

*Раздел третий*

**КОНВЕКТИВНЫЙ  
ПЕРЕНОС ТЕПЛА**

## ОСНОВЫ ТЕОРИИ КОНВЕКТИВНОГО ПЕРЕНОСА ТЕПЛА

### § 69. Различные схемы конвективного переноса и формулы для определения конвективного теплообмена

Среди различных видов переноса тепла (теплопроводностью, конвекцией и излучением), которые в большинстве случаев осуществляются одновременно, конвективный перенос во многих случаях имеет решающее значение. В природе конвекцией тепло переносится в атмосфере земли, в водных пространствах океанов и морей, в процессе теплообмена с окружающей средой людей и животных и т. п. В технике конвективный перенос осуществляется при передаче тепла в различных технологических реакторах, в котлах и печах, в различных теплообменных аппаратах, в холодильных устройствах, при отоплении зданий и во многих других случаях. Удельные потоки конвективного переноса тепла  $\vec{q} = \omega \rho c_p t$  могут быть весьма различными, находясь в порядке от  $10^1$   $вт/м^2$  и ниже (конвективный перенос тепла в условиях естественной конвекции газов при малых разностях температур) и до  $10^8$   $вт/м^2$  и выше (в потоках раскаленных сред с весьма большими скоростями).

Конвективный теплообмен осуществляется в условиях совместного протекания процессов конвективного, кондуктивного и радиационного переноса тепла. При этом кондуктивный перенос тепла наиболее интенсивно осуществляется в пограничном слое среды и поверхности тела. Конвективный перенос тепла в наибольшей мере осуществляется протекающей средой вне этого слоя, а радиационный теплообмен может осуществляться с удаленными телами или средами непосредственно или при посредстве текущей среды. В этом разделе рассматриваются задачи *конвективно-кондуктивного* переноса тепла без участия радиации.

Из разнообразных случаев конвективного теплообмена тел в потоке среды можно выделить следующие типичные случаи:

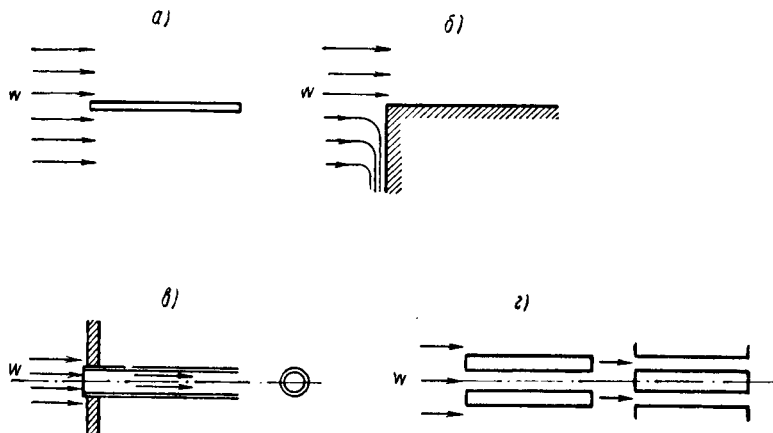


Рис. 94. Продольное обтекание средой: а) тонкой пластины; б) стенки плиты; в) стенки трубы; г) стенок канала

1) продольное обтекание средой пластин, плит, труб и других различных каналов (рис. 94, а, б, в и г);

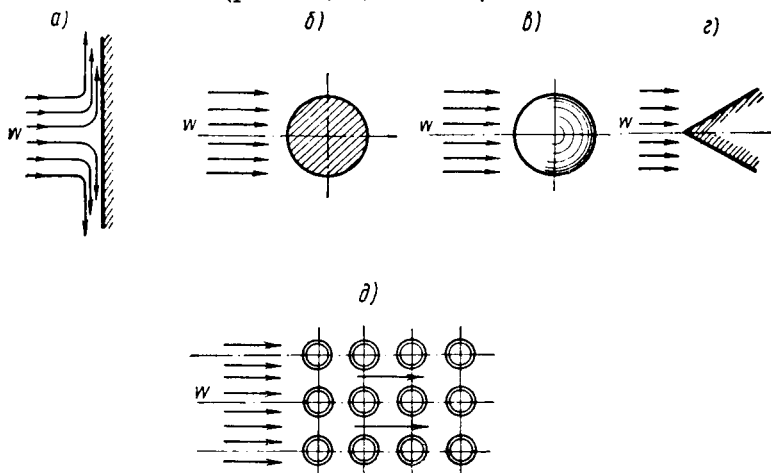


Рис. 95. Поперечное обтекание средой: а) плиты; б) цилиндра; в) шара; г) конуса; д) пучка труб

2) поперечное обтекание средой различных тел (рис. 95, а, б, в, г, д);

3) сквозное течение среды в теле (рис. 96, а, б, в).

Во всех этих и других случаях конвективный перенос тепла может осуществляться в условиях *вынужденного и свободного*

перемещения среды. Вынужденное перемещение среды осуществляется в результате действия сил давления (*напорное движение*). Свободное перемещение осуществляется в результате различия плотностей среды в различных местах пространства (*естественная конвекция*). Характер потока среды также может быть различным: поток среды может носить линейно-струйный характер без возмущения масс среды в поперечном сечении потока (*ламинарное течение*); в потоке среды может осуществляться поперечный перенос возмущенных масс среды (*турбулентное*

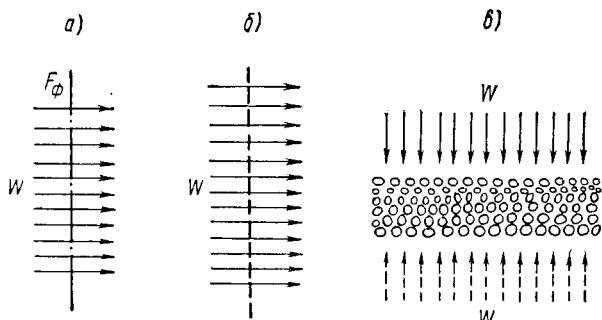


Рис. 96. Сквозное течение среды: а) во фронте; б) в решетке; в) в зерновом слое

*течение*). Во всех случаях у поверхности обтекаемого тела существует пограничный слой с наиболее резким изменением скорости течения. В зависимости от характера потока течение среды в пограничном слое может быть ламинарным или частично турбулентным.

Все указанные случаи конвективного теплообмена тел ниже рассматриваются, и приводятся соответствующие расчетные формулы для определения конвективной теплоотдачи.

Расчет конвективной теплоотдачи тел проводится с использованием следующих формул для определения теплового потока:

а) кондуктивный перенос тепла в пристенном граничном слое среды определяется формулой:

$$q_F = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_F, \quad (69,1)$$

где  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности среды в пристенном граничном слое,

$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_F$  — градиент температуры в пристенном граничном слое среды;

б) для определения конвективного теплообмена тела с текущей средой используется формула:

$$q_F = \alpha (T_F - T_n), \quad (69,2)$$

где  $\alpha$  — коэффициент теплоотдачи,

$T_F - T_{\Pi}$  — разность температур поверхности тела и потока среды.

Из формул (69,1) и (69,2) для определения конвективного теплообмена тел получают критерий Н у с с е л ь т а (см. § 32, B):

$$Nu = \frac{\alpha l}{\lambda}, \quad (69,3)$$

где  $l$  — характерный размер тела.

Этот критерий конвективно-кондуктивного переноса тепла является функцией температурного поля текущей среды относительно поверхности тела и в общем случае зависит от всех величин, определяющих температурное поле в потоке среды.

Для определения конвективного переноса тепла можно пользоваться также формулой:

$$q_F = \bar{w} \bar{\rho} \bar{c}_p (T_F - T_{\Pi}), \quad (69,4)$$

в которой  $\bar{w}$  — условная скорость перемещения среды, отнесенная к характерной площади (сечения потока, поверхности нагрева).

Из формул (69,2) и (69,4) получаем критерий конвективного переноса тепла — критерий С т е н т о н а:

$$St = \frac{\alpha}{\bar{w} \bar{\rho} \bar{c}_p}.$$

Этот критерий связан с критерием  $Nu$  следующим соотношением:

$$\frac{Nu}{St} = \frac{\alpha l}{\lambda} / \frac{\alpha}{\bar{w} \bar{\rho} \bar{c}_p} = \frac{\bar{w} l}{a} \equiv Pe, \quad (69,5)$$

где  $Pe \equiv \frac{\bar{w} l}{a}$  — критерий П е к л е.

Пользуясь критериями Р е й н о л ь д с а  $Re \equiv \frac{\bar{w} l}{\nu}$  и П р а н д т л я  $Pr \equiv \frac{\nu}{a}$ , соотношение (69,5) можно представить в виде:

$$St = \frac{Nu}{Re Pr} = \frac{Nu}{Pe}. \quad (69,6)$$

Критериями  $Nu$  и  $St$  пользуются при обобщении экспериментальных данных по конвективному теплообмену тел.

Критерий  $St \equiv \frac{\alpha}{\bar{w} \bar{\rho} \bar{c}_p}$  можно рассматривать как отношение удельного потока теплообмена среды с поверхностью нагрева  $q_F = \alpha(T_{\Pi} - T_F)$  к удельному потоку конвективного переноса тепла средой  $q_{\text{конв}} = \bar{w} \bar{\rho} \bar{c}_p (T_{\Pi} - T_F)$ . При этом предельная наивысшая величина критерия Стентона  $St = 1$ .

Предельный наибольший коэффициент теплоотдачи находится из равенства:

$$\alpha_{\max} = \omega Q c_p \frac{v t}{m^2 \cdot \text{град}} \cdot \quad (69,7)$$

Этот предельный наибольший коэффициент теплоотдачи отвечает сквозному течению среды на поверхности тела.

### § 70. Аналитическое решение задачи конвективно - кондуктивного переноса тепла в канале

Для детального изучения особенностей конвективно-кондуктивного переноса тепла текущей средой целесообразно рассмотреть теоретическое решение задачи конвективно-кондуктивного переноса тепла при ламинарном течении среды в канале круглого сечения.

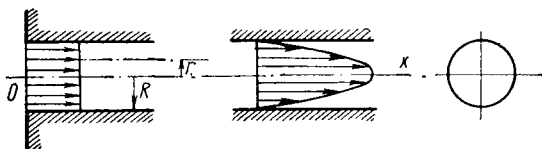


Рис. 97. Ламинарное течение среды в цилиндрическом канале

При осевом входе среды в канал из неограниченного пространства ламинарный поток среды имеет постоянную скорость и постоянную температуру по всему поперечному сечению потока (рис. 97). Вследствие трения текущей среды о стенки канала на некотором расстоянии от начального сечения скоростное поле в поперечном сечении потока стабилизируется и для изотермической среды принимает форму параболического распределения скоростей:

$$\omega = 2\bar{\omega} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right], \quad (70,1)$$

где  $\bar{\omega}$  — средняя скорость в сечении потока.

Целесообразно рассмотреть два предельных случая скоростных полей в канале: 1) в условиях начальной стадии течения с постоянным профилем скоростей и 2) в условиях стабилизированного течения с параболическим профилем скоростей в поперечном сечении потока.

Конвективно-кондуктивный перенос тепла в условиях стационарного режима и при отсутствии каких-либо действующих источников энергии в среде, без учета тепла трения, описывается

следующим уравнением переноса энергии:

$$\operatorname{div} \vec{q}_T + \operatorname{div} \vec{q}_{\text{конв}} = 0, \quad (70,2)$$

где  $\vec{q}_T = -\lambda \nabla T$  — вектор кондуктивного переноса тепла ( $\lambda$  — коэффициент теплопроводности среды,  $\nabla T$  — градиент температуры);

$\vec{q}_{\text{конв}} = \vec{w} \rho c_p T$  — вектор конвективного переноса тепла ( $\vec{w}$  — вектор скорости течения,  $\rho c_p$  — объемная теплоемкость,  $T$  — температура).

При условии неизменных физических параметров среды для симметричного распределения скоростей и температур в поперечном сечении канала уравнение (70,2) можно записать в следующем дифференциальном виде:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{w}{a} \frac{\partial T}{\partial x} = 0. \quad (70,3)$$

Если температура стенок канала во всех местах поддерживается одинаковой  $T_{\text{ст}} = \text{const}$ , то, обозначая разность температур среды и стенки

$$T(x, r) - T_{\text{ст}} = \theta(x, r),$$

дифференциальное уравнение (70,3) запишем в виде:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{w}{a} \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0. \quad (70,4)$$

Представляя решение этого уравнения в виде произведения двух функций

$$\theta(x, r) = \theta(x) \cdot \theta(r)$$

и подставляя его в (70,4), получаем следующее равенство:

$$\frac{\theta''(r)}{\theta(r)} + \frac{1}{r} \frac{\theta'(r)}{\theta(r)} = - \frac{\theta''(x)}{\theta(x)} + \frac{w}{a} \frac{\theta'(x)}{\theta(x)}. \quad (70,5)$$

#### А. Постоянная скорость течения

При условии постоянства скорости в сечении потока (как это, например, имеет место в начальном сечении и при отсутствии сцепления частиц текущей среды со стенкой канала) правая и левая части равенства (70,5) независимы друг от друга и равны одной и той же произвольной размерной величине, которую обозначаем  $[-\varepsilon^2]$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\theta''(r)}{\theta(r)} + \frac{1}{r} \frac{\theta'(r)}{\theta(r)} &= -\varepsilon^2, \\ \frac{\theta''(x)}{\theta(x)} - \frac{w}{a} \frac{\theta'(x)}{\theta(x)} &= \varepsilon^2, \end{aligned} \right\} \quad (70,6)$$

где  $\varepsilon^2$  — размерная положительная величина.

Таким образом, для распределения температур потока среды в цилиндрическом канале получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \theta''(r) + \frac{1}{r} \theta'(r) + \varepsilon^2 \theta(r) &= 0, \\ \theta''(x) - \frac{w}{a} \theta'(x) - \varepsilon^2 \theta(x) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (70,7)$$

Первое уравнение *Бесселя* — с нулевым параметром; его решением является периодическая функция Бесселя первого рода, нулевого порядка:

$$\theta(r) = C_0 J_0(\varepsilon r). \quad (70,8)$$

Для решения второго уравнения предварительно находим корни характеристического квадратного уравнения:

$$\begin{aligned} z^2 - \frac{w}{a} z - \varepsilon^2 &= 0, \\ \gamma_1 &= \frac{1}{2} \frac{w}{a} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} \frac{w}{a}\right)^2 + \varepsilon^2}, \\ \gamma_2 &= \frac{1}{2} \frac{w}{a} - \sqrt{\left(\frac{1}{2} \frac{w}{a}\right)^2 + \varepsilon^2}. \end{aligned}$$

Пользуясь этими корнями, решение второго дифференциального уравнения (70,7) можно представить в виде суммы двух экспоненциальных функций:

$$\theta(x) = C_1 \exp(\gamma_1 x) + C_2 \exp(\gamma_2 x).$$

Для канала неограниченной длины в этом решении придется отбросить член с положительным корнем  $\gamma_1$ , как не удовлетворяющий рассматриваемой задаче неограниченного канала (по мере возрастания  $x$   $\theta(x)$  убывает до нуля). Следовательно,

$$\theta(x) = C_2 \exp(\gamma_2 x). \quad (70,9)$$

Из двух частных решений (70,8) и (70,9) получаем решение уравнения (70,4) в следующем виде:

$$\theta(x, r) = A J_0(\varepsilon r) \exp(\gamma_2 x).$$

Из граничного условия на стенке

$$\theta(x, R) = 0 = A J_0(\varepsilon R) \exp(\gamma_2 x)$$

находим:

$$J_0(\varepsilon R) = 0. \quad (70,10)$$

Нулевому значению периодической функции Бесселя отвечает ряд значений аргумента:

$$\begin{aligned} \varepsilon R \equiv \mu_1 &= 2,405; \quad \mu_2 = 5,52; \quad \mu_3 = 8,654; \quad \mu_4 = 11,8; \\ \mu_5 &= 14,9; \quad \dots \mu_i = \dots \end{aligned}$$



Соответственно  $\mu_i$  составляем ряд частных решений:

$$\theta(x, r) = \sum_{i=1}^{i=\infty} A(\mu_i) J_0\left(\mu_i \frac{r}{R}\right) \exp\left\{\left[\frac{1}{2} \frac{wd}{a} - \sqrt{\left(\frac{1}{2} \frac{wd}{a}\right)^2 + 4\mu_i^2}\right] x/d\right\}.$$

Для начального сечения должно выполняться равенство:

$$\theta_a = \sum_{i=1}^{i=\infty} A(\mu_i) J_0\left(\mu_i \frac{r}{R}\right). \quad (70,11)$$

Из этого граничного условия аналогично рассмотренному ранее решению задачи нестационарной теплопроводности цилиндра определяются постоянные коэффициенты ряда:

$$A(\mu_i) = \theta_a \frac{2J_1(\mu_i)}{\mu_i [J_0^2(\mu_i) + J_1^2(\mu_i)]} = \theta_a \frac{2}{\mu_i J_1(\mu_i)}.$$

Таким образом, приходим к следующему окончательному решению задачи о температурном поле среды при конвективно-кондуктивном переносе тепла в цилиндрическом канале:

$$\frac{\theta(x, r)}{\theta_a} = \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{2}{\mu_i J_1(\mu_i)} J_0\left(\mu_i \frac{r}{R}\right) \times \exp\left\{-\frac{1}{2} Pe^{x/d} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{4\mu_i}{Pe}\right)^2} - 1\right]\right\}, \quad (70,12)$$

где  $Pe = \frac{wd}{a}$  — критерий Пекле.

На оси канала при  $r=0$   $J_0\left(\mu_i \frac{r}{R}\right) = 1$  и

$$\frac{\theta(x, 0)}{\theta_a} = \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{2}{\mu_i J_1(\mu_i)} \exp\left\{-\frac{1}{2} Pe^{x/d} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{4\mu_i}{Pe}\right)^2} - 1\right]\right\}. \quad (70,13)$$

В критериальной форме полученное решение можно представить в виде следующей функциональной зависимости:

$$\frac{\theta(x, r)}{\theta_a} = f(Pe^{x/d}, r/d). \quad (70,14)$$

На рис. 98 представлено температурное поле потока среды в цилиндрическом канале, вычисленное при  $Pe = 10$ , для начального участка канала  $x/d = 1$ , на котором еще в некоторой мере сохраняется постоянство скорости в поперечном сечении потока.

В частном случае *неподвижной среды*  $\omega=0$  в канале распространение тепла осуществляется только лишь теплопровод-

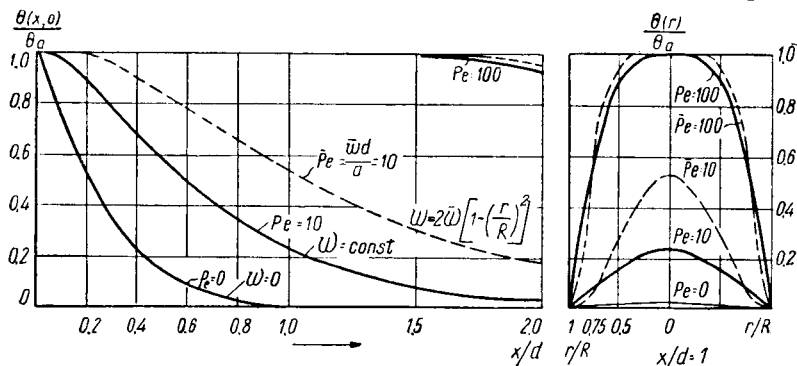


Рис. 98. Изменения температуры текущей среды при теплообмене со стенкой трубы, в условиях ламинарного течения с постоянным и параболическим профилем скоростей в поперечном сечении потока, при различных критериях  $Pe$

ностью, и формула распределения температур для принятого граничного условия  $\theta(x, R) = 0$  получается в виде:

$$\frac{\theta(x, r)}{\theta_a} = \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{2}{\mu_i J_1(\mu_i)} J_0\left(\mu_i \frac{r}{R}\right) \exp(-2\mu_i x/d). \quad (70,15)$$

Применительно к теплообмену неподвижного цилиндрического тела с окружающей средой граничное условие определяется уравнением

$$\alpha\theta(R) = -\lambda\theta'(r)|_{r=R}.$$

Выполняя дифференцирование (70,8), уравнение граничного условия представится в виде:

$$\mu_i \frac{J_1(\mu_i)}{J_0(\mu_i)} = \frac{\alpha R}{\lambda}. \quad (70,16)$$

Постоянные коэффициенты ряда находятся из начального условия:

$$A(\mu_i) = \theta_a \frac{2J_1(\mu_i)}{\mu_i [J_0^2(\mu_i) + J_1^2(\mu_i)]}.$$

Уравнение температурного поля в цилиндрическом теле неограниченной длины при теплообмене с окружающей средой представится в виде:

$$\frac{\theta(x, r)}{\theta_a} = \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{2J_1(\mu_i)}{\mu_i [J_0^2(\mu_i) + J_1^2(\mu_i)]} J_0\left(\mu_i \frac{r}{R}\right) \exp\left(-2\mu_i \frac{x}{d}\right). \quad (70,17)$$

Для стабилизированного параболического распределения скорости течения вязкой жидкости в поперечном сечении канала решение задачи усложняется тем, что в равенстве (70,5) скорость течения зависит от местоположения ( $r$ ) в сечении потока и определяется формулой:

$$\omega = 2\bar{\omega} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right], \quad (70,18)$$

где  $\bar{\omega}$  — средняя скорость в сечении потока.

В стабилизированном режиме течения скорость не зависит от  $x$ , и в первом приближении для решения задачи можно воспользоваться найденной температурной функцией (70,12), приняв для скорости течения заданную функцию (70,18):

$$\begin{aligned} \frac{\theta(x, r)}{\theta_a} = & \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{2}{\mu_i J_1(\mu_i)} J_0\left(\mu_i \frac{r}{R}\right) \times \\ & \times \exp \left\{ -\frac{x}{d} \left[ \sqrt{Pe^2 \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]^2 + 4\mu_i^2} - \right. \right. \\ & \left. \left. - Pe \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \right] \right\}, \quad (70,19) \end{aligned}$$

где  $Pe = \frac{\bar{\omega}d}{a}$  — критерий Пекле, определяемый по средней скорости течения.

В отличие от (70,12), формула (70,19) дает более резкий спад температуры по линиям тока в отдалении от оси канала ( $r > 0$ ).

На рис. 99 представлено вычисленное температурное поле, отвечающее конвективно-кондуктивному переносу тепла в канале при течении среды с параболическим распределением скоростей в поперечном сечении потока. Из сравнения температурных полей в канале при постоянном и параболическом распределении скоростей следует, что более резкое изменение температуры отвечает параболическому распределению скоростей в сечении потока.

Решение сложной задачи с учетом формирования скоростного поля в канале находится между полученными решениями и отвечает некоторому промежуточному полю. Реальное температурное поле в условиях конвективно-кондуктивного переноса тепла и теплообмена потока среды со стенкой канала усложняется зависимостью коэффициентов переноса от температуры и возможным перемещением масс среды, вызванным температурной неоднородностью (свободная конвекция). Отыскание реального температурного поля в этих сложных условиях является задачей экспериментального исследования.

Представляет интерес вычислить критерий конвективно-кондуктивной теплоотдачи ламинарного потока среды в цилиндриче-

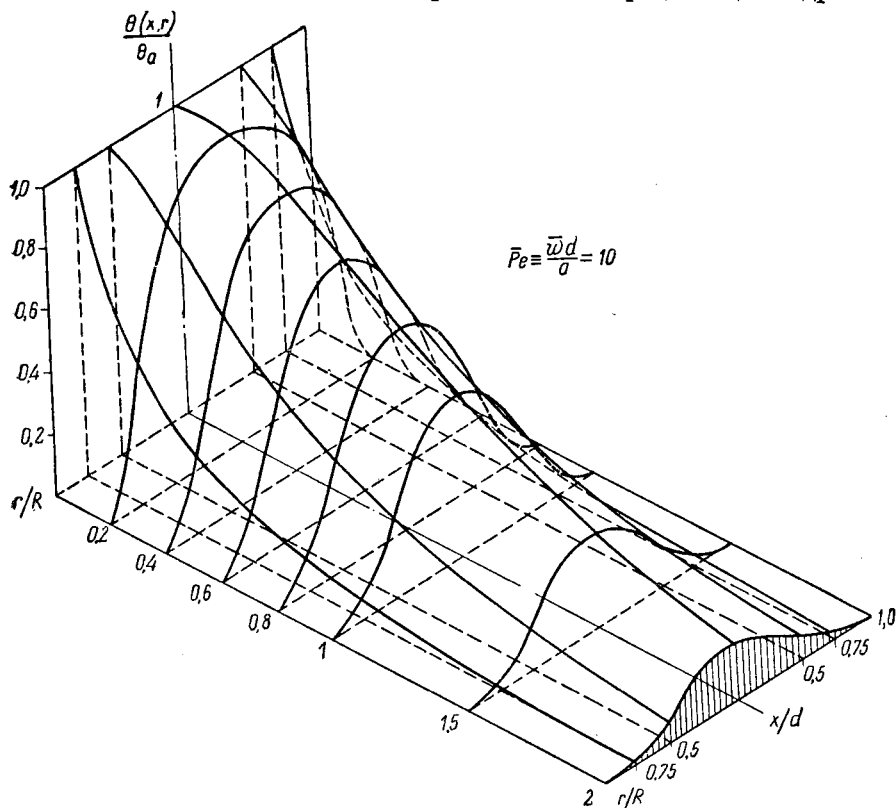


Рис. 99. Температурное поле текущей среды при теплообмене со стенкой трубы в условиях ламинарного течения с параболическим профилем скоростей в поперечном сечении потока

ском канале. Для этой цели можно использовать следующее равенство, определяющее теплопередачу в любом месте на стенках канала:

$$\alpha(x)\bar{\theta}(x) = -\lambda \left. \frac{\partial \theta(x, r)}{\partial r} \right|_{r=R}, \quad (70,20)$$

где  $\bar{\theta}(x) = \bar{T}(x) - T_{ст}$  — средняя разность температур в сечении потока.

Последняя, для случая постоянной скорости в сечении, находится по формуле:

$$\bar{\theta}(x) = \frac{\int_0^R \theta(x, r) 2\pi r dr}{\pi R^2},$$

где

$$\int_0^R \theta(x, r) 2\pi r dr = \theta_a 2\pi \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{2}{\mu_i J_1(\mu_i)} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{x}{d} [\sqrt{Pe^2 + 16\mu_i^2} - Pe] \right\} \int_0^R J_0 \left( \mu_i \frac{r}{R} \right) r dr.$$

Вычислением находим:

$$\int_0^R J_0 \left( \mu_i \frac{r}{R} \right) r dr = \frac{R^2}{\mu_i} J_1(\mu_i).$$

В результате получаем:

$$\bar{\theta}(x) = \theta_a \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{4}{\mu_i^2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} x/d [\sqrt{Pe^2 + 16\mu_i^2} - Pe] \right\}.$$

Путем дифференцирования находим:

$$\frac{\partial \theta(x, r)}{\partial r} \Big|_{r=R} = \theta_a \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{2}{\mu_i J_1(\mu_i)} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} x/d [\sqrt{Pe^2 + 16\mu_i^2} - Pe] \right\} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left[ J_0 \left( \mu_i \frac{r}{R} \right) \right] \Big|_{r=R},$$

где

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ J_0 \left( \mu_i \frac{r}{R} \right) \right] \Big|_{r=R} = -\frac{\mu_i}{R} J_1(\mu_i).$$

Следовательно, имеем:

$$\frac{\partial \theta(x, r)}{\partial r} \Big|_{r=R} = -\frac{2}{R} \theta_a \sum_{i=1}^{i=\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{x}{d} [\sqrt{Pe^2 + 16\mu_i^2} - Pe] \right\}.$$

Согласно уравнению (70,20), находим местный критерий теплообмена потока теплопроводной среды с постоянной скоростью в сечении канала:

$$Nu(x) \equiv \frac{\alpha(x)d}{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{i=\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} x/d [\sqrt{Pe^2 + 16\mu_i^2} - Pe] \right\}}{\sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{4}{\mu_i^2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} x/d [\sqrt{Pe^2 + 16\mu_i^2} - Pe] \right\}}. \quad (70,21)$$

При достаточно малом критерии конвективно-теплопроводного переноса тепла ( $Pe \ll 4 \mu_i$ ) и при достаточно большом соотношении

$x/d$ , отвечающем регулярному режиму изменения температуры по оси канала, для которого в формуле (70,21) можно ограничиться одним первым членом сумм ( $e^{-2\mu_i x/d}$ ), формула (70,21) приводит к следующему минимальному критерию теплообмена в канале:

$$Nu_{\min} = \mu_1^2 = 5,78.$$

С увеличением критерия  $Pe$ , при заданном  $x/d$ , критерий теплообмена  $Nu(x)$  возрастает. С увеличением  $x/d$ , при заданном критерии  $Pe$ , критерий теплообмена  $Nu(x)$  уменьшается.

Аналогично можно проанализировать изменение критерия теплообмена и при параболическом профиле скоростей в сечении потока, т. е. при течениях вязкой жидкости с прилипанием к стенкам канала [ $w(R)=0$ ]. В соответствии со структурой формулы (70,19), описывающей температурное поле в потоке жидкости с параболическим профилем скоростей в сечениях канала, критерий теплообмена оказывается более низким, чем для потока жидкости, скользящей по стенкам канала.

#### *В. Граничное условие с постоянным тепловым потоком на стенке*

Задача о конвективно-кондуктивном переносе тепла в цилиндрическом канале более просто решается, если теплообмен на границе определяется *условием постоянства удельного теплового потока*

$$q_{ст} = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R} = \text{const}$$

во всех местах поверхности канала. Такое условие приблизительно обеспечивается электронагревом массы стенки канала. При условии  $q_{ст} = \text{const}$  на участке канала в отдалении от начального сечения средний по сечению градиент температуры вдоль оси канала приблизительно должен сохраняться неизменным, так как на всех участках по оси канала осуществляется приблизительно одинаковое снижение энтальпии потока среды. В этих условиях величина среднего осевого температурного градиента легко вычисляется из равенства теплового баланса на любом участке канала:

$$\pi R^2 \bar{w} \rho c_p d\bar{T}_f = 2\pi R q_F dx,$$

откуда находим:

$$\frac{\partial \bar{T}_f}{\partial x} = \frac{2q_F}{R\bar{w}\rho c_p}. \quad (70,22)$$

Для участков канала с регулярным режимом изменения температуры потока вдоль оси средний осевой градиент температуры

совпадает с градиентом температуры в любом месте радиуса сечения:

$$\frac{\partial \bar{T}_f}{\partial x} = \frac{\partial T(r)}{\partial x}.$$

В этих условиях дифференциальное уравнение (70,3) представится в виде:

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} - \frac{\omega}{a} \frac{2q_F}{R\omega_{qc_p}} = 0. \quad (70,23)$$

Для постоянной скорости течения в поперечном сечении канала это уравнение запишется:

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} - \frac{2q_F}{\lambda R} = 0, \quad (70,24)$$

где  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности среды.

Решением уравнения (70,24) является интеграл:

$$T(r) = \frac{2q_F}{\lambda R} \frac{1}{4} r^2 + C_1 \ln r + C_2. \quad (70,25)$$

По условиям симметрии температурного поля в сечении канала

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=0} = 0,$$

откуда находим:  $C_1 = 0$ .

$$\text{При } r = R \quad T(R) = \frac{q_F R}{2\lambda} + C_2.$$

Следовательно,

$$C_2 = T(R) - \frac{q_F R}{2\lambda}.$$

Таким образом, для участков канала с регулярным изменением температуры вдоль оси получаем следующую температурную функцию:

$$T(r) = T(R) - \frac{q_F R}{2\lambda} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]. \quad (70,26)$$

Из найденного решения следует, что в поперечном сечении канала в рассматриваемых условиях получается параболическое распределение температур в потоке.

Коэффициент теплоотдачи на участке канала находится из равенства:

$$\alpha = \frac{q_{ст}}{T(R) - \bar{T}_f},$$

где  $\bar{T}_f$  — средняя температура в сечении потока.

Последняя определяется формулой:

$$\bar{T}_f = \frac{\int_0^R T(r) 2\pi r dr}{\pi R^2}.$$

Вычислением находим:

$$\bar{T}_f = T(R) - \frac{q_F R}{4\lambda}.$$

Следовательно,

$$\alpha = \frac{4\lambda}{R},$$

или

$$Nu_{\text{мин}} \equiv \frac{\alpha d}{\lambda} = 8.$$

По сравнению с конвективно-теплопроводным переносом тепла в канале при  $T_{\text{ст}} = \text{const}$  при условии  $q_{\text{ст}} = \text{const}$  критерий теплообмена получается заметно большим.

При параболическом распределении скорости в поперечном сечении ламинарного потока среды в цилиндрическом канале, на участках с регулярным температурным режимом, дифференциальное уравнение (70,23) переходит в следующее:

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} - \frac{4q_F}{\lambda R} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] = 0. \quad (70,27)$$

Решение этого дифференциального уравнения с учетом симметрии температурного поля  $\left[ \frac{dT}{dr} \Big|_{r=0} = 0 \right]$  и граничного условия  $[r=R, T(r) = T(R)]$  представляет следующая функция:

$$T(r) = T(R) - \frac{q_F R}{4\lambda} \left( 3 - \frac{4r^2}{R^2} + \frac{r^4}{R^4} \right). \quad (70,28)$$

На рис. 100 представлены профили температур в поперечном сечении потока при постоянной скорости (формула 70,26) и при параболическом распределении скоростей (формула 70,28) при граничном условии  $q_{\text{ст}} = \text{const}$ .

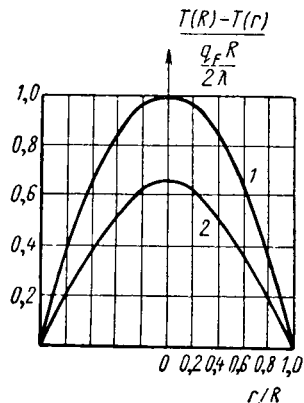


Рис. 100. Температурная функция в поперечном сечении потока в условиях теплообмена  $q_{\text{ст}} = \text{const}$  при ламинарном течении среды с постоянным (1) и параболическим (2) распределением скоростей в поперечном сечении потока



В условиях параболического распределения скоростей в сечении канала средняя разность температур находится по формуле:

$$\bar{\theta}_f = T(R) - \bar{T}(r) = \frac{\int_0^R \bar{\theta}(r) 2\bar{\omega} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] 2\pi r dr}{\pi R^2 \bar{\omega}},$$

где  $\theta(r) = T(R) - T(r)$  отвечает уравнению (70,28).

Вычислением находим:

$$\bar{\theta}_f = \frac{22qFR}{48\lambda}.$$

Определяя коэффициент теплоотдачи формулой

$$\alpha = \frac{qF}{\bar{\theta}_f},$$

приходим к следующему критерию теплообмена:

$$Nu_{\text{мин}} \equiv \frac{\alpha d}{\lambda} = 4,36.$$

Как и в случаях граничного условия  $t_{\text{ст}} = \text{const}$ , при граничном условии  $q_{\text{ст}} = \text{const}$  критерий теплообмена при параболическом распределении скорости в сечении канала получается меньшим, чем при постоянной скорости течения.

## § 71. Конвективный перенос тепла в канале с плоскопараллельными стенками

При условии неизменных физических параметров для ламинарного потока среды, ограниченного плоскопараллельными стенками, имеем следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\omega}{a} \frac{\partial T}{\partial x} = 0. \quad (71,1)$$

При постоянной температуре стенок канала ( $T_{\text{ст}} = \text{const}$ )

$$T(x, y) - T_{\text{ст}} = \theta(x, y)$$

уравнение (70,1) запишется в виде:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{\omega}{a} \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0. \quad (71,2)$$

Решая это уравнение для условий постоянной скорости в сечении канала методом, аналогичным изложенному в § 70, получаем следующую формулу для распределения температур:

$$\frac{\theta(x, y)}{\theta_1} = \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{2}{\delta_i} \sin \delta_i \cos \left( \delta_i \frac{y}{s/2} \right) \exp \left\{ -\frac{1}{2} x/s \left[ \sqrt{Pe^2 + 16\delta_i^2} - Pe \right] \right\}, \quad (71,3)$$

где  $\delta_i$  представляет собой последовательный ряд чисел:

$$\frac{\pi}{2}; 3 \frac{\pi}{2}; 5 \frac{\pi}{2}; 7 \frac{\pi}{2}; \dots$$

В частном случае *неподвижной среды* ( $w = 0$ ) в канале с плоскопараллельными стенками перенос тепла осуществляется только лишь теплопроводностью, и формула распределения температур для принятого граничного условия  $\theta(x, s/2) = 0$  получается в виде:

$$\frac{\theta(x, y)}{\theta_a} = \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{2}{\delta_i} \sin \delta_i \cos \left( \delta_i \frac{y}{s/2} \right) \exp \left( -2\delta_i \frac{x}{s} \right). \quad (71,4)$$

Применительно к теплообмену с окружающей средой неподвижного тела, ограниченного плоскопараллельными поверхностями, граничное условие определяется уравнением:

$$\delta_i \operatorname{tg} \delta_i = \frac{\alpha s/2}{\lambda}. \quad (71,5)$$

Уравнение температурного поля в неподвижном теле неограниченного размера по направлению  $x$  при теплообмене с окружающей средой находится в виде:

$$\frac{\theta(x, y)}{\theta_a} = \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{2 \sin \delta_i}{\delta_i + \sin \delta_i \cos \delta_i} \cos \left( \delta_i \frac{y}{s/2} \right) \exp \left( -2\delta_i \frac{x}{s} \right). \quad (71,6)$$

Коэффициент теплоотдачи потока среды в канале с плоскопараллельными стенками находится из равенства:

$$\bar{\alpha} \theta(x, y) = -\lambda \left. \frac{\partial \theta(x, y)}{\partial y} \right|_{y=s/2},$$

откуда получаем:

$$\frac{\alpha s}{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{i=\infty} 4 \sin^2 \delta_i \exp \left\{ -\frac{1}{2} x/s [V Pe^2 + 16\delta_i^2 - Pe] \right\}}{\sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{2}{\delta_i^2} \sin^2 \delta_i \exp \left\{ -\frac{1}{2} x/s [V Pe^2 + 16\delta_i^2 - Pe] \right\}}. \quad (71,7)$$

Для  $Pe \ll 4\delta_i$  можно ограничиться одним первым членом суммы, и формула (71,7) дает предельную наименьшую величину критерия теплообмена:

$$Nu_{\min} = 4,93.$$

По сравнению с предельными наименьшими величинами критериев конвективного теплообмена в цилиндрическом канале предельные критерии теплообмена в канале с плоскопараллельными стенками оказываются несколько меньшими.

Результаты решения задачи о конвективно-кондуктивном переносе тепла в потоках, ограниченных стенками, можно использовать для определения теплообмена открытых потоков с окружающей средой. Такая задача встречается, например, в теплообмене текущих струй сплошной жидкости с окружающим газом.

Температурные поля в струях сплошной жидкости, истекающей из отверстия при неизменной площади сечения струи и при граничном условии третьего рода, описываются уравнениями:

а) круглая струя:

$$\frac{\theta(x, r)}{\theta_a} = \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{2J_1(\mu_i)}{\mu_i [J_0^2(\mu_i) + J_1^2(\mu_i)]} J_0\left(\mu_i \frac{r}{R}\right) \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{x}{d} [VPe^2 + 16\mu_i^2 - Pe]\right\},$$

где  $\mu_i$  — корни трансцендентного уравнения:

$$\mu_i \frac{J_1(\mu_i)}{J_0(\mu_i)} = \frac{\alpha d/2}{\lambda} \equiv Bi \text{ (критерий Био),}$$

$Pe = \frac{wd}{d}$  — критерий Пекле ( $d$  — диаметр струи);

б) струя щелеобразной формы сечения:

$$\frac{\theta(x, y)}{\theta_a} = \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{2 \sin \delta_i}{\delta_i + \sin \delta_i \cos \delta_i} \cos\left(\delta_i \frac{y}{s/2}\right) \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{x}{s} [VPe^2 + 16\delta_i^2 - Pe]\right\},$$

где  $\delta_i$  — корни уравнения:

$$\delta_i \operatorname{tg} \delta_i = \frac{\alpha s/2}{\lambda};$$

$Pe = \frac{ws}{a}$  ( $s$  — толщина струи).

Для турбулентных струй приходится пользоваться коэффициентами турбулентного переноса тепла ( $a_{\text{турб}}$ ,  $\lambda_{\text{турб}}$ ), которые определяются формулой:

$$a_{\text{турб}} = \frac{\lambda_{\text{турб}}}{\rho c_p} = \kappa(wd),$$

где  $\kappa$  — масштаб перехода от скорости и размера струи ( $w$ ) к средней скорости и длине пути перемещения турбулентных молей ( $\bar{c}_{\text{турб}}$ ,  $\bar{l}_{\text{турб}}$ ). При достаточно развитой турбулентности свободной струи  $\kappa \approx 1/100$ .

Все рассмотренные задачи конвективно-кондуктивного переноса тепла решались без учета возможного изменения коэффици-

циптов переноса с температурой. Кроме того, задачи решались для предельных скоростных полей потока среды без учета попутного формирования скоростного поля. Не учитывалось также влияние на температурное поле тепла трения вязкой среды. Помимо всего указанного, вынужденный ламинарный поток среды в канале может осложняться возможными свободными конвективными токами. В связи с этим реальные температурные поля и критерии теплообмена неизбежно будут отличаться от вычисленных.

Однако полученные теоретические решения задач конвективно-кондуктивного переноса тепла в каналах с заданным распределением скоростей при ламинарном течении среды необходимы для понимания особенностей формирования температурного поля и для отыскания аналитической функциональной зависимости для определения конвективного теплообмена.

## § 72. Распределение скоростей и температур в пограничном слое обтекаемых тел

Рассматривая распределение скоростей в плоскопараллельном неограниченном потоке среды при обтекании тела с плоской поверхностью (рис. 101), можно заметить, что у поверхности тела

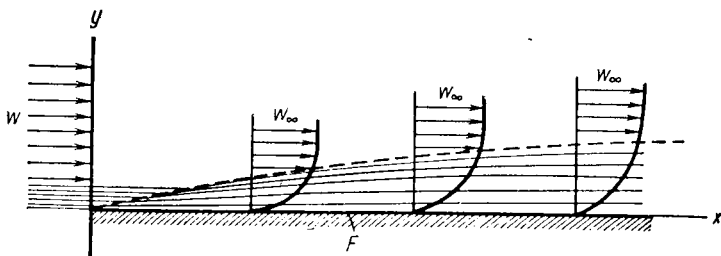


Рис. 101. Линии тока и распределение скоростей в пограничном слое среды, обтекающей тело с плоской поверхностью

существует пограничный слой, в котором при достаточно большой плотности вязкой среды скорость ее течения снижается до полного торможения у поверхности тела ( $w_{ст}=0$ ). Вне пограничного слоя стационарный поток имеет постоянную скорость течения  $w_{\infty}$ .

При обтекании тел более сложной формы у поверхности тела также существует пограничный слой (рис. 102) с резким изменением скорости течения до полного торможения у поверхности тела.

Если температура стенки  $T_{ст} \geq T_{\infty}$  — температуры неограниченного потока среды, то в районе зоны пограничного слоя в основном осуществляется и перепад температуры  $\theta = \pm (T_{\infty} - T_{ст})$ .

Существование пограничного слоя текущей вязкой среды у стенки является важнейшей особенностью гидродинамики и теплопередачи обтекаемых тел. На эту особенность впервые в 1904 г. обратил внимание Л. Прандтль, и с тех пор теория пограничного слоя успешно применяется для решения самых различных задач гидродинамики и теплопередачи обтекаемых тел.

Толщина пограничного слоя среды  $\delta$ , как показывают теоретические и экспериментальные исследования, для потоков с числом  $Re > 10^2$  оказывается значительно меньше характерного размера обтекаемого тела  $L$ , так что выполняется условие

$$\delta/L \ll 1.$$

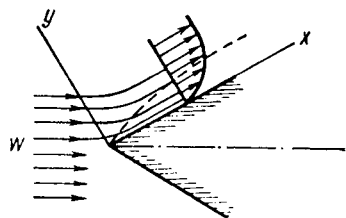


Рис. 102. Пограничный слой при обтекании тела клиновидной формы

Во многих случаях в пограничном слое вязкой среды у стенки можно предполагать *плоскопараллельное течение*, в котором скорость зависит лишь от двух направлений  $x$  и  $y$ .

Применительно к этому условию при стационарном режиме обтекания тела уравнения, описывающие перенос энергии, массы и количества движения в пограничном слое несжимаемой вязкой среды, с неизменными физическими параметрами, без источников тепловыделения, но с учетом тепла трения, запишутся в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{w_x}{a} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{w_y}{a} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\eta}{\lambda} \Phi = 0, \quad (72,1)$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0, \quad (72,2)$$

$$\left. \begin{aligned} w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g \cos(\widehat{g, x}) \beta (T - T_\infty) + \\ &\quad + \nu \left( \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \right), \\ w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + g \cos(\widehat{g, y}) \beta (T - T_\infty) + \\ &\quad + \nu \left( \frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} \right), \end{aligned} \right\} (72,3)$$

где

$$\Phi = 2 \left[ \left( \frac{\partial w_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_y}{\partial y} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial w_y}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial y} \right)^2 - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} \right)^2$$

— диссипативная функция.

