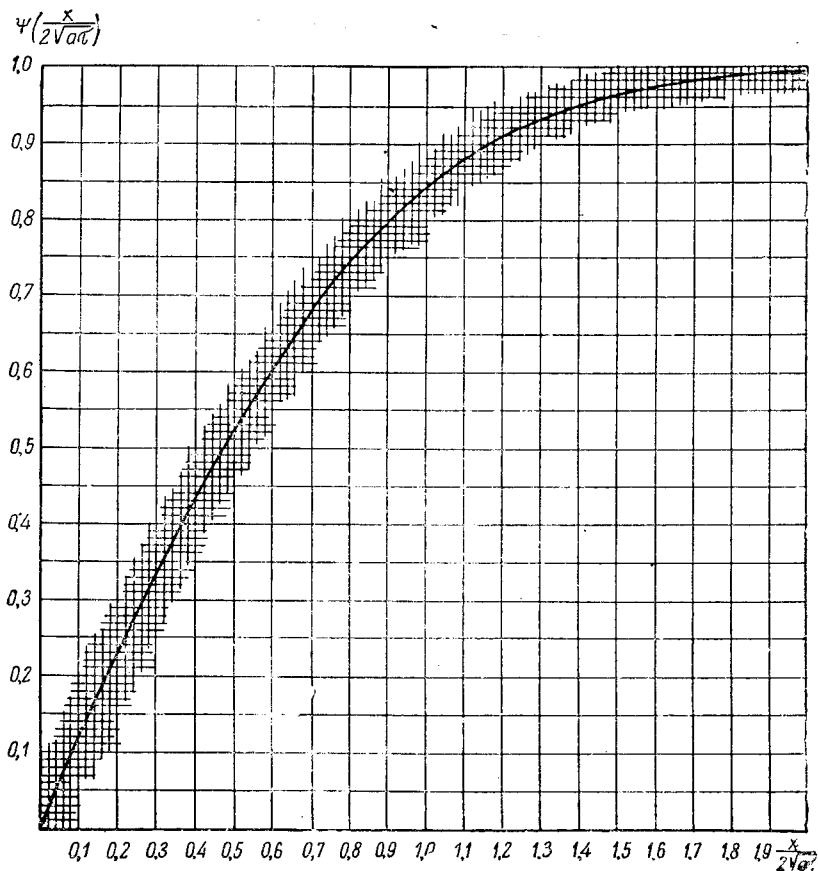


Рис. 88. Функция  $\psi\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}\right)$  для расчета температурного поля нагреваемого или охлаждаемого полуограниченного массива

Необходимо отметить, что интервал времени  $\tau$  в этой формуле может быть взят лишь значительно больше времени пробега носи-

телей энергии между актами однократного обмена энергией с частицами вещества  $\left(\tau \gg \frac{\bar{l}}{c}\right)$ .

Теоретически возможная величина удельного потока тепла от теплового воздействия на поверхности массива, согласно изложенному в главе I, определяется формулой:

$$q_{F \text{ макс}} = \bar{c}(\varrho c)(T_F - T_a), \quad (63,8)$$

где  $\bar{c}$  — средняя скорость носителей энергии;

$(\varrho c)$  — объемная теплоемкость массива;

$T_F - T_a$  — разность температур на поверхности массива от теплового воздействия ( $T_a$  — начальная температура тела).

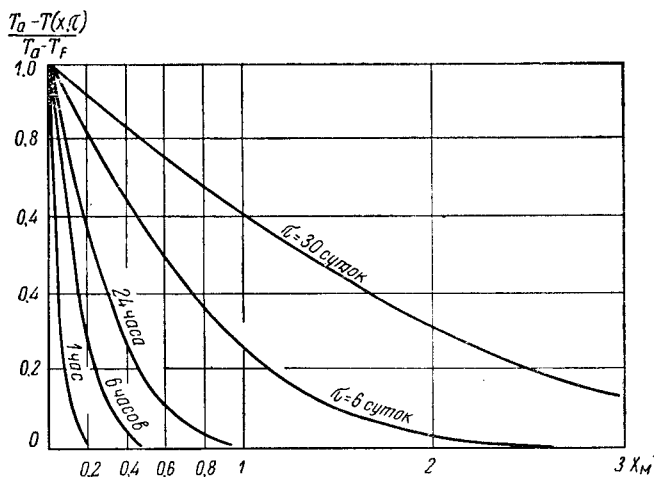


Рис. 89. Температурная функция при нагревании или охлаждении сухого песчаного грунта ( $a=0,75 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/сек)

Из формулы (63,8) также следует, что скорость распространения тепла в теле не может превышать среднюю скорость носителей энергии.

Расход тепла для единичной поверхности массива находится интегрированием:

$$Q_\tau = \int_0^\tau q_F(\tau) d\tau = (T_F - T_a) \sqrt{\frac{\lambda \varrho c}{\pi}} \int_0^\tau \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} = (T_F - T_a) 2 \sqrt{\frac{\lambda \varrho c}{\pi \tau}} \frac{\partial x}{\partial \tau}. \quad (63,9)$$

Как видно, расход тепла от теплового воздействия на единичной поверхности массива оказывается пропорциональным квадратному корню из произведения физических параметров вещества массива ( $\lambda \varrho c$ ) и зависит от времени нагревания  $\tau$ .

Если сравнить расход тепла на нагревание или охлаждение массива из различного материала при одинаковом интервале времени, например за 1 сек, за 1 час и т. д., то величина

$$b = \sqrt{\frac{\lambda \rho c}{\pi \tau} \frac{em}{\text{м}^2 \text{град}}}$$

представляет *аккумулирующую способность* материала и называется коэффициентом теплоусвоения. Коэффициент теплоусвоения материала представляет собой расход тепла за единицу времени для единичной площади поверхности при разности температур в один градус.

Пользуясь коэффициентом теплоусвоения для удельного потока и расхода тепла, получаем формулы:

$$q_F(\tau) = b(T_F - T_a) \frac{em}{\text{м}^2}; \quad (63,10)$$

$$Q_\tau = 2\tau b(T_F - T_a) \frac{\partial \text{жс}}{\text{м}^2}. \quad (63,11)$$

Аналогично коэффициенту *внешней теплоотдачи* тела в окружающей среде коэффициент теплоусвоения представляет *внутреннюю теплоотдачу* в массиве.

Физический смысл коэффициента теплоусвоения легко понять из повседневного опыта; например, прикладывая руку к предметам, находящимся при одинаковой комнатной температуре, меньшей температуры нашего тела, мы будем ощущать как более «холодные» те предметы, которые имеют больший коэффициент теплоусвоения. Для стали, кирпича и дерева коэффициенты теплоусвоения относятся как 30 : 2 : 1.

Задачу о тепловом воздействии на полуограниченный массив тела можно решить и в том случае, если будет задана внезапно изменившаяся температура окружающей среды  $T_0$  и известен коэффициент внешней теплоотдачи  $\alpha$  (граничное условие третьего рода). Ограничимся приведенным результатом решения этой задачи:

$$\frac{\theta(x, \tau)}{\theta_a} = \psi\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right) + e^{\frac{\alpha}{\lambda}\left(x + \frac{\alpha}{\lambda}a\tau\right)} \cdot \left[1 - \psi\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}} + \frac{\alpha}{\lambda}\sqrt{a\tau}\right)\right], \quad (63,12)$$

где  $\psi$  — функция Крампа.

При очень больших коэффициентах теплоотдачи эта формула переходит в уже известную формулу температурной функции в массиве (63,6).

## § 64. Нестационарная теплопроводность с фронтом превращения вещества

В различных прикладных задачах теплопередачи приходится встречаться с распространением тепла теплопроводностью при наличии в неподвижной среде фазовых или химических превра-

щений, с освобождением или связыванием энергии  $E_{\text{превр}} \frac{\text{кдж}}{\text{кг}}$ . Если удельная производительность процесса превращения вещества и соответствующая ей мощность источника энергии достаточно велики, а теплопроводность среды не в состоянии достаточно быстро отводить или подводить тепло, то процесс превращения локализуется в узкой зоне фронта. При достаточно большой тепловой мощности фронта  $\frac{\text{вт}}{\text{м}^2}$ , в соответствии со скоростью притока и отвода тепла на границах фронта, фронт превращения вещества в неподвижной среде перемещается в направлении охвата спонтанным процессом превращения новых масс среды.

К схеме таких фронтовых процессов теплопроводности можно отнести, например, отвердевание различных жидких масс (затвердевание отливок, промерзание влажного грунта и т. п.). Фронтовой процесс распространения имеют химические реакции в неподвижных средах (процесс распространения пламени в горючих смесях, химическое превращение веществ в слоях шихты и т. п.).

Количество энергии, освобождаемой или связываемой в узкой зоне фронта превращения толщиной  $\delta\xi$ , на единице площади за элемент времени  $\delta\tau$  находится согласно равенству:

$$q_{F \text{ превр}} \cdot \delta\tau = Q_{\text{превр}} E_{\text{превр}} \delta\xi.$$

Отсюда находится удельная тепловая мощность фронта превращения вещества:

$$q_{F \text{ превр}} = Q_{\text{превр}} E_{\text{превр}} \frac{\delta\xi}{\delta\tau} \frac{\text{вт}}{\text{м}^2}. \quad (64,1)$$

Для энергетической характеристики процесса превращения в среде можно ввести условное понятие потенциальной температуры превращения  $\theta_{\text{превр}}$ , которая отвечает потенциальной энергии превращения вещества (температура фазовых или химических превращений):

$$\theta_{\text{превр}} = \frac{Q_{\text{превр}} E_{\text{превр}}}{\rho c_p}, \quad (64,2)$$

где  $Q_{\text{превр}} \left( \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right)$  — парциальная плотность компонента превращения;

$E_{\text{превр}} \left( \frac{\text{кдж}}{\text{кг}} \right)$  — энергия превращения;

$\rho c_p \left( \frac{\text{кдж}}{\text{м}^3 \text{град}} \right)$  — объемная теплоемкость среды.

В процессах химического превращения компонентов вещества среды с освобождением энергии (например, в процессах горения) температура фронта отвечает суммарной температуре начального теплового состояния ( $T_1$ ) и потенциальной химической темпера-



туре ( $\theta_{\text{хим}}$ )

$$T_* = T_1 + \theta_{\text{хим}}$$

тем в большей мере, чем меньше потери тепла средой или телом

$$T_{\text{фр}} = T_* - \delta T_{\text{потерь}}$$

В процессах фазового превращения вещества среды температура фронта отвечает характеристической температуре фазового превращения

$$T_{\text{фр}} = T_{\text{фаз}}$$

и прямой связи с условной температурой потенциальной энергии фазового превращения не имеет.

Пользуясь условным понятием потенциальной температуры процесса превращения ( $\theta_{\text{превр}}$ ) и обозначая величину  $\frac{\delta \xi}{\delta \tau} = \omega_{\text{фр}}$  — скорость перемещения фронта, получаем следующую формулу для определения удельной тепловой мощности фронта:

$$q_{F, \text{превр}} = \omega_{\text{фр}} Q c_p \theta_{\text{превр}} \frac{em}{m^2}. \quad (64,3)$$

Тепловое воздействие фронта превращения с освобождением или связыванием энергии на неподвижную массу тела в каждый момент времени можно рассматривать как процесс нестационарной теплопроводности полубесконечного тела. Допуская такое представление, рассмотрим задачу о распространении тепла в полуграниченной неподвижной среде с фронтом превращения известной температуры  $T_{\text{фр}}$ . До теплового воздействия на поверхности  $F$  с неизменной поддерживаемой во времени температурой  $T_F$  вся масса среды имела одинаковую температуру  $T_a$ . Требуется найти распределение температур в среде и определить скорость распространения фронта превращения.

На рис. 90 представлена схема распространения тепла в среде с фронтом превращения, где координата мгновенного положения фронта обозначается  $\xi$ , координата места в среде —  $x$ , физические параметры до превращения вещества отмечаются индексом один штрих ('), после превращения — индексом два штриха ('').

Уравнение баланса тепла во фронте превращения можно записать в следующем виде:

$$\omega_{\text{фр}} Q' c_p' \theta_{\text{превр}} + \left[ -\lambda' \frac{\partial \theta}{\partial x} \right]_{\xi+dx} = -\lambda'' \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{\xi-dx}. \quad (64,4)$$

Уравнение это представляет собой балансовое равенство:

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Удельная} \\ \text{тепловая} \\ \text{мощность} \\ \text{фронта,} \\ \text{em/m}^2 \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{l} \text{Приток тепла} \\ \text{к фронту со} \\ \text{стороны массы} \\ \text{среды до прев-} \\ \text{ращения, em/m}^2 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} \text{Отвод тепла от} \\ \text{фронта в массу} \\ \text{среды после} \\ \text{превращения,} \\ \text{em/m}^2 \end{array} \right].$$

Из уравнения (64,4) находится скорость перемещения фронта:

$$\omega_{\text{фр}} = \frac{1}{\rho' c' \theta_{\text{превр}}} \left[ \lambda' \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{\xi+dx} - \lambda'' \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{\xi-dx} \right]. \quad (64,5)$$

Температурные поля в среде до фронта ( $x > \xi$ ) и после фронта превращения ( $x < \xi$ ) описываются дифференциальными уравнениями нестационарной теплопроводности:

$$\frac{\partial \theta'}{\partial \tau} = a' \frac{\partial^2 \theta'}{\partial x^2}, \quad (64,6)$$

$$\frac{\partial \theta''}{\partial \tau} = a'' \frac{\partial^2 \theta''}{\partial x^2}. \quad (64,7)$$

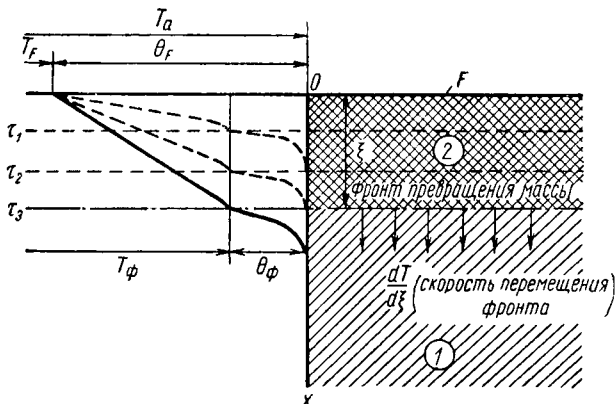


Рис. 90. К определению нестационарной теплопроводности с фронтом превращения вещества в полуграниченном массиве

Частные решения этих дифференциальных уравнений, согласно принятому допущению и применительно к рассматриваемым условиям, целесообразно представить в следующем виде:

$$\theta'(x, \tau) = A_1 - B_1 \psi \left( \frac{x}{2 \sqrt{a' \tau}} \right),$$

$$\theta''(x, \tau) = A_2 - B_2 \psi \left( \frac{x}{2 \sqrt{a'' \tau}} \right),$$

где  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$  и  $B_2$  — произвольные постоянные, определяемые из граничных условий задачи.

Так как для  $x = 0$   $\psi \left( \frac{x}{2 \sqrt{a' \tau}} \right) = 0$ , то  $\theta_F = A_1$ .

Для  $x \rightarrow \infty$   $\psi \left( \frac{x}{2 \sqrt{a'' \tau}} \right) = 1$ ,  $\theta_a = A_2 - B_2$ .