Если учесть меньший порядок величин:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &\ll \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &\ll \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \omega_y \ll \omega_x, \\ \frac{\partial \omega_y}{\partial x} &\ll \frac{\partial \omega_x}{\partial y}, \end{aligned}$$

то уравнения (72,1), (72,2) и (72,3) для пограничного слоя среды в плоскопараллельном потоке запишутся в виде:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{w_x}{a} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{w_y}{a} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\eta}{\lambda} \left( \frac{\partial w_x}{\partial y} \right)^2 = 0, \quad (72,1')$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} = 0, \quad (72,2')$$

$$\omega_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g \cos(\vec{g}, x) \beta (T - T_\infty) + \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}. \quad (72,3')$$

Если, кроме того, при движении среды в пограничном слое не учитывать тепловую подъемную силу, то при условии преимущественно инерционного движения среды  $\left( \frac{\partial p}{\partial x} \ll \omega_x \frac{\partial w_x}{\partial x} \right)$  уравнение движения в пограничном слое можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} - \frac{w_x}{\nu} \frac{\partial w_x}{\partial x} - \frac{w_y}{\nu} \frac{\partial w_x}{\partial y} = 0. \quad (72,3'')$$

Если в уравнении переноса энергии не учитывать тепла трения, то уравнение (72,1') переходит в следующее:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{w_x}{a} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{w_y}{a} \frac{\partial T}{\partial y} = 0. \quad (72,1'')$$

В указанных условиях для среды, у которой  $\nu \approx a$  или  $\nu/a \equiv Pr \approx 1$ , уравнения переноса количества движения и переноса тепла в пограничном слое оказываются совершенно аналогичными ( $T$  аналог  $w$ ). Соответственно этому распределение скоростей и распределение температур в пограничном слое совпадают. Это важное свойство используют в так называемой гидродинамической теории теплообмена тел в потоке газов, у которых  $\nu/a \approx 1$ . Согласно этой теории, безразмерное температурное поле в пограничном слое, представляемое отношением  $\frac{\theta(x, y)}{\theta_\infty} = \frac{T(x, y) - T_{ст}}{T_\infty - T_{ст}}$ , и скоростное поле  $\frac{w(x, y)}{w_\infty}$  для  $Pr \approx 1$  оказываются одинаковыми:

$$\frac{\theta(x, y)}{\theta_\infty} \equiv \frac{w(x, y)}{w_\infty}.$$

§ 73. Плоскопараллельное течение в слое среды  
увлекаемой движущимся телом  
(течение Куэтта)

Прежде чем переходить к изучению распределения температур в пограничном слое обтекаемых тел, рассмотрим задачу плоскопараллельного течения в слое вязкой среды, увлекаемой поверхностью движущегося тела. Рассмотрение такого течения (течения Куэтта) представляет самостоятельный интерес и необходимо для дальнейшего понимания особенностей течения вязкой среды в пограничном слое обтекаемых тел.

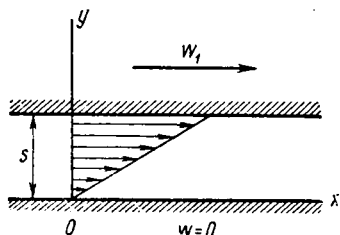


Рис. 103. Распределение скоростей в условиях течения Куэтта

Слой жидкой вязкой среды с неизменными физическими параметрами находится между неподвижным и движущимся телом с заданной постоянной скоростью  $w_1$  (рис. 103).

Движение вязкой среды, увлекаемой движущимся телом, не является напорным, поэтому

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \text{ и } \frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

Имея в виду, что в условиях плоскопараллельного течения среды с постоянной скоростью в слое постоянной толщины  $s$

$$w_y = 0 \text{ и } \frac{\partial w_x}{\partial x} = 0,$$

уравнение движения среды в слое запишется:

$$\frac{d^2 w_x}{dy^2} = 0.$$

Решением этого дифференциального уравнения служит интеграл:

$$w_x(y) = C_1 y + C_2.$$

Для граничных условий

$$y = 0, \quad w_x(y) = 0, \quad C_2 = 0;$$

$$y = s, \quad w_x(y)|_{y=s} = w_1, \quad C_1 = \frac{w_1}{s}.$$

Таким образом, получаем следующее распределение скоростей течения в слое (рис. 103):

$$w_x(y) = w_1 \frac{y}{s}. \quad (73,1)$$

При наличии постоянной разности температур на границах слоя  $T_1 - T_0$  можно найти распределение температур в слое. Представляет интерес найти распределение температур в слое среды с учетом тепла трения.

Применительно к условиям рассматриваемой задачи  $\left(\frac{\partial T}{\partial x} = 0; w_y = 0\right)$  дифференциальное уравнение (72,1) переноса тепла в слое запишется в следующем виде:

$$\frac{d^2 T}{dy^2} + \frac{\eta}{\lambda} \left(\frac{dw_x}{dy}\right)^2 = 0.$$

С учетом (73,1) получаем:

$$\frac{d^2 T}{dy^2} + \frac{\eta}{\lambda} \left(\frac{w_1}{s}\right)^2 = 0. \quad (73,2)$$

Интегралом этого уравнения служит функция:

$$T(y) = -\frac{\eta}{\lambda} \left(\frac{w_1}{s}\right)^2 \frac{1}{2} y^2 + C_1 y + C_2. \quad (73,3)$$

Из граничных условий находим:

$$\text{для } y = 0 \quad T = T_0, \quad C_2 = T_0;$$

$$\text{для } y = s \quad T = T_1, \quad C_1 = \frac{T_1 - T_0}{s} + \frac{\eta}{\lambda} \frac{w_1^2}{s}.$$

Таким образом, получаем следующее решение задачи:

$$\frac{\theta(y)}{\theta_1} = \frac{T(y) - T_0}{T_1 - T_0} = \frac{y}{s} + \frac{\eta}{\lambda} \frac{w_1^2}{2(T_1 - T_0)} \frac{y}{s} \left(1 - \frac{y}{s}\right). \quad (73,4)$$

Обозначая

$$\frac{y}{s} = \xi, \quad \frac{T(y) - T_0}{T_1 - T_0} = \theta(\xi), \quad \frac{w_1^2}{2c_p} = \theta_{\text{кин}},$$

$$\frac{\theta_{\text{кин}}}{T_1 - T_0} = \theta_{\text{кин}}, \quad \frac{\eta/\rho}{\lambda/\rho c_p} = \frac{\nu}{a} \equiv Pr,$$

уравнение (73,4) запишем в следующей безразмерной форме:

$$\theta(\xi) = \xi + Pr \cdot \theta_{\text{кин}} \cdot \xi(1 - \xi). \quad (73,5)$$

Полученное уравнение можно истолковать как сложное распределение температур в плоскопараллельном слое текущей среды. Распределение температур в слое составляется из:

1) прямолинейного распределения температур, обусловленного теплопроводностью слоя при переносе тепла от одной поверхности тела с  $T_1$  к другой с  $T_0$ ;

2) параболического распределения температур в слое, обусловленного выделением и переносом тепла трения текущей среды.

На рис. 104 представлено вычисленное температурное поле в слое  $\theta(\xi)$  в зависимости от безразмерной координаты  $\xi$  для



различных произведений  $Pr \cdot \theta_{кин}$ . Как видно из рисунка, для больших значений произведения  $Pr \cdot \theta_{кин}$  (что отвечает большим скоростям движения тела) температура в слое среды вследствие тепла трения достигает столь больших величин, что оба тела становятся тепловосприимчивыми.

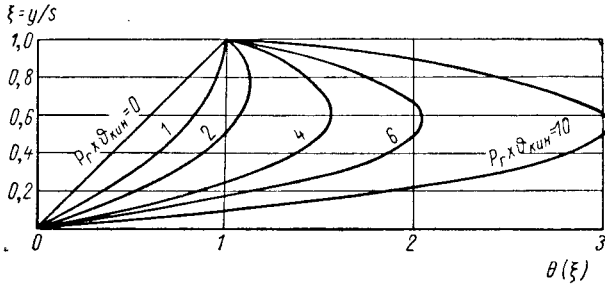


Рис. 104. Температурное поле в условиях течения Куэтта

Если температуры обоих тел поддерживаются одинаковыми, то уравнение распределения температур в слое среды переходит в следующее:

$$T(y) - T_1 = \frac{\eta}{\lambda} \frac{w_1^2}{2} \frac{y}{s} \left(1 - \frac{y}{s}\right).$$

В этом случае максимальная температура достигается в середине слоя при  $y = s/2$  и

$$T_{\max} - T_1 = 1/4 \frac{\eta}{\lambda} \frac{w_1^2}{2}.$$

Вводя, как и ранее, число  $Pr$  и кинетическую температуру  $\theta_{кин}$ , имеем отношение:

$$\frac{T_{\max} - T_1}{T_1} = 1/4 Pr \frac{\theta_{кин}}{T_1}. \quad (73,6)$$

Для газовой среды, пользуясь известным соотношением

$$\frac{\theta_{кин}}{T_1} = \frac{k-1}{2} M^2,$$

где  $M$  — число Маха, получаем:

$$\frac{T_{\max} - T_1}{T_1} = \frac{k-1}{8} Pr \cdot M^2. \quad (73,7)$$

Если одна из стенок, например неподвижная, не проводит тепла  $\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$ , то, используя это граничное условие

в интеграле (73,3), находим:

$$y = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad C_1 = 0;$$

$$y = s, \quad T(y)|_{y=s} = T_1, \quad C_2 = T_1 + \frac{\eta}{\lambda} \left( \frac{w_1}{s} \right)^2 \frac{1}{2} s^2.$$

Таким образом, для этого случая имеем следующее решение

$$T(y) - T_1 = \frac{\eta}{\lambda} \frac{w_1^2}{2} \left[ 1 - \left( \frac{y}{s} \right)^2 \right]. \quad (73,8)$$

Температура неподвижного тела находится при  $y = 0$ :

$$T_0 - T_1 = \frac{\eta}{\lambda} \frac{w_1^2}{2}. \quad (73,9)$$

Вводя числа  $Pr$  и  $M$ , для газов имеем:

$$\frac{T_0 - T_1}{T_1} = \frac{k-1}{2} Pr \cdot M^2,$$

или

$$\frac{T_0}{T_1} = 1 + \frac{k-1}{2} Pr \cdot M^2. \quad (73,10)$$

Отсюда следует, что термометр неподвижной стенки ( $T_0$ ) покажет тем большую температуру, чем с большей относительной скоростью движется тело.

Рассмотренные примеры вскрывают характерные особенности развития температуры за счет тепла трения движущейся вязкой среды.

Следует отметить, что в приведенных решениях задачи о распределении скоростей и температур в течении Куэтта не учитывалось температурное расширение газа.

## § 74. Распределение скоростей в пограничном слое среды при обтекании пластины

При обтекании тонкой пластины плоскопараллельным неограниченным ламинарным потоком вязкой среды образуется пограничный слой, в котором среда перемещается с резким изменением скорости течения у поверхности пластины. Линии тока по мере перемещения среды в пограничном слое вдоль пластины несколько отклоняются от ее поверхности (рис. 105).

Уравнения переноса количества движения и сохранения массы текущей изотермической среды в пограничном слое запишутся в виде:

$$\frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} - \frac{w_x}{\nu} \frac{\partial w_x}{\partial x} - \frac{w_y}{\nu} \frac{\partial w_x}{\partial y} = 0, \quad (74,1)$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0. \quad (74,2)$$

Граничными условиями являются:

$$\text{при } y = 0 \quad w_x = 0, \quad w_y = 0;$$

$$\text{при } y \rightarrow \infty \quad w_x \rightarrow w_\infty.$$

Для решения задачи Г. Блазиус воспользовался безразмерной координатой

$$\xi = \frac{y}{x} \sqrt{\frac{w_\infty x}{\nu}} \quad (74,3)$$

и привлек функцию тока

$$\psi(x, \xi) = \nu \sqrt{\frac{w_\infty x}{\nu}} f(\xi), \quad (74,4)$$

которая удовлетворяет уравнению сохранения массы текущей

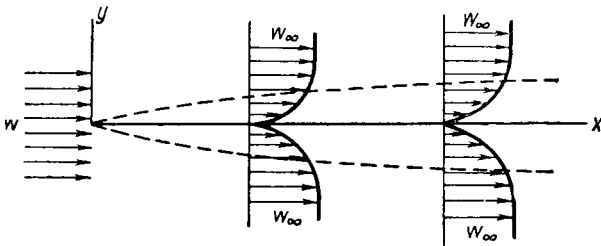


Рис. 105. Распределение скоростей в пограничном слое среды при обтекании тонкой пластины ламинарным потоком

среды (74,2) и позволяет представить скорости течения  $w_x$  и  $w_y$  в следующем виде:

$$w_x = \frac{\partial \psi(x, \xi)}{\partial y} = \frac{\partial \psi(x, \xi)}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} = w_\infty f'(\xi), \quad (74,5)$$

$$w_y = -\frac{\partial \psi(x, \xi)}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\nu}{x} \sqrt{\frac{w_\infty x}{\nu}} [\xi f'(\xi) - f(\xi)]. \quad (74,6)$$

Пользуясь полученными формулами для определения  $w_x$  и  $w_y$ , уравнение движения изотермической среды в пограничном слое (74,1) представится в следующем виде:

$$f(\xi) \cdot f''(\xi) + 2f'''(\xi) = 0. \quad (74,7)$$

Граничными условиями являются:

$$\text{при } \xi = 0 (y = 0) \quad f'(\xi) = 0 (w = 0);$$

$$\xi \rightarrow \infty (y \rightarrow \infty), \quad f'(\xi) \rightarrow 1 (w \rightarrow w_\infty).$$

Решение дифференциального уравнения для функции тока  $f(\xi)$  может быть выполнено различными методами (разложением

в ряд, численным интегрированием и т. п.). В табл. 10 приведены вычисленные значения функций:  $f(\xi)$ ,  $f'(\xi) = \frac{w_x}{w_\infty}$  и  $f''(\xi)$  аргумента  $\xi = \frac{y}{x} \sqrt{\frac{w_\infty x}{\nu}}$ .

Т а б л и ц а 10

$\xi$	$f(\xi)$	$f'(\xi)$	$f''(\xi)$	$\xi$	$f(\xi)$	$f'(\xi)$	$f''(\xi)$
0	0	0	0,33206	4,4	2,69238	0,97587	0,03897
0,2	0,00664	0,06641	0,33199	4,6	2,88826	0,98269	0,02948
0,4	0,02656	0,13277	0,33147	4,8	3,08534	0,98779	0,02187
0,6	0,05974	0,19894	0,33008	5,0	3,28329	0,99155	0,01591
0,8	0,10611	0,26471	0,32739	5,2	3,48189	0,99425	0,01134
1,0	0,16557	0,32979	0,32301	5,4	3,68094	0,99616	0,00793
1,2	0,23795	0,39378	0,31659	5,6	3,88031	0,99748	0,00543
1,4	0,32298	0,45627	0,30787	5,8	4,07990	0,99838	0,00365
1,6	0,42032	0,51676	0,29667	6,0	4,27964	0,99898	0,00240
1,8	0,52952	0,57477	0,28293	6,2	4,47948	0,99937	0,00155
2,0	0,65003	0,62977	0,26675	6,4	4,67938	0,99961	0,00098
2,2	0,78120	0,68132	0,24835	6,6	4,87931	0,99977	0,00061
2,4	0,92230	0,72899	0,22809	6,8	5,07928	0,99987	0,00037
2,6	1,07252	0,77246	0,20646	7,0	5,27926	0,99992	0,00022
2,8	1,23099	0,81152	0,18401	7,2	5,47925	0,99996	0,00013
3,0	1,39682	0,84605	0,16136	7,4	5,67924	0,99998	0,00007
3,2	1,56911	0,87609	0,13913	7,6	5,87924	0,99999	0,00004
3,4	1,74696	0,90177	0,11788	7,8	6,07923	1,00000	0,00002
3,6	1,92954	0,92333	0,09809	8,0	6,27923	1,00000	0,00001
3,8	2,11605	0,94112	0,08013	8,2	6,47923	1,00000	0,00001
4,0	2,30576	0,95552	0,06424	8,4	6,67923	1,00000	0,00000
4,2	2,49806	0,96696	0,05052	8,6	6,87923	1,00000	0,00000
				8,8	7,07923	1,00000	0,00000

Из результата решения рассматриваемой задачи следует, что скорость продольного течения в пограничном слое, определяемая формулой (74,5)

$$\frac{w_x}{w_\infty} = f'(\xi),$$

возрастает с увеличением  $y$  и уменьшается с увеличением  $x$  (рис. 106).

Скорость поперечного течения сноса жидкости в пограничном слое также возрастает с увеличением  $y$  и уменьшается с увеличением  $x$  (рис. 107). При этом на внешней зоне пограничного слоя скорость сноса отвечает равенству:

$$\frac{w(y)_\infty}{w_\infty} = \frac{0,865}{\sqrt{Re_x}}.$$

Пользуясь результатами решения задачи обтекания пластины плоскопараллельным ламинарным потоком среды, можно вычислить *сопротивление течению*.

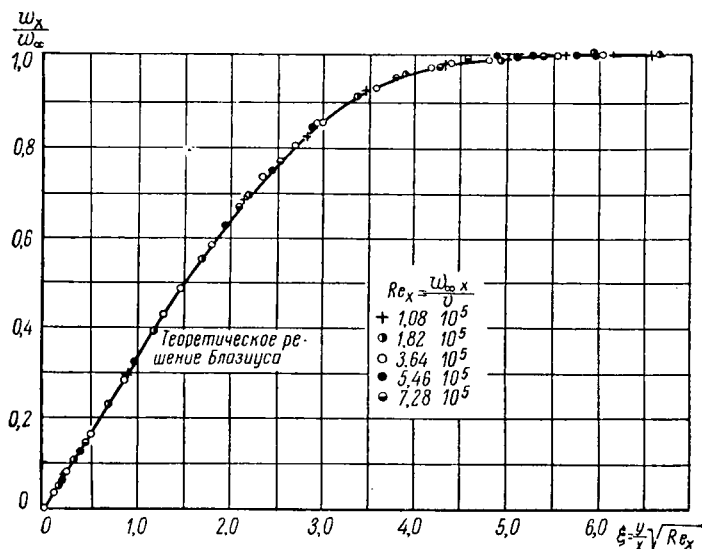


Рис. 106. Относительная скорость течения в продольном направлении в пограничном слое среды при обтекании пластины ламинарным потоком

Местная сила трения на стенке определяется формулой:

$$\sigma_F(x) = \eta \left. \frac{\partial w_x}{\partial y} \right|_{y=0} = \eta w_\infty \sqrt{\frac{w_\infty}{\nu x}} f''(\xi) \Big|_{\xi=0} = 0,332 \eta w_\infty \sqrt{\frac{w_\infty}{\nu x}}. \quad (74,8)$$

Соответственно местный коэффициент трения находится из отношения:

$$\zeta(x) = \frac{\sigma_F(x)}{\frac{w_\infty^2}{2}} = \frac{0,664}{\sqrt{Re_x}}, \quad (74,9)$$

где  $Re_x = \frac{w_\infty x}{\nu}$  — число Рейнольдса, отвечающее пути обтекания  $x$ .

Для пластины заданной длины  $L$  средний коэффициент сопротивления определяется формулой:

$$\bar{\zeta} = \frac{\int_0^L \zeta(x) dx}{L} = \frac{1,328}{\sqrt{Re_L}}. \quad (74,10)$$

Толщину пограничного слоя условно можно определить величиной  $y$ , которая отвечает скорости  $w_x = 0,99w_\infty$ , т. е. на 1%

не доходит до полного изменения  $w_\infty$ . Этому значению  $\frac{w_x}{w_\infty} = f'(\xi) = 0,99$  отвечает величина безразмерной координаты  $\xi \approx 5$  (рис. 106) или

$$\frac{\delta(x)}{x} = \frac{5}{\sqrt{Re_x}}. \quad (74,11)$$

Можно так же определить и приведенную толщину динамического пограничного слоя, в которой происходит полное изме-

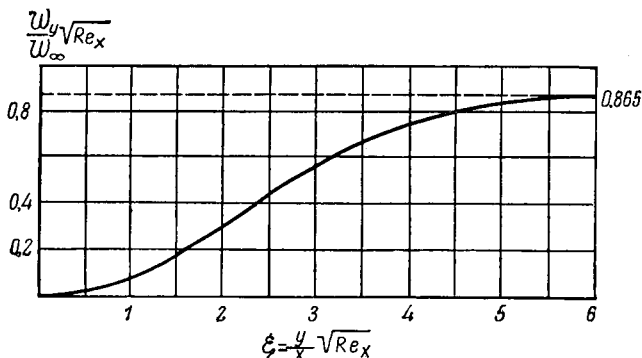


Рис. 107. Относительная скорость поперечного сноса при течении в пограничном слое среды при обтекании пластины

нение скорости течения от  $w_\infty$  до 0 по линейному закону:

$$\frac{w_\infty}{\delta_w(x)} = \frac{\partial w_x}{\partial y} \Big|_{y=0} = w_\infty \sqrt{\frac{w_\infty}{\nu x}} f''(\xi) \Big|_{\xi=0} = 0,332 w_\infty \sqrt{\frac{w_\infty}{\nu x}},$$

откуда относительная приведенная толщина пограничного слоя находится в виде следующей зависимости от числа  $Re_x = \frac{w_\infty x}{\nu}$ :

$$\frac{\delta_w(x)}{x} = \frac{1}{0,332 \sqrt{Re_x}} \cong \frac{3}{\sqrt{Re_x}}. \quad (74,12)$$

В заключение следует отметить, что экспериментальные исследования (рис. 106) хорошо подтверждают теоретическое решение задачи о распределении скоростей в пограничном слое обтекаемой пластины плоскопараллельным ламинарным потоком. Однако необходимо иметь в виду, что ламинарный режим течения при обтекании пластины сохраняется лишь для чисел  $Re$ , меньших  $3 \div 5 \cdot 10^5$ . Для больших чисел  $Re$  ламинарный режим течения переходит в турбулентный. При этом критическое число  $Re_{крит}$ , отвечающее толщине пограничного слоя, находится:

$$Re_\delta \Big|_{крит} = \frac{w \delta(x)}{\nu} = 5 \sqrt{Re_{x_{крит}}} = 2740 \div 3540.$$

## § 75. Теплоотдача пластины при обтекании плоскопараллельным ламинарным потоком

Как указывалось выше, для газов, у которых  $\nu \approx a$  и  $Pr \approx 1$ , дифференциальные уравнения распределения скоростей и температур в пограничном слое совпадают. В этих случаях для определения теплоотдачи можно воспользоваться формулой приведенной толщины пограничного слоя.

Так как для среды с неизменным коэффициентом теплопроводности

$$\alpha(x) = \frac{\lambda}{\delta_w(x)}, \quad (75,1)$$

то путем подстановки формулы (74,12) в (75,1) находим критерий теплоотдачи

$$\frac{\alpha(x)x}{\lambda} \equiv Nu(x) = 0,332 \sqrt{Re_x}. \quad (75,2)$$

Средняя величина критерия теплообмена на участке  $L$  обтекаемой пластины находится

$$\overline{Nu}_L = 0,664 \sqrt{Re_L}. \quad (75,3)$$

Более сложно решается задача теплоотдачи обтекаемой пластины для сред, у которых критерий  $Pr \neq 1$ . Для этого случая дифференциальное уравнение (72,1) распределения температур в пограничном слое с учетом тепла трения при подстановке скоростей  $w_x$  и  $w_y$ , найденных в условиях течения изотермической среды, запишется в виде:

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \frac{Pr}{2} f(\xi) \frac{d\theta}{d\xi} + Pr \frac{w_\infty^2}{c_p} [f''(\xi)]^2 = 0, \quad (75,4)$$

где  $\theta = \frac{T(\xi) - T_\infty}{T_{ст} - T_\infty}$  — безразмерная разность температур ( $T_{ст}$  — температура стенки,  $T_\infty$  — температура потока).

Рассмотрим решение этого уравнения для двух случаев.

**Без учета тепла трения.** Для этого случая решение дифференциального уравнения распределения температур в пограничном слое среды при обтекании пластины

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \frac{Pr}{2} f(\xi) \frac{d\theta}{d\xi} = 0 \quad (75,5)$$

представлено Е. Польгаузенем в следующем виде:

$$\theta(\xi, Pr) = \frac{\int_{\eta=\xi}^{\infty} [f''(\eta)]^{Pr} d\eta}{\int_{\eta=0}^{\infty} [f''(\eta)]^{Pr} d\eta}. \quad (75,6)$$

В частном случае для  $Pr = 1$  получаем:

$$\theta(\xi, 1) = 1 - f'(\xi) = 1 - \frac{w_x}{w_\infty}. \quad (75,7)$$

Для определения теплоотдачи стенки необходимо вычислить градиент температуры у стенки:

$$-\left. \frac{d\theta(\xi, Pr)}{d\xi} \right|_{\xi=0} = \frac{[f''(\xi)]^{Pr}}{\int_0^\infty [f''(\eta)]^{Pr} d\eta} = \frac{0,332^{Pr}}{\int_0^\infty [f''(\eta)]^{Pr} d\eta}. \quad (75,8)$$

Величина относительного градиента температуры, вычисленная Е. Польгаузенем для различных величин критерия  $Pr$ , составляет:

Таблица 11

$Pr = 0,6$	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	7	10	15
$-\left. \frac{d\theta(\xi, Pr)}{d\xi} \right _{\xi=0} = 0,276$	0,293	0,307	0,320	0,332	0,334	0,645	0,730	0,835

Аппроксимирующей формулой относительного градиента температуры может служить следующее уравнение:

$$-\left. \frac{d\theta(\xi, Pr)}{d\xi} \right|_{\xi=0} = 0,332 \sqrt[3]{Pr}. \quad (75,9)$$

Приведенная толщина теплового пограничного слоя, в котором происходит полное изменение температуры текущей среды от  $T_{ст}$  до  $T_\infty$  по линейному закону, определяется из равенства:

$$\frac{1}{\delta_T(x)} = -\left. \frac{\partial\theta}{\partial y} \right|_{y=0},$$

где

$$\left. \frac{\partial\theta}{\partial y} \right|_{y=0} = \sqrt{\frac{w_\infty}{\nu x}} \left. \frac{\partial\theta}{\partial\xi} \right|_{\xi=0} = -0,332 \sqrt[3]{Pr} \sqrt{\frac{w_\infty}{\nu x}}.$$

Таким образом, находим:

$$\delta_T(x) = \frac{1}{0,332 \sqrt[3]{Pr} \sqrt{\frac{w_\infty}{\nu x}}}. \quad (75,10)$$

Для среды с постоянным коэффициентом теплопроводности коэффициент теплоотдачи определяется отношением:

$$\alpha(x) = \frac{\lambda}{\delta_T(x)}.$$



Отсюда получаем следующую формулу для определения критерия конвективного теплообмена:

$$Nu(x) \equiv \frac{\alpha(x)x}{\lambda} = 0,332 \sqrt[3]{Pr} \sqrt{Re_x}. \quad (75,11)$$

Средняя величина критерия теплообмена на участке  $L$  обтекаемой пластины получается:

$$\overline{Nu}_L = 0,664 \sqrt[3]{Pr} \sqrt{Re_L}. \quad (75,12)$$

С учетом тепла трения. Распределение температуры в пограничном слое текущей среды у стенки с учетом тепла трения находится интегрированием уравнения (75,4). Интеграл этого уравнения целесообразно представить в виде наложения двух частных решений:

- 1) распределения температур без учета тепла трения (75,6) и
- 2) частного решения (75,4) с учетом тепла трения:

$$\frac{T(\xi) - T_\infty}{T_{ст} - T_\infty} = \theta(\xi, Pr) + \frac{w_\infty^2}{2c_p} \vartheta(\xi, Pr), \quad (75,13)$$

где  $\theta(\xi, Pr)$  — решение (75,6);

$\vartheta(\xi, Pr)$  — частное решение дифференциального уравнения (75,4).

Г. Шлихтингом решение (75,4) представлено в следующем виде:

$$\vartheta(\xi, Pr) = 2Pr \int_{\eta=\xi}^{\infty} [f''(\eta)]^{Pr} \left( \int_0^{\eta} [f''(\tau)]^{2-Pr} d\tau \right) d\eta. \quad (75,14)$$

В частном случае  $Pr = 1$  получаем:

$$\vartheta(\xi, 1) = 1 - [f'(\xi)]^2.$$

При  $\xi = 0$   $\vartheta(\xi)|_{\xi=0} = 1$ ;  $T(\xi)|_{\xi=0} = T'_{ст}$ .

Следовательно,

$$T_{*ст} = T_{ст} + \frac{w_\infty^2}{2c_p}. \quad (75,15)$$

Таким образом, для газов, у которых  $Pr = 1$ , температура стенки при обтекании плоскопараллельным потоком повышается на величину кинетической температуры потока  $\theta_{кин} = \frac{w_\infty^2}{2c_p}$ .

Для текущих сред с  $Pr \neq 1$  температура стенки с дополнительным нагревом от тепла трения определяется формулой:

$$T_{*ст} = T_{ст} + \frac{w_\infty^2}{2c_p} \vartheta(0, Pr), \quad (75,16)$$

где величина  $\vartheta(0, Pr)$  для различных критериев  $Pr$  составляет:

$Pr = 0,6$	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	7	10	15
$\vartheta(0, Pr) = 0,77$	0,835	0,895	0,950	1,0	1,05	2,515	2,965	3,535

Аппроксимирующей формулой для  $\vartheta(0, Pr)$  служит:

$$\vartheta(0, Pr) = \sqrt{Pr}. \quad (75,17)$$

Распределение температур в пограничном слое среды у стенки с учетом тепла трения, отнесенное к разности температур  $T_{*ст} - T_{\infty}$ , определяется формулой:

$$\frac{T(\xi) - T_{\infty}}{T_{*ст} - T_{\infty}} = \frac{T_{ст} - T_{\infty}}{T_{*ст} - T_{\infty}} \vartheta(\xi, Pr) + \frac{\theta_{кин}}{T_{*ст} - T_{\infty}} \vartheta(\xi, Pr). \quad (75,18)$$

Так как, согласно формуле (75,16),

$$T_{ст} = T_{*ст} - \theta_{кин} \vartheta(0, Pr)$$

и обозначая

$$\frac{\theta_{кин}}{T_{*ст} - T_{\infty}} = \vartheta_{кин},$$

формулу (75,18) можно записать в следующем виде:

$$\frac{T(\xi) - T_{\infty}}{T_{*ст} - T_{\infty}} = (1 - \vartheta_{кин} \sqrt{Pr}) \vartheta(\xi, Pr) + \vartheta_{кин} \cdot \vartheta(\xi, Pr). \quad (75,19)$$

На рис. 108 представлен график зависимости  $\frac{T(\xi) - T_{\infty}}{T_{*ст} - T_{\infty}}$  от  $\xi = \frac{y}{x} \sqrt{\frac{w_{\infty} x}{\nu}}$  для различных величин  $\vartheta_{кин} \sqrt{Pr}$ . Как видно, для  $\vartheta_{кин} \sqrt{Pr} > 1$  температура среды в пограничном слое вследствие тепла трения оказывается более высокой, чем температура стенки; холодный воздух, обтекающий стенку с высокой скоростью, нагревает ее.

Если стенка, обтекаемая потоком среды с температурой  $T_{\infty}$ , не отводит тепла, то термометр, помещенный в стенке, покажет температуру

$$T_{*ст} = T_{\infty} + \theta_{кин} \sqrt{Pr} = T_{\infty} \left( 1 + \frac{\theta_{кин}}{T_{\infty}} \sqrt{Pr} \right).$$

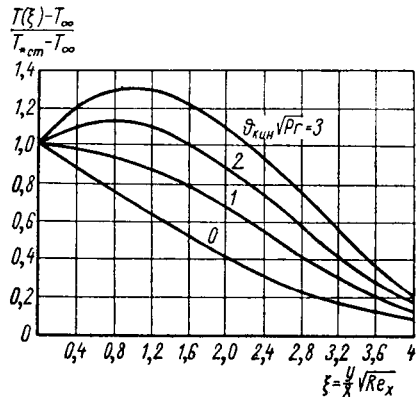


Рис. 108. Температурное поле в условиях теплоотдачи пластины при обтекании плоскопараллельным ламинарным потоком

Имея в виду, что

$$\frac{\vartheta_{\text{кин}}}{T_{\infty}} = \frac{k-1}{2} M^2,$$

для температуры стенки получаем формулу:

$$T_{* \text{ ст}}^* = T_{\infty} \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \sqrt{Pr} \right). \quad (75,20)$$

Теплоотдачу стенки с учетом тепла трения можно определить, вычислив температурный градиент:

$$-\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = -\sqrt{\frac{w_{\infty}}{\nu x}} \left. \frac{\partial T}{\partial \xi} \right|_{\xi=0}.$$

Путем дифференцирования формулы (75,19) находим:

$$-\left. \frac{\partial T}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = (T_{* \text{ ст}} - T_{\infty}) (1 - \vartheta_{\text{кин}} \sqrt{Pr}) 0,332 \sqrt[3]{Pr}.$$

Удельный тепловой поток от стенки определяется формулой:

$$q(x) = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = \lambda (1 - \vartheta_{\text{кин}} \sqrt{Pr}) 0,332 \sqrt[3]{Pr} \sqrt{\frac{w_{\infty}}{\nu x}} (T_{* \text{ ст}} - T_{\infty}). \quad (75,21)$$

Следовательно,

$$\alpha(x) = \lambda 0,332 \sqrt[3]{Pr} (1 - \vartheta_{\text{кин}} \sqrt{Pr}) \sqrt{\frac{w_{\infty}}{\nu x}}. \quad (75,22)$$

Критерий теплоотдачи находится:

$$Nu(x) \equiv \frac{\alpha(x) x}{\lambda} = 0,332 \sqrt[3]{Pr} \sqrt{Re_x} (1 - \vartheta_{\text{кин}} \sqrt{Pr}). \quad (75,23)$$

Как следует из формул (75,22) и (75,23), коэффициент теплоотдачи при обтекании стенки с большими скоростями, помимо критериев  $Re$  и  $Pr$ , зависит также от критерия  $\vartheta_{\text{кин}}$ .

Удельная теплоотдача стенки определяется формулой:

$$q(x) = \alpha(x) (T_{* \text{ ст}} - T_{\infty}). \quad (75,24)$$

## § 76. Теплоотдача цилиндра при обтекании ламинарным потоком

Применение теории пограничного слоя позволяет решать задачи о теплоотдаче в потоке тел более сложной формы, чем пластина. В отличие от плоской пластины, при обтекании тел более сложной формы или при обтекании пластины набегающим потоком течение в пограничном слое осложняется. Если при обтекании пластины плоскопараллельным потоком давление в пограничном слое заметно не изменялось и не оказывало влияния на распределение скоростей, то при обтекании тел с кривыми поверхностями или

обтекании плит набегающим потоком давление в пограничном слое меняется и оказывает влияние на распределение скоростей течения. При этом в определенном месте поверхности тела происходит отрыв линии тока от поверхности и создается обратное течение в пограничном слое (рис. 109).

В месте отрыва линии тока в пограничном слое от стенки  $\frac{\partial w_x}{\partial y} \Big|_{y=0}$  толщина пограничного слоя в этом месте значительно увеличивается. За этим местом вследствие обратных течений создается циркуляционная или вихревая зона (см. рис. 110, где: а) потенциальное течение; б) отрыв пограничного слоя; в) образование вихревого слоя; г) образование двух вихревых зон; д) возрастание вихревых зон; е) нарушение устойчивости вихрей).

Коэффициент теплоотдачи или критерий конвективного теплообмена при лобовом обтекании тел имеют более сложную зависимость от координаты места по сравнению с теплоотдачей пластины. Для места встречи набегающего потока с цилиндром расчет приводит к следующей формуле критерия теплоотдачи (без учета тепла трения):

$$Nu_0 = \frac{\alpha_0 d}{\lambda} = A \sqrt{Re_d}, \quad (76,1)$$

где  $Re_d = \frac{w_\infty d}{\nu}$  ( $w_\infty$  — скорость набегающего потока,  $d$  — диаметр цилиндра).

Множитель  $A$  в формуле (76,1) находится в зависимости от критерия  $Pr$  (см. табл. 13).

Т а б л и ц а 13

$Pr = 0,6$	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	7	10	15
$A = 0,932$	0,99	1,042	1,092	1,14	1,184	2,36	2,68	3,08

В месте встречи набегающего потока с цилиндром коэффициент теплоотдачи поверхности получается значительно больше,

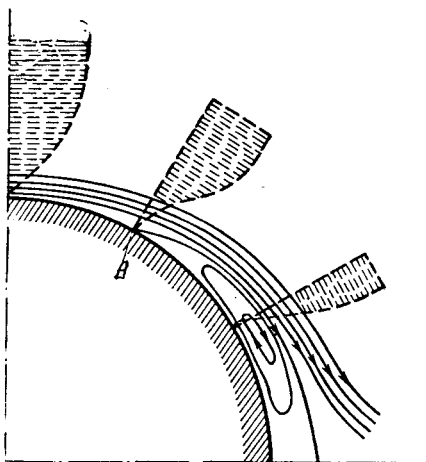


Рис. 109. Линии тока и распределение скоростей в пограничном слое при обтекании цилиндра ламинарным потоком

чем при обтекании пластины плоскопараллельным потоком с одинаковыми критериями  $Re$  и  $Pr$ .

Распределение критерия теплоотдачи  $Nu$  по поверхности обтекаемого цилиндра представлено на рис. 111. Как видно из рисунка, при обтекании цилиндра *ламинарным потоком* наи-

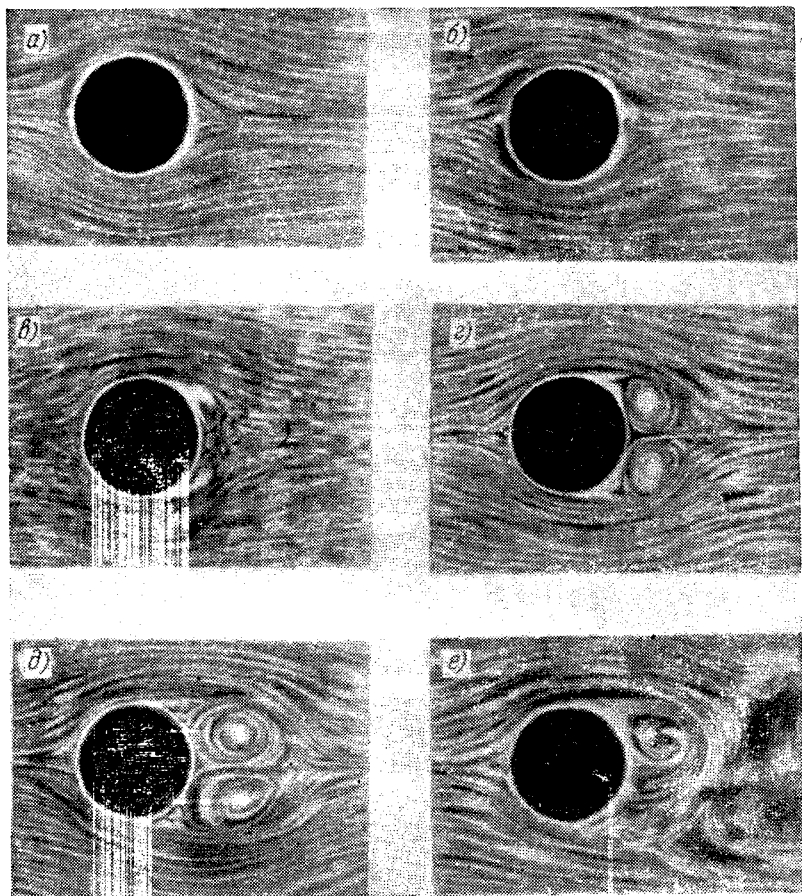


Рис. 110. Изменение характера обтекания цилиндра ламинарным потоком жидкости при увеличении скорости течения

большая теплоотдача достигается на лобовой и тыловой поверхности цилиндра. В районе поверхности цилиндра, где происходит отрыв линий тока и течение среды направлено от поверхности, теплоотдача получается наименьшей. В условиях *турбулентного течения* характер распределения критерия теплоотдачи сохраняет-

ся приблизительно таким же, как и при обтекании цилиндра ламинарным потоком. На тыловой поверхности цилиндра имеются места с наибольшей теплоотдачей.

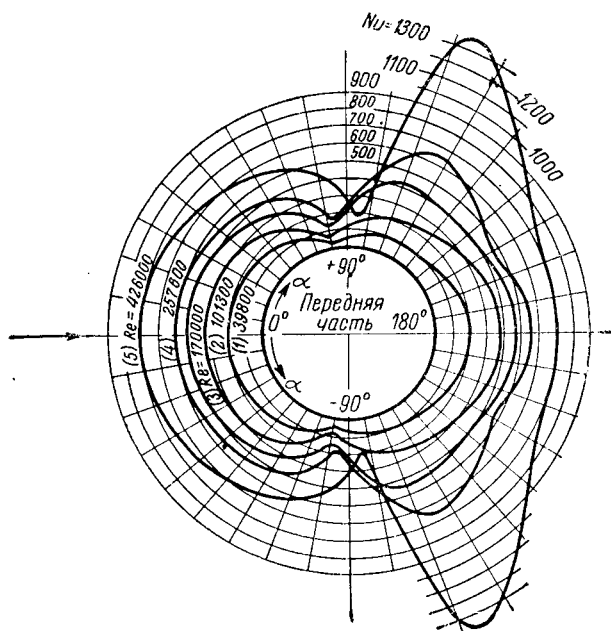


Рис. 111. Распределение критерия теплоотдачи  $Nu$  на поверхности цилиндра при обтекании его потоком с различными критериями  $Re$

### § 77. Теплоотдача тел в условиях естественной конвекции

Теорию пограничного слоя можно применить и для определения теплоотдачи тел в условиях естественной конвекции, т. е. при обтекании тел средой, движение которой вызвано только различием температур среды у поверхности тела и в отдалении от нее. Перемещение масс среды в условиях различия температур осуществляется *подъемной силой*, возникающей в поле тяготения при изменении плотности нагреваемой или охлаждаемой среды (архимедова сила). Ограниченная скорость гравитационной конвекции среды позволяет не учитывать тепло трения. Давление в пограничном слое в поперечном направлении  $y$  (рис. 112) не изменяется ( $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ ). Допуская, далее, ламинарное течение в пограничном слое, уравнения энергии, сохранения массы и движения [уравнения (72,1)—(72,3)] для однородной среды с неизмен-

ными физическими параметрами применительно к простейшему случаю обтекания вертикальной плиты газом (рис. 112), запишутся в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - \frac{w_x}{a} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{w_y}{a} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \theta, \quad (77,1)$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0, \quad (77,2)$$

$$\frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \frac{g}{\nu} \frac{T_{ст} - T_{\infty}}{T_{\infty}} \theta - \frac{w_x}{\nu} \frac{\partial w_x}{\partial x} - \frac{w_y}{\nu} \frac{\partial w_x}{\partial y} = 0, \quad (77,3)$$

где  $\theta = \frac{T - T_{\infty}}{T_{ст} - T_{\infty}}$  — безразмерная переменная температура ( $T_{ст}$  — температура стенки,  $T_{\infty}$  — температура среды в отдалении от стенки).

Необходимо отметить, что уравнение сохранения массы (77,2) написано для условий достаточно малого изменения плотности среды, чтобы можно было не учитывать ее сжимаемости. При этом, однако, изменения плотности оказываются достаточно

Рис. 112. Линии тока и распределение скоростей в пограничном слое среды в условиях естественной конвекции у нагретой вертикальной плоской стенки

точными для существования тепловой подъемной силы, соизмеримой с силами инерции и трения.

Для решения задачи Е. Польгаузен применил безразмерную координату

$$\eta = \frac{y}{x} \sqrt[4]{\frac{gx^3(T_{ст} - T_{\infty})}{4\nu^2 T_{\infty}}} \quad (77,4)$$

и использовал функцию тока

$$\psi(x, \eta) = 4\nu \sqrt[4]{\frac{gx^3(T_{ст} - T_{\infty})}{4\nu^2 T_{\infty}}} \varphi(\eta), \quad (77,5)$$

которая удовлетворяет уравнению сохранения массы (77,2) и позволяет представить скорости перемещения среды в пограничном слое  $w_x$  и  $w_y$  в следующем виде:

$$w_x = \frac{\partial \psi(x, \eta)}{\partial y} = \frac{\partial \psi(x, \eta)}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = 4 \frac{\nu}{x} \sqrt[4]{\frac{gx^3(T_{ст} - T_{\infty})}{4\nu^2 T_{\infty}}} \varphi'(\eta), \quad (77,6)$$

$$w_y = - \frac{\partial \psi(x, \eta)}{\partial x} = \frac{\nu}{x} \sqrt[4]{\frac{gx^3(T_{ст} - T_{\infty})}{4\nu^2 T_{\infty}}} [\eta \varphi'(\eta) - 3\varphi(\eta)]. \quad (77,7)$$

Пользуясь полученными формулами для определения  $\omega_x$  и  $\omega_y$ , уравнения переноса тепла и количества движения среды в пограничном слое запишем в виде:

$$\theta'' + 3Pr\varphi(\eta)\theta' = 0, \quad (77,8)$$

$$\varphi'''(\eta) + 3\varphi(\eta)\varphi''(\eta) - 2\varphi'^2(\eta) = 0. \quad (77,9)$$

Граничными условиями для свободной конвекции неограниченной среды, окружающей тело, являются:

$$\text{при } \eta = 0 [y = 0] \quad \varphi(\eta) = \varphi'(\eta) = 0, \quad \theta = 1;$$

$$\text{при } \eta \rightarrow \infty (y \rightarrow \infty) \quad \varphi'(\eta) = 0, \quad \theta = 0.$$

Совместное решение уравнений дает следующие функциональные зависимости для температурного и скоростного поля в среде

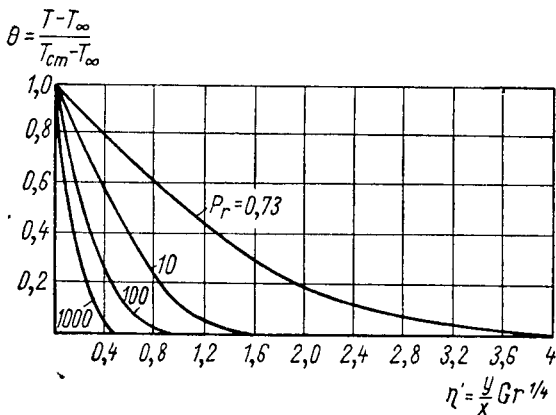


Рис. 113. Температурная функция в условиях естественной конвекции среды у вертикальной стенки

у стенки:

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \theta(\eta', Pr), \\ \varphi' &= \varphi'(\eta', Pr), \end{aligned} \right\} \quad (77,10)$$

где  $\eta' = \frac{y}{x} Gr^{1/4} = \sqrt{2} \eta$  ( $Gr = \frac{gx^3}{\nu^2} \frac{T_{ст} - T_{\infty}}{T_{\infty}}$  — критерий Грасгофа);

$\varphi' = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\omega_x}{\omega_{\Delta T, x}}$  — безразмерная скорость ( $\omega_{\Delta T, x} = \sqrt{\frac{2gx(T_{ст} - T_{\infty})}{T_{\infty}}}$  — теоретическая скорость перемещения среды, отвечающая подъемной силе).

На рис. 113 и 114 представлены решения (77,10) для различных критериев  $Pr$ . Теоретическое решение задачи свободной



конвекции у вертикальной плиты хорошо подтверждается (рис. 115 и 116) измерениями температурных и скоростных полей.

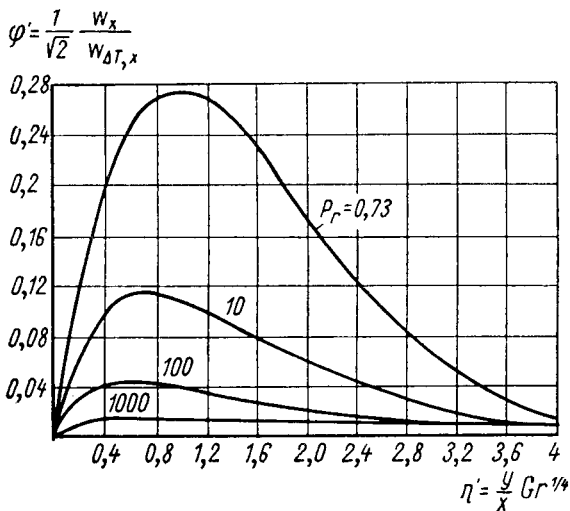


Рис. 114. Функция скорости течения среды в условиях естественной конвекции у вертикальной стенки

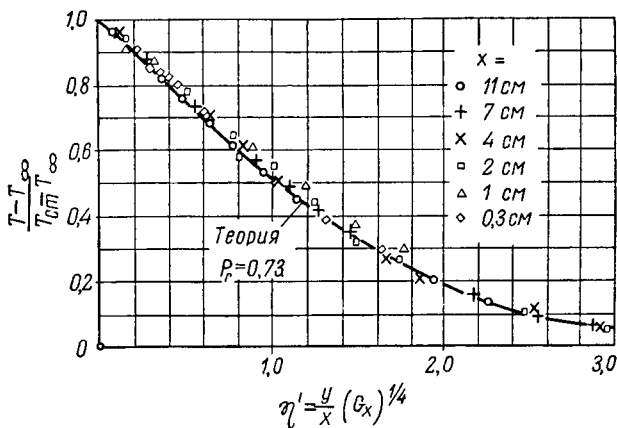


Рис. 115. Результаты измерения температуры среды в условиях естественной конвекции у вертикальной стенки

Для определения теплоотдачи плиты необходимо найти градиент температуры в среде у стенки.

Согласно решению (77,10), при  $Pr=0,73$  (воздух) получается:

$$-\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = 0,508$$

или

$$-\frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{0,508}{\sqrt{2}} \frac{Gr^{1/4}}{x}.$$

Местный коэффициент теплоотдачи для  $Pr=0,73$  определяется

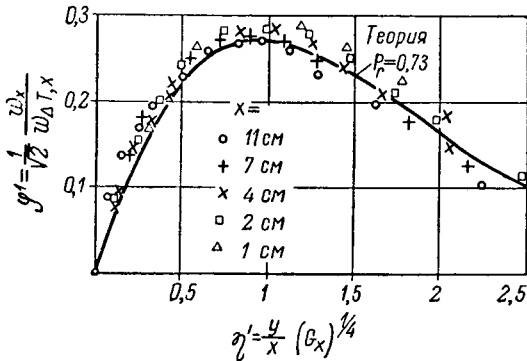


Рис. 116. Результаты измерения скорости течения среды в условиях естественной конвекции у вертикальной стенки

формулой:

$$\alpha(x) = -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=0} = \lambda \frac{0,508}{\sqrt{2}} \frac{Gr^{1/4}}{x}. \quad (77,11)$$

Соответственно местный критерий теплоотдачи получается:

$$Nu(x) = \frac{0,508}{\sqrt{2}} Gr^{1/4}. \quad (77,12)$$

Средний коэффициент теплоотдачи для всей высоты плиты составляет:

$$\bar{\alpha} = \frac{\int_0^h \alpha(x) dx}{h} = 0,478 \frac{\lambda}{h} Gr_h^{1/4}. \quad (77,13)$$

Соответственно средний критерий теплоотдачи определяется формулой:

$$\bar{Nu}_h = 0,478 Gr_h^{1/4}. \quad (77,14)$$

Полученные формулы хорошо подтверждаются экспериментальными исследованиями теплоотдачи вертикальных плит в неограниченном свободном потоке, для которого сохраняется ламинарный режим течения.

Если ввести понятие теоретической скорости движения среды, отвечающей подъемной силе, возникающей за счет разности температур в среде для участка высотой  $x$

$$\omega_{\Delta T, x} = \sqrt{\frac{2gx(T_{ст} - T_{\infty})}{T_{\infty}}} \quad \text{или} \quad \omega_{\Delta \rho, x} = \sqrt{\frac{2gx(\rho_{\infty} - \rho_{ст})}{\rho_{ст}}}$$

и ввести соответствующий этой скорости критерий Рейнольдса

$$Re_{\Delta T, x} = \frac{\omega_{\Delta T, x} x}{\nu} = 2\sqrt{Gr_x},$$

то можно ожидать, что при критическом числе  $Re_x|_{крит} = 300\,000$ , отвечающем условию обтекания пластины, критическое число Грасгофа  $Gr_x|_{крит} = \frac{1}{4}Re_x^2|_{крит} = 2,25 \cdot 10^{10}$  будет отвечать переходу ламинарного течения в турбулентное и формулы для определения теплоотдачи вертикальных плит в свободном потоке изменятся.

Хорошей иллюстрацией изменения режима течения воздуха у нагретой трубы в условиях свободной конвекции может служить исследование, проведенное М. В. Кирпичевым (рис. 117). Как видно, для начального участка нагреваемой трубы, на котором имеет место ламинарное течение в пограничном слое, коэффициент теплоотдачи падает с высотой трубы. Это находится в полном согласии с формулой (77,11) теоретического решения задачи. В переходном режиме течения коэффициент теплоотдачи снова несколько возрастает, и далее для всего участка трубы с турбулентным течением коэффициент теплоотдачи сохраняется неизменным.

Расчет теплоотдачи вертикальных плит в условиях естественной конвекции с ламинарным режимом течения при различных числах  $Pr$  приводит к формуле:

$$\bar{Nu}_h = A (Gr \cdot Pr)^{1/4}, \quad (77,15)$$

где множитель  $A$  сравнительно слабо зависит от числа  $Pr$ :

$Pr = 0,73$	$10$	$100$	$1000$
$A = 0,517$	$0,612$	$0,652$	$0,653$

Расчет теплоотдачи тел другой формы в условиях естественной ламинарной конвекции также дает результаты, подтверждаемые экспериментально.

Для цилиндра при  $Pr=0,7$

$$\overline{Nu}_d = 0,372 Gr^{1/4}; \quad (77,16)$$

для шара

$$\overline{Nu}_d = 0,429 Gr^{1/4}. \quad (77,17)$$

Для проволок и шариков весьма малого диаметра толщина пограничного слоя оказывается значительно больше размеров тела. При этом теплоотдачу можно вычислить непосредственно из формул теплопроводности.

Для проволок из уравнений теплопроводности и теплоотдачи

$$Q_{L=1} = \frac{T_{ст} - T_{\infty}}{\frac{1}{2\pi\lambda} \ln \frac{d_{\infty}}{d}},$$
$$Q_{L=1} = \pi d\alpha (T_{ст} - T_{\infty})$$

находим:

$$Nu|_{d \rightarrow 0} \equiv \frac{\alpha d}{\lambda} = \frac{2}{\ln \frac{d_{\infty}}{d}} \rightarrow 0,5. \quad (77,18)$$

Для шарообразных частиц из уравнений теплопроводности и теплоотдачи

$$Q = 2\pi\lambda \frac{T_{ст} - T_{\infty}}{\frac{1}{d} - \frac{1}{d_{\infty}}},$$
$$Q = \pi d^2\alpha (T_{ст} - T_{\infty})$$

находим:

$$Nu|_{d \rightarrow 0} \equiv \frac{\alpha d}{\lambda} = \frac{2}{1 - \frac{d}{d_{\infty}}} \rightarrow 2. \quad (77,19)$$

Эти предельные наименьшие критерии теплоотдачи отвечают неподвижному пограничному слою, существующему у тел очень малого размера.

Между этим предельным состоянием полностью заторможенной среды в пограничном слое и рассмотренным выше режимом свободной конвекции, при которой в пограничном слое осуществляется течение среды с равноправным участием инерционных сил и сил трения, существует режим свободной конвекции с *ползущим течением* в пограничном слое. Для этого режима течения силами инерции можно пренебречь и записать уравнение движения в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \frac{g}{\nu} \frac{T_{ст} - T_{\infty}}{T_{\infty}} \theta = 0. \quad (77,20)$$

Для свободной конвекции с ползущим движением можно также аналитически решить задачу о температурном и скоростном поле и определить теплоотдачу.

Решение приводит к формуле критерия теплоотдачи в виде зависимости:

$$Nu = A (Pr \cdot Gr)^{1/8}. \quad (77,21)$$

Для другого крайнего случая течения среды в условиях свободной конвекции, если критерий Грасгофа по порядку превышает критическое число  $Gr_{\text{крит}} \approx 10^{10}$ , то во внешней зоне потока осуществляется турбулентное течение. Турбулентный поток существенно влияет на толщину пограничного слоя с ламинарным течением, и теплоотдача повышается. Для турбулентной свободной конвекции критерий теплоотдачи определяется формулой

$$Nu = B (Pr \cdot Gr)^{1/3}. \quad (77,22)$$

Показатель степени  $1/3$  в этой формуле приводит к тому, что коэффициент теплоотдачи не зависит от размеров обтекаемого тела.

Теплоотдача нагретых горизонтальных плит в условиях свободной конвекции отличается особой организацией возникающего

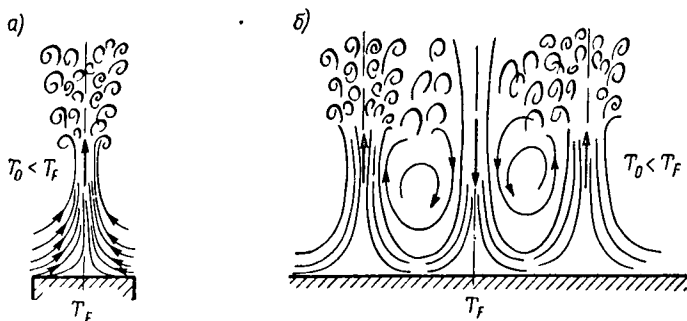


Рис. 118. Характер течения среды в условиях свободной конвекции у нагретых горизонтальных плит ограниченного а) и неограниченного б) размеров

течения среды. Нагреваемые массы среды у поверхности горячей плиты образуют восходящие струйные потоки с попутным присоединением масс окружающей среды (рис. 118, а). В результате над нагретой плитой появляется сложное восходящее и нисходящее струйное движение окружающей среды с возможными зонами циркуляции (рис. 118, б).

Аналитическое решение задачи свободной конвекции в этих условиях осложняется и для ее исследования прибегают к опыту.

Значительный интерес представляет свободная конвекция в условиях так называемой внутренней задачи. Например, важно

знать особенности переноса тепла при возникающих свободных потоках среды, находящейся в замкнутых камерах или частично открытых полостях. Представляет также интерес изучить влияние свободной конвекции на вынужденный поток среды в каналах и при обтекании различных тел. Ограничимся лишь некоторыми соображениями об особенностях внутренних потоков среды, возникающих в условиях тепловой гравитационной конвекции.

Свободное течение среды, создаваемое тепловой подъемной силой, может характеризоваться теоретической скоростью движения:

$$w_{\Delta T, x} = \sqrt{\frac{2gx(T_{ст} - T_{\infty})}{T_{\infty}}}, \quad (77,23)$$

где  $x$  — высота нагретого слоя среды;

$T_{ст} - T_{\infty}$  — разность температур стенки и окружающей среды.

Эта скорость может быть привлечена для определения критерия Рейнольдса, отвечающего свободному потоку среды:

$$Re_{\Delta T, x} = \frac{w_{\Delta T, x} x}{\nu}. \quad (77,24)$$

Критерий Рейнольдса для свободного потока отвечает критерию Грасгофа:

$$Gr = 1/4 Re_{\Delta T, x}^2 = \frac{gx^3}{\nu^2} \frac{T_{ст} - T_{\infty}}{T_{\infty}}, \quad (77,25)$$

который обычно и используется как основной определяющий критерий в задачах естественной конвекции.

Необходимо отметить, что, помимо тепловой гравитационной конвекции, может быть гравитационная конвекция, вызванная изменением плотности среды, например при фазовых или химических превращениях. Для этого вида свободной конвекции характерным является плотностной критерий Грасгофа:

$$Gr_{\rho, x} = \frac{gx^3}{\nu^2} \frac{\rho_{\infty} - \rho_{ст}}{\rho_{ст}}.$$

На рис. 119—121 показаны отдельные схемы внутренней тепловой гравитационной конвекции, которые иллюстрируют характер возникающих потоков.

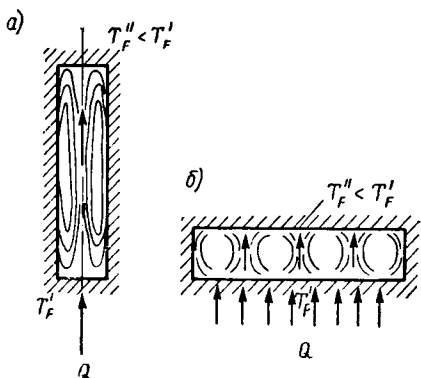


Рис. 119. Конвективные потоки при распространении тепла в среде, находящейся в замкнутой камере: а) вертикальная полость с нижним нагревом; б) горизонтальная полость с нижним нагревом

На рис. 119, *а* и *б* показана внутренняя тепловая конвекция в замкнутых камерах. Рис. 119, *а* отвечает камере цилиндрической

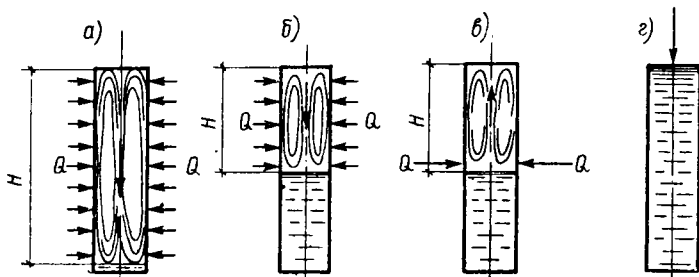


Рис. 120. Конвективные потоки при распространении тепла в среде, находящейся в замкнутой вертикальной камере: *а*) при равномерном боковом нагреве; *б*) при равномерном частичном боковом нагреве; *в*) при сосредоточенном боковом нагреве; *г*) при верхнем нагреве (конвективный поток отсутствует)

или призматической формы, среда в которой получает тепло снизу и отдает его преимущественно сверху. В этих условиях в замк-

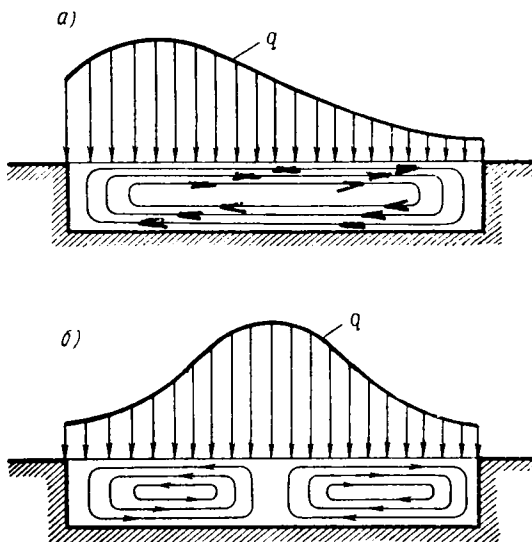


Рис. 121. Конвективные потоки среды в ванне: *а*) при одностороннем нагреве сверху; *б*) при симметричном нагреве сверху

нутой камере создается осевой восходящий циркулирующий поток среды. Рис. 119, *б* отвечает внутренней естественной конвекции среды, находящейся в горизонтально расположенной поло-

сти плоскопараллельной формы, нагреваемой снизу и отдающей тепло сверху. В этом случае может осуществляться ряд циркуляционных восходящих потоков нагреваемой среды.

На рис. 120, *а*, *б*, *в* показаны случаи внутренней конвекции, возникающей в вертикально расположенной осесимметричной камере при различном боковом сообщении тепла среде. Рис. 120, *г* отвечает случаю сообщения тепла сверху, при котором конвективных потоков среды не создается.

На рис. 121, *а* и *б* показана конвекция среды в ванне, нагреваемой сверху с различной интенсивностью. Течение среды при этом осуществляется от горячих мест к более холодным.

## § 78. Турбулентный режим течения

Характерной особенностью ламинарного режима течения среды является существование устойчивых линий тока, которые отвечают сложной совокупности действия различных сил в потоке (сил трения, инерции, давления, тяготения, подъемной силы и т. п.). Устойчивость линий тока в потоке обтекаемых тел может нарушаться в результате критических изменений во взаимодействии различных сил, изменений состояния среды, изменений профиля обтекаемых тел и т. п. Особенно важным нарушением устойчивости ламинарного потока является *переход через критическое отношение сил инерции и сил трения*. До определенного соотношения этих сил, которое определяется критерияльным отношением

$$K_{\text{инерц/тр}} = \frac{P_{\text{инерц}}}{P_{\text{тр}}}$$

и инвариантом которого является число  $Re$ , сила трения вязкой среды тормозит движение так, что отношения изменений инерционной силы и силы трения с увеличением скорости движения оказываются пропорциональными скорости движения (критерию  $Re$ ):

$$\frac{\delta P_{\text{инерц}}}{\delta P_{\text{тр}}} \sim \frac{wl}{\nu}.$$

При переходе через некоторое критическое соотношение этих сил при увеличении скорости движения инерционная сила в потоке оказывается столь большой, что сила молекулярного трения вязкой среды не в состоянии воздействовать и затормозить текущие массы среды в потоке так, чтобы сохранить указанную пропорциональность в изменении сил; устойчивость характера течения вязких масс в потоке при этом нарушается. Избыточная инерционная сила в потоке при переходе через критическое отношение  $K_{\text{инерц/тр}} \rightarrow Re_{\text{крит}}$  начинает! возмущать среду, создавая в потоке множество возбужденных в самостоятельное движение ключкообразных вихревых масс. При этом часть общей энергии потока переходит в энергию движения множества раздробленных



вихреобразных масс. Однако в каждой отдельной клочкообразной массе возмущенного потока самостоятельное перемещение частиц отвечает пропорциональности взаимодействия молекулярной силы трения и инерционной силы. Такое дробление потока на множество индивидуальных масс, имеющих различные размеры и энер-

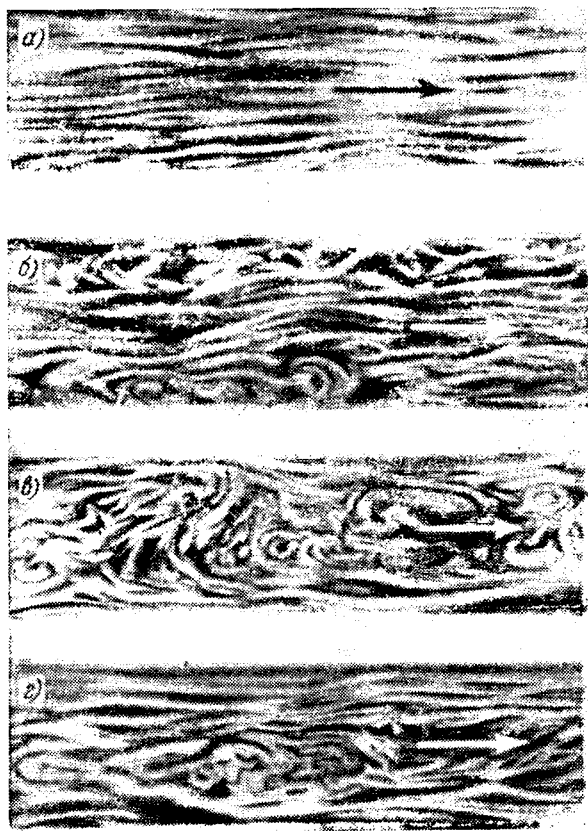


Рис. 122. Фотографическое исследование турбулентного течения жидкости в лотке при различной скорости перемещения фотокамеры: а) 12,15 см/сек; б) 20 см/сек; в) 25 см/сек; г) 27,6 см/сек (по Никурадзе)

гию, дает возможность рассматривать турбулентный поток с точки зрения статистического множества, например подобно множеству молекул в газе. Каждая отдельная клочкообразная масса турбулентного потока является одновременно носителем энергии и количества движения.

Наблюдаемое вырождение ламинарного потока при переходе через критическое отношение  $K_{инерц/трес} \rightarrow Re_{крит}$  в турбулентное состояние массы газа или жидкости в потоке осуществляется тем в большей мере, чем выше критерий  $Re$  от его критического числа  $Re_{крит}$ . Турбулентное состояние потока экспериментально можно наблюдать различными методами. Самостоятельное движение вихревых масс в турбулентном потоке достаточно отчетливо наблюдается, например, при перемещении фотокамеры одновременно с потоком (рис. 122). Раздробленность турбулентного потока на множество клочкообразных масс хорошо наблюдается в выходящих в атмосферу струях дыма или в струях диффузионно горящего газа (рис. 123).

Критическое число  $Re_{крит}$  в соответствии с экспериментальными исследованиями самого О. Рейнольдса принято оценивать по переходу ламинарного течения в турбулентное в трубах круглого сечения. Для этого случая потока  $Re_{крит} \approx 2300$ . Однако искусственными мероприятиями можно повлиять на течение жидкости в трубах так, что  $Re_{крит}$  удастся несколько снизить (путем дополнительной турбулизации потока) или, наоборот, повысить (путем стабилизации).

При продольном обтекании пластины ламинарное течение в пограничном слое переходит в турбулентное при критическом числе  $Re_{x,крит} = \frac{wx}{\nu} > 300\,000$  (где  $x$  — расстояние от начальной кромки обтекаемой пластины). Если отнести критическое число  $Re_{крит}$  при обтекании пластины к толщине пограничного слоя  $\delta_x$ , то, как уже указывалось,

$$Re_{\delta,крит} = \frac{w\delta_x}{\nu} > 2740,$$

т. е.  $Re_{крит}$  получается примерно таким же, как и для течения в трубах.

Переход ламинарного течения в пограничном слое в турбулентное при продольном обтекании пластины зависит от степени турбулизации потока. Турбулентное состояние потока или его



Рис. 123. Фотографии турбулентных струй диффузионно горящего газа

степень турбулизации оценивается среднеквадратичными отклонениями составляющих скоростей потока или среднеквадратичными пульсационными скоростями в потоке по отношению к средней скорости потока:

$$\epsilon_{\text{турб}} = \frac{\sqrt{1/3(\overline{w_x'^2} + \overline{w_y'^2} + \overline{w_z'^2})}}{\overline{w}},$$

где  $\overline{w_x'}$ ,  $\overline{w_y'}$ ,  $\overline{w_z'}$  — пульсационные составляющие скорости потока;  
 $\overline{w}$  — средняя скорость потока.

Путем измерения пульсационных скоростей  $\overline{w_x'}$ ,  $\overline{w_y'}$ ,  $\overline{w_z'}$  (например, с помощью электроанемометра и осциллографа) и средней скорости потока находят степень его турбулизации.

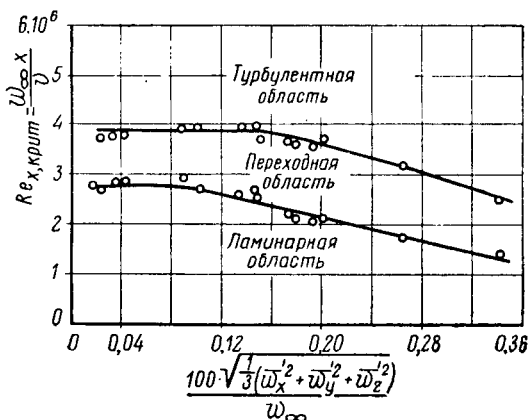


Рис. 124. Влияние степени турбулизации потока на критическое число Рейнольдса

На рис. 124 представлены результаты экспериментального исследования влияния степени турбулизации потока на критическое число  $Re_{\text{крит}}$ , отвечающее переходу ламинарного течения в пограничном слое в турбулентное. Как видно, при малой степени турбулизации потока, которая в опытах доводилась до 0,02 (путем пропускания потока через большое число успокоительных сеток), критическое число  $Re_{\text{крит}}$  при обтекании пластины достигало почти  $3 \cdot 10^6$ .

Изучение турбулентных потоков при течении в трубах и при обтекании различных тел является весьма важной задачей, так как в технике приходится иметь дело преимущественно с турбулентными потоками. Особенности турбулентных течений подробно рассматриваются в специальных курсах гидромеханики. Здесь ограничимся лишь изложением некоторых характеристик турбулентных потоков, необходимых для изучения процессов переноса в них.

В отличие от ламинарного потока, в котором осуществляется диффузионный молекулярный перенос масс и тепла, в турбулентном потоке осуществляется диффузионный перенос возмущенных клочкообразных масс различного размера с различной скоростью дрейфа (рис. 125). Вследствие больших размеров турбу-

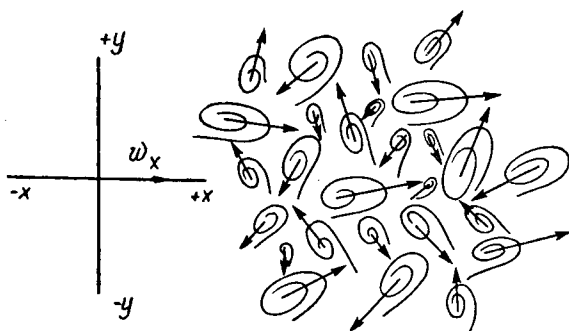


Рис. 125. Множество дрейфующих масс в турбулентном потоке

лентных масс и соответственно большей их энергии по сравнению с массой и энергией отдельных молекул, несмотря на сравнительно небольшую скорость перемещения турбулентных молей, перенос массы и энергии в турбулентном потоке отличается большой интенсивностью.

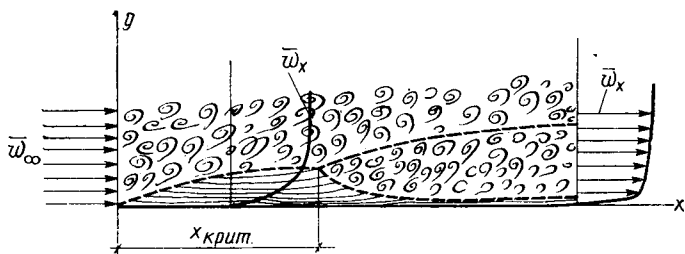


Рис. 126. Характер течения в пограничном слое при обтекании пластины турбулентным потоком

При обтекании различных тел турбулентным потоком, как и в случае обтекания тел ламинарным потоком, на начальном участке поверхности образуется пограничный слой с ламинарным течением (рис. 126). По мере отдаления от начальной кромки обтекаемого тела, например пластины, толщина ламинарного пограничного слоя среды возрастает и достигает наибольшей величины на участке при критическом соотношении сил инерции и сил трения. На дальнейших участках поверхности обтекаемой пластины

возмущенные массы турбулентного потока воздействуют на пограничный слой так, что ламинарное течение в нем сохраняется лишь в весьма тонком пристенном слое (рис. 126). Распределение скоростей в поперечном сечении турбулентного потока при обтекании тел характеризуется очень большими градиентами скорости в пристенном слое у поверхности и небольшими градиентами во внешней турбулентной зоне течения.

### § 79. Распределение скоростей в поперечном сечении турбулентного потока

Перенос количества движения в турбулентном потоке осуществляется диффузией возмущенных клочкообразных масс, в результате которой возникает *турбулентное касательное напряжение*:

$$\sigma_{\text{турб}} = \nu_{\text{турб}} \frac{\partial (\rho w_i)}{\partial n}, \quad (79,1)$$

где  $\nu_{\text{турб}}$  — турбулентная кинематическая вязкость.

Если обозначить среднюю скорость дрейфа  $\bar{c}_{\text{турб}}$  и среднюю длину пути взаимодействия возмущенных турбулентных масс  $\bar{l}_{\text{турб}}$ , то турбулентная кинематическая вязкость определяется аналогично молекулярной кинематической вязкости:

$$\nu_{\text{турб}} = 1/3 \bar{c} \bar{l}_{\text{турб}}. \quad (79,2)$$

Среднюю скорость переноса турбулентных масс в потоке Л. Прандтль предложил определять из соотношения:

$$\frac{\bar{c}_{\text{турб}}}{\bar{l}_{\text{турб}}} = \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y}, \quad (79,3)$$

а среднюю длину пути взаимодействия турбулентных масс в потоке предложил считать пропорциональной:

$$\bar{l}_{\text{турб}} = \kappa y, \quad (79,4)$$

где  $y$  — расстояние от стенки обтекаемого тела.

Допущения Прандтля приводят к следующей формуле турбулентного касательного напряжения:

$$\sigma_{x_{\text{турб}}} = \kappa'^2 y^2 \rho \left( \frac{\partial w_x}{\partial y} \right)^2, \quad (79,5)$$

где  $\kappa' = 1/3 \kappa$ .

Принимая, далее, допущение Прандтля о неизменности касательного напряжения в поперечном сечении турбулентного потока

$$\sigma_{x_{\text{турб}}}(y) = \sigma_{\text{ст}} \quad (79,6)$$

и пользуясь условным определением касательного напряжения на границе со стенкой

$$\sigma_{ст} = \rho \omega_*^2, \quad (79,7)$$

приходим к следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{d\omega_x}{\omega_*} = \frac{1}{\kappa'} \frac{dy}{y}. \quad (79,8)$$

Применительно к турбулентному потоку в трубах уравнение (79,8) запишется:

$$\frac{d\omega_x}{\omega_*} = -\frac{1}{\kappa'} \frac{dr}{R-r} \quad (79,9)$$

(знак минус отвечает отсчету радиуса от оси).

Интеграл дифференциального уравнения (79,9) находится в виде:

$$\frac{\omega_x(r)}{\omega_*} = \frac{1}{\kappa'} \ln(R-r) + C. \quad (79,10)$$

Обозначая скорость на внешней границе слоя у стенки с ламинарным течением среды  $w_\delta$  и толщину этого слоя  $\delta_w$ , из уравнения (79,10) находим произвольную постоянную интеграла:

$$C = \frac{w_\delta}{w_*} - \frac{1}{\kappa'} \ln \delta_w.$$

Таким образом, приходим к следующей формуле распределения скоростей в поперечном сечении турбулентного потока в трубах:

$$\frac{\omega_x(r)}{\omega_*} = \frac{w_\delta}{w_*} + \frac{1}{\kappa'} \ln \frac{R-r}{\delta_w}. \quad (79,11)$$

В пограничном слое с ламинарным течением среды касательное напряжение определяется формулой:

$$\sigma_{ст} = \eta \frac{w_\delta}{\delta_w}. \quad (79,12)$$

Из равенств (79,7) и (79,12) находим:

$$\frac{w_\delta}{w_*} = \frac{w_* \delta_w}{\nu} = Re_\delta. \quad (79,13)$$

Пользуясь этим соотношением, формулу распределения скоростей в поперечном сечении турбулентного потока представим в виде:

$$\frac{\omega_x(r)}{\omega_*} = Re_\delta + \frac{1}{\kappa'} \ln \frac{w_* (R-r)}{\nu} - \frac{1}{\kappa'} \ln Re_\delta. \quad (79,14)$$

Никурадзе, на основе обобщения экспериментальных данных по измерению скоростных полей в поперечном сечении турбу-

лентных потоков в трубах, получил следующую формулу:

$$\frac{\omega_x(r)}{\omega_*} = 5,5 + 5,75 \lg \frac{w_*(R-r)}{\nu} . \quad (79,15)$$

Формула Никурадзе отвечает теоретической формуле (79,14) при:

$$Re_\delta - \frac{1}{\kappa'} \ln Re_\delta = 5,5 \quad \frac{1}{\kappa'} = 2,5 \quad \text{или} \quad \frac{1}{\kappa' \lg e} = 5,75.$$

Для труб, шероховатость стенок которых не превышает тол-

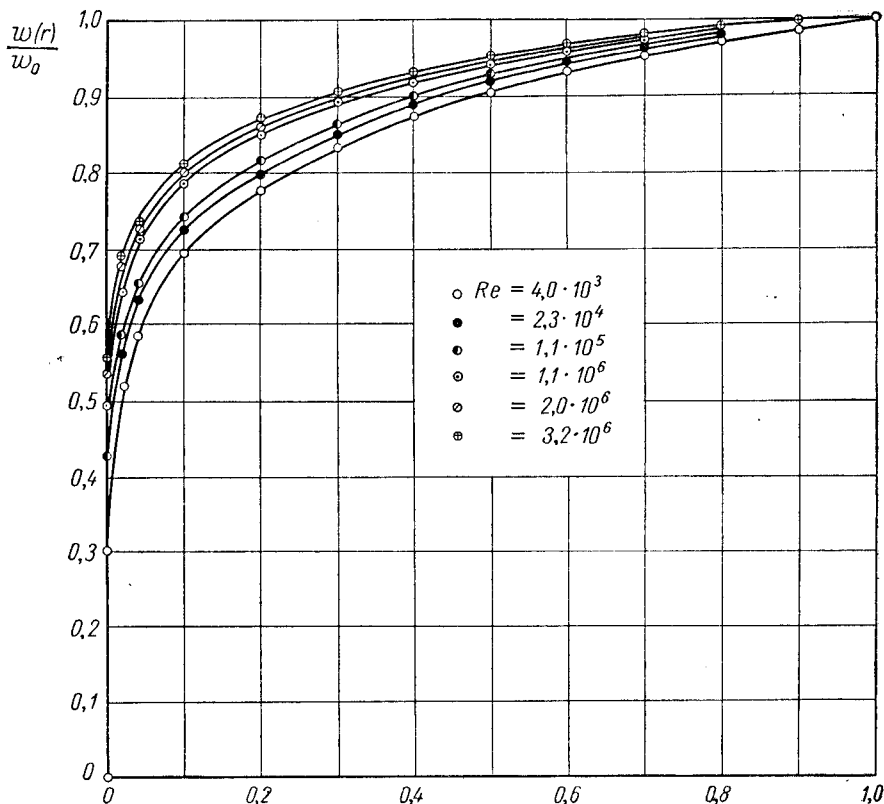


Рис. 127. Распределение относительных скоростей при турбулентном течении среды в гидравлически гладких трубах при различных числах Рейнольдса

щины ламинарного слоя  $\delta$ , т. е. для гидравлически гладких труб:

$$\kappa' = 0,4 \quad \text{и} \quad Re_\delta = 11,6.$$

Для труб с шероховатостью при средней высоте выступов  $\bar{\delta}_{ш} > \delta_w$  обобщение экспериментальных данных измерения

скоростных полей приводит к формуле:

$$\frac{\omega_x(r)}{\omega_*} = A_{III} + 5,75 \lg \frac{R-r}{\delta_{III}} . \quad (79,16)$$

На рис. 127 представлено распределение скоростей в поперечном сечении турбулентного потока в гидравлически гладких трубах  $\omega^*$

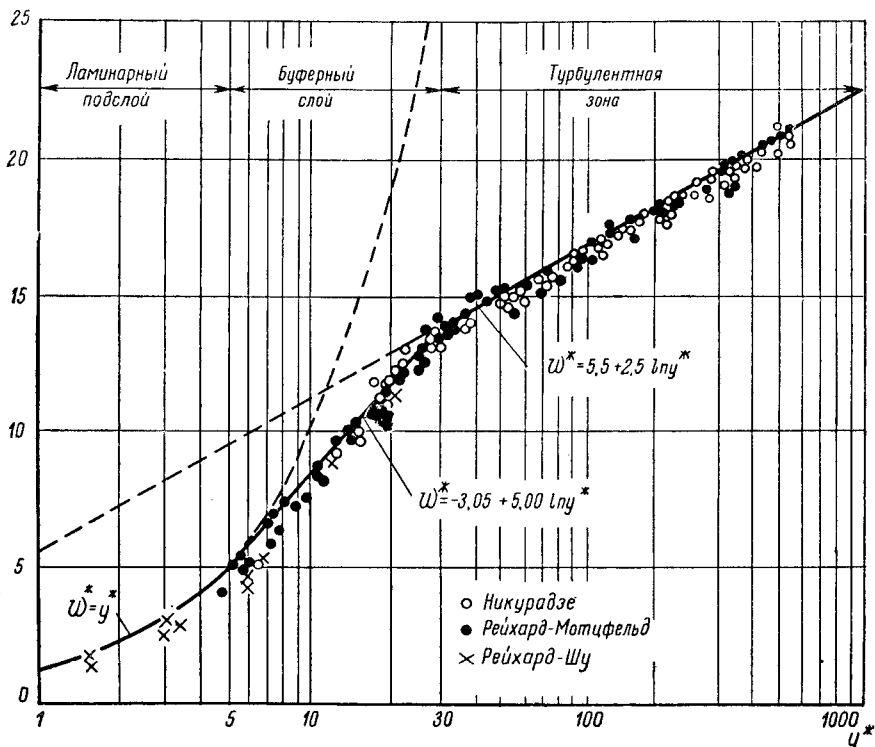


Рис. 128. Распределение безразмерной скорости при различных режимах течения в гидравлически гладких трубах (ордината  $w^* = \frac{\omega_x(r)}{\sqrt{\frac{\sigma_{сг}}{\rho}}}$ ; абсцисса

$$y^* = \frac{\sqrt{\frac{\sigma_{сг}}{\rho}} (R-r)}{\nu}$$

трубах при различных критериях  $Re = \frac{\bar{\omega}d}{\nu}$ . На рис. 128 формула (79,14) сопоставлена с экспериментальными данными измерений скоростного поля в турбулентном потоке.



Необходимо отметить, что допущения Прандтля, положенные в основу вывода формулы (79,11), не являются безупречными как в отношении предположения о скорости перемещения турбулентных масс  $\left[ \bar{c}_{\text{турб}} = \bar{l}_{\text{турб}} \frac{\partial w_x}{\partial y} \right]$  и пропорциональности среднего пути диффузионного переноса ( $\bar{l}_{\text{турб}} \sim y$ ) расстоянию от стенки, так и в отношении постоянства тангенциального напряжения в поперечном сечении турбулентного потока  $[\sigma_{x_{\text{турб}}}(y) = \sigma_{\text{ст}}]$ .

Рассмотренная теория Прандтля о распределении скорости в турбулентном потоке при обтекании поверхности тела является начальным этапом решения этой трудной задачи. Дальнейшее решение задачи о распределении скоростей в турбулентном потоке при обтекании тел проводилось Карманом и другими. Рейгардтом, например, предложена следующая формула:

$$\frac{w_x(y)}{w_*} = 5,75 \lg \left\{ (1 + 0,4y^*) \frac{1,5 \left( 1 + \frac{r}{R} \right)}{1 + 2 \left( \frac{r}{R} \right)^2} \right\} + 7,8 \left( 1 - e^{-\frac{y^*}{11}} - \frac{y^*}{11} e^{-0,33y^*} \right), \quad (79,17)$$

где  $w_* = \sqrt{\frac{\sigma_{\text{ст}}}{\rho}}$  — условная скорость в пристенном слое;

$y^* = \frac{w_* (R-r)}{v}$  — безразмерное расстояние в направлении радиуса от стенки;

$r$  и  $R$  — радиус места и границы в сечении трубы.

## § 80. Применение диффузионной теории переноса к турбулентному потоку среды с $Pr \approx 1$

Представляет интерес исследование вопроса о применимости к турбулентному потоку формул диффузионного переноса турбулентных масс, энергии и количества движения с соответствующими коэффициентами переноса:  $D_{\text{турб}}$ ,  $a_{\text{турб}}$ ,  $\nu_{\text{турб}}$ . Согласно диффузионной теории переноса, удельные потоки в процессах переноса отдельных субстанций  $C$  представляются через градиент концентрации субстанций:

$$\vec{q}_c = -D_c \nabla C. \quad (80,1)$$

Применительно к переносу в поперечном сечении турбулентного потока эта формула запишется в виде:

$$q_c = -D_c \frac{\partial C}{\partial y}. \quad (80,2)$$

Применение диффузионной теории переноса к турбулентному потоку заманчиво прежде всего в связи с доступностью аналитического решения задачи о переносе массы и тепла при тур-

булентном течении среды в канале, при обтекании пластины и т. п. Кроме того, применение диффузионной теории расширяет возможности экспериментального изучения процессов переноса в турбулентных потоках. В связи с предполагаемой аналогией между диффузией массы, тепла и количества движения при равенстве коэффициентов турбулентного переноса  $D_{\text{турб}} \approx a_{\text{турб}} \approx \nu_{\text{турб}}$  данные экспериментального исследования по одному виду переноса можно распространить на другие виды.

В качестве простейшего примера применения диффузионной теории рассмотрим обтекание поверхности твердого тела развитым турбулентным потоком с участием тонкого пристенного ламинарного слоя (рис. 129).

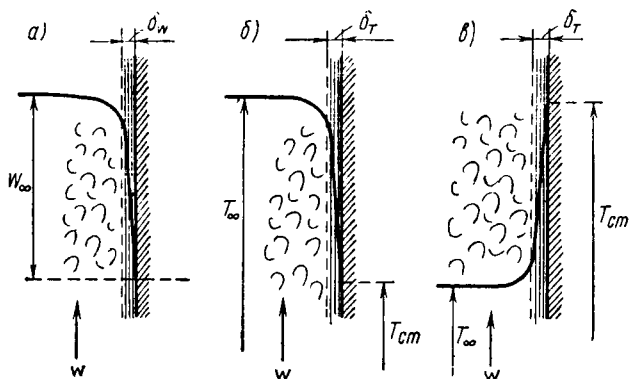


Рис. 129. К применению диффузионной теории переноса импульса и тепла на стенку из турбулентной зоны потока: а) распределение скоростей; б) распределение температур при переносе тепла от среды к стенке; в) распределение температур при переносе тепла от стенки к среде

В связи с предполагаемой аналогией турбулентной диффузии тепла и импульсов при равенстве коэффициентов переноса  $a_{\text{турб}} \approx \nu_{\text{турб}}$  и  $a_{\text{мол}} \approx \nu_{\text{мол}}$  ( $Pr \cong 1$ ) во всех местах в поперечном сечении потока в направлении от стенки имеем одинаковые соотношения (диффузионная аналогия Рейнольдса):

$$\frac{q_y}{\sigma_y} = \frac{q_{\text{ст}}}{\sigma_{\text{ст}}} = \frac{-\frac{\partial (c_p T)}{\partial y}}{\frac{\partial (qw)}{\partial y}} = \text{const.}$$

Пользуясь приведенной толщиной пограничного слоя для перепадов количества движения и тепла, можно записать следующие формулы для определения удельного потока тепла и удельной силы трения:

$$\left. \begin{aligned} q_{\text{ст}} &= \frac{\lambda(T_{\infty} - T_{\text{ст}})}{\delta_T}, \\ \sigma_{\text{ст}} &= \nu \varrho \frac{w_{\infty} - w_{\text{ст}}}{\delta_w}. \end{aligned} \right\} \quad (80,3)$$

При условии  $Pr = \frac{\nu}{\lambda/\varrho c_p} = 1$  приведенная толщина гидродинамического и теплового пограничного слоя совпадает, и в этом случае имеет место подобие температурного и скоростного полей. Предполагая, кроме того,  $w_{\text{ст}} = 0$ , получаем следующее соотношение:

$$\frac{q_{\text{ст}}}{\sigma_{\text{ст}}} = \frac{c_p(T_{\infty} - T_{\text{ст}})}{w_{\infty}}. \quad (80,4)$$

Помимо (80,3), для определения  $q_{\text{ст}}$  и  $\sigma_{\text{ст}}$  имеем следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} q_{\text{ст}} &= \alpha(T_{\infty} - T_{\text{ст}}), \\ \sigma_{\text{ст}} &= \xi \frac{\varrho w_{\infty}^2}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (80,5)$$

где  $\alpha$  — коэффициент теплоотдачи;

$\xi$  — коэффициент сопротивления обтеканию тел.

Таким образом, имеем еще одно соотношение:

$$\frac{q_{\text{ст}}}{\sigma_{\text{ст}}} = \frac{\alpha(T_{\infty} - T_{\text{ст}})}{\xi \varrho \frac{w_{\infty}^2}{2}}. \quad (80,6)$$

Из соотношений (80,4) и (80,6) получаем следующую формулу для определения критерия конвективного переноса тепла:

$$St \equiv \frac{\alpha}{w_{\infty} \varrho c_p} = \frac{1}{2} \xi. \quad (80,7)$$

Полученная формула представляет связь критерия конвективного переноса тепла с коэффициентом гидродинамического сопротивления при обтекании тела.

**Течение в трубах.** Применительно к течению в трубах изменение давления в потоке среды отвечает равенству сил:

$$-\frac{\pi d^2}{4} dp = \sigma_{\text{ст}} \pi d \cdot dx.$$

Сопротивление течению в трубах определяется формулой:

$$-dp = \xi \frac{dx}{d} \frac{\varrho w^2}{2},$$

где  $\xi$  — коэффициент трения стенок.

Из двух последних формул для труб находим:

$$\sigma_{\text{ст}} = \frac{1}{4} \xi \frac{\varrho w^2}{2},$$

что отвечает равенству

$$\zeta = \frac{1}{4} \xi.$$

В соответствии с этой формулой для коэффициента сопротивления в трубах критерий конвективного переноса тепла находится:

$$St \equiv \frac{\alpha}{w_0 c_p} = \frac{1}{8} \xi \quad (80,8)$$

и для  $Pr = 1$

$$Nu \equiv St \cdot Re \cdot Pr = \frac{\xi}{8} Re. \quad (80,9)$$

Полученные формулы позволяют воспользоваться для расчета конвективного теплообмена турбулентных потоков газов (у которых  $Pr \approx 1$ ) опытными данными коэффициентов гидродинамического сопротивления.

Следует, однако, иметь в виду, что в условиях неизотермической среды коэффициент сопротивления при обтекании тел помимо числа  $Re$ , зависит еще и от температурного поля в потоке.

Если в качестве первого приближения для вынужденного турбулентного потока в гидравлически гладких трубах для коэффициента трения принять известную формулу Блазиуса

$$\xi = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{Re}},$$

то для критерия конвективного теплообмена получим формулу:

$$Nu = 0,0395 Re^{0,75}. \quad (80,10)$$

Полученная формула приблизительно отвечает экспериментальным данным. Более полный учет всех факторов в известных условиях конвективного теплообмена газов может привести к более точной формуле для определения конвективного теплообмена.