Таким образом, частные решения, отвечающие уравнениям (64,6) и (64,7), запишутся:

$$\left. \begin{aligned} \theta'(x, \tau) &= \theta_F - B_1 \psi \left( \frac{x}{2\sqrt{a'\tau}} \right), \\ \theta''(x, \tau) &= \theta_a + B_2 \left[ 1 - \psi \left( \frac{x}{2\sqrt{a''\tau}} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (64,8)$$

Для  $x = \xi$  по условиям задачи должно выполняться равенство:

$$\theta'(x, \tau) = \theta''(x, \tau) = \theta_{\text{фр}}.$$

Следовательно, оба частных решения при  $x = \xi$  равны известной температуре фронта  $\theta_{\text{фр}}$ :

$$\theta_F - B_1 \psi \left( \frac{\xi}{2\sqrt{a'\tau}} \right) = \theta_a + B_2 \left[ 1 - \psi \left( \frac{\xi}{2\sqrt{a''\tau}} \right) \right] = \theta_{\text{фр}}. \quad (64,9)$$

Эти уравнения должны отвечать любому моменту времени  $\tau$ . Но так как  $B_1$  и  $B_2$  постоянные величины, то  $\psi \left( \frac{\xi}{2\sqrt{a'\tau}} \right)$  и  $\psi \left( \frac{\xi}{2\sqrt{a''\tau}} \right)$  не должны изменяться со временем. Это возможно лишь при условии, что  $\xi \sim \sqrt{\tau}$ . Полагая

$$\xi = \kappa \sqrt{\tau},$$

где  $\kappa$  — пока не известный множитель пропорциональности, из (64,9) находим:

$$B_1 = \frac{\theta_F - \theta_{\text{фр}}}{\psi \left( \frac{\kappa}{2\sqrt{a'}} \right)} \quad \text{и} \quad B_2 = \frac{\theta_{\text{фр}} - \theta_a}{1 - \psi \left( \frac{\kappa}{2\sqrt{a''}} \right)}.$$

Соответственно этим значениям  $B_1$  и  $B_2$ , частные решения (64,8) запишутся в виде:

$$\theta'(x, \tau) = \theta_F - (\theta_F - \theta_{\text{фр}}) \frac{\psi \left( \frac{x}{2\sqrt{a'\tau}} \right)}{\psi \left( \frac{\kappa}{2\sqrt{a'}} \right)}, \quad (64,10)$$

$$\theta''(x, \tau) = \theta_a + (\theta_{\text{фр}} - \theta_a) \frac{1 - \psi \left( \frac{x}{2\sqrt{a''\tau}} \right)}{1 - \psi \left( \frac{\kappa}{2\sqrt{a''}} \right)}. \quad (64,11)$$

Из балансового равенства (64,4) находим:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=\xi+dx} = \frac{\theta_F - \theta_{\text{фр}}}{\psi \left( \frac{\kappa}{2\sqrt{a'}} \right)} \cdot \frac{e^{-\frac{\kappa^2}{4a'}}}{\sqrt{a'\pi\tau}},$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=\xi-dx} = - \frac{\theta_{\text{фр}} - \theta_a}{1 - \psi \left( \frac{\kappa}{2\sqrt{a''}} \right)} \cdot \frac{e^{-\frac{\kappa^2}{4a''}}}{\sqrt{a''\pi\tau}}.$$

Подставляя эти производные в (64,5), имеем:

$$\pm \rho' c_p' \theta_{\text{превр}} \omega_{\text{фр}} = \frac{\lambda'}{\sqrt{a'\pi\tau}} (\theta_F - \theta_{\text{фр}}) \frac{e^{-\frac{\kappa^2}{4a'}}}{\psi \left( \frac{\kappa}{2\sqrt{a'}} \right)} +$$

$$+ \frac{\lambda''}{\sqrt{a''\pi\tau}} (\theta_{\text{фр}} - \theta_a) \frac{e^{-\frac{\kappa^2}{4a''}}}{1 - \psi \left( \frac{\kappa}{2\sqrt{a''}} \right)}.$$

Пользуясь коэффициентами теплоусвоения для единичного времени  $\tau = 1$  сек (1 час)

$$b' = \sqrt{\frac{\lambda' \rho' c_p'}{\pi}}, \quad b'' = \sqrt{\frac{\lambda'' \rho'' c_p''}{\pi}}$$

и определяя скорость перемещения фронта превращения формулой

$$\omega_{\text{фр}} = \frac{d\xi}{d\tau} = \frac{\kappa}{2\sqrt{\tau}}, \quad (64,12)$$

получаем следующее уравнение для определения неизвестного постоянного множителя:

$$\pm \rho' c_p' \theta_{\text{превр}} \frac{1}{2} \kappa = b' (\theta_F - \theta_{\text{фр}}) \frac{e^{-\frac{\kappa^2}{4a'}}}{\psi \left( \frac{\kappa}{2\sqrt{a'}} \right)} +$$

$$+ b'' (\theta_{\text{фр}} - \theta_a) \frac{e^{-\frac{\kappa^2}{4a''}}}{1 - \psi \left( \frac{\kappa}{2\sqrt{a''}} \right)}. \quad (64,13)$$

Это уравнение представляет равенство, в котором  $f(\kappa)$  имеет однозначную зависимость от  $\kappa$ .

В связи с этим уравнение (64,13) имеет лишь один корень, который можно определить графически в каждом конкретном случае распространения тепла в среде с фронтом превращения.

Вводя найденное значение  $\kappa$  в (64,10) и (64,11), получаем соответствующие уравнения температурного поля в среде до и после фронта превращения.

Мгновенное положение фронта превращения находится:

$$\xi = \kappa \sqrt{\tau}. \quad (64,14)$$

В практических приложениях задачу распространения тепла с фронтом превращения решают, принимая следующую приближенную схему.

Предполагается, что в слое среды после превращения ее вещества температура изменяется по линейному закону стационарного режима:

$$\frac{dT}{d\xi} = -q(\tau) \frac{1}{\lambda''},$$

где  $q_F(\tau)$  — удельный поток тепла, отводимый от фронта превращения к поверхности  $F$  в каждый момент времени  $\tau$ .

Согласно формуле стационарной теплопроводности в плоскопараллельном слое среды, величина  $q_F(\tau)$  определяется:

$$q(\tau) = \lambda'' \frac{T_{\text{Фр}} - T_F}{\xi}.$$

Баланс тепла превращения среды и отвода тепла от фронта приводит к следующему дифференциальному уравнению:

$$\rho' c_p' \theta_{\text{превр}} \frac{d\xi}{d\tau} = \lambda'' \frac{T_{\text{Фр}} - T_F}{\xi}.$$

Разделяя переменные в обеих частях равенства, имеем:

$$\xi d\xi = \frac{\lambda''}{\rho' c_p' \theta_{\text{превр}}} (\theta_{\text{Фр}} - \theta_F) d\tau. \quad (64,15)$$

Из начального условия  $\tau = 0, \xi = 0$  находим:

$$\xi = \sqrt{\frac{2\lambda''}{\rho' c_p' \theta_{\text{превр}}} (T_{\text{Фр}} - T_F) \tau}.$$

Это приближенное решение отвечает такой же функции времени ( $\sim \sqrt{\tau}$ ), как и точное решение задачи (64,14). Постоянная при этом определяется формулой:

$$\kappa = \sqrt{\frac{2\lambda''}{\rho' c_p' \theta_{\text{превр}}} (T_{\text{Фр}} - T_F)}.$$

Точность приближенного решения задачи о распространении фронта превращения в ограниченном диапазоне изменения величины  $\left(\frac{T_{\text{Фр}} - T_F}{\theta_{\text{превр}}}\right)$  оказывается вполне удовлетворительной.