**Обтекание пластины.** Для определения коэффициента гидродинамического сопротивления при обтекании гидравлически гладкой пластины продольным турбулентным потоком можно принять формулу Прандтля — Шлихтинга, отвечающую логарифмическому распределению скоростей в турбулентном потоке при больших критериях  $Re = \frac{w_\infty x}{\nu}$ :

$$\zeta(x) = \frac{0,455}{(\lg Re_x)^{2,58}} - \frac{A_{\text{крит}}}{Re_x}, \quad (80,11)$$

где  $A_{\text{крит}}$  — величина, отвечающая месту перехода ламинарного течения в пограничном слое в турбулентное.

Для различных критических чисел  $Re_{x, \text{крит}}$  величина  $A_{\text{крит}}$  находится:

$$Re_{x, \text{крит}} = 3 \cdot 10^5 \quad 5 \cdot 10^5 \quad 10^6 \quad 3 \cdot 10^6$$

$$A_{\text{крит}} = 1050 \quad 1700 \quad 3300 \quad 8700.$$

Соответственно формуле (80,11) находится критерий конвективного теплообмена:

$$Nu(x) = \frac{1}{2} \zeta(x) \cdot Re = \frac{0,455 Re_x}{2 (\lg Re_x)^{2,58}} - \frac{1}{2} A_{\text{крит}}. \quad (80,12)$$

### § 81. Применение диффузионной теории переноса к турбулентному потоку среды с $Pr \neq 1$

Применение диффузионной теории переноса для турбулентных потоков сред, у которых  $Pr \neq 1$ , осложняется отсутствием подобия температурных и скоростных полей в ламинарном пристенном пограничном слое. Помимо этого, в турбулентной зоне потока коэффициенты турбулентного переноса количества движения и тепла могут быть различными. Особую сложность представляет использование коэффициента турбулентного переноса тепла для промежуточного, так называемого буферного слоя (рис. 126). Причина этой сложности заключается в том, что перенос тепла из турбулентной зоны потока возмущенными клочкообразными массами среды осуществляется через промежуточную зону с затуханием возмущенных турбулентных масс и с участием нестационарного процесса переноса тепла в ламинарный пограничный слой. В этих условиях неизбежно возникает температурная неоднородность. Поэтому в переходном промежуточном пограничном слое турбулентного потока нельзя принять  $a_{\text{турб}} = \nu_{\text{турб}}$  ( $Pr_{\text{турб}} = 1$ ). В связи с этим применение диффузионной теории для переходного пограничного слоя значительно осложняется, особенно при больших неравенствах  $Pr \gg 1$ .

В развитой турбулентной зоне потока имеются большие основания принять диффузионную аналогию Рейнольдса, Прандтля, Тейлора ( $\nu_{\text{турб}} = a_{\text{турб}}$ ) и записать отношение удельных потоков тепла и сил трения в следующем виде:

$$\frac{q_{\text{турб}}}{\sigma_{\text{турб}}} = \frac{-a_{\text{турб}} \frac{\partial (q_c T)}{\partial y}}{\nu_{\text{турб}} \frac{\partial (q_w)}{\partial y}} = \frac{-\frac{\partial (q_c T)}{\partial y}}{\frac{\partial (q_w)}{\partial y}} = \frac{\Delta (q_c T)}{\Delta (q_w)}. \quad (81,1)$$

Таким образом, для применения диффузионной теории необходимо рассмотреть перенос тепла отдельно в трех зонах пограничного слоя: пристенном ламинарном слое, переходном слое и на границе турбулентной зоны потока.

Распределение скоростей в этих трех зонах отвечает отдельным уравнениям, которые представляют участки общей универ-

сальной кривой распределения скоростей в поперечном сечении турбулентного потока (рис. 128). При этом используются безразмерные координаты

$$y^* = \frac{\sqrt{\frac{\sigma_{ст}}{\rho}} y}{\nu} \quad \text{и} \quad \omega^* = \frac{w}{\sqrt{\frac{\sigma_{ст}}{\rho}}} \quad (81,2)$$

Как уже указывалось, здесь  $\sqrt{\frac{\sigma_{ст}}{\rho}} = \omega_*$  представляет условную динамическую скорость в пристенном пограничном слое, отвечающую удельной силе трения  $\sigma_{ст} = \rho \omega_*^2$ .

Отдельным участкам универсальной кривой распределения скоростей в турбулентном потоке отвечают следующие уравнения:

а) турбулентная зона (уравнение Прандтля — Никурадзе)

$$\omega^* = 5,5 + 2,5 \ln y^*; \quad (81,3)$$

б) переходная зона (уравнение Кармана)

$$\omega^* = -3,05 + 5 \ln y^* = 5 + 5 \ln \frac{y^*}{5}; \quad (81,4)$$

в) пристенный слой (пропорциональное отношение)

$$\omega^* = y^*. \quad (81,5)$$

Вычислим перепады температур для отдельных зон в пограничном слое.

Для ламинарного пристенного слоя имеем:

$$\Delta T_{\text{макс}} = q_{ст} \delta / \lambda.$$

Согласно универсальной кривой распределения скоростей, толщина пограничного ламинарного слоя (рис. 128)

$$y_{\text{лам}}^* = 5.$$

Следовательно,

$$\delta = \frac{5\nu}{\sqrt{\frac{\sigma_{ст}}{\rho}}}$$

и

$$\Delta T_{\text{лам}} = q_{ст} \frac{5\nu}{\sqrt{\frac{\sigma_{ст}}{\rho}} \lambda} = \frac{q_{ст}}{\rho c_p \sqrt{\frac{\sigma_{ст}}{\rho}}} 5Pr. \quad (81,6)$$

Для переходного слоя диффузионный перенос тепла и количества движения определяется формулами:

$$q_{\text{перех}} = -a_{\text{перех}} \frac{\partial (\rho c_p T)}{\partial y}, \quad (81,7)$$

$$\sigma_{\text{перех}} = \nu_{\text{перех}} \frac{\partial (\rho w)}{\partial y}.$$

Для перехода к безразмерным координатам находим дифференциалы (81,2) и составляем равенство:

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\sigma_{ст}}{\rho v} \frac{\partial \omega^*}{\partial y^*}.$$

Дифференцированием (81,4) находим:

$$\frac{\partial \omega^*}{\partial y^*} = \frac{5}{y^*}.$$

Следовательно,

$$O_{перех} = \frac{v_{перех}}{v} \frac{5\sigma_{ст}}{y^*}.$$

На границе переходной зоны с пристенным слоем  $\sigma_{перех} = \sigma_{ст}$  и, следовательно,

$$v_{перех} = v \frac{y^*}{5}.$$

Вводя  $Pr_{перех} = \frac{v_{перех}}{a_{перех}}$ , для определения удельного теплового потока получаем формулу:

$$q_{перех} = - \frac{v_{перех}}{Pr_{перех}} \frac{\partial (\rho c_p T)}{\partial y} = - \frac{v}{Pr_{перех}} \frac{y^*}{5} \frac{\partial (\rho c_p T)}{\partial y}.$$

Отсюда для перепада температур в переходной зоне пограничного слоя получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$-dT = q_{перех} \frac{Pr_{перех}}{v} \frac{5}{\rho c_p} \frac{dy}{y^*} = \frac{q_{перех}}{\rho c_p} \frac{5 Pr_{перех}}{\sqrt{\frac{\sigma_{ст}}{\rho}}} \frac{dy^*}{y^*}.$$

Выполняя интегрирование в пределах безразмерной толщины переходной зоны пограничного слоя  $y^*$  от 5 до 30 (согласно универсальной кривой распределения скоростей в этой зоне, рис. 128), находим:

$$\Delta T_{перех} = \frac{q_{перех}}{\rho c_p} \frac{5 Pr_{перех}}{\sqrt{\frac{\sigma_{ст}}{\rho}}} \ln 6. \quad (81,8)$$

Для турбулентной зоны, используя соотношение (81,1), имеем:

$$\Delta T_{турб} = \frac{q_{турб}}{c_p \sigma_{турб}} (\omega_{\infty} - \omega_{перех}).$$

Вводя безразмерную скорость  $\omega^* = \frac{w}{\sqrt{\frac{\sigma_{ст}}{\rho}}}$  и допуская равен-

ство  $\sigma_{турб} = \sigma_{перех} = \sigma_{ст}$ , получаем:

$$\Delta T_{турб} = \frac{q_{турб}}{\rho c_p} \frac{1}{\sqrt{\frac{\sigma_{ст}}{\rho}}} \left( \frac{\omega_{\infty}}{\sqrt{\frac{\sigma_{ст}}{\rho}}} - \omega^* \right).$$

Для определения безразмерной скорости  $w^* = 5 + 5 \ln \frac{y^*}{5}$  на границе турбулентной зоны потока принимаем  $y^* = 30$  (согласно универсальной кривой распределения скоростей). В результате получаем:

$$\Delta T_{\text{турб}} = \frac{q_{\text{турб}}}{\rho c_p \sqrt{\frac{\sigma_{\text{ст}}}{\rho}}} \left[ \frac{w_{\infty}}{\sqrt{\frac{\sigma_{\text{ст}}}{\rho}}} - 5(1 + \ln 6) \right]. \quad (81,9)$$

Складывая температурные перепады в отдельных зонах пограничного слоя, получаем полный перепад температуры в поперечном направлении турбулентного потока:

$$\Delta T_{\text{лам}} + \Delta T_{\text{перех}} + \Delta T_{\text{турб}} \equiv \Delta T_{\text{полн}} = T_{\text{ст}} - T_{\infty}.$$

Допуская равенство  $q_{\text{ст}} \approx q_{\text{перех}} \approx q_{\text{турб}}$ , которое отвечает малому изменению удельного потока тепла в поперечном направлении, получаем:

$$T_{\text{ст}} - T_{\infty} = \frac{q_{\text{ст}}}{\rho c_p \sqrt{\frac{\sigma_{\text{ст}}}{\rho}}} \left\{ \frac{w_{\infty}}{\sqrt{\frac{\sigma_{\text{ст}}}{\rho}}} + 5 [(Pr - 1) + (Pr_{\text{перех}} - 1) \ln 6] \right\}. \quad (81,10)$$

Пользуясь формулами

$$q_{\text{ст}} = \alpha (T_{\text{ст}} - T_{\infty}),$$

$$\sigma_{\text{ст}} = \zeta \frac{\rho w_{\infty}^2}{2},$$

приходим к следующей формуле для определения критерия конвективного переноса тепла:

$$St \equiv \frac{\alpha}{w_{\infty} \rho c_p} = \frac{1}{2} \zeta \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{\zeta}{2} 5 [Pr - 1 + (Pr_{\text{перех}} - 1) \ln 6]}}. \quad (81,11)$$

Полученная формула учитывает особенности диффузионного переноса тепла в турбулентном потоке сред, у которых  $Pr \neq 1$ . Для расчета конвективного переноса тепла необходима оценка критерия  $Pr_{\text{перех}} = \frac{\nu_{\text{перех}}}{a_{\text{перех}}}$  в переходной зоне пограничного слоя. В связи с температурными неоднородностями затухающих возмущенных турбулентных масс в переходной зоне  $a_{\text{перех}} < \nu_{\text{перех}}$  и, следовательно,  $Pr_{\text{перех}} > 1$ . Таким образом, температурные неоднородности в переходной зоне пограничного слоя приводят к снижению коэффициента теплоотдачи.

Для дальнейшего усовершенствования диффузионной теории переноса тепла в турбулентных потоках необходимы более точные сведения о распределении скорости в поперечном сечении



потока и дополнительные экспериментальные исследования по определению коэффициентов турбулентного переноса  $\nu_{\text{турб}}$  и  $a_{\text{турб}}$ , особенно в переходной зоне пограничного слоя ( $Pr_{\text{перех}}$ ).

Б. С. Петухов и В. В. Кириллов, используя формулу Рейгардта (79,17) для распределения скорости потока по сечению в трубе, а также соотношение между коэффициентами турбулентного и молекулярного переноса импульсов

$$\frac{\nu_{\text{турб}}}{\nu} = 0,4 \cdot 7,15 \left( \frac{y^*}{7,15} - \text{th} \frac{y^*}{7,15} - \frac{1}{3} \text{th}^3 \frac{y^*}{7,15} \right),$$

где  $y^*$  и  $\omega_*$  отвечают формуле (79,17), получили следующую формулу, аппроксимирующую результаты расчетов с численным интегрированием и учетом поправки на переменную вязкость среды:

$$St \equiv \frac{\alpha}{\omega_{\text{ср}}} = \frac{1}{\frac{36}{\sqrt{\xi}} (Pr^{2/3} - 1) + \frac{8,56}{\xi}} \psi. \quad (81,12)$$

В этой формуле обозначают:

$\xi$  — коэффициент трения при течении жидкости в гладких трубах, определяемый известной формулой Филоненко:

$$\xi = \frac{1}{(1,82 \lg Re - 1,64)^2};$$

$\psi$  — эмпирический множитель, учитывающий изменение вязкости. Для капельных жидкостей:

$$\psi = \left( \frac{\eta_{\text{ср}}}{\eta_{\text{п}}} \right)^n,$$

где  $n = -0,11$  при  $0,08 < \frac{\eta_{\text{ср}}}{\eta_{\text{п}}} < 1$ ;

$n = -0,25$  при  $1 < \frac{\eta_{\text{ср}}}{\eta_{\text{п}}} < 40$ .

Для газов  $\psi = 1$ .

Формула (81,12) в диапазоне  $10^4 < Re < 10^6$  и  $0,7 < Pr < 200$  достаточно хорошо согласуется с экспериментальными данными по теплообмену турбулентных потоков в трубах при  $x/d > 10$ .

## РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА

### § 82. Теплообмен в условиях естественной конвекции

Теплообмен в условиях естественной конвекции осуществляется при местном нагревании или охлаждении среды, находящейся в ограниченном или неограниченном пространстве. Этот вид конвективного переноса тепла играет преимущественную роль в процессах отопления помещений и имеет значение в различных областях техники. Например, нагревание комнатного воздуха отопительными приборами, а также нагревание и охлаждение ограждающих конструкций помещений (стены, окна, двери и пр.) осуществляется в условиях естественной конвекции, или так называемого свободного потока. Естественная конвекция возникает в неравномерно нагретом газе или жидкости, находящейся в ограниченном или неограниченном пространстве, и может влиять на конвективный перенос тепла в вынужденном потоке среды. В больших масштабах свободное перемещение масс среды, вызванное различием ее плотностей в отдельных местах пространства, осуществляется в атмосфере земли, водных пространствах океанов и морей и т. д. За счет естественного движения нагретого воздуха в зданиях осуществляется его вентиляция наружным воздухом. Исследованием свободной конвекции занимался еще М. В. Ломоносов, который применял подъемную силу нагретых масс воздуха для устройства вентиляции шахт, а также для перемещения газов в пламенных печах. К настоящему времени достаточно полно изучен естественный конвективный теплообмен для тел простейшей формы (плита, цилиндр, шар), находящихся в различных средах, заполняющих пространство больших размеров по сравнению с размерами самого тела. Этот вид теплообмена подробно изучался в СССР академиком М. В. Кирпичевым и его сотруниками.

Как показывает опыт, характер свободного течения среды относительно поверхности нагретого тела бывает как ламинарным, так частично или полностью турбулентным. На рис. 117 показано свободное перемещение комнатного воздуха у вертикально подвешенной нагретой трубы большой длины. На нижнем участке трубы наблюдается ламинарное течение воздуха вверх. На некотором расстоянии от нижнего конца трубы перемещение слоев воздуха теряет ламинарный характер, возникают отдельные локообразные массы, появляются искривленные струйки, которые далее дробятся на более мелкие, и восходящий поток воздуха

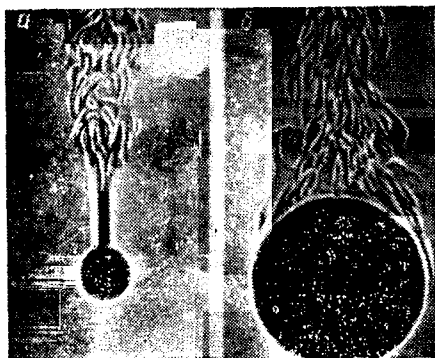


Рис. 130. Свободная конвекция воздуха у нагретых труб: а)  $d=28$  мм; б)  $d=250$  мм

у нагретой трубы приобретает турбулентный характер с ламинарным пристенным слоем. Рис. 117 является хорошей иллюстрацией развития и перехода ламинарного течения в турбулентное.

Если размеры тела по высоте будут небольшими, то ламинарный струйный характер восходящего потока может сохраняться до некоторой высоты над поверхностью нагретого тела (рис. 130), после чего переходит в турбулентный струйный поток.

При большом диаметре горизонтально расположенной нагретой трубы ламинарное перемещение окружающей среды переходит в турбулентное еще до верхней кромки трубы (рис. 130).

Как уже указывалось, особый характер перемещения окружающей среды наблюдается у горизонтально расположенных нагретых плит с большой поверхностью. В этом случае в среде образуются местные восходящие и нисходящие струйные потоки, которые нередко наблюдаются в большом масштабе в условиях нагрева солнечными лучами поверхности земли и ее атмосферы (явление воздушных ям при полете самолетов).

Для горизонтальных плит малого размера с нагретой поверхностью, обращенной вверх, устанавливается один восходящий струйный поток (рис. 118, а). Для горизонтальных плит, обращенных нагретой поверхностью вниз, образуется более сложный поток.

В ограниченном пространстве свободный конвективный теплообмен нагретой поверхности с окружающей средой усложняется влиянием ограничивающих тепловоспринимающих поверхностей.

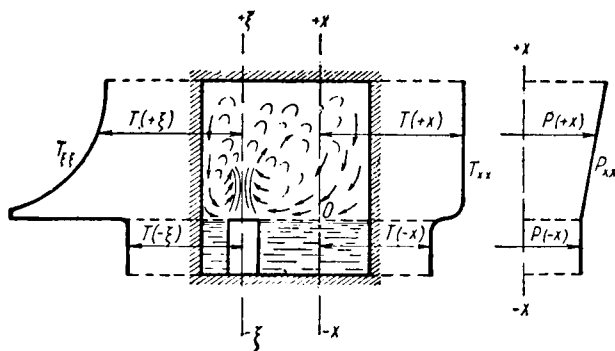


Рис. 131. Циркуляционная конвекция среды в камере с источником нагрева

При этом, как уже указывалось, характер перемещения среды зависит от величины, формы и расположения как теплоотдающих, так и тепловоспринимающих поверхностей. Примером такого вида теплообмена может служить обычная газонаполненная осветительная электролампа. Внутри лампы газ нагревается от раскаленного источника света — спиральной вольфрамовой проволочки с температурой около  $2500^{\circ}\text{K}$ , а на поверхности тонкой стеклянной оболочки — охлаждается. В результате внутри стеклянной колбы осуществляется весьма интенсивная циркуляция газа. Циркуляция среды осуществляется также в различных замкнутых камерах (рис. 119, 120).

Если тепловой источник, например нагретая плита (рис. 131), находится внутри камеры с теплоотдающими поверхностями, то, как оказывается, циркуляция среды в камере осуществляется в основном в зоне над горизонтальной плоскостью расположения теплового источника.

Свободный конвективный теплообмен тел в различных средах, находящихся в неограниченном пространстве, экспериментально изучался различными исследователями. Опыты проводились с телами простейшей формы (плиты, цилиндры, шары) с размерами от 15 мк (проволоки) и до 16 м (шары) в различных средах (различные газы и жидкости).

Результаты исследований обобщались с помощью характерных для этого явления критериев  $Nu$ ,  $Gr$  и  $Pr$ , что находится в полном соответствии с теорией подобия и аналитическим решением задачи. Изменение физических параметров в пограничном слое удается учесть введением критериального отношения  $\frac{Pr_{\Pi}}{Pr_{ст}}$ , представляющего относительное изменение параметров переноса  $\nu$  и  $a$  в пределах изменения температуры среды:  $T_{\Pi}$  — температуры потока окружающей среды,  $T_{ст}$  — температуры среды на границе со стенкой.

Академиком М. А. Михеевым и И. М. Михеевой, на основании обобщения результатов экспериментального исследования (рис. 132), рекомендуются следующие формулы для расчета средних критериев теплообмена тел в свободном потоке.

Для горизонтальных труб в диапазоне изменения  $Gr_{\Pi} \cdot Pr_{\Pi}$  от  $10^3$  до  $10^8$ :

$$\overline{Nu}_{\Pi, d} = 0,5 (Gr_{\Pi} \cdot Pr_{\Pi})^{1/4} \cdot \left( \frac{Pr_{\Pi}}{Pr_{ст}} \right)^{1/4}, \quad (82,1)$$

где  $\overline{Nu}_{\Pi, d} \equiv \frac{\overline{ad}}{\lambda}$  — средний критерий Нуссельта;

$Gr_{\Pi, d} \equiv \frac{gd^3}{\nu^2} \beta_{\Pi} (T_{\Pi} - T_{ст})$  — критерий Грасгофа;

$Pr_{\Pi} \equiv \frac{\nu_{\Pi}}{a_{\Pi}}$  — критерий Прандтля при температуре потока окружающей среды;

$Pr_{ст} \equiv \frac{\nu_{ст}}{a_{ст}}$  — критерий Прандтля при температуре среды на границе со стенкой.

Для вертикальных труб и плит в диапазоне изменения  $Gr_{\Pi, h} \cdot Pr_{\Pi}$  от  $10^3$  до  $10^9$  (что отвечает ламинарному течению среды):

$$\overline{Nu}_{\Pi, h} = 0,76 (Gr_{\Pi, h} \cdot Pr_{\Pi})^{1/4} \left( \frac{Pr_{\Pi}}{Pr_{ст}} \right)^{1/4} \quad (82,2)$$

и в диапазоне изменения  $Gr_{\Pi, h} \cdot Pr_{\Pi} > 10^9$  (что отвечает турбулентному течению):

$$\overline{Nu}_{\Pi, h} = 0,15 (Gr_{\Pi, h} \cdot Pr_{\Pi})^{1/3} \left( \frac{Pr_{\Pi}}{Pr_{ст}} \right)^{1/4}. \quad (82,3)$$

Для газов отношение  $\frac{Pr_{\Pi}}{Pr_{ст}}$  мало зависит от температуры и его можно принять  $\approx 1$ .

Формула (82,3) для расчета критерия конвективного теплообмена в условиях естественной конвекции при турбулентном режиме течения характерна тем, что коэффициент теплоотдачи оказывается не зависящим от размера тела.

Для тонких проволок и сферических частиц малого размера, для которых выполняется условие  $(Gr \cdot Pr) < 10^{-3}$ , критерий кон-

вективного теплообмена имеет постоянное число: для проволок —  $Nu=0,5$ , для сферических частиц —  $Nu=2$ . Как уже указывалось ранее, эти предельные числа  $Nu$  отвечают распространению тепла теплопроводностью в неподвижной среде.

В расчетах теплопередачи приходится встречаться с естественным конвективным переносом тепла средой, находящейся в замкнутом пространстве (газовые и жидкостные прослойки).

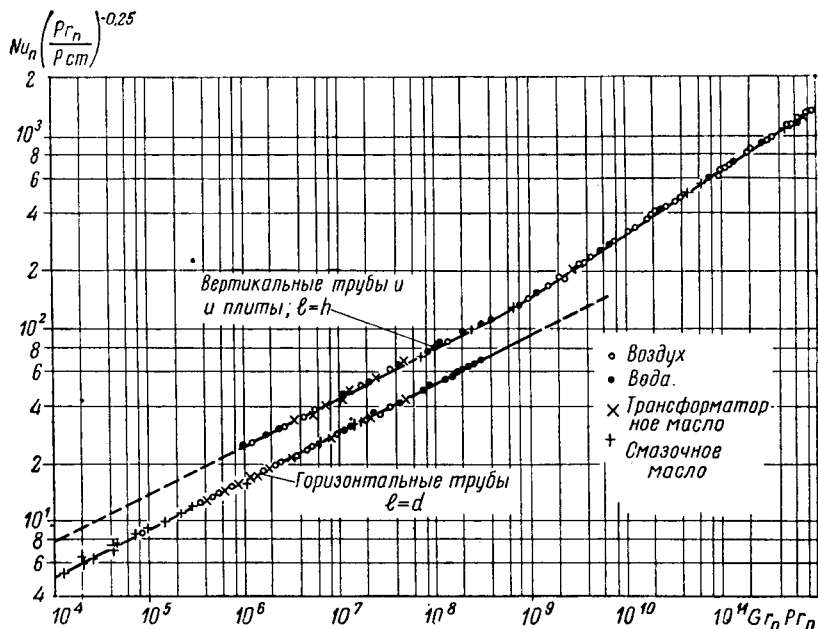


Рис. 132. Обобщение результатов экспериментального исследования теплоотдачи вертикальных труб и плит и горизонтальных труб в условиях свободной конвекции [36]

Циркуляция среды в слое, возникающая при разности температур на ограничивающих поверхностях, значительно усиливает перенос тепла в слое по сравнению с молекулярной теплопроводностью. Характер циркуляционного потока в слое среды и его интенсивность, помимо разности температур на ограничивающих поверхностях ( $T'_F - T''_F$ ), толщины слоя  $s$ , свойств и состояния среды, зависят от формы слоя, его расположения и направления потока тепла.

В связи с тем, что расчет теплопередачи слоя с циркулирующей средой приходится вести в последовательном расчете теплопередачи многослойной стенки, обобщение экспериментальных данных теплопередачи слоя удобнее представить в виде зависимости отношения эквивалентной теплопроводности циркулирующего слоя

среды к обычной теплопроводности слоя:

$$\frac{q_{\text{цирк}}}{q_{\text{неподв}}} = \frac{\frac{\lambda_{\text{ЭКВ}}}{s} (T'_F - T''_F)}{\frac{\lambda}{s} (T'_F - T''_F)} = \frac{\lambda_{\text{ЭКВ}}}{\lambda}.$$

В результате обобщения многих экспериментальных данных Ниманн [III] рекомендует для расчета  $\frac{\lambda_{\text{ЭКВ}}}{\lambda}$  следующую формулу:

$$\frac{\lambda_{\text{ЭКВ}}}{\lambda} = 1 + \frac{A (Gr_s \cdot Pr)^n}{Gr_s \cdot Pr + B}, \quad (82,4)$$

где  $A$ ,  $B$  и  $n$  — постоянные числа, зависящие от конфигурации слоя и направления потока, значения которых см. в табл. 14.

Т а б л и ц а 14

Конфигурация слоя	Направление потока тепла	$A$	$B \cdot 10^{-4}$	$n$
Коаксиальный цилиндрический слой . . . . .	радиальное	0,119	1,45	1,27
Плоскопараллельный слой (горизонтальный) . . . . .	снизу вверх	0,07	0,32	1,333
Плоскопараллельный слой (вертикальный) . . . . .	горизонтальное	0,0236	1,01	1,393
Плоскопараллельный слой под углом $45^\circ$ . . . . .	снизу вверх	0,043	0,41	1,36
Плоскопараллельный слой под углом $45^\circ$ . . . . .	сверху вниз	0,025	1,30	1,36

### § 83. Особенности конвективного переноса тепла в условиях вынужденного потока

Конвективный перенос тепла и теплообмен в условиях вынужденного потока в современной технике играют очень большую роль. С тех пор, как было выяснено, что интенсивность конвективного теплообмена, при заданной разности температур, в значительной мере повышается с увеличением скорости потока, наблюдается стремление осуществлять теплообменные аппараты с большими скоростями теплоносителей. Достаточно больших скоростей течения среды в каналах можно достигнуть в условиях вынужденных напорных потоков при соответствующем перепаде давления среды. Поток называется вынужденным, если при любом соотношении сил инерции и трения (любые критерии  $Re$ ) течение среды в основном осуществляется вследствие падения давления. Участие гравитационной силы при этом не исключается. Вынужденный поток, так же как и свободный поток, отличается

ламинарным и турбулентным характером течения. Поля скоростей в поперечном сечении ламинарного и турбулентного вынужденного потока резко различаются (рис. 133). Соответственно резко различается и интенсивность переноса тепла в поперечном сечении ламинарного и турбулентного потока. Вследствие перемещения масс среды по линиям тока, перенос тепла в поперечном сечении ламинарного потока осуществляется лишь за счет молеку-

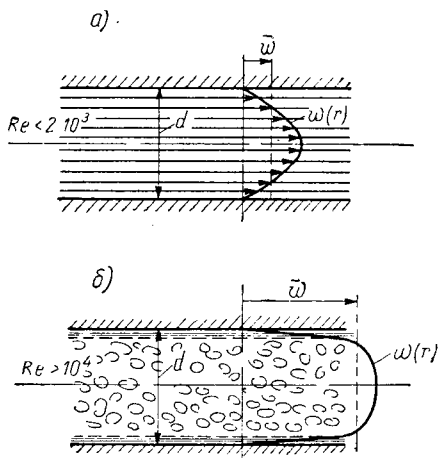


Рис. 133. Скоростное поле в поперечном сечении ламинарного (а) и турбулентного (б) потока

лярной теплопроводности. В турбулентном потоке осуществляется гораздо более интенсивный перенос тепла в поперечном сечении турбулентной теплопроводностью ( $\lambda_{\text{турб}} > \lambda_{\text{мол}}$ ).

В теории конвективного теплообмена (глава X) была показана возможность аналитического решения задач конвективно-теплопроводного переноса тепла в потоке к поверхности обтекаемых тел. Для решения этих задач, помимо известных начальных условий и условий на границе, необходимо иметь заданное скоростное поле в потоке. Скоростное поле при течении изотермической вязкой среды формируется в результате сложного взаимодействия сил инерции и сил трения при обтекании поверхности тела. Постоянный стабилизированный режим течения устанавливается не сразу; для стабилизации потока требуется некоторый путь перемещения среды, обтекающей поверхность тела. На этом пути скоростное поле в поперечном сечении потока зависит от начальных условий входа; далее их влияние прекращается, и скоростное поле определяется конфигурацией стенок, ограничивающих канал, и кинематической вязкостью жидкости (регулярный режим течения). Опыт показывает, что независимо от распре-



деления скоростей в начальном сечении потока после известного пути обтекания стенок канала в сечении потока устанавливается одинаковое распределение скоростей. Длина участка стабилизации потока при течении изотермической среды в канале составляет около  $50d$ .

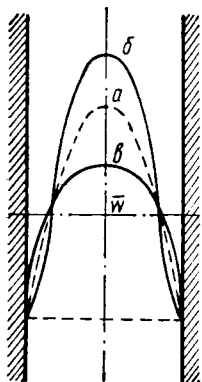


Рис. 134. Распределение скоростей в поперечном сечении ламинарного потока изотермической и неизо-термической среды в трубе: а) при отсутствии теплообмена со стенкой ( $q_{ст}=0$ ); б) при  $v(T_{ст}) > v(T_{п})$  [при нагревании стенки ( $+q_{ст}$ ) капельной жидкостью или при охлаждении стенки ( $-q_{ст}$ ) газом]; в) при  $v(T_{ст}) < v(T_{п})$  (при нагревании стенки газом или при охлаждении ее капельной жидкостью)

При нагревании или охлаждении текущей среды в канале от стенок формирование скоростного поля в потоке неизо-термической среды осложняется из-за изменения коэффициента переноса импульсов с температурой. Для иллюстрации этого эффекта на рис. 134 представлено распределение скоростей в сечении изотермических и неизо-термических потоков при нагревании и охлаждении жидкости от стенок трубы ( $q_{ст}=0$ ;  $+q_{ст}$ ;  $-q_{ст}$ ). Ввиду различия градиентов скорости, а следовательно, и сил трения у стенок следует ожидать различия коэффициентов теплоотдачи при нагревании ( $+q_{ст}$ ) и при охлаждении стенки ( $-q_{ст}$ ).

Помимо влияния на скоростное поле потока изменяющейся с температурой силы трения на стенке, в каналах значительного диаметра и при большой разности температур в среде, на скоростное поле потока вынужденного течения может заметно влиять свободная конвекция. При этом в потоке возникают дополнительные сложные циркуляционные токи.

Сложная взаимосвязь между скоростными и температурными полями в вынужденном потоке при конвективно-кондуктивном и турбулентном переносе тепла ограничивает возможности аналитического расчета конвективного теплообмена. Более надежным оказывается путь экспериментального исследования и обобщения опытных данных на основе теоретического решения задачи для упрощенной модели или путем использования метода теории подобия.

Во всех случаях обобщения экспериментальных данных и расчета конвективного теплообмена требуется знать среднюю температуру потока и температуру, при которой определяются физические параметры.

#### § 84. Определение средней температуры потока в условиях конвективного теплообмена

Среднюю температуру в сечении потока можно определить по известному полю скоростей и температур в сечении, применяя

формулу конвективного переноса тепла

$$Q_{\text{конв}, x} = \int_f q_{\text{конв}, x} \cdot df,$$

где  $q_{\text{конв}, x} = w_x \rho c_p t$  — удельный поток конвективного переноса тепла в направлении оси канала [ $w_x \equiv w(x, y)$  — скорость,  $\rho c_p(t)$  — объемная теплоемкость среды,  $t \equiv t(x, y)$  — температура].

Вводя среднюю температуру в сечении потока для определения конвективного переноса тепла, имеем равенство:

$$\int_f (w_x \rho c_p t) df = \bar{t}_f \int_f (w_x \rho c_p) df,$$

откуда находим:

$$\bar{t}_f = \frac{\int_f (w_x \rho c_p t) df}{\int_f (w_x \rho c_p) df}. \quad (84,1)$$

Если объемная теплоемкость не изменяется с температурой, то формула для определения средней температуры в сечении потока упрощается и принимает вид:

$$\bar{t}_f = \frac{\int_f (\bar{w}_x t) df}{\bar{w}_x f}, \quad (84,2)$$

где  $\bar{w}_x f = V$  — расход жидкости в сечении  $f$  ( $\bar{w}_x$  — средняя скорость потока).

Если, кроме того, принять постоянной и скорость в сечении потока, то средняя температура в сечении находится:

$$\bar{t}_f = \frac{\int_f t(x, y) df}{f}. \quad (84,3)$$

В условиях конвективного теплообмена потока среды со стенками канала температура меняется не только в поперечном, но и в продольном сечении потока. В связи с этим приходится находить среднюю температуру и по длине канала. Среднюю температуру потока среды в канале можно определить, пользуясь уравнением баланса тепла для элементарного участка поверхности нагрева стенок канала  $dF$ , вдоль которых перемещается среда со средней скоростью  $\bar{w}$  и температурой  $\bar{t}_f$  в сечении:

$$- \bar{f} \bar{w} \rho c_p d\bar{t}_f = \alpha (\bar{t}_f - t_F) dF,$$

где  $\alpha$  — коэффициент теплопередачи;  
 $t_F$  — температура стенок.

При условии постоянной температуры стенок имеем следующее дифференциальное уравнение изменения температуры потока по длине канала:

$$-\frac{d\bar{\theta}_f}{\bar{\theta}_f} = \frac{\alpha dF}{f\bar{\omega}qc_p},$$

где  $\bar{\theta}_f = \bar{t}_f - t_F$  — разность температур в сечении потока.

Полагая  $\alpha$ ,  $\bar{\omega}$ ,  $q$ ,  $c_p$  и  $f$  неизменными для участка поверхности канала  $F_x$  на длине  $x$ , имеем:

$$-\ln \frac{\bar{\theta}_{f, Fx}}{\bar{\theta}_{f, a}} = \frac{\alpha F_x}{f\bar{\omega}qc_p}. \quad (84,4)$$

Для распределения температур в продольном сечении потока имеем формулу:

$$\bar{\theta}_{f, Fx}/\bar{\theta}_{f, a} = \exp\left(-\frac{\alpha F_x}{f\bar{\omega}qc_p}\right). \quad (84,5)$$

Средняя разность температур в потоке на участке канала находится по формуле:

$$\bar{\theta}_{\Pi, Fx} = \frac{\int_0^{F_x} \bar{\theta}_{f, Fx} dF}{F_x}.$$

Пользуясь формулой (84,5), путем вычисления интеграла и подстановки получаем:

$$\bar{\theta}_{\Pi, Fx} = \frac{\bar{\theta}_{f, a} - \bar{\theta}_{f, Fx}}{\ln \frac{\bar{\theta}_{f, a}}{\bar{\theta}_{f, Fx}}}. \quad (84,6)$$

При небольшом изменении температуры потока среды в канале  $\bar{\theta}_{f, Fx}/\bar{\theta}_{f, a} > 0,6$  вместо формулы (84,6) можно применить более простую формулу среднеарифметической разности температур:

$$\bar{\theta}_{\Pi} = \frac{\bar{\theta}_{f, a} + \bar{\theta}_{f, Fx}}{2}. \quad (84,7)$$

Средняя температура потока находится согласно равенству:

$$\bar{t}_{\Pi} = t_F \mp \bar{\theta}_{\Pi}. \quad (84,8)$$

Знак минус относится к случаю нагревания среды, а знак плюс — к ее охлаждению в канале.

Среднюю температуру потока используют для выбора числовых значений физических параметров среды и при вычислении различных критериев подобия.

В связи с тем, что, как уже указывалось ранее, коэффициент теплоотдачи меняется в зависимости от направления потока тепла

на стенке ( $+q_{ст}$  или  $-q_{ст}$ ), критерий, определяющий соотношение коэффициентов переноса тепла и импульсов (критерий Прандтля), вычисляют для двух температур: температуры потока ( $Pr_{п}$ ) и температуры стенки ( $Pr_{ст}$ ). При обобщении экспериментальных данных по конвективному теплообмену вводят сложный критерий физических свойств среды  $\frac{Pr_{п}}{Pr_{ст}} = \frac{\nu_{п}}{\nu_{ст}} : \frac{a_{п}}{a_{ст}}$ , представляющий сложное соотношение коэффициентов переноса для двух характерных температур: температуры потока и температуры стенки.

Необходимо отметить, что вопрос о выборе температуры, для которой следует принимать физические параметры среды и вычислять критерии конвективного теплообмена, по является вполне ясным. Теоретические соображения показывают, что решающая роль при этом принадлежит начальной температуре потока и температуре стенки.

Во всех случаях обобщения экспериментальных данных и рекомендации расчетных формул конвективного теплообмена необходимо оговаривать, для какой средней температуры среды в потоке вычисляются физические параметры.

### § 85. Конвективный теплообмен при продольном обтекании пластины

При продольном обтекании пластины ламинарным потоком конвективный теплообмен можно рассчитать, пользуясь формулами теоретического решения задачи (глава X). Необходимо, однако, иметь в виду, что эти формулы не учитывают изменения физических параметров с температурой. Критическое число  $Re_{крит} \approx 5 \cdot 10^5$ , отвечающее обтеканию пластины потоком изотермической среды, в условиях неизотермической среды оказывается меньшим ( $\approx 5 \cdot 10^4$ ). Поэтому применение теоретических формул для расчета конвективного теплообмена пластины ограничено небольшой разностью температур ( $T_{\infty} - T_{ст}$ ) и критическим числом  $Re_{крит} < 5 \cdot 10^4$ .

При обтекании пластины турбулентным потоком применение теоретической формулы (80,12) также ограничено разностью температур и критерием свойств среды  $Pr \approx 1$ .

Для расчета теплоотдачи пластины в турбулентном потоке пользуются данными экспериментального исследования. М. А. Микеев рекомендует следующие формулы:

а) для расчета локальной теплоотдачи:

$$Nu_{п, x} = 0,296 Re_{п, x}^{0,8} \cdot Pr_{п}^{0,43} \left( \frac{Pr_{п}}{Pr_{ст}} \right)^{0,25}; \quad (85,1)$$

б) для расчета средней теплоотдачи:

$$\overline{Nu}_{п, L} = 0,037 Re_{п, L}^{0,8} \cdot Pr_{п}^{0,43} \left( \frac{Pr_{п}}{Pr_{ст}} \right)^{0,25}. \quad (85,2)$$

## § 86. Конвективный теплообмен потока жидкости в трубах

Теоретический расчет конвективного теплообмена потока жидкости в трубах осложняется влиянием ряда эффектов, таких, например, как формирование и взаимное влияние скоростных и температурных полей в потоке, влияние естественной конвекции на ламинарное течение в трубах, влияние температурных неоднородностей при переносе тепла турбулентными массами к стенке и др.

В отличие от обтекания плиты неограниченным потоком с неизменной скоростью  $\bar{w}_\infty$ , при течении жидкости в каналах скоростное поле формируется по мере перемещения жидкости от начального сечения канала. При этом на формировании скоростного поля сказывается теплообмен, который неизбежно влияет на силу трения потока в пристенном слое. Длина участка канала, на котором стабилизируется скоростное поле в поперечном сечении потока, измеряется десятками и доходит до 100 поперечных размеров канала. Поэтому в расчете конвективного теплообмена в трубах наряду со средними значениями коэффициента теплоотдачи важно знать и локальные его величины.

Ввиду сложности влияния многих факторов расчет конвективного теплообмена в трубах проводят, пользуясь данными экспериментальных исследований. На основе обобщения многих экспериментальных данных М. А. Михеев рекомендует следующие формулы для расчета средних величин критериев конвективного теплообмена в каналах при  $l/d > 50$ :

а) для ламинарного течения жидкостей при  $Re_{\text{крит}} < 2 \cdot 10^3$ :

$$\bar{Nu}_n = 0,15 Re_n^{1/3} Pr_n^{0,43} Gr_n^{0,1} \left( \frac{Pr_n}{Pr_{ст}} \right)^{0,25}; \quad (86,1)$$

б) для развитого турбулентного режима течения при  $Re > 10^4$ :

$$\bar{Nu}_n = 0,021 Re_n^{0,8} Pr_n^{0,43} \left( \frac{Pr_n}{Pr_{ст}} \right)^{0,25}. \quad (86,2)$$

Для переходного режима течения ( $Re$  от  $2 \cdot 10^3$  до  $10^4$ ), отличающегося неустойчивостью, результаты различных экспериментальных исследований заметно различаются, и для приближенной оценки теплообмена М. А. Михеев рекомендует пользоваться следующей формулой:

$$\bar{Nu}_n = A Pr_n^{0,43} \left( \frac{Pr_n}{Pr_{ст}} \right)^{0,25}, \quad (86,3)$$

где величина  $A$  находится в зависимости от числа  $Re$ :

$Re \cdot 10^{-3} = 2,1$	2,2	2,3	2,4	2,5	3	4	5	6	8	10
$A = 1,9$	2,2	3,3	3,8	4,4	6	10,3	15,5	19,5	27	33,9

Формулы (86,2) и (86,3) применимы для каналов различной формы поперечного сечения [круглого, квадратного, прямоугольного, треугольного, кольцевого ( $d_2/d_1 = 1 \div 5,6$ ), щелевого ( $\frac{a}{b} = 1 \div 40$ )] и для каналов в пучках труб при  $l/d_{\text{ЭКВ}} > 50$ . Во всех этих случаях

$$\varepsilon_{l/d} = \frac{\bar{\alpha}_{l/d} < 50}{\bar{\alpha}_{l/d} > 50}$$

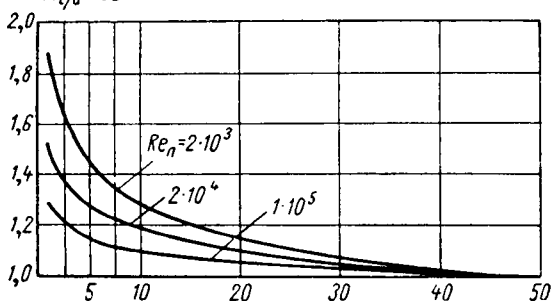


Рис. 135. Множитель  $\varepsilon_{l/d}$ , характеризующий изменение коэффициента теплоотдачи на начальном участке трубы

за определяющий размер принимается эквивалентный диаметр, отвечающий равновеликой площади сечения трубы диаметром  $d$ :

$$d_{\text{ЭКВ}} = \frac{4f}{u}, \quad (86,4)$$

где  $f$  — площадь поперечного сечения канала;  
 $u$  — периметр, обтекаемый потоком.

Следует заметить, что пользоваться формулой эквивалентного диаметра (86,4) в расчетах теплообмена можно во всех тех случаях, когда толщина пограничного слоя достаточно мала по сравнению с поперечным размером канала ( $\delta < \frac{d_{\text{ЭКВ}}}{2}$ ).

В каналах с  $l/d < 50$  коэффициент конвективного теплообмена при прочих одинаковых условиях повышается с уменьшением длины трубы. Особенно заметное увеличение коэффициента теплоотдачи происходит на начальном участке трубы (рис. 135). К такому же результату приводит и аналитическое решение рассматриваемой задачи, выполненное без учета свободной конвекции

среды. Коэффициент конвективного теплообмена вынужденного потока среды в канале с  $l/d < 50$  можно рассчитывать по формулам (86,1) и (86,2), вводя множитель увеличения:

$$\alpha_{l/d < 50} = \epsilon_{l/d} \alpha_{l/d > 50}. \quad (86,5)$$

Множитель  $\epsilon_{l/d}$  находится в зависимости от  $l/d$  и  $Re_{\Pi}$ :

Т а б л и ц а 16

$l/d \backslash Re_{\Pi}$	1	2	5	10	15	20	30	40	50
$2 \cdot 10^3$	1,90	1,70	1,44	1,28	1,18	1,13	1,05	1,02	1
$2 \cdot 10^4$	1,51	1,40	1,27	1,18	1,13	1,10	1,05	1,02	1
$1 \cdot 10^5$	1,28	1,22	1,15	1,10	1,08	1,06	1,03	1,02	1

При течении жидкости в изогнутых трубах с заметной кривизной ( $d/R$ ) конвективный теплообмен усложняется действием на поток центробежной инерционной силы, и характер движения жидкости в изогнутых трубах изменяется по сравнению с потоком в трубах с прямолинейной осью.

Расчет теплообмена при турбулентном течении жидкости в изогнутых трубах можно проводить по формуле (86,2), вводя множитель увеличения:

$$\epsilon_R = 1 + 1,77 \frac{d}{R}, \quad (86,6)$$

где  $R$  — радиус изгиба трубы;  
 $d$  — диаметр трубы.

Как показывает теория конвективно-теплопроводного переноса тепла в ламинарном потоке, температурное поле формируется по мере перемещения жидкости по длине трубы. Следовательно, и конвективный теплообмен потока находится в зависимости от длины трубы. Учитывая, что и скоростное поле в поперечном сечении потока изменяется по длине трубы, можно полагать, что в качестве определяющего размера целесообразно выбирать длину трубы  $l$ , вводя дополнительный критерий  $l/d$ .