Для плоскопараллельного слоя среды толщиной  $s$  при симметричном отводе тепла по обе стороны слоя можно определить время превращения всей массы в этом слое. Для этого дифференциальное уравнение приближенного решения (64,15) необходимо проинтегрировать от  $\xi = 0$  до  $\xi = s/2$ :

$$\frac{1}{2} \left( \frac{s}{2} \right)^2 = \frac{\lambda''}{\varrho' c_p'} \frac{T_{\text{фр}} - T_F}{\theta_{\text{превр}}} \tau.$$

Отсюда находим время полного превращения среды в слое:

$$\tau = \frac{s^2 \varrho' c_p'}{8\lambda''} \frac{\theta_{\text{превр}}}{T_{\text{фр}} - T_F}. \quad (64,16)$$

## ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ВОЛНЫ

Во многих тепловых процессах происходит периодическое распространение тепла с последовательным нагреванием и охлаждением тел. Длительность периода теплового воздействия на тело бывает весьма различна. Например, в слое земли толщиной более 0,5 м приходится наблюдать годовые колебания температуры. При отоплении зданий печами продолжительность периода действия источника отопления чаще всего равна одним суткам. Суточный период колебания температуры отвечает также солнечному тепловому воздействию на поверхностный слой земли и охлаждению этого слоя в ночное время. В поршневых двигателях внутреннего сгорания период теплового воздействия процесса сгорания топлива весьма мал и в быстроходных двигателях доходит до 1/50 сек.

В рассматриваемых ниже случаях предполагается, что периодический процесс теплового воздействия на тело повторяется неограниченно долгое время и в этом смысле имеет установившийся характер.

Если через  $\theta_F(\tau) = T_F(\tau) - \bar{T}_F$  обозначить отклонение в любой момент времени температуры на поверхности тела, которое подвергается периодическому тепловому воздействию, от средней величины температуры  $\bar{T}_F$ , а через  $\theta_{F_{\max}} = T_{F_{\max}} - \bar{T}_F$  — максимальное отклонение температуры на поверхности тела (рис. 91), то условие гармонического колебания температуры на поверхности тела представится формулой:

$$\theta_F(\tau) = \theta_{F_{\max}} \cos\left(\frac{2\pi}{z} \tau\right),$$

где  $z$  — продолжительность полного периода колебания температуры, сек или час;

$$\frac{2\pi}{z} = \omega — \text{угловая частота колебаний, рад/сек или рад/час.}$$

Если гармоническое колебание температуры осуществляется также и в окружающей тело среде, то формула колебаний темпера-

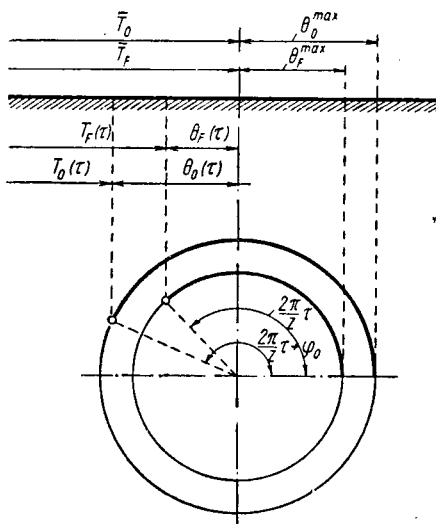


Рис. 91. К определению колебания температур в условиях периодического теплового воздействия

туры среды относительно колебаний температуры на поверхности тела представится в следующем виде:

$$\theta_0(\tau) = \theta_{0_{\max}} \cos(\omega\tau + \varphi_0),$$

где  $\theta_0(\tau) = T_0(\tau) - \bar{T}_0$  — разность температур окружающей среды в любой момент времени и средней температуры окружающей среды за весь период ее колебания;

$\theta_{0_{\max}} = T_{0_{\max}} - \bar{T}_0$  — максимальная разность, или амплитуда, колебания температуры окружающей среды;

$\varphi_0$  — величина в радианах, отвечающая начальной фазе колебания температуры на поверхности тела.

Оба уравнения служат граничными условиями для решения задач периодического теплового воздействия на тело.

## § 65. Температурные волны в полуограниченном массиве

Полуограниченный массив тела на своей плоской поверхности подвергается тепловому воздействию так, что температура на поверхности тела совершает гармонические колебания. Требуется найти распределение температуры в массиве тела в любой момент вре-



мени, скорость распространения температурной волны и глубину ее проникания.

Представляя решение дифференциального уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

в виде произведения двух независимых функций

$$\theta(x, \tau) = \theta(x) \cdot \theta(\tau),$$

получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \theta'(\tau) + \varepsilon^2 a \theta(\tau) &= 0, \\ \theta''(x) + \varepsilon^2 \theta(x) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (65,1)$$

Решением первого уравнения служит функция

$$\theta(\tau) = e^{-\varepsilon^2 a \tau}.$$

Второе уравнение применительно к задаче температурных волн преобразуем, введя безразмерную переменную  $z = i \varepsilon x$  с мнимым множителем  $i = \sqrt{-1}$ . При этом получаем дифференциальное уравнение:

$$\theta''(z) - \theta(z) = 0.$$

Решением этого уравнения является сумма двух экспоненциальных функций:

$$\theta(z) = A e^{+z} + B e^{-z}$$

или

$$\theta(z) = A e^{+i \varepsilon x} + B e^{-i \varepsilon x}.$$

По условиям рассматриваемой задачи необходимо положить  $A = 0$ , так как в противном случае температура с глубиной  $x$  неограниченно возрастает.

Если выбрать размерную величину  $\varepsilon^2 = \frac{i \omega}{a} \frac{1}{m^2}$  (это можно сделать, так как выбор величины  $\varepsilon$  никакими условиями не ограничен), то решение первого дифференциального уравнения (65,1) запишется:

$$\theta(\tau) = e^{-i \omega \tau}. \quad (65,2)$$

Как известно из алгебры комплексных чисел,

$$\sqrt{i} = \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}},$$

поэтому

$$\varepsilon = \pm (1+i) \sqrt{\frac{\omega}{2a}}.$$

В результате такой замены решение второго дифференциального уравнения запишется:

$$\theta(x) = B e^{\pm(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2a}}x}. \quad (65,3)$$

Таким образом, приходим к решению исходного дифференциального уравнения в виде произведения двух экспоненциальных функций, соответствующих переменным  $x$  и  $\tau$ :

$$\theta(x, \tau) = B e^{\pm(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2a}}x} \cdot e^{i\omega\tau} = B e^{\pm\sqrt{\frac{\omega}{2a}}x} \cdot e^{i(\omega\tau \pm \sqrt{\frac{\omega}{2a}}x)}. \quad (65,4)$$

Пользуясь формулой Эйлера

$$e^{i\xi} = \cos \xi + i \sin \xi$$

и выбирая в (65,4) (применительно к условиям рассматриваемой задачи) знак минус, окончательно находим:

$$\theta(x, \tau) = B e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a}}x} \left[ \cos \left( \omega\tau - \sqrt{\frac{\omega}{2a}}x \right) + i \sin \left( \omega\tau - \sqrt{\frac{\omega}{2a}}x \right) \right], \quad (65,5)$$

где  $B$  — произвольная постоянная, определяемая из граничных условий.

Возможны различные случаи граничных условий, когда колебания температуры возбуждаются на поверхности тела и в окружающей его среде.