## § 87. Конвективный теплообмен при поперечном обтекании труб

### А. Одиночные трубы или цилиндры

Многие теплообменники, как, например, водотрубные котлы, воздухоподогреватели и др., имеют поперечное расположение труб в потоке греющей или нагреваемой среды.

Исследования поперечного обтекания цилиндра потоком жидкости показывают, что в определенном месте поверхности цилиндра наблюдается характерный отрыв течения (рис. 109), а в кормовой части образуется интенсивное вихреобразное течение. Исследования показывают также, что конвективный теплообмен для отдельных мест поверхности цилиндра оказывается весьма неравномерным; наибольших величин коэффициент теплоотдачи достигает на лобовой и кормовой частях поверхности цилиндра (рис. 111).

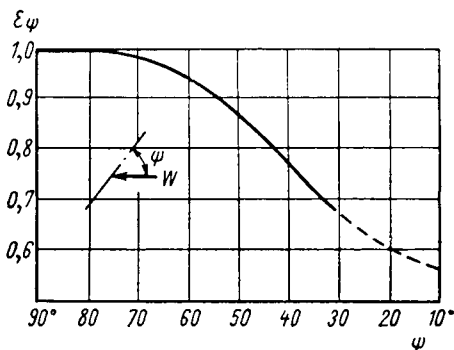


Рис. 136. Множитель  $\epsilon_{\phi}$ , характеризующий изменение коэффициента теплоотдачи при обтекании цилиндра под углом  $\phi$

Повышенная теплоотдача на лобовой поверхности цилиндра отвечает минимальной толщине пограничного слоя жидкости в этом месте, а усиленный перенос тепла в кормовой части цилиндра можно объяснить интенсивным вихреобразным течением среды.

Для теплотехнических расчетов наибольший интерес представляет средняя по периметру цилиндра теплоотдача. Рекомендуемые М. А. Михеевым формулы для определения средней теплоотдачи цилиндров в потоке жидкостей и газов имеют вид:

а) для потоков с  $Re_{\Pi}$  от 10 до 1000:

$$\overline{Nu}_{\Pi} = 0,5 Re_{\Pi}^{0,5} Pr_{\Pi}^{0,38} \left( \frac{Pr_{\Pi}}{Pr_{ст}} \right)^{0,25}; \quad (87,1)$$

б) для потоков с  $Re_{\Pi}$  от  $10^3$  до  $2 \cdot 10^5$ :

$$\overline{Nu}_{\Pi} = 0,25 Re_{\Pi}^{0,6} Pr_{\Pi}^{0,38} \left( \frac{Pr_{\Pi}}{Pr_{ст}} \right)^{0,25}. \quad (87,2)$$

Опытные исследования средней теплоотдачи цилиндров, обтекаемых поперечным потоком несжимаемых сред, подтверждают однозначную зависимость между критериями  $\overline{Nu}_{\Pi}$ ,  $Re_{\Pi}$  и  $Pr$  только при зафиксированной степени турбулентности набегающего потока. Предварительное повышение степени турбулентности потока увеличивает теплоотдачу.



Если цилиндр располагается не перпендикулярно направлению потока, а под некоторым углом  $\psi$ , меньшим  $90^\circ$  (наклонно к потоку), то коэффициент теплоотдачи при прочих одинаковых условиях снижается. Это снижение учитывают поправочным множителем  $\epsilon_\psi$  (рис. 136).

### Б. Пучки труб

Особенно большое практическое значение имеет конвективный теплообмен потока среды, обтекающей пучок труб. Обычно встречаются два типа пучков труб: с коридорным и шахматным расположением труб в пучке (рис. 137). Расстановка труб в пучке, определяемая отношениями  $s_1/d$  и  $s_2/d$ , может быть различной. На рис. 138 представлены пучки труб и показан характер потока в межтрубном пространстве. Как видно, часть межтрубного пространства оказывается слабопроточной с замедленной сменой

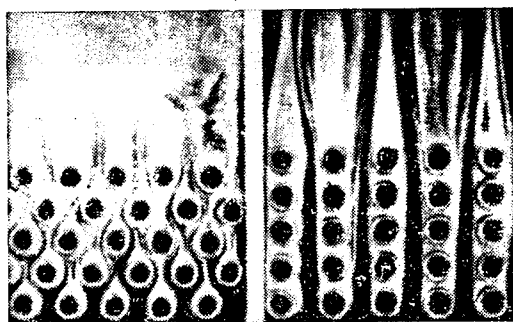
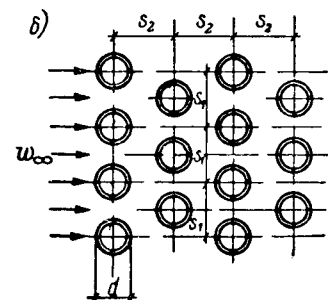
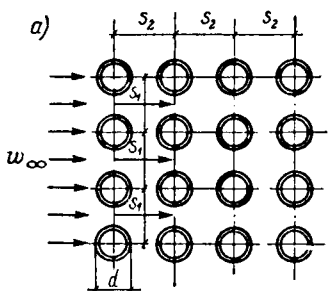


Рис. 137. Поперечное сечение пучка труб с коридорным (а) и шахматным (б) расположением

Рис. 138. Характер обтекания потоком пучков труб с различным расположением

масс потока среды. Если для первого ряда труб в пучке характер поперечного обтекания оказывается более сходным с поперечным обтеканием одиночной трубы, то для всех последующих труб характер обтекания получается иным. Соответственно характеру обтекания труб в пучке распределяется и коэффициент теплоотдачи. Для первых труб в пучке с шахматным и коридорным расположением распределение теплоотдачи на поверхности трубы приблизительно отвечает одиночной трубе (рис. 111). Для дальнейших труб в пучке коэффициент теплоотдачи распределяется различно для труб шахматного и коридорного расположения. На

рис. 139 представлено распределение относительного коэффициента теплоотдачи (по отношению к среднему значению) по поверхности трубы в пучке с коридорным и шахматным расположением. Для труб шахматного расположения коэффициент теплоотдачи имеет наибольшую величину на лобовой стороне, а для труб коридорного расположения наибольшая теплоотдача достигается на элементах поверхности трубы, расположенных под углом около  $50^\circ$  к направлению потока.

Как показывают экспериментальные исследования, средняя теплоотдача труб за первым рядом усиливается. Повышение конвективного теплообмена труб в потоке за первым рядом объясняют увеличением турбулизации потока при обтекании первых рядов труб в пучке. Начиная с третьего ряда, возрастание теплоотдачи труб прекращается.

Для расчета конвективной теплоотдачи при поперечном обтекании пучка труб, начиная с третьего ряда, для любых жидкостей и газов в диапазоне изменения  $Re$  от  $2 \cdot 10^2$  до  $2 \cdot 10^5$  М. А. Михеев рекомендует применять следующие формулы:

а) при коридорном расположении труб:

$$\overline{Nu}_n = 0,23 Re_n^{0,65} Pr_n^{1/3} \left( \frac{Pr_n}{Pr_{ст}} \right)^{0,25}; \quad (87,3)$$

б) при шахматном расположении труб:

$$\overline{Nu}_n = 0,41 Re_n^{0,6} Pr_n^{1/3} \left( \frac{Pr_n}{Pr_{ст}} \right)^{0,25}. \quad (87,4)$$

При определении критериев подобия в этих формулах принимаются числовые значения средней температуры потока, скорости в наиболее узком сечении потока и диаметра труб. Как оказывается, относительные расстояния между трубами влияют на теплоотдачу сравнительно слабо.

Средняя теплоотдача труб первого ряда определяется по формулам (87,3) и (87,4), вводя множитель уменьшения  $\epsilon_1 = 0,6$ . Для труб второго ряда множитель уменьшения при коридорном расположении труб  $\epsilon_{2кор} = 0,9$ ; при шахматном расположении —  $\epsilon_{2шах} = 0,7$ .

Средняя величина коэффициента теплоотдачи для всего пучка труб находится из равенства:

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \dots + \alpha_n F_n}{F_1 + F_2 + \dots + F_n}, \quad (87,5)$$

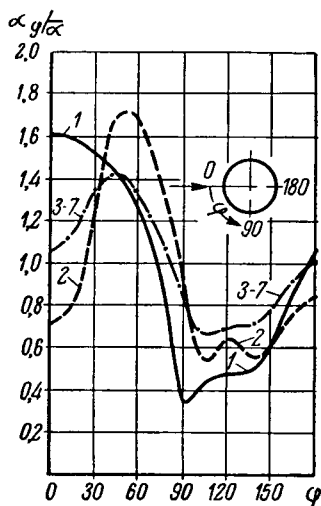


Рис. 139. Распределение относительного коэффициента теплоотдачи (по отношению к среднему значению) на поверхности труб в пучке:

1 — первый ряд труб; 2 — второй ряд труб в коридорном пучке; 3 — 7 — ряды труб от третьего до седьмого в коридорном пучке

где  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  — коэффициенты теплоотдачи отдельных рядов труб;

$F_1, F_2, \dots, F_n$  — соответствующие поверхности нагрева.

Если пучок труб омывается вынужденным потоком газа под углом к оси труб  $\psi$ , то коэффициент теплоотдачи пучка умень-

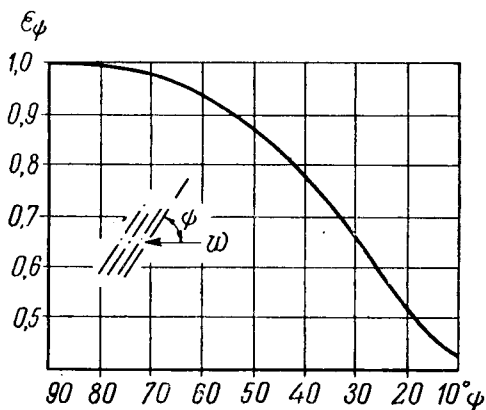


Рис. 140. Множитель  $\epsilon_{\psi}$ , характеризующий изменение коэффициента теплоотдачи при обтекании пучка труб, расположенных под углом  $\psi$  к направлению потока

шается в сравнении с поперечным обтеканием ( $\psi=90^\circ$ ). Для расчета коэффициента теплоотдачи в этом случае в формулы (87,3) и (87,4) вводится множитель уменьшения:

$$\bar{\alpha}_{\psi} = \epsilon_{\psi} \bar{\alpha}_{\psi=90^\circ}. \quad (87,6)$$

На рис. 140 представлена зависимость множителя уменьшения  $\epsilon_{\psi}$  от  $\psi$ .

Как видно, заметное уменьшение коэффициента теплоотдачи в наклонных пучках труб по сравнению с поперечным обтеканием наблюдается лишь для углов наклона  $\psi < 60^\circ$ .

## § 88. Особенности теплообмена жидких металлов

В настоящее время в качестве сред теплоносителей широко применяются различные жидкие металлы и их сплавы. Применение жидких металлов (ртуть, натрий, калий, литий, висмут, олово, свинец, сплавы натрия — калия и свинца — висмута и др.) вызвано необходимостью повышения температуры среды, участвующей в теплообмене со стенкой, и обеспечения интенсивной теплоотдачи стенки. Высокая температура расплавленных металлов, их малая кинематическая вязкость и большая теплопроводность обеспечивают интенсивную теплоотдачу в теплообменных устройствах.

Резкое отличие (уменьшение на несколько порядков) критерия физических свойств жидких металлов ( $Pr \equiv \frac{\nu}{a} \ll 1$ ) от обычных жидкостей (вода, жидкие углеводороды, спирты и др.) существенно сказывается на характере переноса тепла к стенке в потоках жидких металлических сред.

В свободных потоках жидких металлов, вследствие большого коэффициента теплопроводности по сравнению с обычными жидкостями, критерий  $Pr$  влияет на теплоотдачу в большей степени.

Расчетными формулами для критерия теплообмена при естественной конвекции жидких металлов могут служить следующие:

а) для  $Gr = 10^2 \div 10^9$ :

$$\overline{Nu} = 0,52 \overline{Gr}^{1/4} \cdot Pr^{0,4}; \quad (88,1)$$

б) для  $Gr = 10^9 \div 10^{13}$ :

$$\overline{Nu} = 0,106 \overline{Gr}^{1/3} \cdot Pr^{0,4}. \quad (88,2)$$

Здесь при вычислении критериев физические параметры определяются для средней температуры в пограничном слое:

$$\bar{t} = \frac{t_{\text{п}} + t_{\text{ст}}}{2}.$$

В условиях вынужденного турбулентного течения в каналах теплообмен потока жидких металлов со стенками отличается от теплообмена потока обычных жидкостей влиянием критерия  $Pr$ .

Вследствие отсутствия заметных температурных неоднородностей в турбулентном пограничном слое жидких металлов (ввиду больших коэффициентов теплопроводности) теплообмен в основном осуществляется в условиях конвективно-теплопроводного переноса тепла, и определяющим критерием, в согласии с теорией этого вида теплообмена, является критерий Пекле  $Pe = \frac{wd}{a}$ .

Расчетная формула для критерия теплоотдачи турбулентного потока жидких металлов в каналах в диапазоне изменения критерия  $Re$  от  $10^4$  до  $10^6$ , критерия  $Pr = 4 \cdot 10^{-3} \div 3,2 \cdot 10^{-2}$  и  $l/d > 30$  может быть рекомендована следующая:

$$\overline{Nu} = 4,5 + 0,014 Pe_{\text{п}}^{0,8}. \quad (88,3)$$

Для  $l/d < 30$  в расчетную формулу (88,3) вводится множитель увеличения  $\varepsilon_{l/d}$ :

$$\varepsilon_{l/d < 30} = \varepsilon_{l/d > 30}.$$

## ТЕПЛОУТДАЧА ПРИ КОНДЕНСАЦИИ ПАРА

### § 89. Общие сведения о конденсации пара

Конденсация пара различных веществ может осуществляться на границе с охлаждаемой поверхностью какого-либо тела или на каких-либо «центрах», способных конденсировать охлаждаемый пар в объеме (ионизированные молекулы газа, различные взвешенные частицы и т. п.). Во всех случаях для возможности конденсации пара требуется, чтобы температура охлаждения была меньше температуры насыщенного пара при его общем или парциальном давлении, если пар находится в смеси с другими газами.

Как показывает опыт, при охлаждении пара на поверхности какого-либо тела в зависимости от состояния поверхности тела и свойств поверхностного слоя может осуществляться *пленочная* или *капельная конденсация пара*. Пленочная конденсация пара осуществляется на охлаждаемых поверхностях, смачиваемых жидким конденсатом. При неполном смачивании конденсатом охлаждаемых поверхностей (рис. 141) происходит капельная конденсация пара. Условия смачиваемости поверхностей какой-либо жидкостью определяются положением равновесия сил поверхностного натяжения жидких масс в паре ( $\sigma_{ж, п}$ ) и натяжения жидких масс на границе с поверхностью тела ( $\sigma_{ж, ст, ж}$  и  $\sigma_{ж, ст, п}$ ) (рис. 141, а). Положение равновесия сил натяжения отвечает определенному краевому углу  $\theta$  в соответствии с равенством:

$$\sigma_{ж, ст, п} - \sigma_{ж, ст, ж} = \sigma_{ж, п} \cos \theta. \quad (89,1)$$

Смачивание жидким конденсатом охлаждаемой поверхности тела отвечает неравенству:

$$\sigma_{ж, ст, п} - \sigma_{ж, ст, ж} > \sigma_{ж, п} \cos \theta;$$

в противном случае жидкость не растекается по охлаждаемой поверхности и на ней образуются отдельные капли конденсата (рис. 141, б).

Величина поверхностного натяжения жидкой массы конденсата на границе с охлаждаемой поверхностью тела зависит от рода жидкости, состояния и свойств поверхностного слоя тела. Свойства поверхностного слоя могут изменяться естественным образом (например, повышением шероховатости, вследствие коррозии и т. п.) или искусственным путем (применением различных покрытий и т. п.).

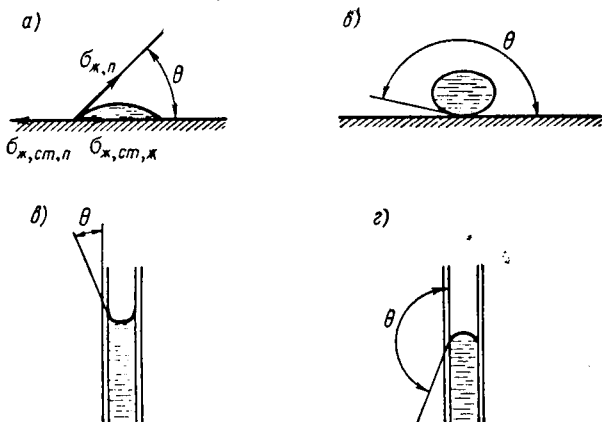


Рис. 141. Смачиваемые жидкостью поверхности: плоская стенка (а) и стенка трубки (в); несмачиваемые жидкостью поверхности: плоская стенка (б) и стенка трубки (г)

Как показывает опыт, капельная конденсация пара по сравнению с пленочной, при прочих одинаковых условиях, отвечает более интенсивной теплоотдаче.

При конденсации пара на каких-либо частицах в пространстве образующиеся капельки жидкости подвержены дополнительному давлению от силы поверхностного натяжения:

$$p_{ж} = p_{п} + \frac{2\sigma}{R}, \quad (89,2)$$

где  $\sigma$  — поверхностное натяжение жидкости на границе с паром;  
 $R$  — радиус капли.

Как показал Кельвин, равновесное давление насыщенного пара над выпуклой поверхностью жидкой капли больше, чем над плоской поверхностью жидкости на величину

$$p_{нас, R} - p_{нас, R\infty} = \frac{2\sigma}{R} \frac{q''}{q' - q''}, \quad (89,3)$$

где  $q'$  и  $q''$  — плотности жидкости и пара в равновесном насыщенном состоянии.

При малом радиусе капелек  $R$  величина  $p_{нас, R} - p_{нас, R\infty}$  может быть существенной и соответственно этой величине осуществляется

*переохлаждение конденсирующегося пара:*

$$\Delta T_{\text{нас}} \rightarrow \Delta p_{\text{нас}}.$$

Такое заметное переохлаждение конденсирующегося пара наблюдается, например, при расширении вытекающей паровой струи в пространство с низким давлением, при охлаждении воздушных масс с водяным паром в атмосфере земли и т. п.

При конденсации пара на поверхности охлаждаемой стенки осуществляется конвективный перенос пара из окружающего пространства к месту конденсации. В поверхностном слое жидкости наряду с процессом связывания молекул пара в жидкость (конденсация) осуществляется также и освобождение молекул жидкости и переход их в пар (испарение). Результирующим эффектом такого совместного процесса является конденсация части пара с освобождением энергии фазового перехода в поверхностном слое жидкости.

Для осуществления непрерывного процесса конденсации пара необходимо обеспечить соответствующий отвод освобождаемой энергии охлаждением поверхностного слоя жидкости. При этом перенос тепла к охлаждаемой стенке в условиях пленочной конденсации пара осуществляется в основном теплопроводностью через толщу пленки. Толщина пленки конденсата на поверхности охлаждаемой стенки зависит от интенсивности конденсации пара и от условий стока жидкости.

## § 90. Теория пленочной конденсации пара

Рассматривая пленочную конденсацию насыщенного пара на поверхности охлаждаемой стенки (рис. 142), можно заметить, что все тепло, освобождаемое в процессе конденсации пара на поверхности пленки, отводится к охлаждаемой стенке через толщу пленки  $\delta$ . Определяя перенос тепла через толщу пленки в любом месте охлаждаемой поверхности стенки формулой теплопроводности плоскопараллельного слоя

$$q = \lambda \frac{T'_{\text{ж}} - T''_{\text{ж}}}{\delta}$$

и принимая температуры пленки на ее границах  $T'_{\text{ж}}$  и  $T''_{\text{ж}}$  соответственно равными температуре насыщенного пара  $T_{\text{нас}}$  и температуре охлаждаемой стенки  $T_{\text{ст}}$ , коэффициент теплоотдачи конденсирующегося пара находим из равенства:

$$\alpha (T_{\text{нас}} - T_{\text{ст}}) = \lambda \frac{T_{\text{нас}} - T_{\text{ст}}}{\delta},$$

$$\alpha = \frac{\lambda}{\delta}. \quad (90,1)$$

Таким образом, задача о теплообмене конденсирующегося пара с охлаждаемой стенкой, в условиях пленочной конденсации пара, сводится к определению толщины пленки  $\delta$ . Толщину пленки можно рассчитать, решив задачу о стоке жидкости в пленке (задача Нуссельта).

Существование пленки конденсата на смачиваемой поверхности стенки обуславливается взаимодействием сил тяготения, трения, инерционной силы и силы поверхностного натяжения жидкости на границе. Дифференциальное уравнение движения применительно к рассматриваемой плоской задаче течения жидкости в пленке запишется в виде:

$$\omega_x \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial \omega_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\rho - \rho''}{\rho} g \cos(\vec{g}, \hat{x}) + \nu \left( \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial y^2} \right), \quad (90,2)$$

где  $\rho$  и  $\rho''$  — плотности жидкого конденсата и пара;

$\nu$  — кинематическая вязкость жидкости.

Если не учитывать перемещения (сноса) частиц жидкости в поперечном направлении ( $\omega_y \ll \omega_x$ ) и пренебречь силой инерции в сравнении с силой тяготения  $\left[ \omega_x \frac{\partial \omega_x}{\partial x} \ll \right.$

$\left. \ll \frac{\rho - \rho''}{\rho} g \cos(\vec{g}, \hat{x}) \right]$ , то при условии неизменности давления во всех местах пленки ( $p = p_{\text{нас}}$ ) уравнение (90,2) значительно упрощается и переходит в следующее:

$$\frac{\rho - \rho''}{\rho} g \cos(\vec{g}, \hat{x}) + \nu \frac{d^2 \omega_x}{dy^2} = 0. \quad (90,2')$$

Для вертикальной плоской стенки [ $\cos(\vec{g}, \hat{x}) = 1$ ] при условии неизменности величин  $\rho$ ,  $\rho''$  и  $\nu$  путем двухкратного интегрирования:

$$\frac{d^2 \omega_x}{dy^2} = -\frac{g}{\nu} \frac{\rho - \rho''}{\rho}$$

находим:

$$\frac{d\omega_x}{dy} = -\frac{g}{\nu} \frac{\rho - \rho''}{\rho} y + C_1$$

и

$$\omega_x = -\frac{1}{2} \frac{g}{\nu} \frac{\rho - \rho''}{\rho} y^2 + C_1 y + C_2.$$

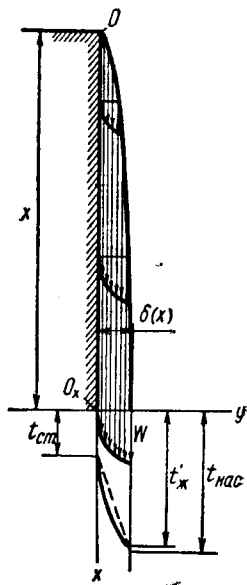


Рис. 142. Распределение скоростей и температур в пленке стекающей жидкости на вертикальной стенке



Из граничных условий течения конденсата в пленке имеем: при  $y=0$   $w_x=0$  и  $C_2=0$ ; при  $y=\delta(x)$   $\frac{dw_x}{dy}=0$  (пренебрегая силой трения пара) и

$$C_1 = \frac{g}{v} \frac{\varrho - \varrho''}{\varrho} \delta(x).$$

Таким образом, получаем следующее уравнение скоростного поля в поперечном сечении пленки на расстоянии  $x$  от верхней кромки стенок (рис. 142):

$$w_x(y) = -\frac{g}{v} \frac{\varrho - \varrho''}{\varrho} \left[ \frac{1}{2} y^2 - \delta(x) y \right]. \quad (90,3)$$

Средняя скорость потока конденсата в поперечном сечении пленки находится интегрированием:

$$\bar{w}_x = \frac{1}{\delta(x)} \int_0^{\delta} w_x(y) dy = \frac{1}{3} \frac{g}{v} \frac{\varrho - \varrho''}{\varrho} \delta^2(x). \quad (90,4)$$

Расход конденсата в сечении  $\delta(x)$  на единице ширины охлаждаемой стенки определяется формулой:

$$M_x = \bar{w}_x \varrho \delta(x) = \frac{1}{3} \frac{g}{v} (\varrho - \varrho'') \delta^3(x). \quad (90,5)$$

Толщина пленки  $\delta(x)$  увеличивается с расстоянием  $x$  в связи с притоком конденсата:

$$dM_x = \frac{dQ_x}{r},$$

где  $dQ_x$  — количество тепла, отводимого элементом охлаждаемой поверхности стенки  $dx$ ;

$r$  — теплота фазового превращения (теплота конденсации пара в жидкость).

Количество тепла  $dQ_x$  определяется по формуле теплопроводности пленки в месте  $x$ :

$$dQ_x = \lambda \frac{T_{\text{нас}} - T_{\text{ст}}}{\delta(x)} dx.$$

Следовательно,

$$dM_x = \frac{\lambda}{\delta(x)} \frac{T_{\text{н}} - T_{\text{ст}}}{r} dx. \quad (90,6)$$

При установившемся режиме приток конденсата на высоте  $dx$  равняется увеличению стока конденсата в пленке на этом элементе  $dM_x$ , который находится как дифференциал (90,5):

$$dM_x = \frac{g}{v} (\varrho - \varrho'') \delta^2(x) d\delta(x). \quad (90,7)$$

Из равенств правых частей (90,6) и (90,7) получаем дифференциальное уравнение:

$$dx = \frac{g(\varrho - \varrho'')r}{\nu\lambda(T_H - T_{CT})} \delta^3(x) d\delta(x).$$

Для высоты стенки  $x$  при условии постоянства всех величин, кроме  $\delta(x)$ , интегрированием находим:

$$x = 1/4 \frac{g(\varrho - \varrho'')r}{\nu\lambda(T_H - T_{CT})} \delta^4(x),$$

откуда для определения толщины пленки получаем формулу:

$$\delta(x) = \sqrt[4]{\frac{4\nu\lambda(T_H - T_{CT})}{g(\varrho - \varrho'')r} x}. \quad (90,8)$$

Соответственно этой формуле находится местный коэффициент теплоотдачи:

$$\alpha(x) = \frac{\lambda}{\delta(x)} = \sqrt[4]{\frac{\lambda^3 g(\varrho - \varrho'')r}{4\nu(T_H - T_{CT})x}}. \quad (90,9)$$

Средняя величина коэффициента теплоотдачи при конденсации пара на вертикальной стенке высотой  $h$  находится интегрированием:

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{h} \int_0^h \alpha(x) dx = \frac{4}{3} \sqrt[4]{\frac{\lambda^3 g(\varrho - \varrho'')r}{4\nu(T_H - T_{CT})h}}. \quad (90,10)$$

Пользуясь этой формулой, составляем следующее критериальное уравнение:

$$\frac{\bar{\alpha}h}{\lambda} = 0,943 \left[ \frac{gh^3}{\nu^2} \frac{\varrho - \varrho''}{\varrho} \frac{\nu_{ж}}{a_{ж}} \frac{r}{c_p(T_H - T_{CT})} \right]^{1/4}, \quad (90,11)$$

где  $\frac{gh^3}{\nu^2} \frac{\varrho - \varrho''}{\varrho} \equiv Gr_{h,\rho}$  — критерий, отвечающий критериальному соотношению сил тяготения и сил трения при течении конденсата в пленке (плотностной критерий Грасгофа);

$\frac{\nu_{ж}}{a_{ж}} \equiv Pr_{ж}$  — критерий физических свойств жидкости (критерий Прандтля);

$\frac{r}{c_p(T_H - T_{CT})} = \frac{\theta_{фаз}}{T_H - T_{CT}} \equiv \Phi$  — критерий отношения условной температуры фазового превращения ( $\theta_{фаз} = \frac{r}{c_p}$ ) к разности температур ( $T_{нас} - T_{ст}$ ).

В этих условных обозначениях критериальное уравнение (90,11) запишется в следующем виде:

$$\bar{Nu}_h \equiv \frac{\bar{\alpha}h}{\lambda} = 0,943 (Gr_{h,\rho} \cdot Pr_{ж} \cdot \Phi)^{1/4}. \quad (90,11')$$

Формула (90,10) для определения коэффициента теплоотдачи при конденсации пара получена путем расчета толщины пленки для вертикальной стенки.

Для плоской наклонной стенки с неизменным углом  $(\vec{g}, \hat{x})$ , согласно уравнению (90,2), коэффициент теплоотдачи определяется формулой, полученной для вертикальной стенки путем умножения на  $\sqrt[4]{\cos(\vec{g}, \hat{x})}$ :

$$\alpha_{\text{накл}} = \alpha_{\text{верт}} \sqrt[4]{\cos(\vec{g}, \hat{x})}. \quad (90,12)$$

Для кривой поверхности стенки, например для горизонтально расположенной трубы (рис. 143), толщину пленки приходится рассчитывать с учетом переменного угла  $(\vec{g}, \hat{x})$ . Таким путем для определения среднего коэффициента теплоотдачи конденсирующегося пара на горизонтальной трубе Нуссельт получил следующую формулу:

$$\bar{\alpha} = 0,724 \sqrt[4]{\frac{\lambda^3 g (\varrho - \varrho'') r}{\nu (T_{\text{H}} - T_{\text{ст}}) d}}$$

или

$$\bar{Nu}_d \equiv \frac{\bar{\alpha} d}{\lambda} = 0,724 (Gr_{d, \rho} \cdot Pr_{\text{ж}} \cdot \vartheta)^{0,25}. \quad (90,13)$$

Рис. 143. Пленка стекающей жидкости на горизонтальной трубке

Эта формула, полученная аналитическим путем, находит применение в расчетах различных теплотехнических устройств, связанных с конденсацией пара. Формула (90,10) коэффициента теплоотдачи конденсирующегося пара на вертикальных стенках приводит к заниженной величине коэффициента теплоотдачи. Занижение связано с тем, что при выводе формулы не учитывалась сила поверхностного натяжения жидкости на границе пленки.

Как показал П. Л. Капица, учет влияния силы поверхностного натяжения при течении конденсата в пленке приводит к волнообразной пленке уменьшенной толщины. В результате коэффициент теплоотдачи возрастает приблизительно на 20%, и формула (90,11') переходит в следующую:

$$\bar{Nu}_h = 1,13 (Gr_{h, \rho} \cdot Pr \cdot \vartheta)^{1/4}. \quad (90,11'')$$

Эта аналитическая формула находит применение в расчетах теплоотдачи конденсирующегося пара при условии ламинарного течения конденсата в пленке.

При определенном соотношении возрастающей на пути течения инерционной силы и силы трения в пленке возникают неупорядоченные вихревые возмущения, и поток жидкости турбулизируется

(рис. 144). При этом ламинарное течение конденсата в пленке сохраняется только в тонком пристенном слое. Турбулизация потока конденсата в пленке приводит к более интенсивному переносу тепла к стенке. На участке, с турбулентным течением коэффициент теплоотдачи получается ббльшим по сравнению с расчетом по формуле (90,10).

Некоторое влияние на перенос тепла в пленке может оказать отклонение от принятого в расчете прямолинейного распределения температур, которое отвечает неподвижному слою теплопроводной среды. В реальных условиях конвективно-теплопроводного переноса тепла в пленке распределение температур в поперечном сечении пленки носит криволинейный характер с ббльшим градиентом температуры у стенки (рис. 142).

Указанные осложнения в переносе тепла, связанные с турбулентным течением в пленке и влиянием течения среды на температурное поле в пленке, казалось бы, требуют введения в полученное критериальное уравнение теплоотдачи конденсирующегося пара критерия Рейнольдса

$$Re = \frac{w\delta}{\nu}$$

Однако, имея в виду, что

$$\bar{w} = \frac{M}{\rho\delta},$$

а

$$M = \frac{\alpha (T_n - T_{ст}) x}{r},$$

получаем формулу связи критерия  $Re$  с критерием  $Nu$ :

$$Re = \frac{Nu}{Pr\phi}.$$

Следовательно, для учета влияния турбулентности течения конденсата на температурное поле в пленке не требуется вводить критерий  $Re$ , а необходимо изменить формулу критериальной связи [критериальное уравнение (90,11'')]:

$$\bar{Nu} = f(Gr_{\sigma}, Pr \cdot \phi). \quad (90,14)$$

Высоту стенки, отвечающую переходу ламинарного течения пленки в турбулентное, можно вычислить из формулы критической скорости потока в пленке:

$$\bar{w}_{крит} = \frac{Re_{крит}\nu}{\delta(x)_{крит}}.$$

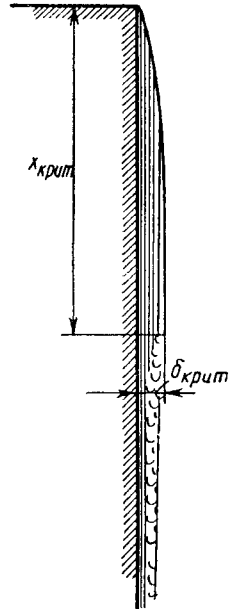


Рис. 144. Пленка с турбулентным течением жидкости на вертикальной стенке

Эта критическая скорость отвечает также формуле (90,4):

$$\omega_{\text{крит}} = \frac{1}{3} \frac{g}{v} \delta^2(x)_{\text{крит}}.$$

Из равенства правых частей двух последних формул находим:

$$\delta(x)_{\text{крит}} = \sqrt[3]{\frac{3Re_{\text{крит}}v^2}{g}}.$$

Эта критическая толщина пленки отвечает также уравнению (90,8):

$$\delta(x)_{\text{крит}} = \sqrt[4]{\frac{4v\lambda(T_H - T_{\text{ст}})}{g(q - q'')r}} x_{\text{крит}}.$$

Из равенства правых частей формул для  $\delta(x)_{\text{крит}}$  находим:

$$x_{\text{крит}} = 0,506 \frac{v^{5/3}(q - q'')r}{\lambda(T_H - T_{\text{ст}})} Re_{\text{крит}}^{4/3}. \quad (90,15)$$

Критическое число  $Re_{\text{крит}}$ , которому отвечает турбулентное течение конденсата в пленке, вследствие сложной совокупности действия сил тяготения, трения, инерции и поверхностного натяжения оказывается иным по сравнению с вынужденным (напорным) течением. По данным различных исследователей,  $Re_{\text{крит}}$  находится в диапазоне от 50 до 500. Например, при конденсации водяного пара  $p = 2,03 \text{ атм}$  ( $t_{\text{нас}} = 120^\circ \text{ С}$ ) высота вертикальной стенки, отвечающая началу турбулентного течения пленки при  $t_{\text{ст}} = 80^\circ \text{ С}$  и при  $Re_{\text{крит}} = 300$ , составляет  $x_{\text{крит}} = 0,765 \text{ м}$ .

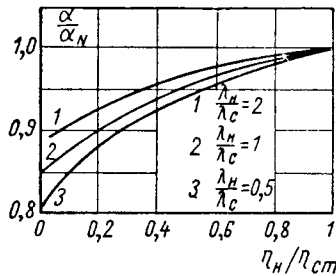


Рис. 145. Множитель уменьшения коэффициента теплоотдачи конденсирующегося пара в зависимости от соотношения коэффициентов вязкости  $\eta_{\text{нас}}/\eta_{\text{ст}}$  и коэффициентов теплопроводности  $\lambda_{\text{нас}}/\lambda_{\text{ст}}$  жидкости при температурах насыщения и стенки

На рис. 145 представлен множитель уменьшения коэффициента теплоотдачи конденсирующегося пара в зависимости от соотношения коэффициентов вязкости при температурах насыщения и стенки ( $\eta_{\text{н}}/\eta_{\text{ст}}$ ) для различного соотношения коэффициентов теплопроводности конденсата ( $\lambda_{\text{н}}/\lambda_{\text{ст}}$ ).

## § 91. Расчетные формулы теплоотдачи при пленочной конденсации пара

Для расчета теплоотдачи при пленочной конденсации паров различных веществ, перемещаемых с незначительной скоростью относительно горизонтальной трубы и вертикальной стенки, можно пользоваться следующими критериальными зависимостями:

а) горизонтальная труба:

$$\overline{Nu}_d = 0,72 (Gr_{d,н} \times \times Pr_{н, \vartheta})^{1/4} \left( \frac{Pr_{н}}{Pr_{ст}} \right)^{0,25}; \quad (91,1)$$

б) вертикальная стенка:

$$\overline{Nu} = 1,13 (Gr_{h,н} \times \times Pr_{н, \vartheta})^{1/4} \left( \frac{Pr_{н}}{Pr_{ст}} \right)^{0,25}. \quad (91,2)$$

В расчетах по этим формулам критерии  $Gr_{н}$  и  $Pr_{н}$  следует

вычислять при температуре насыщения ( $T_{нас}$ ), а в качестве определяющего размера принимать: для вертикальных стенок — высоту  $h$ , для горизонтальных труб — диаметр  $d$ .

Для расчета теплоотдачи конденсирующегося пара на стенках высотой значительно больше  $x_{крит}$  пока еще нет простых и достаточно надежных формул, представляющих обобщение экспериментальных данных.

При конденсации пара в горизонтальном пучке труб теплоотдача нижележащих труб заметно понижается вследствие дополнительного увеличения толщины стекающей пленки конденсата от притока его с верхних труб (рис. 146). В этом случае коэффициент теплоотдачи каждого нижележащего ряда по сравнению с верхними трубами находится:

$$\alpha_n = \epsilon_n \alpha_1,$$

где множитель уменьшения коэффициента теплоотдачи  $\epsilon_n$  ориентировочно можно принять согласно рис. 147.

Необходимо отметить, что наряду с увеличением количества конденсата на нижних рядах горизонтальных труб в пучке конденсатора пара падает скорость притекающего сюда пара, которая также снижает теплоотдачу.

Влияние скорости пара на теплоотдачу при пленочной конденсации на трубах начинает заметно сказываться при достаточно большой кинетической энергии движущегося пара ( $\rho'' \omega^2$ ). При спутном движении пара и конденсата на вертикальной стенке толщина пленки уменьшается и теплоотдача возрастает. При встреч-

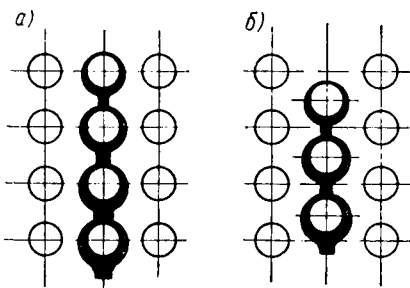


Рис. 146. Пленка стекающей жидкости на горизонтальных трубах в пучке: а) коридорного и б) шахматного расположения

ном движении пара, как показал Нуссельт, коэффициент изменения теплоотдачи со скоростью

$$\epsilon_w = \frac{\alpha_w}{\alpha_{w=0}}$$

оказывается меньше единицы лишь до определенной скорости пара; при достаточно большой скорости встречного потока пара

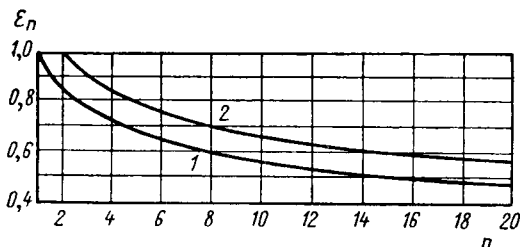


Рис. 147. Множитель уменьшения коэффициента теплоотдачи при конденсации пара в пучке горизонтальных труб: 1 — коридорного и 2 — шахматного расположения

коэффициент теплоотдачи снова начинает возрастать. На рис. 148 представлен коэффициент изменения теплоотдачи конденсиру-

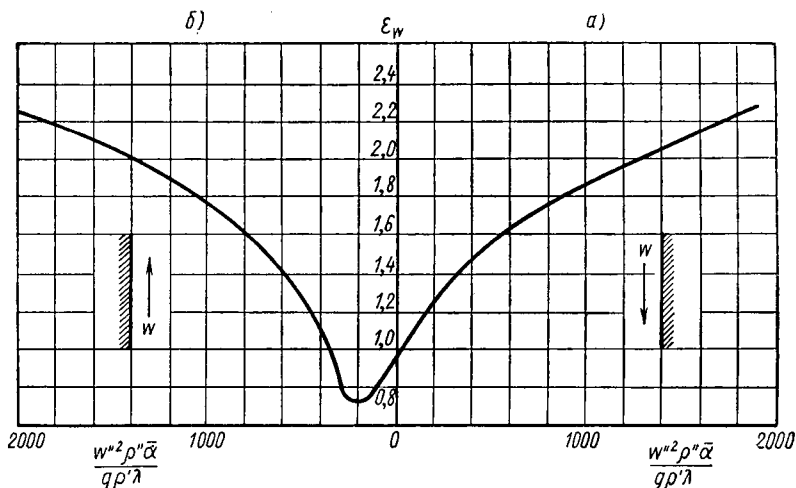


Рис. 148. Множитель изменения коэффициента теплоотдачи при конденсации пара в зависимости от скорости потока пара относительно стекающей жидкости: а) спутное течение пара и конденсата в пленке; б) встречное течение

ющегося пара на вертикальных стенках при ламинарном течении в пленке для спутного и встречного потока пара.

Для практически встречающегося случая конденсации пара, движущегося сверху вниз в пучке горизонтальных труб, в диапазоне изменения величины  $\rho''\omega^2$  от 400 до 6000 коэффициент повышения теплоотдачи по сравнению с неподвижным паром отвечает следующей эмпирической формуле:

$$\varepsilon_w = 33,2 \left( \frac{\omega''^2}{gd} \cdot \frac{\rho''}{\rho'} \right)^{0,08} (Gr \cdot Pr \cdot \vartheta)^{-0,128}. \quad (91,3)$$

Конденсация перегретого пара отличается от конденсации насыщенного пара существованием слоя перегретого пара у стенки с заметным снижением температуры и дополнительным переносом тепла к стенке. Однако теплоотдачу конденсирующегося перегретого пара к стенке в условиях пленочной конденсации можно рассчитать по той же формуле теплопроводности пленки, как и для пара насыщенного, приняв при определении толщины пленки суммарную теплоту парообразования и перегрева пара:

$$\frac{\alpha_{пер}}{\alpha_{нас}} = \sqrt[4]{1 + \frac{i_{пер} - i_{нас}}{r}}. \quad (91,4)$$

## § 92. Теплоотдача при капельной конденсации пара

При некоторых условиях на поверхности охлаждаемой стенки образуется капельная конденсация пара (рис. 149). Капельная конденсация пара осуществляется при неполном смачивании поверхности охлаждаемой стенки жидким конденсатом. Можно, однако, осуществить капельную конденсацию на стенке и паров таких жидкостей, которые смачивают чистую стенку, но не смачивают покрытие стенки тонким слоем какого-либо гидрофобного вещества. Применение искусственных веществ, вызывающих капельную конденсацию пара, может служить средством для интенсификации теплообмена, так как капельная конденсация пара жидкостей с небольшим коэффициентом теплопроводности отличается от пленочной конденсации более высоким коэффициентом теплоотдачи (примерно на порядок большим). Механизм капельной конденсации пара еще не вполне выяснен. Руководствуясь физическими соображениями, можно представить следующую модель явления капельной конденсации пара. На охлаждаемой стенке в отдельных, наиболее доступных местах из переохлажденного пара зарождается множество мельчайших капель конденсата. К отдельным каплям притекают массы переохлаждаемого конденсирующегося пара. Приток паровых масс к охлаждаемой стенке и дальнейшее перемещение их вдоль стенки к растущим каплям конденсата осуществляются под воздействием разности давлений, возникающей при переохлаждении и конденсации пара.



Каждая капля конденсата, удерживаемая на стенке силами поверхностного натяжения и адгезии, служит стоком конденсата и тепла, освобождаемого при конденсации пара (рис. 150). Интенсивный приток масс пара к поверхности охлаждаемой стенки из окружающего пространства и перемещение паровых масс с достаточно большой скоростью в пристенном слое к растущим каплям конденсата способствуют интенсивному охлаждению и конденсации пара на стенке. Можно предполагать,



Рис. 149. Капельная конденсация пара на вертикальной стенке

точно большой скоростью в пристенном слое к растущим каплям конденсата способствуют интенсивному охлаждению и конденсации пара на стенке. Можно предполагать,

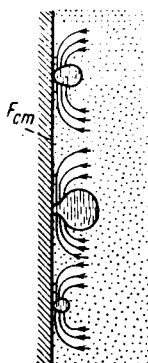


Рис. 150. К рассмотрению капельной конденсации пара на стенке

что более интенсивный отвод тепла с поверхности охлаждаемой стенки в условиях капельной конденсации пара по сравнению с отводом тепла при пленочной конденсации достигается интенсивным перемещением конденсируемого пара в пристенном слое.

Капли жидкости зарождаются в переохлаждаемом паре в соответствии с формулой Кельвина (89,3), определяющей разность давлений насыщенного пара над плоской и выпуклой поверхностью жидкости:

$$p_{\text{нас}, R} - p_{\text{нас}, R_{\infty}} = \frac{2\sigma}{R} \frac{q''}{q' - q''}.$$

Этой разности давлений насыщенного пара отвечает определенная разность температур:

$$\Delta T_{\text{охл}} \rightarrow p_{\text{нас}, R} - p_{\text{нас}, R_{\infty}}.$$

При достаточно малой величине  $\Delta T_{\text{охл}}$  и  $\Delta p_{\text{нас}}$  имеем равенство:

$$\Delta T_{\text{охл}} = \frac{2\sigma}{R} \frac{\rho''}{\rho' - \rho''} \frac{\partial T_{\text{нас}}}{\partial p_{\text{нас}}}.$$

Изменение  $\frac{\partial T_{\text{нас}}}{\partial p_{\text{нас}}}$  находится согласно уравнению Клапейрона — Клаузиуса:

$$\frac{\partial T_{\text{нас}}}{\partial p_{\text{нас}}} = \frac{T_{\text{нас}} (\rho' - \rho'')}{r \rho' \rho''}.$$

Для определения минимального размера зарождаемой капли в переохлажденном паре получаем следующее уравнение:

$$\Delta T_{\text{охл}} = \frac{2\sigma T_{\text{нас}}}{R r \rho'}.$$

Откуда находим минимальный диаметр образуемой капли конденсата при переохлаждении пара на  $\Delta T_{\text{охл}}$ :

$$d_{\text{мин}} = \frac{4\sigma T_{\text{нас}}}{\rho' r \Delta T_{\text{охл}}}. \quad (92,1)$$

Величина минимального диаметра капли конденсата, зарождаемой в переохлажденном паре, весьма незначительна. Например, при  $p = 1 \text{ ата}$  и  $\Delta T_{\text{охл}} = 10^\circ \text{С}$   $d_{\text{мин}} = 0,405 \cdot 10^{-8} \text{ м}$  или  $0,405 \cdot 10^{-2} \text{ мк}$ . Даже при  $\Delta T_{\text{охл}} = 0,1^\circ \text{С}$   $d_{\text{мин}} = 0,405 \text{ мк}$ .