Если задано колебание температуры на поверхности тела, то в этом случае граничное условие представляется уравнением:

$$\theta_F(\tau) = \theta_{F_{\max}} \cos \left( \frac{2\pi}{z} \tau \right). \quad (65,6)$$

Отбрасывая в решении (65,5) функцию с мнимым множителем, как не удовлетворяющую граничному условию при  $x=0$ , и принимая в соответствии с граничным условием  $B=\theta_F$ , а также имея в виду, что  $\omega = \frac{2\pi}{z}$ , получаем следующее уравнение температурного поля в полуограниченном теле:

$$\theta(x, \tau) = \theta_{F_{\max}} \cos \left( 2\pi \frac{\tau}{z} - \sqrt{\frac{\pi}{az}} x \right) e^{-\sqrt{\frac{\pi}{az}} x}. \quad (65,7)$$

Полученное уравнение имеет следующие особенности:

1) в любой момент времени распределение температур в массиве получается в виде волны, амплитуда которой уменьшается (затухает) с глубиной (рис. 92). Уменьшение амплитуды температурной волны с глубиной определяется экспоненциальным множи-

телом  $e^{-\sqrt{\frac{\pi}{az}}x}$ , который при  $x \rightarrow \infty$  стремится к нулю (рис. 92);

2) в каждый последующий момент времени распределение температур в массиве выражается новой волнистой кривой, которая оказывается сдвинутой в глубину массива по направлению  $x$

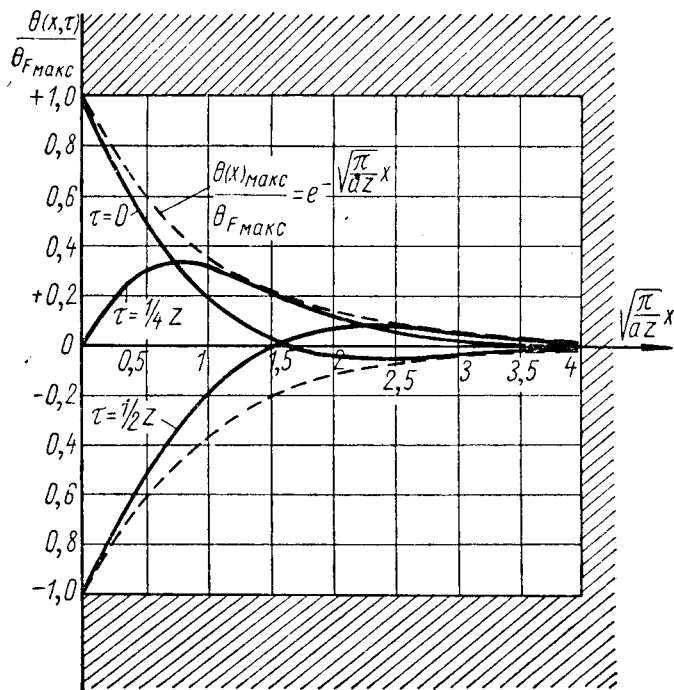


Рис. 92. Температурные волны в полугограничном массиве

(рис. 92). В результате такого смещения температурные волны можно рассматривать движущимися от места их возбуждения на поверхности в глубину массива тела.

Скорость распространения температурной волны находится путем деления длины волны на полный период колебания температуры. Длина волны в свою очередь находится из равенства аргумента косинуса нулю, отвечающего двум последующим амплитудам колебания температуры  $\theta(x, \tau)$  при  $\tau = 0$  и  $\tau = z$ :

$$2\pi \frac{\tau}{z} - \sqrt{\frac{\pi}{az}} x = 0.$$

Для  $\tau = 0$   $x = 0$ ; для  $\tau = z$   $x = \lambda_{\text{вслн}}$ .

Следовательно, длина температурной волны и ее скорость распространения в массе тела определяются формулами:

$$\begin{aligned}\lambda_{\text{волн}} &= 2 \sqrt{\pi a z}, \\ c_{\text{волн}} &= 2 \sqrt{\frac{\pi a}{z}}.\end{aligned}\quad (65,8)$$

На рис. 92 показаны кривые распределения температур в полубесконечном массиве для отдельных моментов времени. Как видно, температурная волна, возбужденная на поверхности, сравнительно быстро затухает в глубине массива. Глубину заметного проникновения температурной волны можно вычислить, положив

$$\cos\left(2\pi \frac{\tau}{z} - \sqrt{\frac{\pi}{az}} x\right) = 1,$$

т. е. взяв лишь максимальное отклонение температуры. При этом из уравнения (65,7) находим функцию температурных амплитуд в теле:

$$\frac{\theta_{\text{макс}}(x)}{\theta_{F_{\text{макс}}}} = e^{-\sqrt{\frac{\pi}{az}} x}.\quad (65,9)$$

Положив условно  $\frac{\theta_{\text{макс}}(x)}{\theta_{F_{\text{макс}}}} = \frac{1}{100}$  (затухание колебания температуры до 1%), из уравнения (65,9) находим толщину слоя заметного проникания температурной волны в массу тела:

$$X = \sqrt{\frac{az}{\pi}} \ln 100 = 2,6 \sqrt{az}.\quad (65,10)$$

Это равенство показывает следующее:

1) толщина слоя заметного колебания температуры в массе тела будет тем больше, чем продолжительнее полный период колебания температуры на поверхности. Температурные волны большей частоты  $\left(\nu = \frac{1}{z}\right)$  способны проникать в массу тела лишь на небольшую глубину;

2) толщина слоя заметного колебания температуры в массе тела будет тем значительнее, чем больше коэффициент теплопроводности тела. Материал с малым коэффициентом теплопроводности обладает значительным сопротивлением прохождению температурных волн.

**Пример.** Определить глубину заметного проникания температурной волны в сухой песчаный грунт от суточных и годовых колебаний температуры на его поверхности.

**Решение.** Полный период суточного и годового колебания температуры соответственно равен  $z_{\text{сутки}} = 24 \text{ час}$ ;  $z_{\text{год}} = 8760 \text{ час}$ . Коэффициент теплопроводности сухого песчаного грунта

$a=0,00273 \text{ м}^2/\text{час}$ . Предполагая колебания температуры простыми гармоническими, находим:

$$X_{\text{сутки}} = 2,6 \sqrt{0,00273 \cdot 24} = 0,665 \text{ м},$$

$$X_{\text{год}} = 2,6 \sqrt{0,00273 \cdot 8760} = 12,7 \text{ м}.$$

Можно так же определить глубину в массиве грунта, на которой «лето» на поверхности будет отвечать «зиме» в глубине или «жара» летнего дня — «холоду» ночи, т. е. глубину, на которую температурная волна придет с опозданием на время, равное полупериоду колебания температуры  $\tau = \frac{z}{2}$ .

Для этой цели необходимо положить

$$\cos \left( 2\pi \frac{\tau}{z} - \sqrt{\frac{\pi}{az}} x \right) = 1,$$

$$2\pi \frac{\tau}{z} - \sqrt{\frac{\pi}{az}} x = 0,$$

откуда при  $\tau = z/2$   $x = \sqrt{\pi az}$ .

Например, для  $z_{\text{год}} = 8760 \text{ час}$   $x = 8,66 \text{ м}$ ,

для  $z_{\text{сутки}} = 24 \text{ час}$   $x = 0,453 \text{ м}$ .

**Пример.** Определить глубину заметного проникания температурных волн в стенку цилиндра двигателя внутреннего сгорания при числе оборотов 3000 об/мин, предполагая, что температура внутренней поверхности стенки совершает простые гармонические колебания.

**Решение.** Полный период колебания температуры для двухтактного двигателя составит

$$z = \frac{1}{3000 \cdot 60} \text{ час}.$$

Для коэффициента температуропроводности чугунной стенки  $a=0,04 \text{ м}^2/\text{час}$  находим:

$$X = 2,6 \sqrt{\frac{0,04}{3000 \cdot 60}} = 1,22 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 1,22 \text{ мм}.$$

Колебания температуры, возбуждаемые на внутренней поверхности стенки, затухают в тонком слое вблизи стенки.

Пользуясь уравнением распространения температурной волны в полубесконечном массиве (65,7), можно вычислить колебания теплового потока и определить характеристику *тепловой волны*.

Для этой цели определим величину теплового потока на поверхности массива:

$$q_F(\tau) = -\lambda \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=0}$$

Дифференцированием уравнения (65,7) находим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} &= -\theta_{F_{\text{макс}}} \sqrt{\frac{\pi}{az}} \left[ \cos \left( 2\pi \frac{\tau}{z} \right) - \sin \left( 2\pi \frac{\tau}{z} \right) \right] = \\ &= -\theta_{F_{\text{макс}}} \sqrt{\frac{2\pi}{az}} \sin \left( \frac{\pi}{4} - 2\pi \frac{\tau}{z} \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$q_F(\tau) = \lambda \theta_{F_{\text{макс}}} \sqrt{\frac{2\pi}{az}} \sin \left( \frac{\pi}{4} - 2\pi \frac{\tau}{z} \right). \quad (65,11)$$

Максимальное значение удельного теплового потока получается при  $\sin \left( \frac{\pi}{4} - 2\pi \frac{\tau}{z} \right) = \pm 1$ , что соответствует  $\tau = -\frac{1}{8}z$ . Таким образом, максимальный тепловой поток в массиве достигается через  $-\frac{1}{8}z$ ;  $+\frac{3}{8}z$ ;  $\dots$ . При этом амплитуда колебаний теплового потока получается:

$$q_{F_{\text{макс}}} = \pm \theta_{F_{\text{макс}}} \pi \sqrt{\frac{\lambda \rho c}{\pi z/2}} = \theta_{F_{\text{макс}}} \pi b_{z/2}, \quad (65,12)$$

где  $b_{z/2} = \sqrt{\frac{\lambda \rho c}{\pi z/2}}$  — коэффициент теплоусвоения материала массива за полупериод колебания температуры.

Накопление или расход тепла в массиве за полупериод колебания температуры  $z/2$  определяется интегралом:

$$\begin{aligned} Q_{z/2} &= \int_0^{z/2} q_{F_1}(\tau) d\tau = \\ &= -\theta_{F_{\text{макс}}} \pi b_{z/2} \int_0^{z/2} \sin \left( \frac{\pi}{4} - 2\pi \frac{\tau}{z} \right) d\tau = \theta_{F_{\text{макс}}} \cdot b_{z/2} z. \quad (65,13) \end{aligned}$$

Полученные формулы для тепловых потоков в массиве при периодическом тепловом воздействии получаются аналогичными с формулами (63,7), (63,9) для непрерывного теплового воздействия на массив за время, равное полупериоду  $z/2$ .

В рассмотренном случае периодического распространения тепла предполагалось, что температурные волны являются простыми гармоническими. Задачу можно решить и в тех случаях, когда температурные колебания будут сложными гармоническими. Для этого приходится пользоваться методом гармонического анализа, который позволяет представить любую периодическую кривую как сумму соответствующих косинусоид.

## § 66. Температурные волны в плоской стенке ограниченной толщины

Имеется плоская стенка толщиной  $s$ , выполненная из однородного материала. По одну сторону стенка подвергается периодическому тепловому воздействию среды, температура которой совершает гармонические колебания. С другой стороны стенку окружает среда с неизменной во времени температурой. Требуется найти распределение температур в стенке.

Оказывается целесообразным решать эту задачу, применяя комплексные переменные величины.

Выбирая величину  $\varepsilon^2 = -\frac{i\omega}{a}$ , находим решение первого дифференциального уравнения (65,1):

$$\theta(\tau) = e^{i\omega\tau}. \quad (66,1)$$

Решение второго дифференциального уравнения (65,1) при  $\varepsilon^2 = -\frac{i\omega}{a}$  находится в виде:

$$\theta(x) = A \operatorname{Sh}\left(\sqrt{\frac{i\omega}{a}} x\right) + B \operatorname{Ch}\left(\sqrt{\frac{i\omega}{a}} x\right), \quad (66,2)$$

где  $\operatorname{Sh}\left(\sqrt{\frac{i\omega}{a}} x\right)$  и  $\operatorname{Ch}\left(\sqrt{\frac{i\omega}{a}} x\right)$  — гиперболические функции с мнимым аргументом.

Обозначая  $\sqrt{\frac{i\omega}{a}} = (1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2a}} = \mu$ , приходим к следующему решению дифференциального уравнения нестационарной теплопроводности:

$$\theta(x, \tau) = \theta(\tau) \cdot \theta(x) = e^{i\omega\tau} [A \operatorname{Sh}(\mu x) + B \operatorname{Ch}(\mu x)]. \quad (66,3)$$

Граничное условие на поверхности стенки ( $F_1$ ) со стороны среды с колеблющейся температурой определяется уравнением:

$$\alpha_1 [\theta_0(\tau) - \theta_{F_1}(\tau)] = -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0}. \quad (66,4)$$

Для колебаний температуры в среде, в соответствии с решением (66,3), принимаем формулу:

$$\theta_0(\tau) = \theta_{0\text{макс}} e^{i\omega\tau},$$

где  $\theta_{0\text{макс}}$  — амплитуда колебаний температуры среды.

При  $x=0$  из решения (66,3) следует:

$$\begin{aligned} \theta_{F_1}(\tau) &= B e^{i\omega\tau}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} &= A \mu e^{i\omega\tau}. \end{aligned}$$

В связи с этим уравнение граничного условия (66,4) при  $x=0$  запишется:

$$\frac{\alpha_1}{\lambda} \theta_{0\text{макс}} = B \frac{\alpha_1}{\lambda} - A \mu. \quad (66,5)$$

Граничное условие на другой поверхности стенки ( $F_2$ ) со стороны среды с неизменной температурой представляется уравнением:

$$\alpha_2 \theta_{F_2}(\tau) = -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=s}. \quad (66,6)$$

Из решения (66,3) при  $x=s$  находим:

$$\begin{aligned} \theta_{F_2}(\tau) &= e^{i\omega\tau} [A \operatorname{Sh}(\mu s) + B \operatorname{Ch}(\mu s)], \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=s} &= e^{i\omega\tau} [A\mu \operatorname{Ch}(\mu s) + B\mu \operatorname{Sh}(\mu s)]. \end{aligned}$$

В соответствии с этим уравнение граничного условия (66,6) при  $x=s$  запишется:

$$A \left[ \frac{\alpha_2}{\lambda} \operatorname{Sh}(\mu s) + \mu \operatorname{Ch}(\mu s) \right] = -B \left[ \frac{\alpha_2}{\lambda} \operatorname{Ch}(\mu s) + \mu \operatorname{Sh}(\mu s) \right]. \quad (66,7)$$

Решая совместно уравнения граничных условий при  $x=0$  и  $x=s$  и определяя произвольные постоянные  $A$  и  $B$ , приходим к следующему уравнению распределения температур в стенке:

$$\begin{aligned} \theta(x, \tau) &= \theta_{0\text{макс}} e^{i\omega\tau} \times \\ &\left[ \frac{\alpha_1}{\lambda} \frac{\alpha_2}{\lambda} \operatorname{Sh}(\mu s) + \mu \frac{\alpha_1}{\lambda} \operatorname{Ch}(\mu s) \right] \operatorname{Ch}(\mu x) - \\ &- \left[ \frac{\alpha_1}{\lambda} \frac{\alpha_2}{\lambda} \operatorname{Ch}(\mu s) + \frac{\alpha_1}{\lambda} \mu \operatorname{Sh}(\mu s) \right] \operatorname{Sh}(\mu x) \\ &\times \frac{1}{\mu \left( \frac{\alpha_1}{\lambda} + \frac{\alpha_2}{\lambda} \right) \operatorname{Ch}(\mu s) + \left( \mu^2 + \frac{\alpha_1}{\lambda} \frac{\alpha_2}{\lambda} \right) \operatorname{Sh}(\mu s)}. \quad (66,8) \end{aligned}$$

Распределение амплитуд колебаний температур в стенке находится согласно уравнению (66,8), положив  $e^{i\omega\tau} = 1$ .