Поток переохлаждаемого пара у стенки легко захватывает такие мельчайшие капельки конденсата и перемещает их к месту растущей капли на стенке, которая является своеобразным стоком конденсата. По мере увеличения размеров увеличивается вес капли, и при определенном диаметре растущая капля отрывается от стенки, и на ее месте в условиях непрерывного процесса конденсации пара вырастает новая капля и т. д.

Описанная модель явления капельной конденсации пара на стенке позволяет составить следующее критериальное уравнение для определения теплоотдачи:

$$St_{\text{конд. кап}} = f(K_{\text{гидр}}, Pr', \theta)$$

или в раскрытом виде:

$$\frac{\alpha_{\text{конд. кап}}}{q c_p'} = f\left(\frac{q \sigma T_{\text{нас}} c_p'}{\rho' r^3 v' \rho''}, \frac{v'}{a'}, \theta\right), \quad (92,2)$$

где  $\alpha_{\text{конд. кап}}$  — коэффициент теплоотдачи при капельной конденсации

пара;

$q$  — удельная теплоотдача стенки;

$c_p'$  и  $\rho''$  — удельная теплоемкость и плотность конденсата;

$r$  и  $\rho''$  — теплота конденсации и плотность пара;

$\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения;

$T_{\text{нас}}$  — температура насыщенного состояния пара при заданном давлении;

$\nu'$  и  $a'$  — коэффициент переноса импульсов ( $\nu'$ ) и тепла ( $a'$ ) конденсата;

$\theta$  — краевой угол жидких капель на стенке.

Полученное критериальное уравнение указывает, что основным фактором, определяющим коэффициент теплоотдачи при капельной конденсации пара, является удельная тепловая нагрузка. Все остальные факторы в основном зависят от давления пара. Поэтому наиболее простой эмпирической формулой для определения теплоотдачи при капельной конденсации пара на стенке с определенными свойствами будет следующая:

$$\alpha_{\text{конд. кап}} = \Phi(q, p). \quad (92,3)$$

Экспериментальных данных теплоотдачи при капельной конденсации паров различных жидкостей пока еще недостаточно для рекомендации конкретной расчетной формулы.

### § 93. Теплоотдача при конденсации пара из паро - газовой смеси

Процесс конденсации пара, находящегося в смеси с неконденсирующимся газом, осложняется диффузионным переносом пара к охлаждаемой поверхности. Конденсация пара возможна при условии более низкой температуры охлаждаемой поверхности по сравнению с температурой, отвечающей температуре насыщенного пара при его парциальном давлении в смеси:

$$T_{\text{ст}} < T_{\text{нас}, p_{\text{п}}}$$

Конденсация пара на стенке может осуществляться с образованием капель или сплошной стекающей пленки в зависимости от количества конденсирующегося пара на единице площади стенки и состояния ее поверхности. При достаточно большом парциальном давлении пара в смеси и смачиваемой жидким конденсатом поверхности стенки происходит пленочная конденсация пара.

#### *А. Пленочная конденсация паро-газовой смеси*

Вследствие притока к охлаждаемой стенке вместе с конденсирующимся паром неконденсирующегося газа у стенки образуется повышенная концентрация газа и пониженное парциальное давление пара при неизменном суммарном давлении смеси (закон Дальтона) (рис. 151):

$$p_{\text{см}} = (p'_{\text{п}} + p'_{\text{г}})_{\infty} = (p''_{\text{п}} + p''_{\text{г}})_{\text{ст}}. \quad (93,1)$$

При этом

$$p''_{\text{г}} > p'_{\text{г}}; \quad p''_{\text{п}} < p'_{\text{п}}.$$

Соответственно парциальному давлению конденсирующегося пара у охлаждаемой стенки ( $p_n''$ ) внешняя сторона пленки жидкого конденсата имеет температуру  $T_{ж}'' \rightarrow p_{п,нас.}$

Перенос тепла через толщину слоя жидкой пленки определяется формулой:

$$q_T = \frac{\lambda}{\delta} (T_{ж}'' - T_{ст}). \quad (93,2)$$

При конденсации пара из паро-газовой смеси, окружающей охлаждаемую стенку, осуществляется конвективно-диффузионный перенос пара, и возникает так называемый Стефановский поток.

Конвективно - диффузионный перенос пара к стенке определяется состоянием и поведением смеси в пространстве. Например, при конденсации пара на вертикальных или наклонных стенках вследствие различия плотностей смеси у охлаждаемой поверхности и во внешнем пространстве осуществляется свободная гравитационная конвекция. При изменении общего давления смеси в пространстве имеет место вынужденная конвекция.

Во всех случаях перемещения среды относительно охлаждаемой стенки удельный поток переноса пара к стенке можно определить следующей формулой массоотдачи:

$$q_{п} = \alpha_{п} \frac{M_{п}}{R_{м}T} (p'_п - p''_п), \quad (93,3)$$

где  $\alpha_{п}$  — коэффициент массоотдачи пара;

$M_{п}$  — молекулярная масса пара;

$R_{м}$  — универсальная газовая постоянная;

$T$  — температура.

Эквивалентный этому потоку массы пара удельный поток тепла находится путем умножения на тепло, освобожденное при конденсации пара:

$$q_{т. п} = \frac{r\alpha_{п}M_{п}}{R_{м}T} (p'_п - p''_п). \quad (93,4)$$

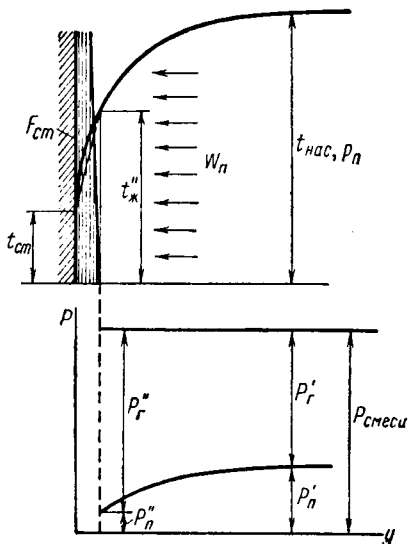


Рис. 151. К определению конденсации паро-газовой смеси на стенке

Дополнительный перенос тепла средой на охлаждаемую стенку вследствие разности температур  $T''_{ж}$  и  $T_{см}(T''_{ж} < T_{см})$  определяется формулой теплоотдачи:

$$q_{т, см} = \alpha_{т, см} (T_{см} - T''_{ж}), \quad (93,5)$$

где  $\alpha_{т, см}$  — коэффициент теплоотдачи среды стенке.

В соответствии с балансом тепла для стационарного процесса конденсации пара на стенке имеем равенство:

$$q_{т} = q_{т, п} + q_{т, см}.$$

В условиях пленочной конденсации пара имеем:

$$\frac{\lambda}{\delta} (T''_{ж} - T_{ст}) = \alpha_{п} \frac{r M_{п}}{R_M T} (p'_п - p''_п) + \alpha_{т, см} (T_{см} - T''_{ж}). \quad (93,6)$$

Толщина пленки конденсата на вертикальной стенке в месте  $x$  от верхней кромки находится по формуле (90,8):

$$\delta(x) = \sqrt[4]{\frac{4\nu\lambda(T''_{ж} - T_{ст})}{g(\rho - \rho'')r} x}.$$

Таким образом, для определения температур конденсации пара ( $T''_{ж}$ ) и соответствующего парциального давления пара [ $p''_п = f(T''_{ж})$ ] получаем уравнение:

$$\lambda^{3/4} (T''_{ж} - T_{ст})^{3/4} \sqrt[4]{\frac{g(\rho - \rho'')r}{4\nu x}} = \alpha_{п} \frac{r M_{п}}{R_M T} (p'_п - p''_п) + \alpha_{т, см} (T_{см} - T''_{ж}). \quad (93,7)$$

Величины коэффициентов массоотдачи ( $\alpha_{п}$ ) и теплоотдачи ( $\alpha_{т, см}$ ) в этом уравнении находятся из критериальных уравнений, отвечающих поведению среды (гравитационная или вынужденная конвекция, Стефановский поток и т. д.). Для конкретных случаев поведения среды при известных  $\alpha_{п}$  и  $\alpha_{т, см}$ , а также известных  $p'_п$  и  $T_{см}$  графическим путем или путем подбора значений неизвестной величины  $T''_{ж}$  и соответствующего  $p''_п$  можно решить уравнение (93,7) и найти эти неизвестные величины. После этого находится и коэффициент теплоотдачи конденсирующейся паро-газовой смеси. Для этого имеем следующее равенство:

$$\alpha_{конд. см.} (T_{см} - T_{ст}) = \frac{\lambda}{\delta(x)} (T''_{ж} - T_{ст}).$$

Отсюда находится коэффициент теплоотдачи в любом месте вертикальной охлаждаемой стенки:

$$\alpha_{конд. см.} = \sqrt[4]{\frac{\lambda^3 g(\rho - \rho'')r}{4\nu(T''_{ж} - T_{ст})x} \frac{T''_{ж} - T_{ст}}{T_{см} - T_{ст}}}. \quad (93,8)$$

Чем ниже парциальное давление пара в смеси  $p'_n$ , тем меньше парциальное давление пара у охлаждаемой стенки, тем ниже  $T''_{ж}$  и меньше коэффициент теплоотдачи. Формула (93,8) справедлива при условии  $T''_{ж} < T_{нас}(p'_n)$  и при условии существования пленки конденсата на охлаждаемой поверхности стенки.

Как показывают расчеты, по мере снижения парциального давления пара в смеси ( $p'_n$ ) или соответственно по мере повышения парциального давления газа ( $p'_г$ )

$$p'_n = p_{см} - p'_г$$

парциальное давление пара у охлаждаемой стенки быстро убывает, снижается температура конденсата  $T''_{ж}$  и соответственно уменьшается коэффициент теплоотдачи конденсирующейся смеси по сравнению с конденсацией чистого пара:

$$\frac{\alpha_{конд. см}}{\alpha_{конд. п}} = \frac{T''_{ж} - T_{ст}}{T_{см} - T_{ст}}, \quad (93,9)$$

где  $\alpha_{конд. п} = \sqrt[4]{\frac{\lambda^3 g (q - q'') r}{4 \nu (T''_{ж} - T_{ст}) x}}$  — коэффициент теплоотдачи при пленочной конденсации чистого пара при температуре  $T''_{ж}$ .

Опыты показывают, что, например, при незначительном содержании воздуха в водяном паре весьма заметно снижается коэффициент теплоотдачи (рис. 152).

В связи с этим при эксплуатации теплообменников с конденсацией пара, например конденсаторов паровых турбин с весьма низким давлением водяного пара ( $P_n = 0,04 \text{ атм}$  и менее), стремятся удалять даже небольшое количество воздуха.

### Б. Капельная конденсация паро-газовой смеси

При небольшом парциальном давлении пара в паро-газовой смеси и отсутствии пленки конденсата на охлаждаемой поверхности стенки расчет теплоотдачи паро-газовой смеси с участием конденсации парового компонента на стенке можно проводить, пользуясь простой формулой (13,9):

$$q = \alpha (T_* - T_{ст}), \quad (93,10)$$

где  $\alpha$  — коэффициент теплоотдачи среды стенке;

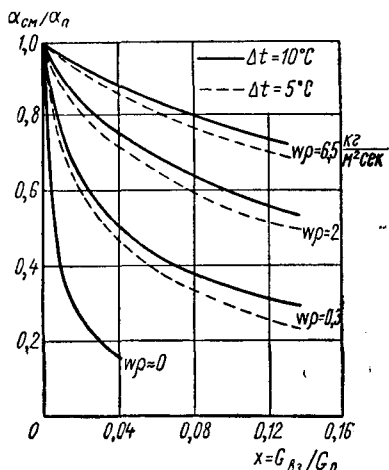


Рис. 152. Относительный коэффициент теплоотдачи паро-воздушной смеси на стенке (по отношению к коэффициенту теплоотдачи конденсирующегося пара) в зависимости от содержания воздуха в смеси

$T_* = T_{\text{см}} + \frac{\rho_{\text{п}} E_{\text{п}}}{\rho c_p}$  — условная температура паро-газовой смеси, включающая потенциальную энергию фазового превращения парового компонента;

$E_{\text{п}}$  — энергия фазового превращения;

$\rho_{\text{п}}$  — парциальная плотность парового компонента;

$\rho c_p$  — объемная теплоемкость среды при температуре  $T_{\text{см}}$ .

При отсутствии конденсации парового компонента [ $T_{\text{ст}} < T_{\text{нас}}(p_{\text{п}})$ ] формула (93,10) переходит в обычную формулу теплоотдачи нейтральной среды.

## ТЕПЛООТДАЧА ПРИ КИПЕНИИ ЖИДКОСТИ

### § 94. Физические особенности процесса кипения

Теплоотдача при кипении жидкостей на поверхностях нагрева твердых тел имеет очень важное значение в современной энергетике и находит широкое применение в различных теплообменных аппаратах химической, нефтеперерабатывающей, пищевой и других отраслях промышленности. В энергетике с участием теплоотдачи при кипении жидкости осуществляется производство пара в котельных агрегатах и атомных реакторах. В промышленности с участием теплоотдачи при кипении жидкостей работают различные технологические реакторы и выпарные аппараты.

Теплообмен поверхности нагрева с окружающей жидкостью в условиях пузырькового кипения отличается от теплообмена жидкости без кипения более высокими коэффициентами теплоотдачи. Особенностью процесса кипения жидкости является зарождение, рост и отрыв множества небольших по объему шаровых пузырьков и приток к месту образования пузырьков паровых масс жидкости. При кипении жидкости в граничном слое у поверхности нагрева осуществляется пульсирующее перемещение множества паровых и водяных масс, которое целесообразно рассматривать как статистическое множество своеобразных носителей энергии, массы и импульса. Интенсивное перемещение этих носителей в граничном слое у поверхности нагрева при кипении жидкости способствует более быстрому переносу тепла по сравнению с молекулярным диффузионным переносом в граничном слое некипящей жидкости. Пульсационный конвективный перенос тепла множеством поступающих к поверхности нагрева жидких масс сопровождается молекулярным переносом тепла в граничном слое у поверхности нагрева и у поверхности оболочек мельчайших паровых пузырьков. При очень больших тепловых нагрузках поверхности нагрева количество растущих паровых



пузырьков оказывается столь велико, что образуется силовная пленка пара, наступает кризис кипения, в результате которого резко уменьшается теплоотдача с поверхности нагрева и повышается температура стенки.

Процессы зарождения, роста и отрыва паровых пузырьков у поверхности нагрева подчиняются определенным физическим закономерностям, с которыми кратко необходимо ознакомиться, прежде чем переходить к детальному изучению процесса теплоотдачи при кипении жидкости.

### § 95. Зарождение, рост и отрыв паровых пузырьков при кипении жидкости

Для возможности зарождения пузырьков пара из жидкости на поверхности нагрева твердого тела необходима более высокая температура жидкости по сравнению с равновесной температурой насыщенного пара при данном давлении:

$$T_{ст} > T_{нас, p}. \quad (95,1)$$

Для образования паровой фазы в жидкости требуется затратить соответствующую работу против действия сил поверхностного натяжения жидкости. Пузырек пара (объемом  $V$  с поверхностью  $F$ ), образованный на участке поверхности нагрева  $F'_{ст}$ , удерживается на этом участке (рис. 153) силами натяжения жидкости и адгезии поверхности стенки. Работа образования

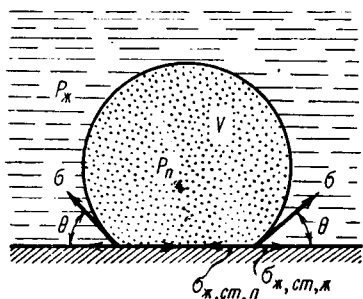


Рис. 153. К рассмотрению действия молекулярных сил натяжения при образовании пузырька пара в жидкости

парового пузырька объемом  $V$  определяется разностью конечной и начальной потенциальной энергии давления пара и жидкости и затратой работы против действия сил поверхностного натяжения жидкости и адгезии стенки:

$$L = -(p_n - p_ж)V + \sigma(F - F_{ст}) + (\sigma_{п, ст} - \sigma_{ж, ст})F_{ст}.$$

Положение равновесия силы поверхностного натяжения и адгезии стенки для пузырька пара отвечает определенному краевому углу  $\theta$  (рис. 153):

$$\sigma_{п, ст} - \sigma_{ж, ст} = \sigma \cos \theta.$$

В связи с этой формулой для работы  $L$  получаем следующее равенство:

$$L = -(p_n - p_ж)V + \sigma F \left[ 1 - \frac{F_{ст}}{F} (1 - \cos \theta) \right]. \quad (95,2)$$

При образовании парового объема внутри жидкости ( $F_{ст} = 0$ ) формула (95,2) для определения работы  $L$  запишется в виде:

$$L = -(p_{п} - p_{ж})V + \sigma F. \quad (95,3)$$

Согласно формуле (95,2), пузырьки пара возникают на поверхности стенки с наименьшей затратой работы, а следовательно, и с наибольшей вероятностью в тех местах, где отношение  $F_{ст}/F$  будет наибольшим. При любом значении краевого угла жидкости  $\theta$  отношение  $F_{ст}/F$  будет наибольшим в узких впадинах или трещинках (рис. 154). Можно полагать, что именно эти места поверхности нагрева стенки и будут являться источниками образования паровых пузырьков.

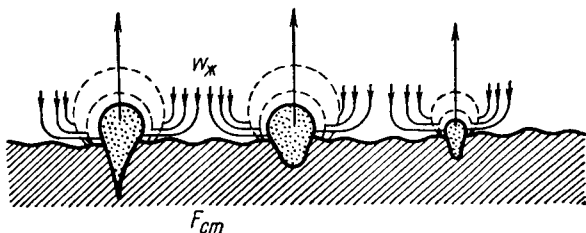


Рис. 154. К образованию пузырьков пара на поверхности стенки

Рост зародившегося парового пузырька происходит вследствие результирующего выноса пара из жидкости через образованную поверхность раздела фаз. Фазовое превращение и вынос пара из жидкости осуществляется с затратой определенного количества тепла. Поэтому в процессе роста парового пузырька требуется соответствующий подвод тепла к поверхностному слою жидкости, окружающей пузырек пара. Передача тепла к пузырьку пара от нагреваемой стенки совершается путем конвективно-кондуктивного переноса тепла в граничном слое жидкости у стенки.

Пузырек пара, образованный в жидкости, подвержен дополнительному давлению поверхностного натяжения, которое в соответствии с формулой Лапласа для сферической оболочки пузырька запишется в виде:

$$|p_{п} - p_{ж}|_R = \frac{2\sigma}{R}, \quad (95,4)$$

где  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения жидкости;  
 $R$  — радиус сферического объема пузырька.

Равновесное давление насыщенного пара под вогнутой поверхностью жидкости в пузырьке требует соответственно большего равновесного давления насыщенного пара над плоской поверхностью (формула Кельвина):

$$p_{нас, R_{\infty}} - p_{нас, R} = \frac{2\sigma}{R} \frac{e_{п}}{e_{ж} - e_{п}}. \quad (95,5)$$

Давление жидкости, окружающей паровой объем пузырька в равновесном состоянии с насыщенным паром, определяется формулой:

$$p_{\text{нас, ж}} - p_{\text{нас, жР}} = \frac{2\sigma}{R} + \frac{2\sigma}{R} \frac{q_{\text{п}}}{q_{\text{ж}} - q_{\text{п}}} = \frac{2\sigma}{R} \frac{q_{\text{ж}}}{q_{\text{ж}} - q_{\text{п}}}.$$

Соответственно этому превышению давления жидкости при равновесном состоянии с насыщенным паром для возможности выноса пара из жидкости необходим соответствующий перегрев жидкости:

$$\Delta T_{\text{пер}} \rightarrow \Delta p_{\text{нас, ж}}$$

или при достаточно малом  $\Delta p_{\text{нас, ж}}$ :

$$\Delta T_{\text{пер}} = \frac{2\sigma}{R} \frac{q_{\text{ж}}}{q_{\text{ж}} - q_{\text{п}}} \frac{\partial T_{\text{нас}}}{\partial p_{\text{нас}}}.$$

Согласно уравнению Клапейрона — Клаузиуса, имеем:

$$\frac{\partial T_{\text{нас}}}{\partial p_{\text{нас}}} = \frac{T_{\text{нас}} (q_{\text{ж}} - q_{\text{п}})}{r q_{\text{ж}} q_{\text{п}}}.$$

Следовательно,

$$\Delta T_{\text{пер}} = \frac{2\sigma T_{\text{нас}}}{R q_{\text{п}} r}. \quad (95,6)$$

Таким образом, для возможности роста парового пузырька в жидкости необходим ее перегрев. Известному перегреву жидкости отвечает определенный минимальный диаметр парового пузырька:

$$d_{\text{мин}} = \frac{4\sigma T_{\text{нас}}}{q_{\text{п}} r \Delta T_{\text{пер}}}. \quad (95,7)$$

Связывание энергии фазового превращения жидкости при кипении требует соответствующего подвода тепла к оболочке пузырька пара из окружающей перегретой жидкости. Ввиду весьма малого начального размера парового пузырька в жидкости (например, для воды  $p_{\text{нас}} = 1 \text{ ата}$ ,  $t_{\text{нас}} = 100^\circ \text{С}$  и  $\Delta T_{\text{пер}} = 25^\circ \text{С}$ ,  $d_{\text{мин}} \approx 2,6 \cdot 10^{-3} \text{ мм}$ , а для  $p_{\text{нас}} = 100 \text{ ата}$   $d_{\text{мин}} \approx 0,24 \cdot 10^{-3} \text{ мм}$ ) подвод тепла к пузырьку пара в основном осуществляется путем молекулярной теплопроводности перегретой жидкости. Молекулярный перенос тепла в сферическом слое жидкости отвечает предельному наименьшему критерию теплообмена:

$$Nu \equiv \frac{\alpha R}{\lambda} = 1.$$

Если в начальный период времени роста парового пузырька допустить неизменный перегрев окружающей жидкости  $\Delta T_{\text{пер}}$  и не учитывать изменения давления пара в растущем пузырьке, то приток тепла к сферической оболочке пузырька из окружающей

жидкости за время  $d\tau$  определяется формулой:

$$dQ_{\tau} = \pi R^2 \frac{\lambda \Delta T_{\text{пер}}}{R} d\tau.$$

Увеличение объема пузырька за элементарный период времени роста определяется формулой:

$$dV = \frac{4}{3} \pi dR^3 = 4\pi R^2 dR.$$

Соответствующее количество пара, образуемого в пузырьке, составит:

$$dM_{\text{п}} = \rho_{\text{п}} dV.$$

Расход тепла на парообразование определяется равенством:

$$dQ_{\text{п}} = r \rho_{\text{п}} 4\pi R^2 dR.$$

Если не учитывать расхода энергии на работу преодоления сил поверхностного натяжения и адгезии, то тепловой баланс пузырька пара приводит к следующему дифференциальному уравнению роста пузырька:

$$d\tau = \frac{r \rho_{\text{п}}}{\lambda \Delta T_{\text{пер}}} R dR.$$

Путем интегрирования от  $d_{\text{мин}}$  до  $d$  находим следующую формулу для определения диаметра растущего пузырька пара за время  $\tau$ :

$$d = \sqrt{d_{\text{мин}}^2 + \frac{8\lambda \Delta T_{\text{пер}}}{r \rho_{\text{п}}} \tau}. \quad (95,8)$$

Полученная формула указывает, что наибольшее увеличение размера пузырька отвечает начальному периоду его роста.

По мере роста паровой пузырек на поверхности нагрева в условиях поля тяготения подвергается действию подъемной силы  $\{P_{\text{под}} = V(\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{п}})g\}$ , которая увеличивается с увеличением объема пузырька. Подъемная сила стремится оторвать легкий пузырек пара в жидкости от поверхности нагрева, где он удерживается силой натяжения жидкости ( $P_{\text{нат}}$ ). Из условия равновесия этих сил находится максимальный диаметр растущего пузырька пара:

$$d_{\text{макс}} = 0,018\theta \sqrt{\frac{\sigma}{\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{п}}}}, \quad (95,5)$$

где  $\theta$  — краевой угол оболочки жидкости с поверхностью нагрева (угол смачивания; для воды  $\theta \approx 50^\circ$ ).

Величина максимального отрывного размера пузырька пара получается на несколько порядков больше его минимального размера при зарождении. Например, для воды при давлении  $p = 1 \text{ атм}$   $d_{\text{макс}} = 2,5 \text{ мм}$  и при  $\Delta T_{\text{пер}} = 25^\circ \text{ С}$  отношение  $\frac{d_{\text{макс}}}{d_{\text{мин}}} =$

$$= \frac{2,5}{2,6} \cdot 10^3 \approx 10^3; \text{ для воды при } p = 100 \text{ атм } d_{\text{макс}} = 1,25 \text{ мм}$$

$$\text{и } \frac{d_{\text{макс}}}{d_{\text{мин}}} = \frac{1,25}{0,24} \cdot 10^3 = 5,2 \cdot 10^3.$$

Соответственно отношению  $\frac{d_{\text{макс}}}{d_{\text{мин}}}$  объем пузырька пара за короткое время роста (доли секунды) увеличивается в  $10^9$  раз. Время роста пузырька находится из уравнения (95,8):

$$\tau = \frac{r_{\text{Qп}}}{8\lambda\Delta T_{\text{пер}}} d_{\text{макс}}^2 \left[ 1 - \left( \frac{d_{\text{мин}}}{d_{\text{макс}}} \right)^2 \right] \approx \frac{r_{\text{Qп}}}{8\lambda\Delta T_{\text{пер}}} d_{\text{макс}}^2.$$

Например, при  $p = 1 \text{ атм}$  ( $Q_{\text{п}} = 0,598 \frac{\text{кДж}}{\text{м}^2}$ ,  $r = 2260 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}$ ,  $\lambda = 0,683 \text{ вт/м} \cdot \text{град}$ ) в перегретой жидкости  $\Delta T_{\text{пер}} = 25^\circ \text{ К}$  пузырек вырастает за время  $\tau = 0,062 \text{ сек}$ ; для  $p = 100 \text{ атм}$  ( $Q_{\text{п}} = 54,6 \frac{\text{кДж}}{\text{м}^2}$ ,  $r = 1327 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}$ ,  $\lambda = 0,524 \text{ вт/м} \cdot \text{град}$ ) время роста пузырька  $\tau = 1,08 \text{ сек}$ .

Весьма большое увеличение объема пузырька (порядка  $10^9$  раз) за короткое время его роста (для низкого давления пара — сотые доли секунды) придает процессу кипения жидкости на поверхности нагрева взрывоподобный характер с пульсационным перемещением масс пара и жидкости в граничном слое. Если температура окружающей жидкости вне граничного слоя с поверхностью нагрева будет меньше температуры равновесного состояния ее с насыщенным паром при данном давлении ( $p$ ) (недогретая до кипения жидкость), то кипение жидкости в граничном слое будет сопровождаться быстрой конденсацией пара. При кипении недогретой жидкости обычно слышится характерный шум («пение»).

В перегретой жидкости вне граничного слоя рост парового пузырька продолжается и после его отрыва от поверхности нагрева. Однако увеличение объема пузырька при перемещении в слабо перегретой жидкости вне граничного слоя получается на несколько порядков меньшим в сравнении с ростом пузырька у поверхности нагрева.

Таким образом, детальное рассмотрение процесса образования, роста и отрыва паровых пузырьков при кипении жидкости у поверхности нагрева позволяет считать, что перенос тепла при кипении жидкости осуществляется в основном в граничном слое у стенки. Перенос тепла совершается пульсационным перемещением масс жидкости с участием теплопроводности. Такой характер переноса тепла подтверждается результатами измерения температурного поля по высоте кипящей жидкости над горизонтальной поверхностью нагрева (рис. 155).

При достаточно большой удельной тепловой нагрузке поверхности нагрева кипение жидкости в граничном слое у стенки может происходить и в том случае, если жидкость вне этого слоя будет

более холодной по сравнению с равновесной температурой насыщенного пара при данном давлении жидкости (недогретая жидкость). В этих условиях отрывающиеся от поверхности нагрева паровые пузырьки по выходе из граничного слоя перегретой жидкости,

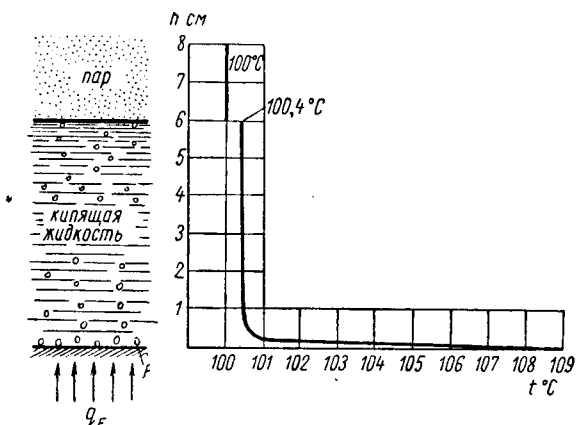


Рис. 155. Распределение температур в слое кипящей жидкости над горизонтальной поверхностью нагрева стенки

а также и в самом граничном слое будут частично или полностью конденсироваться. Теплоотдача при кипении недогретой жидкости, вследствие весьма интенсивного переноса тепла в граничном слое, получается более интенсивной по сравнению с теплоотдачей некипящей жидкости. Кипение жидкости в граничном слое является своеобразным средством интенсификации теплообмена.

## § 96. Переход от пузырькового к пленочному кипению жидкости

По мере увеличения удельной тепловой нагрузки поверхности нагрева число мест образования паровых пузырьков на стенке возрастает. Вследствие повышения температуры перегрева жидкости в граничном слое ( $\Delta T_{\text{пер}}$ ) с повышением нагрузки увеличивается скорость роста паровых пузырьков, повышается частота отрыва их от стенки и соответственно повышается и частота пульсационных притоков более холодных масс жидкости в граничный слой у стенки. В соответствии с интенсификацией переноса масс в граничном слое жидкости у стенки с повышением тепловой нагрузки ( $q$ ) увеличивается и коэффициент теплоотдачи ( $\alpha$ ) (рис. 156). Однако коэффициент теплоотдачи при кипении жидкости увеличивается лишь до определенного предела тепловой нагрузки, называемой критической. При достаточно большой тепловой

нагрузке поток паровых пузырьков, выносимых от стенки, оказывается столь интенсивным, что граничный слой превращается в сплошную паровую пленку с большим термическим сопротивлением переносу тепла от стенки. В этих условиях наступает своеобразный кризис кипения жидкости, сопровождаемый резким повышением температуры стенки и снижением коэффициента теплоотдачи. На рис. 156 представлен полученный опытным путем график зависимости коэффициента теплоотдачи от тепловой нагрузки при кипении воды в большом объеме при атмосферном давлении. Как видно из рис. 156, по мере возрастания тепловой нагрузки увеличивается и коэффициент теплоотдачи, но в несколько меньшей мере, и когда тепловая нагрузка достигнет критической величины (около  $900 \text{ квт/м}^2$ ), коэффициент теплоотдачи

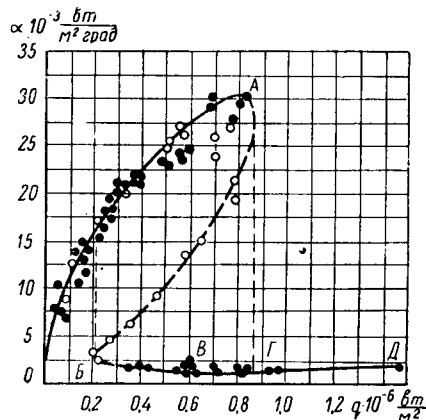


Рис. 156. Коэффициент теплоотдачи поверхности нагрева стенки кипящей воде при атмосферном давлении в зависимости от тепловой нагрузки

будет наибольшим (около  $30 \frac{\text{квт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}}$ ). При дальнейшем повышении тепловой нагрузки коэффициент теплоотдачи резко падает (в десятки раз) и далее медленно возрастает с нагрузкой.

При обратном снижении тепловой нагрузки поверхности нагрева в условиях пленочного кипения коэффициент теплоотдачи по-прежнему сохраняется небольшим при значительно меньшей тепловой нагрузке, чем критическая (около  $230 \frac{\text{квт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}}$ ). Это указывает на значительную устойчивость пленочного режима кипения жидкости при снижении тепловой нагрузки.

С постепенным повышением разности температур поверхности нагрева стенки и кипящей жидкости при неизменном давлении удельная тепловая нагрузка сначала увеличивается, достигает критической величины (рис. 157), после чего снижается и снова повышается. Важно отметить, что при переходе через

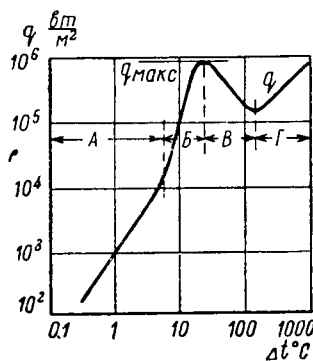


Рис. 157. Характер изменения тепловой нагрузки поверхности нагрева стенки при кипении жидкости в зависимости от разности температур стенки и кипящей жидкости

достигает критической величины (рис. 157), после чего снижается и снова повышается. Важно отметить, что при переходе через

кризис кипения (точка *A*) снижение тепловой нагрузки происходит при повышении температуры стенки. Это указывает на увеличение толщины паровой пленки в граничном слое у поверхности нагрева в этом диапазоне изменения разности температур стенки и жидкости. При дальнейшем повышении температуры стенки удельная тепловая нагрузка при пленочном режиме кипения снова повышается (кривая *БД*, рис. 156), но более медленно, чем на начальном этапе изменения температуры стенки при пузырьковом режиме кипения (кривая *ОА*).

### § 97. Критериальное уравнение для определения теплоотдачи при кипении жидкости

В связи с рассмотренным характером процесса переноса тепла при кипении жидкости в граничном слое у стенки можно составить критериальное уравнение для определения теплообмена.

Как и в других сложных случаях, для определения конвективного переноса тепла при кипении жидкостей можно использовать критерий Стентона:

$$St_{\text{кип}} \equiv \frac{\alpha_{\text{кип}}}{w \rho c_p} .$$

Применительно к процессу кипения скорость пульсационного притекания масс жидкости в граничный слой у стенки находится из равенства:

$$\bar{w} = \frac{q}{\rho' r} , \quad (97,1)$$

где  $q$  — удельная тепловая нагрузка поверхности нагрева;  
 $r$  — теплота парообразования.

В связи с таким определением скорости перемещения жидкости критерий Стентона при кипении представится в следующем виде:

$$St_{\text{кип}} \equiv \frac{\alpha_{\text{кип}} r}{q c_p} . \quad (97,2)$$

В качестве гидродинамического критерия процесса кипения жидкости целесообразно привлечь критерий, аналогичный по структуре критерию Рейнольдса:

$$K_{\text{гидр}} = \frac{\bar{w} l}{\nu} .$$

где  $\bar{w}$  — скорость пульсационного притока масс жидкости в граничный слой у стенки, определяемая формулой (97,1).

За определяющий размер  $l$  в гидродинамическом критерии кипения жидкости целесообразно принять величину, пропор-



циональную минимальному диаметру пузырька (95,7):

$$l \sim \frac{4\sigma T_{\text{нас}}}{\rho'' r \Delta T_{\text{пер}}}.$$

Перегрев жидкости при кипении  $\Delta T_{\text{пер}}$  целесообразно заметить величиной, заданной условиями однозначности и отвечающей равенству

$$\rho' c'_p \Delta T_{\text{пер}} = \rho'' r.$$

Обозначая, кроме того, величину

$$\frac{\sigma T_{\text{нас}} \rho' c'_p}{(\rho'' r)^2} \equiv l_*,$$

получаем следующую формулу для определения гидродинамического критерия кипения жидкости:

$$K_{\text{гидр}} = \frac{l q l_*}{r \rho'' \nu}. \quad (97,3)$$

Помимо критерия  $K_{\text{гидр}}$ , для составления критериального уравнения теплообмена при кипении с участием конвективно-теплопроводного переноса тепла в граничном слое жидкости у стенки необходимо привлечь критерий физических свойств жидкости  $\left(\frac{\nu'}{a'}\right)$ .

На теплообмен при кипении жидкости влияют свойства стенки: поверхностное натяжение и адгезия стенки, которые определяются краевым углом  $\theta$ . Поэтому величину  $\theta$  необходимо также привлечь в качестве определяющего критерия.

Таким образом, приходим к следующему критериальному уравнению:

$$St_{\text{кип}} = f(K_{\text{гидр}}, Pr', \theta) \quad (97,4)$$

или в раскрытом виде:

$$\frac{\alpha_{\text{кип}} r}{\rho c'_p} = f\left(\frac{q l_*}{r \rho'' \nu}, \frac{\nu'}{a'}, \theta\right).$$

Если перейти от критерия  $St_{\text{кип}}$  к критерию  $Nu_{\text{кип}}$

$$Nu = St \cdot Re \cdot Pr \equiv St_{\text{кип}} \cdot K_{\text{гидр}} \cdot Pr',$$

то при известной величине  $\theta$  получаем критериальное уравнение, предложенное Д. А. Лабунцовым:

$$\frac{\alpha_{\text{кип}} l_*}{\lambda} = \Phi\left(\frac{q l_*}{r \rho'' \nu}, \frac{\nu'}{a'}\right). \quad (97,5)$$

## § 98. Расчетные формулы теплоотдачи при пузырьковом кипении жидкости

Величины  $q'$ ,  $q''$ ,  $r$ ,  $c'_p$ ,  $\sigma'$ ,  $\nu'$ ,  $\lambda'$  в критериальном уравнении теплообмена при пузырьковом режиме кипения жидкостей являются функциями давления насыщенного пара; краевой угол  $\theta$  отражает свойства поверхности нагрева стенки и жидкости при кипении. Поэтому для каждой жидкости при неизменном краевом угле  $\theta$  коэффициент теплоотдачи определяется удельной тепловой нагрузкой ( $q$ ) и давлением пара ( $p$ ):

$$\alpha_{\text{кип}} = F(q, p). \quad (98,1)$$

Опыт хорошо подтверждает эту формулу зависимости  $\alpha_{\text{кип}}$  от  $q$  и  $p$ .

Например, при пузырьковом режиме кипения воды в диапазоне изменения  $p$  от 0,2 до 80 *ата* экспериментальные данные обобщаются формулой:

$$\alpha_{\text{кип}} = 3,5q^{0,7} \cdot p^{0,15} \frac{\text{вт}}{\text{м}^2 \text{град}}. \quad (98,2)$$

Обобщение различных данных экспериментального исследования теплообмена при пузырьковом режиме кипения различных жидкостей в диапазоне  $Pr_{\text{ж}}$  от 0,86 до 7,6 и  $\frac{ql_*}{rQ''\nu}$  от  $10^{-5}$  до  $10^{+4}$  приводит к следующим формулам:

для  $\frac{ql_*}{rQ''\nu} > 10^{-2}$

$$\frac{\alpha_{\text{кип}} l_*}{\lambda} = 0,125 \left( \frac{ql_*}{rQ''\nu} \right)^{0,65} Pr_{\text{ж}}^{1/3}; \quad (98,3)$$

для  $\frac{ql_*}{rQ''\nu} < 10^{-2}$

$$\frac{\alpha_{\text{кип}} l_*}{\lambda} = 0,0625 \left( \frac{ql_*}{rQ''\nu} \right)^{0,5} \cdot Pr_{\text{ж}}^{1/3}. \quad (98,4)$$

Все физические параметры в критериях формул (98,3), (98,4) выбираются при температуре насыщенного пара при заданном давлении.

При кипении жидких металлов ( $Pr \ll 1$ ) для

$$\frac{ql_*}{rQ''\nu} > 10^{-2}$$

опытные данные по теплообмену обобщаются формулой:

$$\frac{\alpha_{\text{кип}} l_*}{\lambda} = 0,125 \left( \frac{ql_*}{rQ''_a} \right)^{0,65}. \quad (98,5)$$

При вынужденном движении кипящей жидкости на перенос тепла от стенки, помимо пульсационных сквозных притоков масс жидкости к стенке, может сказываться диффузионный перенос

турбулентных масс жидкости вне граничного слоя. Однако по сравнению с интенсивным сквозным переносом масс жидкости в пограничном слое у стенки диффузионный перенос турбулентных масс на теплообмене при кипении сказывается незначительно. На рис. 158 представлено отношение опытных коэффициентов

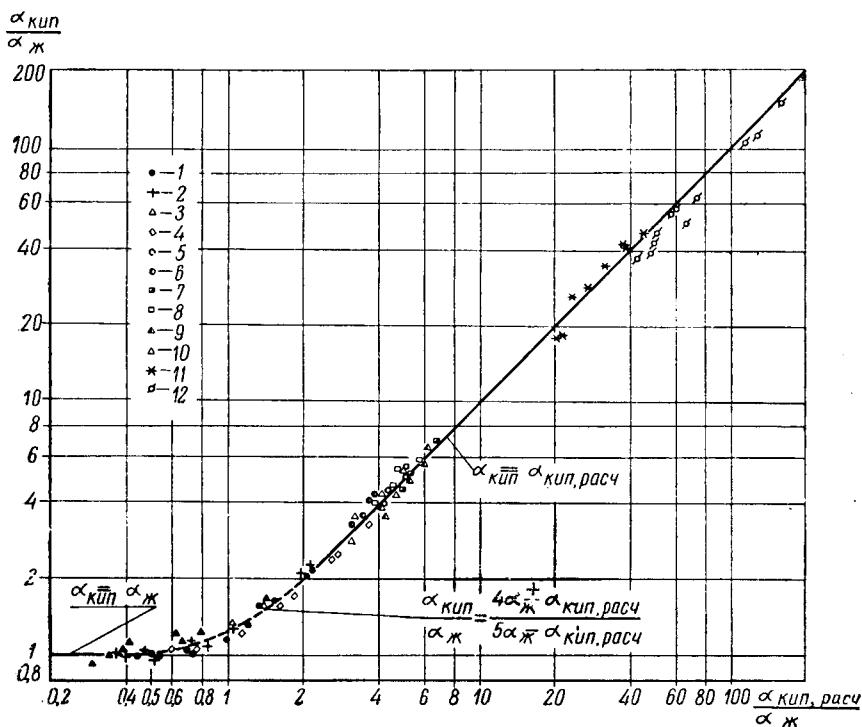


Рис. 158. Отношение коэффициентов теплоотдачи кипящей и некипящей жидкости:

вода, давление 1 ага: 1 — при скорости 0,5 м/сек, 2 — при скорости 1,2 м/сек, 3 — при скорости 1,96 м/сек; вода, давление 7 ага: 4 — при скорости от 1 до 6,67 м/сек; вода, давление 50,5 ага: 5 — при скорости 2 м/сек, 6 — при скорости 3 м/сек; вода, давление 85 ага: 7 — при скорости 2 м/сек, 8 — при скорости 3 м/сек; вода, давление 86 ага: 9 — при скорости 2 м/сек, 10 — при скорости 3 м/сек; 11 — этиловый спирт, давление 10 ага, при скорости от 0,3 до 0,7 м/сек; 12 — этиловый спирт, давление 30 ага, при скорости от 0,2 до 0,81 м/сек

теплоотдачи ( $\alpha_{кип}$ ) пузырькового режима кипения различных жидкостей при вынужденном движении их в трубах к коэффициенту теплоотдачи некипящей жидкости ( $\alpha_{ж,расч}$ ), полученному расчетным путем (по формуле М. А. Михеева), в зависимости от отношения расчетных коэффициентов теплоотдачи  $\frac{\alpha_{кип,расч}}{\alpha_{ж,расч}}$ . Расчет коэффициента теплоотдачи при кипении проводился по формулам (98,3), (98,4), которые отвечают кипению жидкости в условиях

свободной конвекции. При этом поток кипящих жидкостей содержал не более 70% пара по объему.

Как видно из рис. 158, в диапазоне  $\frac{\alpha_{\text{кип, расч}}}{\alpha_{\text{ж, расч}}} > 2$ , т. е. при достаточно большой тепловой нагрузке поверхности нагрева, поток кипящей жидкости в трубах не сказывается на переносе тепла в граничном слое при кипении, и расчетные уравнения теплоотдачи (98,3), (98,4) могут быть использованы и для условий вынужденного движения кипящих жидкостей.

Для  $\frac{\alpha_{\text{кип, расч}}}{\alpha_{\text{ж, расч}}} < 0,5$ , т. е. при достаточно малой тепловой нагрузке поверхности нагрева кипение жидкости заметно не сказывается на переносе тепла в граничном слое, который полностью определяется условиями теплоотдачи некипящей жидкости.

Для промежуточной области изменения  $\frac{\alpha_{\text{кип, расч}}}{\alpha_{\text{ж, расч}}}$  от 0,5 до 2 на переносе тепла в граничном слое жидкости у стенки сказываются оба вида носителей энергии: диффузионное перемещение турбулентных молей и пульсационные сквозные притоки жидкости. Для этой области изменения  $\frac{\alpha_{\text{кип, расч}}}{\alpha_{\text{ж, расч}}}$  коэффициент теплоотдачи при кипении жидкости приближенно можно оценить по эмпирической формуле Д. А. Лабунцова:

$$\alpha_{\text{кип}} = \alpha_{\text{ж}} \frac{4\alpha_{\text{ж}} + \alpha_{\text{кип, расч}}}{5\alpha_{\text{ж}} - \alpha_{\text{кип, расч}}} \quad (98,6)$$

Теплоотдача при кипении недогретой жидкости в области  $\frac{\alpha_{\text{кип, расч}}}{\alpha_{\text{ж, расч}}} > 2$  может рассчитываться так же, как и теплоотдача кипящей жидкости, по уравнениям (98,3) и (98,4). При этом коэффициент теплоотдачи при кипении относится к разности температур ( $T_{\text{ст}} - T_{\text{нас}}$ ).

## § 99. Расчет критической тепловой нагрузки при кипении жидкости

Критическая тепловая нагрузка поверхности нагрева при кипении жидкости достигается в условиях, когда поток пара от стенки оказывается столь интенсивным, что полностью прекращается проникновение встречного потока жидких масс к стенке. При такой нагрузке поверхности нагрева в условиях свободного движения в поле тяготения существует равновесие подъемной силы парового слоя и силы инерции встречного потока жидких масс. Равенство этих сил запишется в виде:

$$gl(\rho' - \rho'') = \rho' \frac{w_p^2}{2}, \quad (99,1)$$

где  $l$  — толщина слоя пара у стенки;

$\omega_p$  — равновесная скорость притока жидкости и отвода пара при критической нагрузке;

$\rho'$  и  $\rho''$  — плотность жидкости и пара.

Из равенства (99,1) составляем критериальное соотношение сил при критической нагрузке:

$$K_{\text{крит}} = \frac{\omega_p^2}{gl} \frac{\rho'}{\rho' - \rho''}. \quad (99,2)$$

Равновесная скорость потока пара находится из равенства:

$$\omega_p = \frac{q_{\text{крит}}}{r\rho''},$$

где  $q_{\text{крит}}$  — критическая тепловая нагрузка стенки.

За характерный размер в критериальном отношении (99,2), как и ранее, можно принять величину, пропорциональную диаметру образуемых паровых пузырей:

$$l_* = \frac{\sigma T_{\text{нас}} \rho' c_p}{(\rho'' r)^2}.$$

В этой связи критическое критериальное соотношение (99,2) запишется в виде:

$$K_{\text{крит}} = \frac{q_{\text{крит}}^2}{(\rho'' r)^2 gl_*} \frac{\rho'}{\rho' - \rho''}.$$

Критическому отношению  $K_{\text{крит}}$  отвечает соответствующий критический критерий теплообмена

$$\frac{\alpha_{\text{кип}} l_*}{\lambda} \Big|_{\text{крит}} = \Phi \left( \frac{q_{\text{крит}} l_*}{r \rho'' v}, \frac{v'}{a'} \right).$$

Таким образом, приходим к следующей критериальной зависимости:

$$\frac{q_{\text{крит}}^2}{(\rho'' r)^2 gl_*} \frac{\rho'}{\rho' - \rho''} = f \left( \frac{q_{\text{крит}} l_*}{r \rho'' v}, \frac{v'}{a'} \right)$$

или

$$\left( \frac{q_{\text{крит}} l_*}{\rho'' r v} \right)^2 = \frac{gl_*^3}{v^2} \frac{\rho' - \rho''}{\rho'} f \left( \frac{q_{\text{крит}} l_*}{r \rho'' v}, Pr' \right).$$

Для определения критической тепловой нагрузки получаем следующее критериальное уравнение, предложенное Д. А. Лабунцовым:

$$\frac{q_{\text{крит}} l_*}{\rho'' r v} = \Phi \left( \frac{gl_*^3}{v^2} \frac{\rho' - \rho''}{\rho'}, \frac{v'}{a'} \right). \quad (99,3)$$

Обобщение опытных данных по критическим тепловым нагрузкам поверхности нагрева при кипении различных жидкостей в условиях свободной конвекции в диапазоне изменения  $Pr'$

от 0,86 до 13,1 приводит к следующей формуле:

$$\frac{q_{\text{крит}}^{1*}}{r q'' v} = 68 \left( \frac{g l_*^3}{v^2} \frac{q' - q''}{q'} \right)^{4/9} \left( \frac{v'}{a'} \right)^{-1/3}. \quad (99,4)$$

Все физические параметры в этой критериальной формуле выбираются при температуре насыщенного пара при данном давлении.

В соответствии с экстремальным характером изменения различных физических параметров жидкости в равновесном состоянии с насыщенным паром в зависимости от давления критическая тепловая нагрузка при кипении жидкости имеет оптимальную величину. На рис. 159 представлено изменение относительной критической тепловой нагрузки

$$\frac{q_{\text{крит}}(p)}{q_{\text{крит}}(p=1)}$$

при кипении воды в зависимости от отношения давлений  $p/p_{\text{крит}}$ . Как видно, оптимальное значение критической тепловой нагрузки при кипении воды отвечает  $p/p_{\text{крит}} = 0,26$  или  $p \approx 60 \text{ атa}$ .

Критическая тепловая нагрузка при кипении жидкости определяет предельный ее перегрев в граничном слое у стенки и предельную допустимую температуру нагрева стенки при кипении жидкости. Дальнейшее сообщение тепла, вследствие резкого увеличения термического сопротивления тепловода от стенки, приводит к быстрому пережогу стенки.

Предельный нагрев стенки определяется из равенства

$$\Delta T_{\text{пред}} = \frac{q_{\text{крит}}}{\alpha_{\text{крит}}},$$

где  $\alpha_{\text{крит}}$  находится из уравнений (98,3) или (98,4).

Значительно сложнее определить критическую тепловую нагрузку поверхности нагрева в условиях вынужденного потока кипящей жидкости в трубах, особенно при неравномерном их обогреве. При горизонтальном расположении труб движение кипящей жидкости может разделяться на паровой и жидкостный поток (рис. 160). В этих условиях критическая тепловая нагрузка стенок труб может быть различной. Критические тепловые нагрузки в различных сложных случаях движения кипящих жидкостей находятся экспериментальным путем применительно к тому или иному характерному случаю движения кипящей жидкости и условию теплообмена.

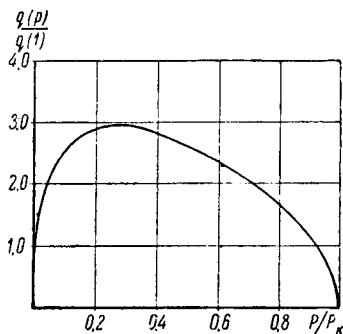


Рис. 159. Относительная критическая тепловая нагрузка в зависимости от относительного давления кипящей жидкости

Как уже указывалось ранее, при превышении тепловой нагрузки стенки сверх критической величины ( $q_{\text{крит}}$ ), из-за большого сопротивления паровой пленки, резко снижается коэффициент теплоотдачи и повышается температура стенки. При обратном

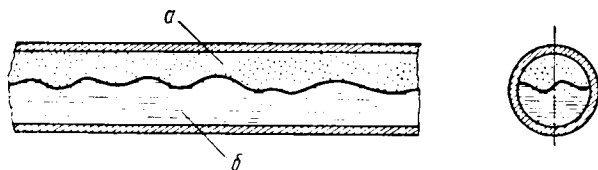


Рис. 160. Течение двухфазной среды в горизонтальных трубах: а) преимущественно поток пара; б) преимущественно поток жидкости

снижении тепловой нагрузки пленочный режим кипения жидкости сохраняется до более низкой тепловой нагрузки, чем критическая  $q_{\text{крит}}$ . Существование этого обратного кризиса в процессе кипения жидкости связано с другими условиями парообразования в граничном слое жидкости с паровой пленкой по сравнению с парообразованием жидкости в граничном слое со стенкой при прямом кризисе процесса кипения.

*Раздел четвертый*

**ЛУЧИСТЫЙ  
ТЕПЛОБМЕН**



## ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

### § 100. Тепловое, или температурное, излучение

Среди различных видов излучения тепловое, или температурное, излучение занимает особое место. Этот вид излучения определяется тепловым состоянием, или температурой, излучающего тела. В спектре теплового лучеиспускания тел могут содержаться все те частоты электромагнитных волн  $\nu$ , которые отвечают энергетическому состоянию частиц вещества тела при данной температуре. Различные тела при одной и той же температуре обладают различной лучеиспускательной способностью, которая зависит от природы тел, их строения, от формы и состояния граничной поверхности тела.

Носителями энергии теплового излучения, так же как и других видов излучения, являются электромагнитные волны, распространяющиеся в вакууме со скоростью света: около  $300 \cdot 10^6$  м/сек. Помимо волнового характера, носители энергии излучения можно рассматривать также как движущиеся частицы, которые называют **ф о т о н а м и**.

Энергия фотонов теплового излучения оказывается различной для различных частот излучения ( $\nu$ ) или длин волн ( $\lambda$ ). Распределение энергии теплового излучения по частотам или длинам волн в спектре представляет *спектральную характеристику излучающего тела*, которая отвечает его тепловому состоянию и находится в зависимости от температуры и радиационных свойств тела.

Существует понятие излучения **абсолютно черного тела**, спектральная характеристика излучения которого соответствует предельному, максимально возможному тепловому излучению тела при данной температуре. *Распределение энергии ( $\epsilon_\nu$ ) в спектре излучения абсолютно черного тела по всем частотам ( $\nu$ ) или длинам волн ( $\lambda$ ) отвечает термодинамически равновесному тепловому*

состоянию излучающего вещества и, так же как распределение тепловой энергии по всем возможным степеням свободы движения элементарных частиц ( $\epsilon_T$ ), не зависит от природы вещества и определяется только температурой.

Модель абсолютно черного тела можно представить в виде замкнутой полости, стенки которой имеют везде одинаковую температуру (рис. 161). Если в замкнутой полости проделать небольшое отверстие, площадь которого много меньше площади поверхности

стенок полости ( $\frac{F_0}{F_{ст}} \ll 1$ ), то выход энергии излучения из отверстия не может заметно изменить термодинамического равновесия в полости, и лучеспускание из отверстия будет отвечать тепловому излучению абсолютно черного тела при температуре стенок.

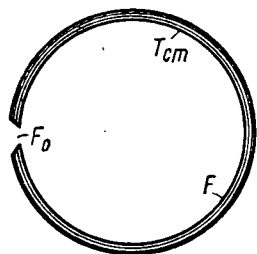


Рис. 161. Схема модели абсолютно черного тела

Модель излучающего тела в виде полости с малым отверстием служит также моделью для абсолютного поглощения излучения, падающего в отверстие полости. Внешнее излучение, проходящее через малое отверстие в полость, даже при значительной отражательной способности стенок, при достаточно малом соотношении

$\frac{F_0}{F_{ст}} \ll 1$  будет поглощаться стенками полости без заметного обратного выхода излучения. При термодинамическом равновесии излучения с тепловым состоянием стенок в замкнутой полости *объемная плотность энергии фотонов излучения определяется температурой стенок и не зависит от их радиационных свойств (поглощения и отражения лучистой энергии)*.

Излучение в замкнутой полости модели абсолютно черного тела в некоторой мере отвечает излучению в порах твердых тел, в слоях зерен, в различных замкнутых прослойках и т. п.

Спектр излучения абсолютно черного тела при любой температуре включает все частоты ( $\nu$ ) или длины волн ( $\lambda$ ) от 0 до  $\infty$ . Однако для каждой температуры главная часть энергии теплового излучения приходится на определенный участок спектра. Например, при комнатной температуре главная часть энергии излучения абсолютно черного тела находится в области длин волн спектра от 3 до 40  $\mu\text{к}$ ; для температур 1000 ÷ 1500° С — в диапазоне длин волн от 0,7 до 15  $\mu\text{к}$ . Для очень высоких температур, например для температуры наружных слоев солнца около 6000° К, почти половина энергии излучения приходится на область спектра с длинами волн от 0,3 до 0,6  $\mu\text{к}$  и отвечает диапазону видимых и ультрафиолетовых лучей. Для еще более высоких температур, наблюдаемых в звездах, энергия излучения приходится на область еще более коротких волн, например рентгеновских лучей.

Энергия излучения какого-либо тела в общем случае может поглощаться и рассеиваться окружающей средой, падать на другие тела, частично ими поглощаться и переходить в тепло, а иногда еще и в другие виды энергии, например химическую.

Поглощательная и рассеивающая способности различных сред для отдельных лучей оказываются весьма различными и зависят от природы вещества среды и ее состояния. Например, твердые и жидкие тела отличаются большим поглощением тепловых лучей, а газы — малым. Сухой воздух для длинноволнового теплового излучения оказывается прозрачным, а влажный воздух, даже с небольшим содержанием водяного пара, обладает заметным поглощением. Запыленные газовые среды (туманы, дымы) при большой концентрации частиц оказываются мало прозрачными для коротковолнового теплового излучения.

Лучистая энергия, падающая на какое-либо тело, в зависимости от свойств тела и его строения, от формы и состояния поверхности частично поглощается, частично проходит сквозь тело и частично отражается обратно в окружающее пространство. Поглощение, пропускание и отражение излучения являются важнейшими радиационными характеристиками тела.

Если какое-либо тело испускает и одновременно поглощает одинаковое количество лучистой энергии, то такое тело находится в состоянии **лучистого равновесия**. При отсутствии других энергетических обменов в этих условиях температура тела сохраняется неизменной. Если в состоянии лучистого равновесия находится несколько тел, обладающих различной излучательной способностью, то эти тела соответственно должны иметь и различную поглощательную способность; в противном случае температурное равновесие тел нарушится. Отсюда следует, что *в условиях теплового равновесия излучающих тел между излучательной и поглощательной способностью каждого тела существует однозначная связь (закон Кирхгофа)*.

Тепловое излучение всех реальных тел не может превзойти ни в общем спектре излучения, ни в отдельных его участках энергии излучения абсолютно черного тела при той же температуре. Однако, если частицы вещества тела находятся в неравновесном энергетическом состоянии с температурой тела, то такое тело может излучать в отдельных частях спектра во много раз большую энергию, чем энергия излучения абсолютно черного тела при той же температуре [излучение светляка, хемилюминесценция, электросвечение газов, фотонные, или квантовые, генераторы излучения (лазеры, мазеры) и т. п.].

С нетемпературным излучением приходится, например, встречаться в химических реакциях с освобождением больших количеств энергии. Излучение зоны реагирования осуществляется различными частицами вещества и промежуточными продуктами реакции в отсутствие теплового равновесия всех частиц.

## § 101. Определение основных величин в процессах излучения энергии

**Лучистый поток.** Общее количество лучистой энергии, испускаемой с поверхности тела площадью  $F$  в единицу времени, называют потоком лучистой энергии, или лучистым потоком  $Q$  *вт*. Лучистый поток может иметь неравномерную плотность лучеиспускания па поверхности:

$$E = \frac{dQ}{dF}. \quad (101,1)$$

Эта величина называется удельным лучистым потоком, или поверхностной плотностью излучения, и имеет единицу измерения  $\frac{вт}{м^2}$ .

**Интенсивность излучения.** Лучеиспускание с элементарной площадки  $dF$  поверхности может быть неравномерным по различным направлениям в пространстве. Поэтому вводится понятие интенсивности энергии излучения по направлению, или интенсивности лучеиспускания по направлению. Эта важнейшая и наиболее детальная величина представляет собой количество энергии, излучаемой в определенном направлении единичной площадкой, расположенной перпендикулярно направлению излучения, в единицу телесного угла, в единицу времени. Для пояснения этого понятия выделим на поверхности лучеиспускания  $F$  элементарную площадку  $dF$  и рассмотрим излучение по направлению  $\vec{l}$ , составляющему угол  $\varphi$  с нормалью  $N$  к площадке, в элементарном телесном углу  $d\omega$  (рис. 162). Энергия излучения в пределах телесного угла, построенного по оси  $\vec{l}$  и включающего контур площадки  $dF$ , составит от общего потока излучения поверхности  $F$  величину  $d^2Q$ . Проекция площадки  $dF$  на плоскость, перпендикулярную направлению излучения  $\vec{l}$ , равна  $dF \cdot \cos \varphi$ . По определению интенсивность энергии излучения представляет отношение:

$$I_l = \frac{d^2Q}{dF \cdot \cos \varphi \cdot d\omega}. \quad (101,2)$$

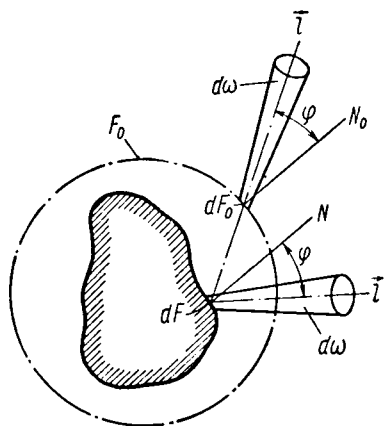


Рис. 162. К определению потока и интенсивности излучения

Энергия излучения в пределах телесного угла, построенного по оси  $\vec{l}$  и включающего контур площадки  $dF$ , составит от общего потока излучения поверхности  $F$  величину  $d^2Q$ . Проекция площадки  $dF$  на плоскость, перпендикулярную направлению излучения  $\vec{l}$ , равна  $dF \cdot \cos \varphi$ . По определению интенсивность энергии излучения представляет отношение:

Единицей измерения интенсивности излучения служит  $\frac{вт}{м^2степ}$ .

Величина  $I_l$  может быть различной для различных мест поверхности лучеиспускания и различной по направлениям. Если по всем направлениям интенсивность лучеиспускания  $I_l$  будет одинакова ( $I_l \equiv I$ ), то такое излучение называется д и ф ф у з н ы м.

Для диффузного излучения по известной величине  $I$  можно найти величину удельного потока излучения  $E$ . Для этой цели необходимо провести интегрирование в пределах полусферы  $\omega = 2\pi$ :

$$E = \int_{(2\pi)} \frac{d^2Q}{dF} = I \int_{(2\pi)} \cos \varphi \cdot d\omega.$$

Согласно изложенному в § 3 (формула 3,8),

$$\int_{(2\pi)} \cos \varphi \cdot d\omega = \pi.$$

Следовательно, для диффузного лучеиспускания удельный поток оказывается в  $\pi$  раз больше интенсивности лучеиспускания по любому направлению.

По известной величине  $I$  находится:

$$E = \pi I. \quad (101,3)$$

Поверхности тел, для которых интенсивность лучеиспускания одинакова по всем направлениям и равна  $I = \frac{1}{\pi} E$ , называют излучателями, подчиняющимися закону Ламберта. Для таких излучателей количество лучистой энергии, испускаемой единицей площади поверхности  $F$  в единицу времени, в единице телесного угла в любом направлении, оказывается пропорциональным косинусу угла направления излучения с нормалью к площадке:

$$I_\varphi = \frac{d^2Q}{dF \cdot d\omega} = I_N \cos \varphi, \quad (101,4)$$

где  $I_N$  — интенсивность энергии излучения в нормальном направлении, которая для диффузного излучения сохраняется неизменной во всех направлениях.

Опыт показывает, что далеко не все тела подчиняются закону Ламберта и для многих тел интенсивность лучеиспускания меняется с направлением излучения. На рис. 163 представлен график изменения относительной лучеиспускательной способности  $\epsilon_\varphi = \frac{I_\varphi}{I_{\text{черн}}}$  для некоторых металлов в зависимости от направления  $\varphi$  излучения (угла  $\varphi$ ). Как видно из рис. 163, для углов излучения более  $50^\circ$  интенсивность излучения под углом возрастает и ока-

зывается значительно больше интенсивности излучения в нормальном направлении ( $\varphi = 0$ ). Таким свойством слабого лучеиспускания в нормальном направлении обладают металлические тела,

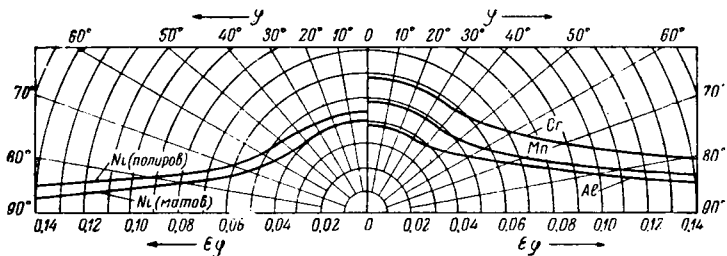


Рис. 163. Излучательная способность некоторых металлов в зависимости от направления лучеиспускания

отличающиеся большой электропроводностью. Для других тел — непроводников электричества интенсивность лучеиспускания оказывается значительно большей, чем для чистых металлов, и для

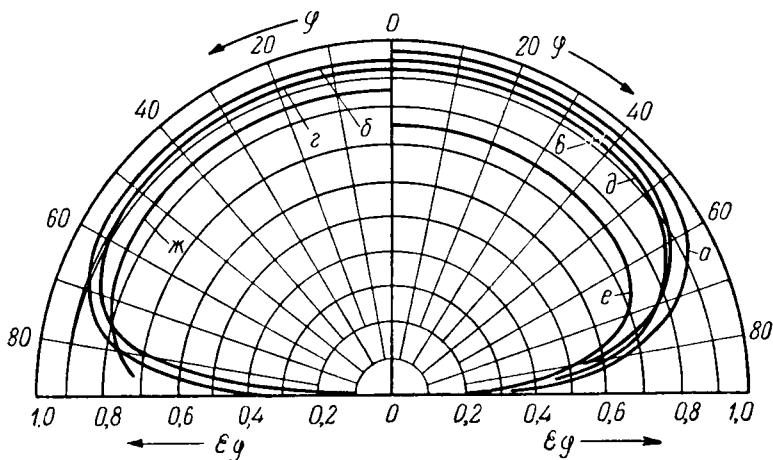


Рис. 164. Излучательная способность некоторых тел в зависимости от направления лучеиспускания:

*a* — тающий лед; *б* — дерево; *в* — стекло; *г* — бумага; *д* — глина; *е* — окись меди; *жс* — грубый корунд

углов излучения более  $50^\circ$  существенно уменьшается (рис. 164). Для тел с большой шероховатостью поверхности излучательная способность во всех направлениях заметно не меняется.

Объемная плотность энергии излучения. В теории излучения приходится пользоваться понятием о б ъ е м н о й п л о т н о с т и э н е р г и и и з л у ч е н и я, которая представляет количество лучистой энергии, находящейся в данный момент в единице объема пространства.

Объемную плотность энергии излучения можно определить, если в данном месте пространства выделить в направлении  $\vec{l}$  элементарный телесный угол  $d\omega$  (рис. 162) и подсчитать количество лучистой энергии, переносимой в этом направлении сквозь площадку  $dF$ , перпендикулярную  $\vec{l}$  за время  $d\tau$ :

$$d^3Q = I_l d\omega \cdot dF \cdot d\tau.$$

Элемент времени  $d\tau$  определяется отношением элементарного пути переноса  $dl$  и скорости перемещения  $c$  носителей энергии излучения:

$$d\tau = \frac{dl}{c}.$$

Следовательно,

$$d^3Q = \frac{1}{c} I_l d\omega \cdot dF \cdot dl.$$

Элементарное количество лучистой энергии, находящейся в объеме элементарного цилиндра  $dF \cdot dl$ , определится отношением:

$$dU = \frac{d^3Q}{dF \cdot dl} = \frac{1}{c} I_l d\omega.$$

Суммируя для всех направлений пространства, находим количество лучистой энергии, находящейся в единичном объеме:

$$U = \frac{1}{c} \int_{(4\pi)} I_l d\omega \frac{\partial mc}{m^3} \quad (101,5)$$

В случае равномерной интенсивности лучеиспускания во всех направлениях  $I_l = I$  (изотропное излучение):

$$U = \frac{1}{c} 4\pi I \frac{\partial mc}{m^3}. \quad (101,6)$$

Все вышеприведенные понятия и определения (лучистый поток, интенсивность лучеиспускания и объемная плотность энергии излучения) относятся как к общему спектру излучения (всей совокупности электромагнитных волн), так и к отдельным предельно узким его частям, или интервалам длин волн, т. е. к так называемому *монохроматическому излучению*. Для последнего вводятся индексы  $\lambda$  или  $\nu$ :  $E_\lambda$ ;  $I_{l,\lambda}$ ;  $U_\lambda$  или  $E_\nu$ ;  $I_{l,\nu}$ ;  $U_\nu$ .

**Лучевое давление.** Падающие на поверхность стенки электромагнитные волны вступают в силовое взаимодействие со стенкой, в результате которого излучение *оказывает давление на стенку*. Лучевой силовой эффект, вытекающий из электромагнитной теории света, впервые был экспериментально подтвержден П. Н. Лебедевым (1900 г.). К этому же факту приводит и развитая позднее квантовая теория излучения. Согласно последней, интенсивность энергии излучения можно представить произведением ин-

тенсивности потока носителей на величину элементарной энергии фотонов  $\epsilon$ :

$$I_l = j_l \cdot \epsilon.$$

Количество падающих фотонов на единичную площадку стенки по направлению  $\vec{l}$  определяется формулой:

$$j_\varphi = j_l \cdot \cos \varphi.$$

Для определения переноса импульса фотонов излучения на стенку необходимо ввести направляющий косинус угла (между направлением падения носителя на стенку и нормалью к стенке):

$$j_n = j_l \cos \varphi \cdot \cos \varphi.$$

Интенсивность потока носителей определяется формулой (3, 4) (глава 1, § 3):

$$j_l = \frac{1}{4\pi} cN,$$

где  $N$  — концентрация носителей (число носителей в единичном объеме);

$c$  — скорость перемещения.

Удельный поток переноса импульса падающих на стенку носителей с одинаковой интенсивностью со всех направлений находится интегрированием:

$$q_n = \int_{(2\pi)} \frac{1}{4\pi} cN \cos^2 \varphi \cdot d\omega = \frac{1}{6} Nc.$$

В случае *полностью отражающей излучение стенки* осуществляется полный обмен импульсов носителей ( $mc$ ) со стенкой, и лучевое давление на стенке определяется формулой:

$$p_{\text{луч}} = q_n [mc - (-mc)] = \frac{1}{3} Nmc^2.$$

Имея в виду, что  $mc^2 = \epsilon$  представляет собой энергию фотона, для определения давления падающего излучения на стенку получаем формулу:

$$p_{\text{луч}} = \frac{1}{3} U, \quad (101,7)$$

где  $U = N\epsilon$  — объемная плотность лучистой энергии.

Так как при одинаковой интенсивности излучения по направлениям (изотропное излучение)

$$U = \frac{4\pi}{c} I = \frac{4}{c} E,$$



то давление диффузного падающего излучения на отражающую стенку определяется формулой:

$$p_{\text{луч}} = \frac{1}{c} \frac{4}{3} E, \quad (101,8)$$

где  $E$  — удельный поток падающей лучистой энергии.

В случае полного поглощения стенкой падающего излучения лучевое давление на стенку будет в два раза меньшим:

$$p_{\text{луч}} = \frac{1}{c} \frac{2}{3} E. \quad (101,9)$$

Для параллельного пучка лучей, падающих на отражающую стенку под углом  $\varphi$ , лучевое давление определяется:

$$p_{\text{луч}} = \frac{1}{c} 4E \cos^2 \varphi. \quad (101,10)$$

Для стенки, полностью поглощающей излучение, лучевое давление оказывается в два раза меньшим:

$$p_{\text{луч}} = \frac{1}{c} 2E \cos^2 \varphi. \quad (101,11)$$

Вследствие весьма большой скорости света лучевое давление на стенку оказывается заметным лишь при очень больших удельных потоках излучения  $E \frac{\text{вт}}{\text{м}^2}$ .

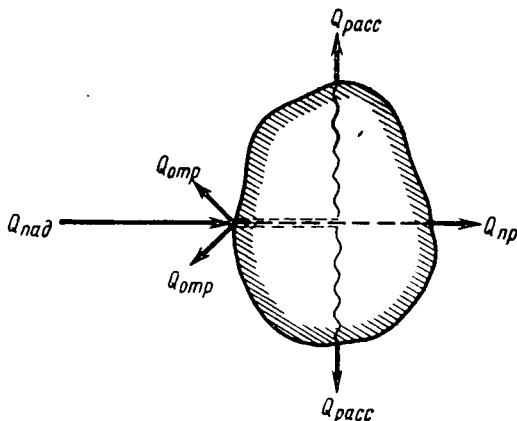


Рис. 165. К составлению баланса падающего лучистого потока

**Различные виды излучений.** Излучение тела, возникающее в результате изменения энергетического состояния его вещества, называют собственным излучением тела. Если излучение тела возникает вследствие изменения теплового состоя-

ния вещества, то такое излучение называют собственным тепловым или температурным излучением тела. Помимо собственного излучения, тело может испускать отраженное или рассеянное излучение, интенсивность которого определяется падающим на тело внешним излучением и отражательной или рассеивающей способностью вещества.

Падающее на тело внешнее излучение в общем случае может частично отражаться телом с поверхности, частично поглощаться

массой вещества, частично проникать сквозь тело и частично рассеиваться веществом тела с выходом на поверхность в окружающее пространство (рис. 165).

Если обозначить потоки падающего, отраженного, поглощенного, рассеянного и пропущенного излучений соответственно  $Q_{пад}$ ,  $Q_{отр}$ ,  $Q_{погл}$ ,  $Q_{расс}$ ,  $Q_{проп}$ , то отношения:

$$\frac{Q_{отр}}{Q_{пад}} = R; \quad \frac{Q_{погл}}{Q_{пад}} = A;$$

$$\frac{Q_{расс}}{Q_{пад}} = B \quad \text{и} \quad \frac{Q_{проп}}{Q_{пад}} = D$$

соответственно представляют: отражательность ( $R$ ), поглощательность ( $A$ ), рассеяние ( $B$ ) и прозрачность ( $D$ ) тела по отношению к падающему на него излучению.

Из равенства

$$Q_{пад} = Q_{отр} + Q_{погл} + Q_{расс} + Q_{проп}$$

следует:

$$R + A + B + D = 1. \quad (101,12)$$

Рис. 166. К определению различных видов лучистых потоков

**Различные виды лучистых потоков.** Суммарное лучеиспускание с поверхности тела (собственное и отраженное излучение) представляет собой *поток эффективного излучения* (рис. 166):

$$Q_{эф} = Q_{соб} + Q_{отр}. \quad (101,13)$$

Результирующий перенос энергии излучения на поверхности называют *поток результирующего излучения*. Применительно к поверхности излучающего и поглощающего тела поток результирующего излучения определяется разностью потоков падающего и эффективного излучений (рис. 166):

$$Q_{е} = Q_{пад} - Q_{эф} \quad (101,14)$$

или разностью потоков поглощенного и собственного излучений:

$$Q_{рез} = Q_{погл} - Q_{соб}. \quad (101,15)$$

Если поглощенное телом падающее излучение переходит в тепло и тело испускает собственное тепловое излучение, то поток результирующего излучения

$$Q_{\text{рез}} = Q_{\text{погл}} - Q_{\text{соб}}$$

определяет *теплопередачу излучением*.

Величины  $R$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $D$ , а также лучистые потоки  $Q_{\text{соб}}$ ,  $Q_{\text{пад}}$ ,  $Q_{\text{эф}}$ ,  $Q_{\text{рез}}$  могут относиться как ко всему спектру излучения, так и к монохроматическому излучению.

## § 102. Термодинамика теплового излучения

### А. Закон Кирхгофа

Если собственное тепловое излучение какого-либо тела оказывается равным поглощенному внешнему излучению, полностью переходящему в тепло, то результирующее излучение тела равно нулю и тело находится в состоянии теплового лучистого равновесия. В этих условиях излучательная и поглощательная способности различных тел связаны однозначно. Для отыскания этой связи рассмотрим тепловое излучение и поглощение двух нелучепрозрачных тел с одинаковой температурой и неограниченными плоскопараллельными поверхностями. Для выделения монохроматического излучения с длиной волны  $\lambda$  в пространстве между излучающими телами помещена пластинка — фильтр (рис. 167), способная пропускать лишь заданное монохроматическое излучение.

Для поддержания теплового равновесия излучающих тел необходимо, чтобы в обе стороны сквозь пластинку проходили одинаковые потоки монохроматического теплового излучения:

$$E(\lambda)_{1,2} = E(\lambda)_{2,1}$$

Удельные потоки  $E(\lambda)_{1,2}$  и  $E(\lambda)_{2,1}$  определяются суммами собственного и отраженного излучений:

$$E(\lambda)_{1,2} = E(\lambda)_{\text{соб},1} + R_1(\lambda)E(\lambda)_{2,1}$$

$$E(\lambda)_{2,1} = E(\lambda)_{\text{соб},2} + R_2(\lambda)E(\lambda)_{1,2}$$

где  $R_1(\lambda) = 1 - A(\lambda)_1$  — отражательность тела 1 [ $A(\lambda)_1$  — поглощательность тела 1];

$R_2(\lambda) = 1 - A(\lambda)_2$  — отражательность тела 2 [ $A(\lambda)_2$  — поглощательность тела 2].

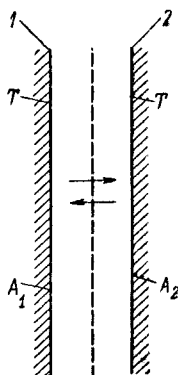


Рис. 167. К выводу закона Кирхгофа

При температурном равновесии излучающих тел должно сохраняться равенство:

$$E(\lambda)_{\text{соб. } 1} + [1 - A(\lambda)_1] E(\lambda)_{2, 1} = E(\lambda)_{\text{соб. } 2} + [1 - A(\lambda)_2] E(\lambda)_{1, 2}$$

В частном случае, когда одно из тел, например первое, обладает свойством полного поглощения [ $A(\lambda)_1 = 1$  и  $R(\lambda)_1 = 0$ ]:

$$E(\lambda)_{1, 2} = E(\lambda)_{\text{соб. } 1}$$

Тело с полным поглощением  $A(\lambda) = 1$  отвечает модели абсолютно черного тела, которое при данной температуре обладает максимально возможным тепловым излучением  $E(\lambda, T)_{\text{черн}}$ . Следовательно,

$$E(\lambda)_{1, 2} = E(\lambda, T)_{\text{черн}}$$

и

$$E(\lambda)_{2, 1} = E(\lambda)_{\text{соб. } 2} + [1 - A(\lambda)_2] E(\lambda, T)_{\text{черн}} = E(\lambda, T)_{\text{черн}}$$

Отсюда находим:

$$\frac{E(\lambda)_{\text{соб. } 2}}{A(\lambda)_2} = E(\lambda, T)_{\text{черн}} \quad (102.1)$$

Так как второе тело, для которого найдено это соотношение, может быть выбрано произвольным, то соотношение (102,1) будет сохраняться для любых тел и любых температур. Таким образом, приходим к следующему выводу: *в условиях теплового равновесия излучающих тел отношение излучательной и поглощательной способности не зависит от природы тела и определяется излучатель-*

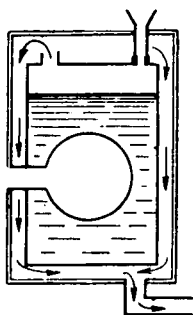


Рис. 168. Модель черного тела с паро-жидкостным термостатом

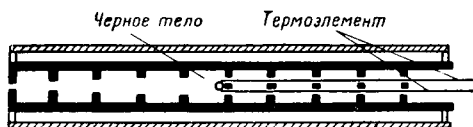


Рис. 169. Модель черного тела с электронагревом

ной способностью абсолютно черного тела. В этом заключается известный закон Кирхгофа для теплового излучения тел, который подтверждается опытом и широко используется в теории тепловой радиации тел. Необходимо иметь в виду, что закон Кирхгофа строго справедлив лишь для равновесного теплового излучения. Как указывалось ранее, при соответствующих условиях собственное излучение вещества тела может значительно превышать

его температурное излучение, но такое излучение тела уже не будет отвечать тепловому равновесию этого тела и называется нетемпературным излучением. На подобные виды излучений закон Кирхгофа не распространяется.

В качестве примеров приближенной модели абсолютно черного тела могут служить различные устройства (рис. 168, 169 и 170), применяемые при измерениях тепловой радиации и при тарировке измерительных приборов.

*Б. Энергия общего излучения черного тела (закон Стефана — Больцмана)*

Количество энергии, излучаемой абсолютно черным телом, можно подсчитать, применив к лучистой энергии законы термодинамики.

В пространстве объемом  $V$ , ограниченном стенками подвижной оболочки с температурой  $T$ , в условиях термодинамического равновесия находится лучистая энергия с объемной плотностью  $U$  Дж/м<sup>3</sup>. Приток тепла к стенкам подвижной оболочки изменит состояние теплового равновесия лучистой энергии в объеме так, что согласно первому закону термодинамики можно написать равенство:

$$dQ = d(V \cdot U) + p_{\text{луч}} \cdot dV.$$

В условиях равновесного излучения в рассматриваемой полости  $p_{\text{луч}} = \frac{1}{3} U$ .

Так как замкнутая полость с одинаковой во всех местах температурой  $T$  оболочки представляет собой абсолютно черное тело, то его излучательная способность определяется только температурой:

$$U_{\text{черн}}(T) = \frac{1}{c} \cdot 4E(T)_{\text{черн}}.$$

Общая же энергия, находящаяся в полости, зависит еще и от объема  $V$ . Поэтому

$$d(V \cdot U) = U \cdot dV + V \cdot dU = U \cdot dV + V \frac{dU}{dT} dT.$$

Следовательно,

$$dQ = U \cdot dV + V \frac{dU}{dT} dT + \frac{1}{3} U dV = \frac{4}{3} U dV + V \frac{dU}{dT} dT.$$

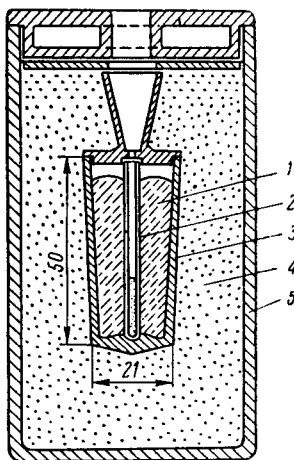


Рис. 170. Световой эталон:  
1 — платина расплавленная;  
2 — трубка из плавленной окиси тория;  
3 — сосуд из плавленной окиси тория;  
4 — запылка крошкой окиси тория;  
5 — сосуд из кварца

Приток тепла к оболочке вызовет изменение энтропии в рассматриваемом объеме:

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{4}{3} \frac{U}{T} dV + \frac{V}{T} \frac{dU}{dT} dT.$$

Зная, что изменение энтропии представляет полный дифференциал, находим частные производные:

$$\left| \frac{\partial S}{\partial V} \right|_T = \frac{4}{3} \frac{U}{T}; \quad \left| \frac{\partial S}{\partial T} \right|_V = \frac{V}{T} \frac{dU}{dT}.$$

Путем дифференцирования первого уравнения по  $T$ , а второго — по  $V$ , приходим к следующему равенству:

$$\frac{4}{3} \frac{1}{T} \frac{dU}{dT} - \frac{4}{3} \frac{U}{T^2} = \frac{1}{T} \frac{dU}{dT}.$$

Откуда получаем следующее дифференциальное уравнение с разделенными переменными:

$$\frac{dU}{U} = 4 \frac{dT}{T}.$$

Интегрированием получаем:

$$\ln U = 4 \ln T + a_0$$

или, полагая  $a_0 = \ln a$ , окончательно находим:

$$U = aT^4$$

или

$$E = \sigma_0 T^4, \quad (102,2)$$

где

$$\sigma_0 = \frac{ac}{4}.$$

Таким образом, приходим к важному выводу о том, что *плотность лучистой энергии и удельный поток теплового излучения в пространстве полого тела оказываются пропорциональными четвертой степени температур стенок.*

Этот закон впервые был найден экспериментальным путем И. Стефаном (1879 г.) и установлен термодинамическим методом Л. Больцманом (1884 г.).

Дальнейшие измерения полностью подтвердили эту закономерность. Точное значение постоянной закона Стефана — Больцмана  $\sigma_0 = 5,672 \cdot 10^{-8}$  *вт/м<sup>2</sup>°К<sup>4</sup>* или приблизительно  $\sigma_0 = 5,7 \cdot 10^{-8}$ .

Пользуясь законом Стефана — Больцмана, справедливым для условий равновесного теплового излучения и вытекающим из приложения законов термодинамики к лучистой энергии, можно ввести понятие о *лучистой температуре*. Это важное понятие было введено Б. Б. Голицыным (1893 г.).

Если в данном месте пространства плотность излучения составляет

$$U = \frac{1}{c} \int_{(4\pi)} I_l d\omega,$$

то эквивалентная ей плотность равновесного излучения при температуре  $T_{\text{луч}}$  определяется формулой:

$$U = U(T) = \frac{4\sigma_0}{c} T_{\text{луч}}^4,$$

откуда получаем следующую формулу для определения лучистой температуры:

$$T_{\text{луч}}^4 = \frac{1}{4\sigma_0} \int_{(4\pi)} I_l d\omega. \quad (102,3)$$

Если пространство заполнено какой-либо вещественной средой, а термодинамического равновесия между энергией излучения в пространстве и температурным излучением среды не будет, то лучистая температура не будет совпадать с молекулярной температурой. Такое различие температур наблюдается, например, в атмосфере земли, пронизываемой лучами солнца, при лучистом отоплении помещений, в трубках с электросветящимся газом, в плазменной струе и т. п.

#### *В. Энергия спектрального излучения черного тела (закон Планка)*

Большое значение в теории теплового излучения имеет задача о распределении лучистой энергии, испускаемой абсолютно черным телом по отдельным частотам или длинам волн спектра. Применение принципа распределения энергии пропорционально температуре ( $\sim kT$ ) и непрерывного изменения энергии носителей излучения с температурой оказалось в противоречии с опытом в области малых длин волн спектра. В связи с этим М. Планк (1900 г.) предположил, что излучающее тело испускает энергию элементарными порциями, кратными кванту энергии  $\epsilon$ . При этом квант энергии считается пропорциональным частоте испускаемых электромагнитных волн ( $\nu$ ):

$$\epsilon(\nu) = h\nu, \quad (102,4)$$

где  $h$  — постоянная Планка, имеющая универсальное значение ( $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$  дж·сек).

Кванты лучистой энергии называют также фотонами.

Пользуясь квантовым представлением о лучеиспускании, интенсивность энергии спектрального излучения абсолютно черного

тела можно вычислить, применяя метод статистической термодинамики. Расчет приводит к формуле Планка:

$$B(\nu, T) = 2 \frac{\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \frac{vt}{m^2 \frac{1}{сек} \text{стер}}, \quad (102,5)$$

где  $B(\nu, T)$  — интенсивность энергии черного излучения данной частоты  $\nu$  при температуре  $T$ ;

$h\nu = \epsilon$  — энергия элементарного носителя излучения — фотона;

$kT$  — энергия элементарного носителя тепла;

$c$  — скорость света.

Формула (102,5) представляет собой интенсивность энергии в спектре излучения абсолютно черного тела в зависимости от частоты  $\nu$ . Для определения интенсивности энергии в спектре излучения черного тела в зависимости от длины волны  $\lambda$  можно воспользоваться равенством энергии излучения для элементарных интервалов длин волн ( $\delta\lambda$ ) и соответствующих им интервалов частот ( $\delta\nu$ )

$$B(\lambda, T) \delta\lambda = B(\nu, T) \delta\nu,$$

откуда имеем:

$$B(\lambda, T) = B(\nu, T) \frac{\delta\nu}{\delta\lambda}.$$

Так как  $\nu = \frac{c}{\lambda}$  и  $\frac{\delta\nu}{\delta\lambda} = -\frac{c}{\lambda^2}$ , то приходим к следующей формуле:

$$B(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \frac{vt}{m^2 \cdot \text{стер}}. \quad (102,6)$$

На рис. 171 представлена графическая иллюстрация формулы Планка в виде зависимости  $\lg [E(\lambda, T)]$  {где  $E(\lambda, T) = \pi B(\lambda, T) vt / \text{см}^2 \cdot \text{см}$ } от  $\lg \lambda$  (где  $\lambda$  мк и см).

Из формулы (102,6) и рис. 171 следует, что интенсивность энергии излучения абсолютно черного тела близка к нулю для очень малых и очень больших длин волн. При определенной длине волны для данной температуры интенсивность энергии излучения имеет максимальную величину.

Для излучения, отвечающего температурам, при которых  $\frac{hc}{\lambda kT} \gg 1$  ( $t < 3000^\circ \text{C}$ ), формула Планка переходит в формулу Вина:

$$B(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} e^{-\frac{hc}{\lambda kT}}. \quad (102,7)$$



Для длинноволнового диапазона спектра излучения абсолютно черного тела  $\frac{hc}{\lambda kT} \ll 1$  и величина

$$\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \rightarrow \frac{\lambda kT}{hc},$$

при этом условии формула Планка переходит в формулу Релея — Джинса, отражающую старый принцип распределения энергии

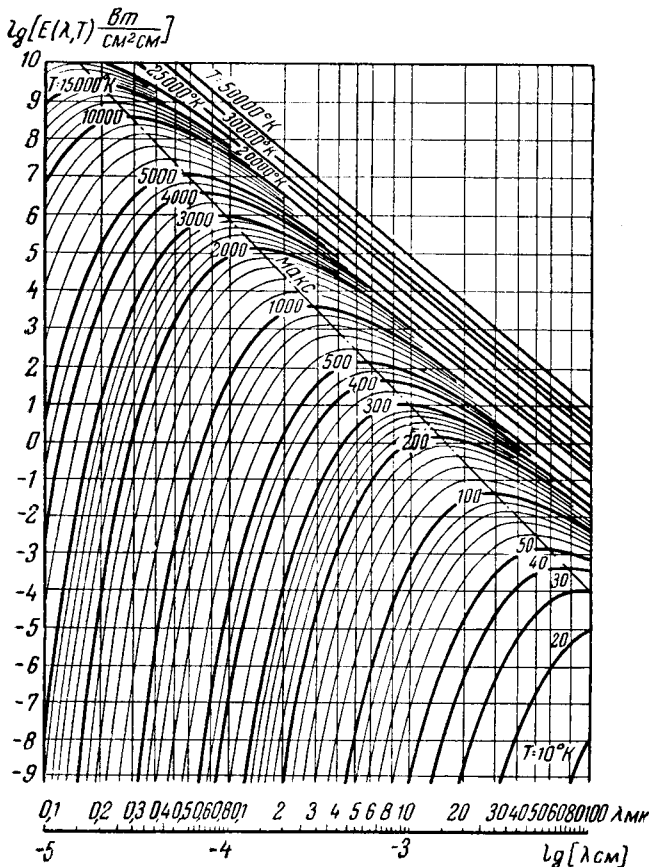


Рис. 171. Энергия излучения абсолютно черного тела в зависимости от длины волны и температуры (формула Планка)

пропорционально температуре ( $\sim kT$ ):

$$B(\lambda, T) = \frac{2c}{\lambda^4} kT. \quad (102,8)$$

Положение максимума интенсивности энергии излучения в формуле Планка находится дифференцированием формулы (102,6):

$$\frac{\partial B(\lambda, T)}{\partial \lambda} = 0.$$

Выполняя операцию дифференцирования, из этого равенства получаем уравнение:

$$\frac{hc}{kT} \frac{1}{5\lambda_{\max}} = 1 - e^{-\frac{hc}{kT} \frac{1}{\lambda_{\max}}} \quad \text{или} \quad \frac{a}{5} = 1 - e^{-a}.$$

Уравнение это имеет решение:

$$a = \frac{hc}{kT} \frac{1}{\lambda_{\max}} = 4,965,$$

или

$$\lambda_{\max} T = \frac{hc}{4,965k} = 0,2897 \text{ см} \cdot \text{град}. \quad (102,9)$$

Постоянство произведения ( $\lambda_{\max} T$ ) указывает на то, что с повышением температуры максимум интенсивности энергии излучения абсолютно черного тела сдвигается в сторону меньшей длины волны (закон смещения Вина). Наглядным подтверждением этого закона является простой опыт: при постепенном накаливании твердых тел до свечения тела принимают сначала красный, а затем и другие цвета, отвечающие более короткой длине волны. Интересно отметить, что глаз человека имеет наибольшую восприимчивость к свету при длине волны, приблизительно отвечающей максимальной интенсивности в спектре излучения солнца ( $\lambda \approx 0,55 \text{ мк}$ ).