Амплитуда колебаний температуры на поверхности стенки ( $F_1$ ) находится, положив в (66,8)  $x=0$  и  $e^{i\omega\tau} = 1$ :

$$\theta_{x=0}^{\text{макс}} = \theta_{0\text{макс}} \frac{\frac{\alpha_1}{\lambda} \frac{\alpha_2}{\lambda} \operatorname{Sh}(\mu s) + \mu \frac{\alpha_1}{\lambda} \operatorname{Ch}(\mu s)}{\mu \left( \frac{\alpha_1}{\lambda} + \frac{\alpha_2}{\lambda} \right) \operatorname{Ch}(\mu s) + \left( \mu^2 + \frac{\alpha_1}{\lambda} \frac{\alpha_2}{\lambda} \right) \operatorname{Sh}(\mu s)}. \quad (66,9)$$

Для другой поверхности стенки ( $F_2$ ) при  $x=s$ :

$$\theta_{x=s}^{\text{макс}} = \theta_{0\text{макс}} \frac{\mu \frac{\alpha_1}{\lambda}}{\mu \left( \frac{\alpha_1}{\lambda} + \frac{\alpha_2}{\lambda} \right) \operatorname{Ch}(\mu s) + \left( \mu^2 + \frac{\alpha_1}{\lambda} \frac{\alpha_2}{\lambda} \right) \operatorname{Sh}(\mu s)}. \quad (66,10)$$

**Пример.** Вычислить затухание амплитуды суточных колебаний температуры наружного воздуха на внутренней поверхности кирпичной стены толщиной  $2\frac{1}{2}$  кирпича (640 мм) при следующих условиях:



физические параметры кирпичной стены

$$\lambda = 0,815 \text{ вт/м} \cdot \text{град}; \quad c = 0,88 \text{ кдж/кг} \cdot \text{град};$$

$$\rho = 1700 \text{ кг/м}^3; \quad a = \frac{\lambda}{\rho c} = 0,545 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{сек}.$$

Коэффициенты теплообмена на наружной поверхности стены  $\alpha_1 = 17,5 \text{ вт/м}^2 \cdot \text{град}$  и на внутренней  $\alpha_2 = 8,73 \text{ вт/м}^2 \cdot \text{град}$ .

Решение. Вычисляем угловую частоту колебаний температуры наружного воздуха:

$$\omega = \frac{2\pi}{z} = \frac{2\pi}{24} = 0,262 \frac{\text{рад}}{\text{час}};$$

$$\text{параметр } \mu = (1+i) \sqrt{\frac{0,262}{2 \cdot 0,00196}} = 8,16(1+i);$$

$$\text{аргумент } \mu s = 0,64 \cdot 8,16(1+i) = 5,23(1+i).$$

Гиперболические функции комплексных величин  $\text{Sh}(\mu s) = \text{Sh}[5,23(1+i)]$  и  $\text{Ch}(\mu s) = \text{Ch}[5,23(1+i)]$  можно получить из таблиц и вычислить непосредственно.

Пользуясь таблицами, находим:

$$\text{Sh}(\mu s) = 46,212 - i81,164;$$

$$\text{Ch}(\mu s) = 46,215 - i81,159.$$

В связи с тем, что для заданных условий

$$\text{Sh}(\mu s) \approx \text{Ch}(\mu s),$$

формула для определения амплитуды колебаний температуры на внутренней поверхности стены (66,10) упрощается и переходит в следующую:

$$\frac{\theta_{x=\varepsilon_{\text{макс}}}}{\theta_{0\text{макс}}} = \frac{\mu \frac{\alpha_1}{\lambda}}{\left(\mu \diamond \frac{\alpha_1}{\lambda}\right) \left(\mu \diamond \frac{\alpha_2}{\lambda}\right) \text{Ch}(\mu s)}.$$

Вычисляя модули комплексных чисел, находим:

$$\mu \frac{\alpha_1}{\lambda} = 8,16 \cdot 21,4 + 8,16 \cdot 21,4i;$$

$$\left| \mu \frac{\alpha_1}{\lambda} \right| = 8,16 \cdot 21,4 \sqrt{2} = 248;$$

$$\mu + \frac{\alpha_1}{\lambda} = (1+i)8,16 + 21,4 = 29,56 + 8,16i;$$

$$\left| \mu + \frac{\alpha_1}{\lambda} \right| = \sqrt{29,56^2 + 8,16^2} = 30,8;$$

$$\mu + \frac{\alpha_2}{\lambda} = (1+i)8,16 + 10,7 = 18,86 + 8,16i;$$

$$\left| \mu + \frac{\alpha_2}{\lambda} \right| = \sqrt{18,86^2 + 8,16^2} = 20,5;$$

$$|\text{Ch}(\mu s)| = \sqrt{46,21^2 + 81,16^2} = 93,4.$$

По известной теореме «модуль произведения комплексных чисел равен произведению их модулей» получаем:

$$\left| \left( \mu + \frac{\alpha_1}{\lambda} \right) \left( \mu + \frac{\alpha_2}{\lambda} \right) \text{Ch}(\mu s) \right| = 30,8 \cdot 20,5 \cdot 93,4 = 59000,$$

а по теореме «модуль частного от деления комплексных чисел равен частному от деления их модулей» окончательно находим:

$$\frac{\theta_{x=s_{\text{макс}}}}{\theta_{0_{\text{макс}}}} = \frac{248}{59000} = \frac{1}{238}.$$

Полученный результат показывает, что суточные колебания температуры наружного воздуха через кирпичную стенку не проникают, и для температурных волн суточного периода такая стена может рассматриваться как бесконечно толстая.

Для более тонкой стены или для большего периода колебания температуры температурная волна может заметно проникать через всю толщину стенки.

Решение задачи, полученное для стенки ограниченной толщины, включает как частный случай и *стенку неограниченной толщины*. В этом случае в формуле (66,8) достаточно положить  $\text{Sh}(\mu s) = \text{Ch}(\mu s)$  и отбросить все члены с  $\alpha_2$ .

Результат решения для стенки неограниченной толщины получается в виде:

$$\theta(x, \tau) = \theta_{0_{\text{макс}}} e^{i\omega\tau} \frac{\text{Ch}(\mu x) - \text{Sh}(\mu x)}{1 + \mu \frac{\lambda}{\alpha_1}}. \quad (66,11)$$

Амплитуда колебаний температуры на поверхности толстой стенки определяется формулой:

$$\theta_{x=0_{\text{макс}}} = \theta_{0_{\text{макс}}} \frac{1}{1 + \mu \frac{\lambda}{\alpha_1}}. \quad (66,12)$$

Для условий рассмотренного выше примера затухания температурных волн стенку можно рассматривать неограниченной толщины. Уменьшение амплитуды колебаний температуры на поверхности стенки по сравнению с амплитудой колебания температуры среды находится по формуле (66,12):

$$\frac{\theta_{x=0_{\text{макс}}}}{\theta_{0_{\text{макс}}}} = \frac{1}{1 + \mu \frac{\lambda}{\alpha_1}} = \frac{1}{1 + 11,53 \frac{0,7}{15}} \approx 0,65.$$

Амплитуда колебаний температуры на поверхности толстой стенки будет тем меньше, чем больше коэффициент теплопроводности стенки ( $\lambda$ ) и чем меньше коэффициент теплоотдачи ( $\alpha$ ).

## § 67. Температурные волны при двухстороннем тепловом воздействии на плоскую стенку

Если плоская стенка толщиной  $s$ , выполненная из однородного материала, подвергается синхронному периодическому тепловому воздействию окружающей среды с двух сторон, то для решения

$$\theta(x, \tau) = e^{i\omega\tau} [A \operatorname{Sh}(\mu x) + B \operatorname{Ch}(\mu x)]$$

необходимо применить условие в середине стенки, которое при размещении начала координат в этом месте запишется:

$$\left. \frac{\partial \theta(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0.$$

Отсюда находится  $A = 0$ .

На границе стенки при  $x = s/2$  имеем граничное условие:

$$\alpha [\theta_F(\tau) - \theta_0(\tau)] = -\lambda \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=s/2}.$$

Так как

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=s/2} = e^{i\omega\tau} B \mu \operatorname{Sh}(\mu s/2)$$

и

$$\theta_F(\tau) = e^{i\omega\tau} B \operatorname{Ch}(\mu s/2),$$

то для определения произвольной постоянной имеем следующее уравнение:

$$\alpha [B \operatorname{Ch}(\mu s/2) - \theta_{0\max}] = -\lambda \mu B \operatorname{Sh}(\mu s/2).$$

Отсюда находим:

$$B = \theta_{0\max} \frac{1}{\operatorname{Ch}(\mu s/2) + \mu \frac{\lambda}{\alpha} \operatorname{Sh}(\mu s/2)}.$$

Таким образом, приходим к следующему решению задачи двухстороннего колебания температуры стенки:

$$\theta(x, \tau) = e^{i\omega\tau} \theta_{0\max} \frac{\operatorname{Ch}(\mu x)}{\operatorname{Ch}(\mu s/2) + \mu \frac{\lambda}{\alpha} \operatorname{Sh}(\mu s/2)}. \quad (67,1)$$

Для амплитуды на поверхности стенки ( $x = s/2$ ) имеем:

$$\theta_{F\max} = \theta_{0\max} \frac{1}{1 + \mu \frac{\lambda}{\alpha} \operatorname{th}(\mu s/2)}. \quad (67,2)$$

Для амплитуды колебаний в середине стенки ( $x = 0$ ) имеем:

$$\theta_{m\max} = \theta_{0\max} \frac{1}{\operatorname{Ch}(\mu s/2) + \mu \frac{\lambda}{\alpha} \operatorname{Sh}(\mu s/2)}. \quad (67,3)$$

Количество тепла, поступающего или отведенного за полу- период колебания температуры для каждой поверхности стенки, находится интегрированием:

$$Q_{z/2} = \int_0^{z/2} q_F(\tau) d\tau = - \int_0^{z/2} \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=s/2} d\tau.$$

Найдя

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=s/2} = e^{i\omega\tau} \theta_{0\text{макс}} \frac{1}{\frac{\lambda}{\alpha} + \frac{1}{\mu} \operatorname{cth}(\mu s/2)}$$

и имея в виду, что

$$e^{i\omega\tau} = \cos(\omega\tau) + i \sin(\omega\tau),$$

вычислением находим:

$$Q_{z/2} = \theta_{0\text{макс}} \frac{\lambda i \mu z}{\pi} \frac{1}{\mu \frac{\lambda}{\alpha} + \operatorname{cth}(\mu s/2)} = \theta_{0\text{макс}} b_{z/2z} \frac{\frac{1}{2} i (1+i)}{\mu \frac{\lambda}{\alpha} + \operatorname{cth}(\mu s/2)}, \quad (67,4)$$

где  $b_{z/2} = \sqrt{\frac{\lambda \rho c}{\pi z/2}}$  — коэффициент теплоусвоения материала стенки за полупериод колебания температуры.

### § 68. Теплопроводность и теплопередача стен при распространении температурных волн

Стационарная теплопроводность и теплопередача стен определяется формулами § 42.

Колебания температуры среды, окружающей поверхность стенки, проникают в ее толщину и оказывают влияние на распределение температур. Если пользоваться средней температурой среды  $\bar{T}_1$  или  $\bar{T}_2$ , совершающей колебания температур с амплитудой  $\pm \theta_{1\text{макс}}$  или  $\pm \theta_{2\text{макс}}$ , то средняя удельная теплопередача стены находится по формуле:

$$\bar{q} = \bar{k}(\bar{T}_1 - T_2) \text{ или } \bar{q} = \bar{k}(T_1 - \bar{T}_2),$$

а распределение средних температур в стене — по уравнению:

$$\bar{T}(x) = \bar{T}_1 - \bar{q} \left( \frac{1}{\bar{\alpha}_1} + \frac{x}{\lambda} \right) \text{ или } \bar{T}(\xi) = \bar{T}_2 + \bar{q} \left( \frac{1}{\bar{\alpha}_2} + \frac{\xi}{\lambda} \right),$$

где  $\bar{\alpha}_1$ ,  $\bar{\alpha}_2$ ,  $\bar{k}$  — средние коэффициенты теплоотдачи и коэффициент теплопередачи стены;

$T_1$  и  $T_2$  — соответствующие неизменные температуры среды;

$\lambda$  — коэффициент теплопроводности стены;

$x$  и  $\xi = s - x$  — координаты в направлении нормали к стенке.

Отклонение температуры от ее среднего значения в любой момент времени и в любом месте стены  $\theta(x, \tau)$  при температурных колебаниях находится из уравнения (66,8).

Если затухающую волнистую температурную линию  $\theta(x)$  для любого момента времени построить (рис. 93) на прямой

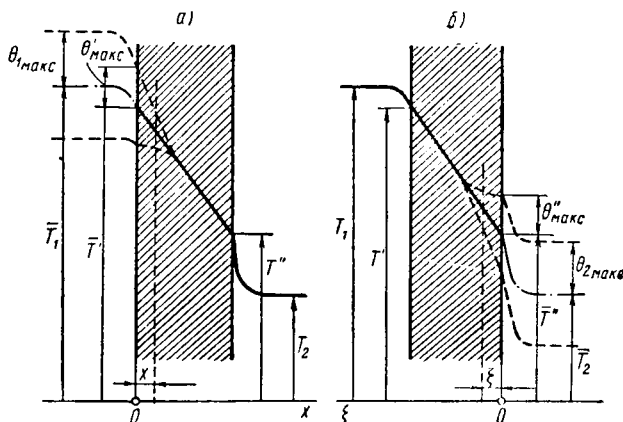


Рис. 93. К определению теплопроводности и теплопередачи стен в условиях периодических колебаний температур: а) греющей среды; б) охлаждаемой среды

линии вычисленных средних температур в стене  $\bar{T}(x)$ , отвечающих средней теплопередаче  $\bar{q}$ , то можно получить действительное распределение температур в стене в данный момент времени:

$$T(x, \tau) = \bar{T}_1 - \bar{q} \left( \frac{1}{\alpha_1} + \frac{x}{\lambda} \right) + \theta(x, \tau) \quad (68,1)$$

или

$$T(\xi, \tau) = \bar{T}_2 + \bar{q} \left( \frac{1}{\alpha_2} + \frac{\xi}{\lambda} \right) + \theta(\xi, \tau). \quad (68,2)$$

Минимальная температура на поверхности стены, подвергаемой периодическому тепловому воздействию, находится:

$$T_{1\text{мин}} = \bar{T}_1 - \bar{q} \frac{1}{\alpha_1} - \theta_x = \theta_{\text{макс}} \quad (68,3)$$

или

$$T_{2\text{мин}} = \bar{T}_2 + \bar{q} \frac{1}{\alpha_2} - \theta_\xi = \theta_{\text{макс}}, \quad (68,4)$$

где  $\theta_x = \theta_{\text{макс}}$  или  $\theta_\xi = \theta_{\text{макс}}$  — амплитуда колебания температуры на поверхности стены, подвергаемой периодическому тепловому воздействию; определяется формулой (66,9).

Общее понижение температуры на поверхности стены будет тем больше, чем больше теплопередача  $\bar{q}$  и амплитуда колебания температуры  $\theta_{x=0}$  и чем меньше коэффициент теплоотдачи  $\alpha_1$ .

Чрезмерное понижение температур на внутренней поверхности стен жилых помещений с периодическим отоплением вызывает неприятное ощущение «холода» стен. Кроме того, чрезмерное понижение температуры стен способствует повышенному выделению влаги воздуха на стенах, и они сыреют. В связи с этими явлениями к стенам помещений предъявляют особое требование — теплоустойчивость.