Все рассмотренные особенности спектрального излучения абсолютно черного тела хорошо подтверждаются экспериментально.

На рис. 172 представлена вычисленная по формуле Планка спектральная плотность потока энергии излучения абсолютно черного тела  $E(\lambda, T)$  вт/м<sup>2</sup>см в зависимости от длины волны  $\lambda$  мк.

Интенсивность энергии черного излучения для всех длин волн находится интегрированием формулы (102,6):

$$B(T) = \int_0^{\infty} \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} d\lambda.$$

Для вычисления интеграла вводим новую переменную

$$\eta = \frac{hc}{\lambda kT}$$

и представляем интеграл в виде:

$$B(T) = \frac{2k^4 T^4}{h^3 c^2} \int_0^{\infty} \frac{\eta^3}{e^{\eta} - 1} d\eta.$$

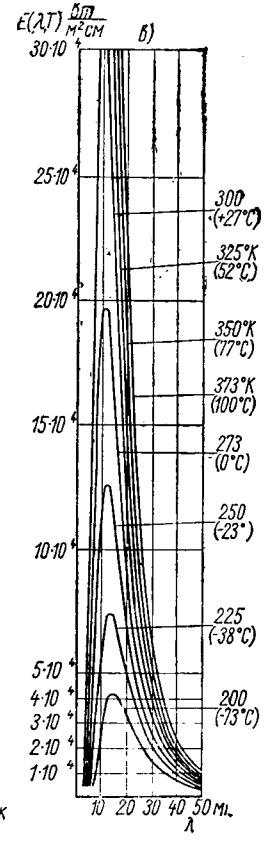
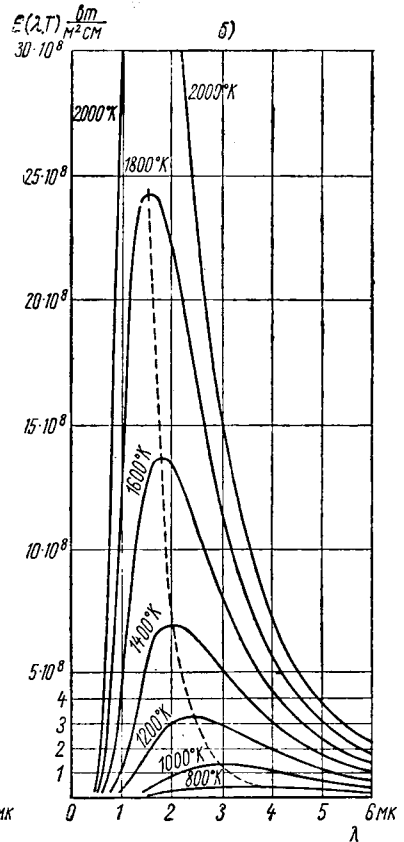
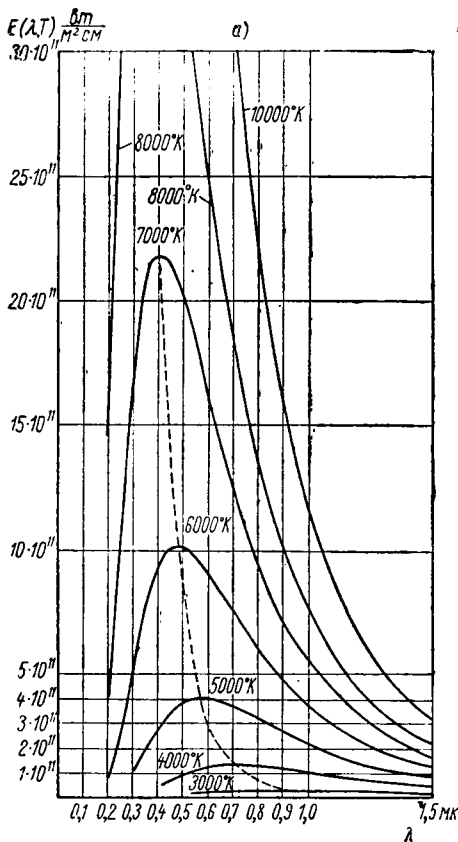


Рис. 172. Спектральное распределение энергии излучения абсолютно черного тела в зависимости от длины волны в различных диапазонах изменения температур: а) от 3000 до 10000° К; б) от 800 до 2000° К; в) от 200 до 300° К

Разлагая в ряд

$$\frac{1}{e^{\eta}-1} = e^{-\eta} + e^{-2\eta} + e^{-3\eta} + \dots$$

и имея в виду, что интегрирование каждого члена этого ряда дает

$$\int_0^{\infty} \eta^3 e^{-n\eta} d\eta = \frac{6}{n^4},$$

где  $n = 1, 2, 3 \dots$ ,  
получаем:

$$\int_0^{\infty} \eta^3 \sum_1^{\infty} e^{-n\eta} d\eta = 6 \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Так как

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90},$$

то окончательно получаем:

$$B(T) = \frac{2\pi^4 k^4}{15c^2 h^3} T^4.$$

Обозначая

$$\sigma_0 = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} = 5,672 \cdot 10^{-8} \frac{\text{вт}}{\text{м}^2 \text{ } ^\circ\text{К}^4},$$

приходим к уже известной формуле, отвечающей закону Стефана — Больцмана:

$$B(T) = \frac{1}{\pi} \sigma_0 T^4. \quad (102,10)$$

Удельный поток энергии излучения абсолютно черного тела находится произведением:

$$E(T) = \pi B(T) = \sigma_0 T^4.$$

### § 103. Излучательная, поглощательная и отражательная способности различных тел

#### *А. Излучательная способность тел*

Понятие идеального абсолютно черного тела, обладающего при данной температуре максимально возможным тепловым лучеспусканием, позволило установить законы спектрального и общего теплового излучения, отвечающие условию термодинамиче-

ского равновесия. Спектральное и интегральное собственное тепловое излучение реальных тел при данной температуре отличается от идеального излучения: нигде его не превышает и составляет в некоторых случаях лишь небольшую часть излучения абсолютно черного тела. Различные тела при одинаковой температуре имеют весьма различную интенсивность собственного теплового излучения, которая зависит от вещества и строения тела, в особенности его поверхностного слоя.

Для оценки способности тел к собственному тепловому излучению пользуются относительной величиной, называемой степенью черноты излучения тела. Величина эта представляет отношение интенсивности энергии собственного излучения тела  $I(\lambda, T, \vec{l})$  для данной длины волны ( $\lambda$ ), температуры ( $T$ ) в направлении ( $\vec{l}$ ) к интенсивности энергии излучения абсолютно черного тела  $B(\lambda, T)$  при той же длине волны ( $\lambda$ ) и температуре ( $T$ ):

$$\varepsilon(\lambda, T, \vec{l}) = \frac{I(\lambda, T, \vec{l})}{B(\lambda, T)}. \quad (103,1)$$

Если интенсивность энергии собственного теплового излучения тела, одинаковая по всем направлениям, составляет одинаковую долю от интенсивности черного излучения при той же температуре для всех длин волн спектра, то такое излучающее тело называют с е р ы м. Степень черноты серого тела зависит только от температуры и определяется отношением:

$$\varepsilon(T) = \frac{I(T)}{B(T)} = \frac{E(T)}{\sigma_0 T^4}, \quad (103,2)$$

где  $E(T) = \pi I(T)$  представляет удельный поток собственного теплового излучения серого тела при температуре  $T$ .

Многие тела, например чистые металлы, стекло, газы с полярными молекулами (HCl, CO и др.) и многоатомные газы (CO<sub>2</sub>, H<sub>2</sub>O и др.), обладают избирательной или селективной способностью теплового излучения. В некоторых участках спектра излучательная способность этих тел составляет вполне заметную долю энергии излучения абсолютно черного тела; в других участках спектра излучательность их оказывается весьма небольшой или даже совсем отсутствует. Излучательную способность селективно излучающих тел условно оценивают по отношению ко всему спектру излучения абсолютно черного тела той же температуры:

$$\varepsilon(T)_{\text{селект}} = \frac{E(T)_{\text{селект}}}{E(T)_{\text{черн}}};$$

где  $E(T)_{\text{селект}}$  — удельный поток энергии селективного излучения тела при температуре  $T$ ;

$E(T)_{\text{черн}} = \sigma_0 T^4$  — удельный поток черного излучения.

Удельный поток энергии селективного излучения тела включает интенсивность излучения по всем длинам волн и по всем

направлениям:

$$E(T)_{\text{селект}} = \int_0^{\infty} d\lambda \int_{(2\pi)} I(\lambda, T, \vec{l}) \cos(\vec{l}, N) d\omega.$$

Величина эта для различных тел определяется экспериментально.

Спектральное тепловое излучение чистых металлов в коротковолновой области спектра ( $\lambda < 0,5 \text{ мк}$ ) составляет более половины излучения черного тела при той же температуре. В длинноволновой области спектра ( $\lambda > 1 \text{ мк}$ ) спектральная степень черноты излучения чистых металлов оказывается небольшой и для ряда металлов составляет [менее 5% излучения черного тела при той же температуре (рис. 173).

Металлы, покрытые слоем окиси, имеют повышенную степень черноты излучения. Окислы на металлах появляются особенно интенсивно при нагреве металлов в окисляющей среде при определенной температуре, и излучательная способность металлов при

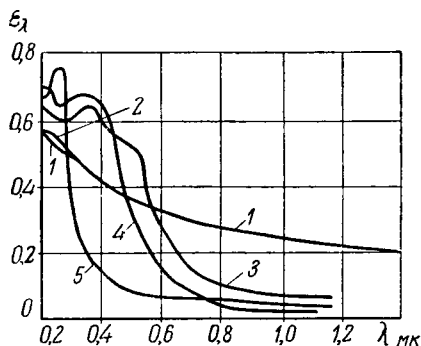


Рис. 173. Излучательная способность некоторых металлов в зависимости от длины волны:

1 — платина; 2 — никель; 3 — медь;  
4 — золото; 5 — серебро

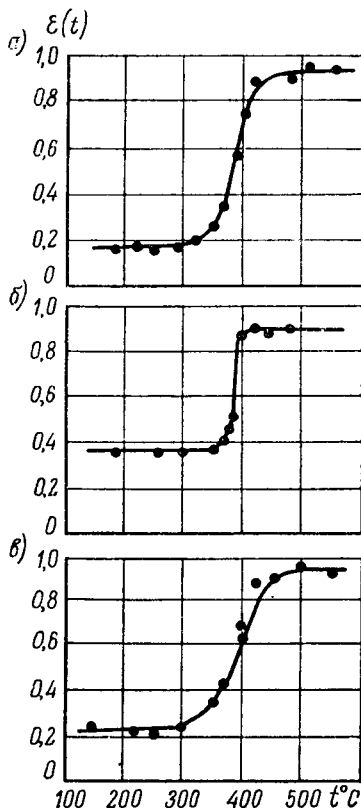


Рис. 174. Степень черноты излучения стали и чугуна в зависимости от температуры: а) полированная литейная сталь; б) грубошлифованная литейная сталь; в) полированный чугун [70]

этой температуре резко возрастает (рис. 174).

Излучение шероховатых поверхностей по сравнению с гладкими поверхностями тел отличается большей степенью черноты.

Впадины шероховатой поверхности повышают излучательность подобно модели черного тела (рис. 175).

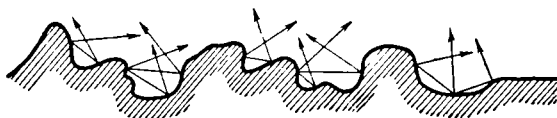


Рис. 175. Лучеспускание шероховатых поверхностей

Спектральное тепловое излучение неметаллических тел имеет свои особенности. В отличие от металлов, излучательная способность ряда твердых тел в коротковолновой области спектра оказывается меньшей, чем в длинноволновой (рис. 176).

Вода, даже в тонком слое, имеет большую степень черноты длинноволнового теплового излучения, которая остается большой и для твердого агрегатного состояния воды (лед, снег).

Одноатомные и двухатомные газы с неполярными молекулами ( $H_2$ ,  $N_2$  и др.) не имеют заметного теплового излучения даже при высоких температурах 1000, 2000° К. Двухатомные газы с полярными молекулами ( $HCl$ ,  $CO$ ,  $OH$  и т. п.) при достаточно большой концентрации молекул в слое обладают некоторым тепловым излучением. Тепловое излучение многоатомных молекул газа ( $H_2O$ ,  $CO_2$ ,  $SO_2$ , . . .) даже при сравнительно небольшой концентрации молекул в слое оказывается вполне заметным. При этом излучение газов отличается резко выраженной селективностью.

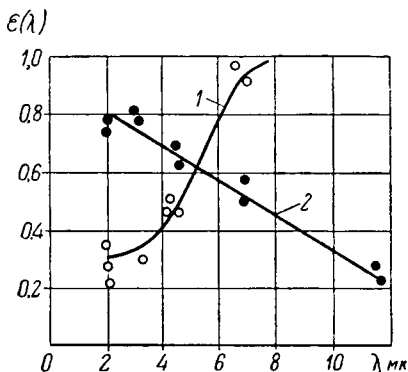


Рис. 176. Спектральная излучательная способность керамики и никелевого сплава:

1 — керамика,  $t = 760 \div 1000^\circ C$ , 2 — никелевый сплав,  $t = 760 \div 800^\circ C$

### Б. Отражательность, поглощаемость и прозрачность тел

Многие твердые тела обладают селективной отражательной способностью для падающего теплового излучения. На рис. 177, а—в показана селективная отражательная способность белой эмали, гипсовой штукатурки, бетона, шамота, фарфора, алюминия. Как видно, многие «белые» материалы в отраженном коротковолновом излучении являются «черными» в длинноволновой отраженной радиации.

В связи с селективным характером отражения падающей радиации отражательная способность различных твердых тел существенно зависит от температуры источника тепловой радиации, падающей на тело. На рис. 178, а—в показана отражательность ( $R$ )

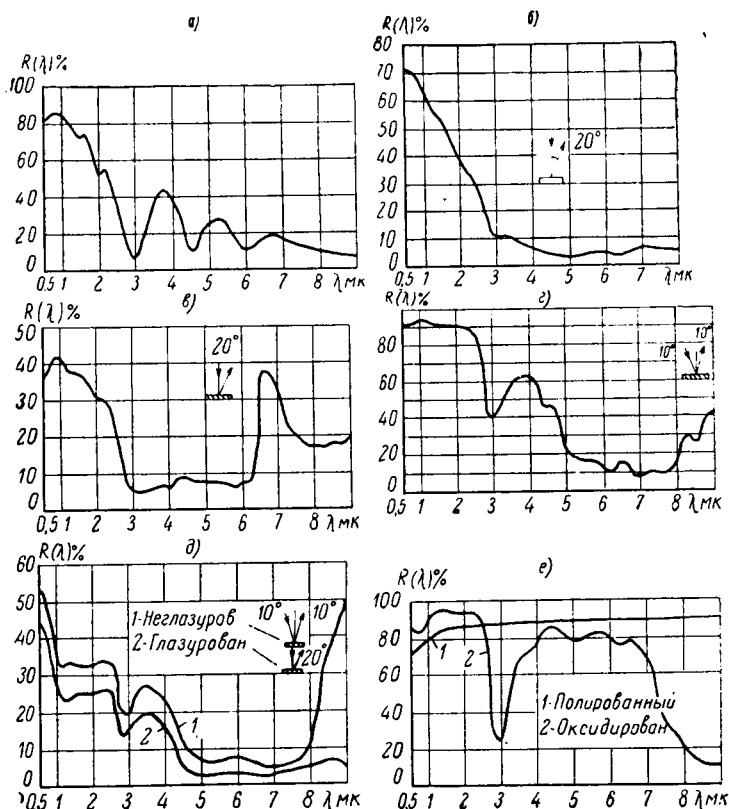


Рис. 177. Спектральная отражательная способность некоторых строительных материалов: а) гипсовая штукатурка; б) белая эмаль; в) бетон; г) белый шпат; д) фарфор; е) алюминий [70]

и поглощательность ( $A$ ) различных тел в зависимости от температуры источника тепловой радиации, падающей на тело.

Помимо длины волны падающего излучения, отражательная способность тел в большой мере зависит от угла падения и отражения радиации. Для характеристики зависимости отражательной способности тел от направлений падающего и отраженного излучений вводят коэффициент отражательности, или коэффициент яркости отраженного излучения.



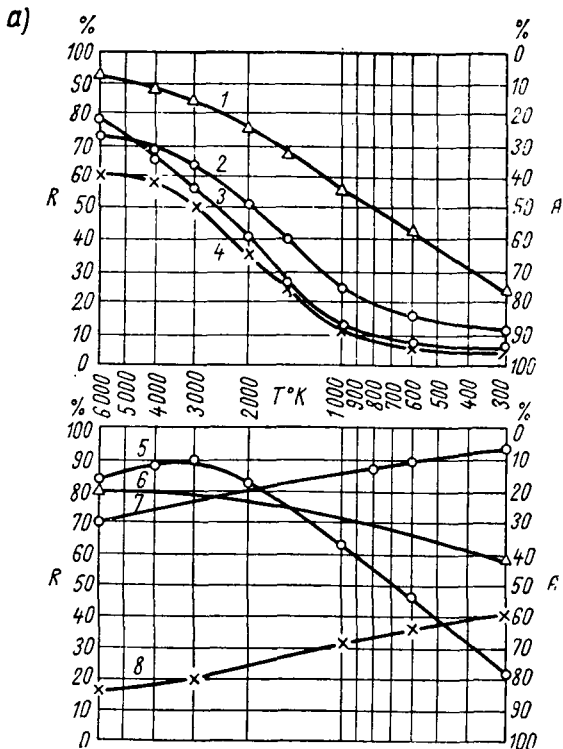


Рис. 178, а. Отражательная и поглощательная способности различных тел в зависимости от температуры источника падающего излучения:

1 — покрытие окисью магния; 2 — белая краска (литопон); 3 — белый лак на дереве; 4 — оплавленная эмаль, белая; 5 — алюминий элоксированный; 6 — алюминий полированный; 7 — графит [70]

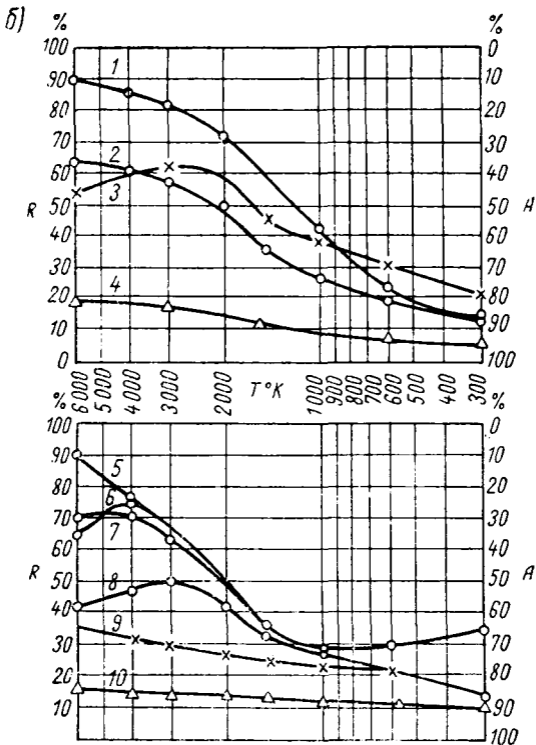


Рис. 178, б. Отражательная и поглощательная способности различных тел в зависимости от температуры источника падающего излучения: 1 — белый шамот; 2 — асбестовый картон; 3 — пробка; 4 — асбошифер; 5 — бумага; 6 — дерево; 7 — материя одежды; 8 — хребтовая кожа; 9 — мягкая серая резина; 10 — линолеум красно-коричневый [70]

Если обозначить угол направления интенсивности энергии падающего излучения  $I_{\text{пад}}(\varphi)$  на единичную площадку по отношению нормали  $N$  к ней через  $\varphi$  и углы направления отраженной

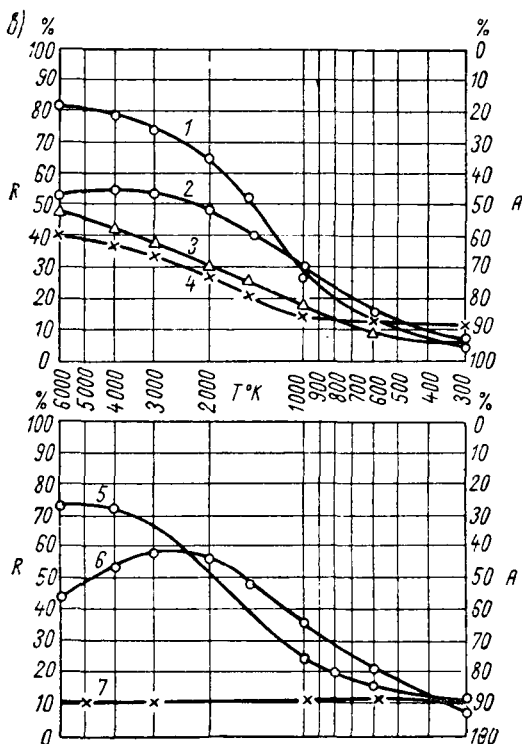


Рис. 178, в. Отражательная и поглощательная способности различных материалов в зависимости от температуры источника падающего излучения:

1 — кафель, белый; 2 — керамическая плитка; 3 — фарфор; 4 — бетон; 5 — штукатурка гипсовая; 6 — красный кирпич; 7 — шиферные плиты

радиации в пространство через  $\psi$  и  $\theta$  (рис. 179), то коэффициент отражения яркости падающего излучения определится отношением:

$$\rho(\varphi, \psi, \theta) \equiv \rho' = \frac{i_{\text{отр}}(\varphi, \psi, \theta)}{\frac{1}{2\pi} I_{\text{пад}}(\varphi)}, \quad (103,3)$$

где  $I(\varphi)$  — интенсивность энергии падающего излучения по направлению угла  $\varphi$ ;

$i(\varphi, \psi, \theta)$  — интенсивность энергии отраженного излучения в направлении  $r(\psi, \theta)$ .

Средний коэффициент отражения падающего излучения для всех направлений определяется интегралом:

$$\bar{R}(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{(2\pi)} \varrho' d\omega. \quad (103,4)$$

Для изотропного отражения падающего излучения

$$R(\varphi) = \varrho',$$

где  $R(\varphi)$  — коэффициент отражения падающего на тело излучения под углом  $\varphi$ , представляющий отражательную способность тела.

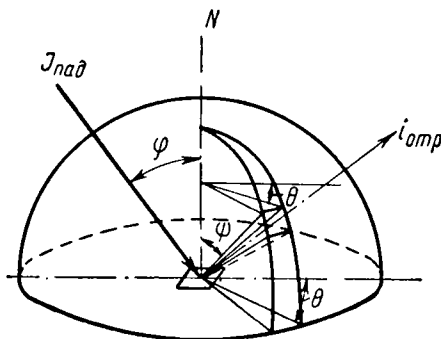


Рис. 179. К определению коэффициента отражательности

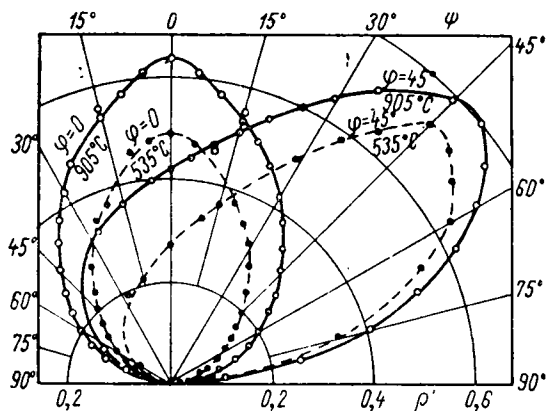


Рис. 180. Распределение по направлениям коэффициента отражательности белой бумаги [69]

На рис. 180 представлено распределение коэффициента отражательности белой бумаги по всем направлениям угла  $\psi$  для различных углов падающего излучения  $\varphi$  и температуры источника

ника черного излучения. На рис. 181 показан коэффициент отражательности окисленной меди для различных углов падающего излучения и температуры источника черного излучения. На рис. 182

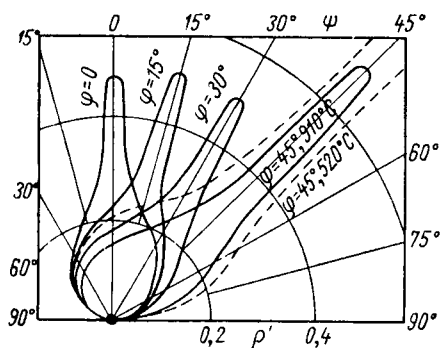


Рис. 181. Распределение по направлениям коэффициента отражательности черной окисленной меди [69]

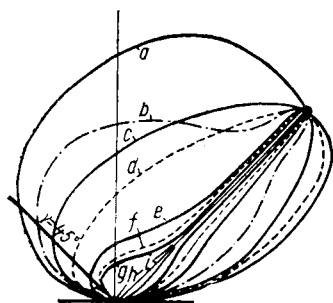


Рис. 182. Приведенная характеристика отражательности различных материалов для падающей черной радиации:

*a* — еловое дерево ( $t_{\text{пад}} = 910^\circ \text{C}$ );  
*b* — стеатит ( $t_{\text{пад}} = 905^\circ \text{C}$ ); *c* — белая бумага ( $t_{\text{пад}} = 905^\circ \text{C}$ );  
*d* — белая бумага ( $t_{\text{пад}} = 535^\circ \text{C}$ );  
*e* — черная окисленная медь ( $t_{\text{пад}} = 910^\circ \text{C}$ ); *f* — черная окисленная медь ( $t_{\text{пад}} = 520^\circ \text{C}$ ); *g* — антикоррозионная жель, подверженная действию песчаной струи ( $t_{\text{пад}} = 920^\circ \text{C}$ ); *h* — анодированная антикоррозионная жель ( $t_{\text{пад}} = 920^\circ \text{C}$ ); *i* — зеркальный отражатель (как эталон)

представлена приведенная характеристика отражательности различных тел для падающего черного излучения под углом  $45^\circ$  (в качестве меры сравнения принято зеркальное отражение). Из всех исследованных материалов наименьшее отклонение от изотропного отражения имеет древесина, а наибольшую зеркальность имеет анодированная жель.

Отражательность  $R(\lambda, T)$ , поглощательность  $A(\lambda, T)$  и прозрачность  $D(\lambda, T)$  тел для падающего излучения известной длины и для известной температуры тела связаны равенством:

$$R(\lambda, T) + A(\lambda, T) + D(\lambda, T) = 1.$$

Если прозрачность тела равна нулю, то

$$R(\lambda, T) + A(\lambda, T) = 1$$

и поглощательность тела определяется разностью:

$$A(\lambda, T) = 1 - R(\lambda, T).$$

В условиях термодинамического равновесия энергии падающего излучения с энергией излучения поглощающего тела в соответствии

с законом Кирхгофа имеем равенство:

$$A(\lambda, T) = \varepsilon(\lambda, T),$$

где  $\varepsilon(\lambda, T)$  — степень черноты собственного теплового излучения тела.

Если в известном температурном диапазоне поглотительная и излучательная способности тела  $A(\lambda)$  и  $\varepsilon(\lambda)$  слабо зависят от температуры, то их равенство приближенно можно принимать и при отсутствии термодинамического равновесия энергии падающего и собственного излучения тела:

$$A(\lambda) \approx \varepsilon(\lambda).$$

**Прозрачность** некоторых тел для падающего излучения оказывается вполне заметной даже для сравнительно толстых слоев.

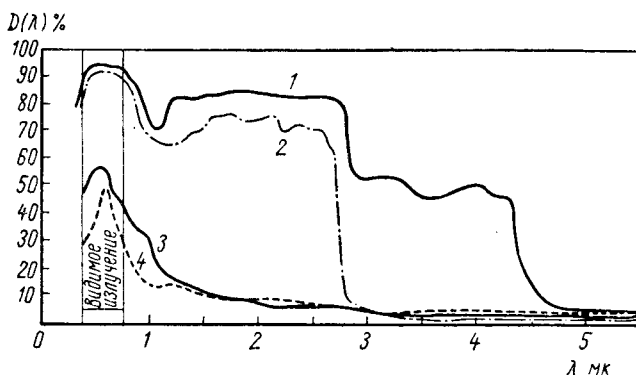


Рис. 183. Спектральная прозрачность различных сортов стекла:

1 — оконное стекло толщиной 2 мм; 2 — оконное стекло толщиной 5,4 мм; 3 — Au-стекло; 4 — Cu-стекло [70]

Тела кристаллического строения, а также стекло обладают селективной прозрачностью для падающего излучения. Например, кварц имеет большую прозрачность  $D(\lambda)$  для коротковолнового излучения и сравнительно мало прозрачен в длинноволновой области спектра. На рис. 183 представлена прозрачность  $D(\lambda)$  различных сортов стекла в зависимости от длины волны падающего излучения.

## ЛУЧИСТЫЙ ТЕПЛООБМЕН ТЕЛ, НАХОДЯЩИХСЯ В ПРОЗРАЧНОЙ СРЕДЕ

### § 104. Различные условия обмена энергией излучения тел

В общем случае обмен энергией излучения различных тел осуществляется в разнообразных условиях. Любое тело обменивается энергией излучения со всем множеством окружающих тел и сред, и процесс обмена энергией может быть нестационарным. Часть энергии излучения, падающей на тело, частично отражается, поглощается и частично может пропускаться телом. Энергия излучения, поглощенная телами, может превращаться не только в тепло, но и в другие формы энергии, например электрическую, химическую и т. п. Собственное излучение тел может отличаться от температурного излучения, и обмен энергией излучения может осуществляться при отсутствии термодинамического равновесия. Решить задачу об обмене энергией излучения тел в общем случае весьма затруднительно. Поэтому приходится принимать условия, которые приближенно отвечают реальным условиям радиационного обмена энергией тел.

Ниже рассматривается задача о лучистом теплообмене тел при следующих условиях: отдельные тела имеют лишь температурное излучение; поглощенная телом лучистая энергия вся превращается в теплоту; среда, в которой находятся тела, лучепрозрачна; тела не прозрачны для падающего излучения; интенсивность энергии испускаемых и отражаемых лучей для каждого элемента поверхности тел распределяется равномерно по всем направлениям излучения, т. е. предполагается, что участвующие в лучевом обмене энергией тела подчиняются закону Ламберта; процесс лучистого обмена энергией стационарен, и температура во всех местах каждого тела одинакова и поддерживается неизменной во времени; излучающие тела неподвижны, и другие виды переноса тепла, кроме

излучения, отсутствуют; поглощательная и излучательная способности тел не зависят от длины волны излучения и составляют некоторую долю поглощения и излучения абсолютно черного тела  $[A(T)$  и  $\varepsilon(T)]$ , т. е. тела предполагаются серыми; поверхности тел не имеют вогнутостей, в которых может осуществляться внутренний радиационный обмен.

Для любого тела в этих условиях суммарный поток энергии излучения определяется собственным и отраженным излучением:

$$Q_{\text{эф}} = F\varepsilon(T)\sigma_0 T^4 + Q_{\text{отр}}, \quad (104,1)$$

где  $F$  — площадь поверхности излучающего тела;

$\varepsilon(T)$  — степень черноты собственного теплового излучения тела.

Разность потоков энергии собственного излучения тела и поглощенного, падающего на тело излучения, будем называть результирующим излучением тела, или его теплопередачей:

$$Q_{\text{рез}} = F\varepsilon(T)\sigma_0 T^4 - A(T)Q_{\text{пад}}. \quad (104,2)$$

Теплопередачу излучением тела можно также определить разностью потоков энергии эффективного и падающего на тело излучения:

$$Q_{\text{рез}} = Q_{\text{эф}} - Q_{\text{пад}}. \quad (104,3)$$

Из двух последних равенств получаем формулу для потока энергии эффективного излучения тела:

$$Q_{\text{эф}} = F \frac{\varepsilon(T)}{A(T)} \sigma_0 T^4 - \left[ \frac{1}{A(T)} - 1 \right] Q_{\text{рез}}. \quad (104,4)$$

Эта формула связывает энергию эффективного излучения тела с его теплопередачей излучением и может быть использована в расчетах лучистого теплообмена тел.

Если все тела, участвующие в лучистом теплообмене, имеют одинаковую температуру (находятся в термодинамическом равновесии), то результирующее излучение, или теплопередача, всех тел равна нулю; степени черноты излучения и поглощения каждого тела в этих условиях одинаковы, и эффективное излучение всех тел отвечает излучению абсолютно черного тела:

$$Q_{\text{эф}} = F\sigma_0 T^4.$$

Если же температуры тел будут различными  $T_1, T_2, \dots, T_n$ , то каждое тело будет иметь свое результирующее излучение  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ , которое будет определяться температурой, излучательной и поглощательной способностью тел, величиной площади поверхности тел и взаимным расположением излучающих тел в пространстве.



## § 105. Лучистый теплообмен двух тел

Имеются два тела с выпуклыми поверхностями  $F_1$  и  $F_2$ , произвольно расположенные в пространстве (рис. 184). Требуется определить теплопередачу излучением тел, имеющих различные температуры  $T_1$  и  $T_2$ , при заданных степенях черноты собственного теплового излучения тел и известных коэффициентах поглощения:  $\epsilon_1, A_1, \epsilon_2, A_2$ .

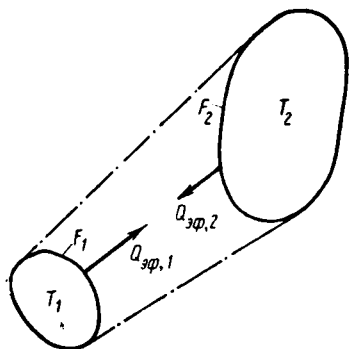


Рис. 184. К расчету лучистого теплообмена тел

Потоки энергии эффективного излучения тел представляются в виде:

$$Q_{\text{эф}, 1} = F_1 \frac{\epsilon_1}{A_1} \sigma_0 T_1^4 - \left( \frac{1}{A_1} - 1 \right) Q_1, \quad (105,1)$$

$$Q_{\text{эф}, 2} = F_2 \frac{\epsilon_2}{A_2} \sigma_0 T_2^4 - \left( \frac{1}{A_2} - 1 \right) Q_2, \quad (105,2)$$

где  $Q_1$  и  $Q_2$  — результирующее излучение рассматриваемых тел.

Если не учитывать лучистый теплообмен с другими окружающими телами, то можно принять равенство:

$$Q_1 \equiv -Q_2 \equiv Q_{1, 2},$$

где  $Q_{1, 2}$  — теплопередача излучением двух рассматриваемых тел.

Поток энергии эффективного излучения каждого тела падает на другое тело в количестве:

$$Q_{\text{пад } 1, 2} = Q_{\text{эф}, 1} \varphi_{1, 2}, \quad (105,3)$$

$$Q_{\text{пад } 2, 1} = Q_{\text{эф}, 2} \varphi_{2, 1}, \quad (105,4)$$

где  $\varphi_{1, 2}$  и  $\varphi_{2, 1}$  представляют доли лучевых потоков энергии общего лучеиспускания тел, падающие с одного тела на другое.

Эти доли лучевых потоков называют коэффициентами облученности тел и определяют отношениями:

$$\varphi_{1, 2} = \frac{Q_{\text{пад } 1, 2}}{Q_{\text{эф}, 1}}, \quad (105,5)$$

$$\varphi_{2, 1} = \frac{Q_{\text{пад } 2, 1}}{Q_{\text{эф}, 2}}.$$

В частном случае при лучевом термодинамическом равновесии тел

$$Q_{\text{пад } 1, 2} = Q_{\text{пад } 2, 1},$$

$$Q_{\text{эф}, 1} = F_1 \sigma_0 T^4,$$

$$Q_{\text{эф}, 2} = F_2 \sigma_0 T^4.$$

В этом случае получаем равенство

$$F_1 \varphi_{1,2} = F_2 \varphi_{2,1}, \quad (105,6)$$

которое отражает геометрическое свойство взаимности облученностей тел:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{1,2} &= \varphi_{2,1} \frac{F_2}{F_1}, \\ \varphi_{2,1} &= \varphi_{1,2} \frac{F_1}{F_2}. \end{aligned} \right\} \quad (105,7)$$

При отсутствии термодинамического равновесия тел теплопередача излучением определяется разностью:

$$Q_{1,2} = Q_{\text{пад } 1,2} - Q_{\text{пад } 2,1}.$$

Подставляя в это равенство (105,3), (105,4) и пользуясь формулами (105,1), (105,2), приходим к следующей формуле для определения теплопередачи излучением двух тел:

$$Q_{1,2} = \varphi_{1,2} F_1 \frac{\frac{\varepsilon_1}{A_1} \sigma_0 T_1^4 - \frac{\varepsilon_2}{A_2} \sigma_0 T_2^4}{1 + \varphi_{1,2} \left( \frac{1}{A_1} - 1 \right) + \varphi_{2,1} \left( \frac{1}{A_2} - 1 \right)} \text{ вт.} \quad (105,8)$$

Если в диапазоне температур  $T_1$  и  $T_2$  степени черноты собственного излучения тел ( $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ ) не зависят от температуры, то имеем равенства:

$$\varepsilon_1 = A_1; \quad \varepsilon_2 = A_2.$$

При этом условии формула (105,8) переходит в следующую:

$$Q_{1,2} = \varphi_{1,2} F_1 \frac{\sigma_0 (T_1^4 - T_2^4)}{1 + \varphi_{1,2} \left( \frac{1}{A_1} - 1 \right) + \varphi_{2,1} \left( \frac{1}{A_2} - 1 \right)} \text{ вт.} \quad (105,9)$$

## § 106. Лучистый теплообмен двух тел с плоскопараллельными поверхностями неограниченных размеров

Для рассматриваемого случая коэффициенты облученности тел одинаковы и равны единице ( $\varphi_{1,2} = \varphi_{2,1} = 1$ ); удельная теплопередача излучением определяется формулой:

$$\frac{Q_{1,2}}{F_1} = q_{1,2} = \frac{\frac{\varepsilon_1}{A_1} \sigma_0 T_1^4 - \frac{\varepsilon_2}{A_2} \sigma_0 T_2^4}{\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} - 1} \frac{\text{вт}}{\text{м}^2}. \quad (106,1)$$

При условии  $\varepsilon_1 = A_1$  и  $\varepsilon_2 = A_2$ :

$$q_{1,2} = \frac{\sigma_0 (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} - 1}. \quad (106,2)$$

Пользуясь понятием лучистых температур излучающих тел

$$T_{\text{луч}, 1}^4 = \frac{c}{4\sigma_0} U_{\text{луч}, 1}, \quad T_{\text{луч}, 2}^4 = \frac{c}{4\sigma_0} U_{\text{луч}, 2}$$

(где  $U_{\text{луч}, 1}$  и  $U_{\text{луч}, 2}$  — объемные плотности энергии излучения тел 1 и 2,

$c$  — скорость распространения лучистой энергии)

и рассматривая знаменатель формулы (106,1) как сумму сопротивлений переносу лучистой энергии

$$\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} - 1 = \left( \frac{1}{A_1} - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{A_2} - \frac{1}{2} \right),$$

формулу теплопередачи излучением тел можно записать в следующем виде:

$$q_{1, 2} = \frac{1}{4} \frac{1}{\left( \frac{1}{A_1} - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{A_2} - \frac{1}{2} \right)} \times \\ \times c (U_{\text{луч}, 1} - U_{\text{луч}, 2}). \quad (106,3)$$

В этом виде формула (106,3) отвечает общей формуле переноса энергии, согласно которой количество переносимой энергии пропорционально скорости носителей и разности объемных плотностей энергии на пути ее переноса (см. § 8).

Пользуясь понятием сопротивлений переносу лучистой энергии тел  $\left( \frac{1}{A} - \frac{1}{2} \right)$ , можно решить задачу о защитных экранах от излучения (рис. 185).

Пренебрегая термическим сопротивлением топких листов — экранов, формулу теплопередачи излучением тел с плоскопараллельными поверхностями запишем в виде:

$$q_{1, 2} = \frac{\sigma_0 (T_1^4 - T_2^4)}{\sum_1^n \left( \frac{1}{A_i} - \frac{1}{2} \right)}, \quad (106,3')$$

где  $n$  — число мест сопротивлений переносу лучистой энергии.

Если оба тела и все экраны имеют одинаковую степень черноты поглощения лучистой энергии, то формула (106,3) переходит в следующую:

$$q_{1, 2} = \frac{\sigma_0 (T_1^4 - T_2^4)}{(N_{\text{экр}} + 1) 2 \left( \frac{1}{A} - \frac{1}{2} \right)}, \quad (106,4)$$

где  $N_{\text{экр}}$  — число защитных экранов.

Эта формула показывает, что при наличии между телами одного экрана теплопередача излучением тел уменьшается в два раза, при наличии двух — в три раза и т. д.

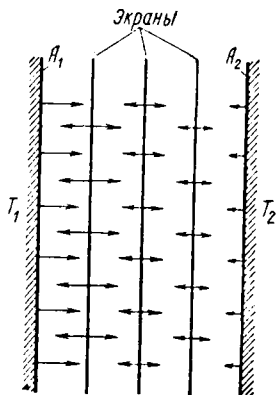


Рис. 185. Экраны для защиты от излучения

Особенно заметно уменьшается теплопередача излучением двух тел, если между телами находится металлический лист с малым коэффициентом поглощения лучистой энергии, например никелированный стальной лист с  $A=0,05$ . В сравнении с окисленным листом  $A=0,8$  никелированный лист имеет сопротивление переносу лучистой энергии в

$$\frac{\frac{1}{0,05} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{0,8} - \frac{1}{2}} = \frac{19,5}{0,75} = 26 \text{ раз}$$

больше. При наличии между телами никелированного листа ( $A=0,05$ ) теплопередача излучением уменьшится в

$$\frac{2 \cdot 0,75 + 2 \cdot 19,5}{2 \cdot 0,75} = 26 + 1 = 27 \text{ раз!}$$

#### § 107. Лучистый теплообмен тела, находящегося в окружении поверхности другого тела

Для изображенной на рис. 186 схемы лучистого теплообмена тела с выпуклой поверхностью  $F_1$ , находящегося в окружении вогнутой поверхности другого тела  $F_2$ , при температурах тел  $T_1$  и  $T_2$  и заданных степенях черноты тел  $\epsilon_1, A_1$  и  $\epsilon_2, A_2$ , требуется определить теплопередачу излучением.

В рассматриваемой задаче поток энергии эффективного излучения внутреннего тела  $I$  полностью падает па наружное тело 2:

$$Q_{\text{пад } 1, 2} = Q_{\text{эф, } 1}.$$

Поток энергии эффективного излучения наружного тела лишь частично падает на внутреннее тело:

$$Q_{\text{пад } 2, 1} = Q_{\text{эф, } 2} \varphi_{2, 1}.$$

Остальная часть потока  $(1 - \varphi_{2, 1})$  падает на само наружное тело и таким образом осуществляется внутренний радиационный теплообмен.

Теплопередача излучением тел определяется разностью:

$$Q_{1, 2} = Q_{\text{пад } 1, 2} - Q_{\text{пад } 2, 1} = Q_{\text{эф, } 1} - \varphi_{2, 1} Q_{\text{эф, } 2}. \quad (107,1)$$

Потоки эффективного излучения тел запишутся:

$$Q_{\text{эф, } 1} = F_1 \frac{\epsilon_1}{A_1} \sigma_0 T_1^4 - \left( \frac{1}{A_1} - 1 \right) Q_1; \quad (107,2)$$

$$Q_{\text{эф, } 2} = F_2 \frac{\epsilon_2}{A_2} \sigma_0 T_2^4 - \left( \frac{1}{A_2} - 1 \right) Q_2. \quad (107,3)$$

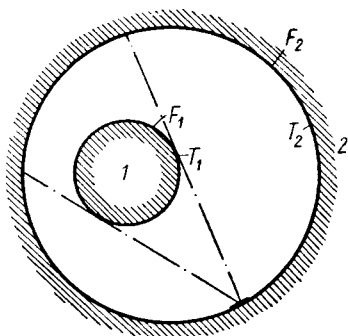


Рис. 186. К расчету лучистого теплообмена тела с окружающей оболочкой другого тела

В условиях стационарного теплового режима тел их результирующие излучения равны:

$$Q_1 \equiv Q_2 \equiv Q_{1,2}.$$

Так как  $\varphi_{1,2} = 1$ , то из условия взаимности облученности тел

$$\varphi_{1,2} F_1 = \varphi_{2,1} F_2$$

находим коэффициент облученности второго тела на первое:

$$\varphi_{2,1} = \frac{F_1}{F_2}. \quad (107,4)$$

Путем подстановки (107,2) и (107,3) в (107,1) с учетом (107,4) находим:

$$Q_{1,2} = F_1 \frac{\frac{\varepsilon_1}{A_1} \sigma_0 T_1^4 - \frac{\varepsilon_2}{A_2} \sigma_0 T_2^4}{\frac{1}{A_1} + \frac{F_1}{F_2} \left( \frac{1}{A_2} - 1 \right)}. \quad (107,5)$$

Для случаев  $F_1 \ll F_2$  ( $\frac{F_1}{F_2} \ll 1$ ) и  $\varepsilon_1 = A_1$ ,  $\varepsilon_2 = A_2$ :

$$Q_{1,2} = F_1 A_1 \sigma_0 (T_1^4 - T_2^4). \quad (107,6)$$

При  $F_1 = F_2$  (тела с плоскопараллельными поверхностями) формула (107,5) переходит в (106,1). Можно заметить, что формулу (107,5) получаем и непосредственно из формулы (105,8), положив  $\varphi_{1,2} = 1$  и  $\varphi_{2,1} = \frac{F_1}{F_2}$ .

## § 108. Интегральное уравнение лучистого обмена энергией в системе излучающих тел

Для определения лучистого обмена в системе многих излучающих тел, находящихся в прозрачной среде, приходится пользоваться интегральным уравнением. Для составления интегрального уравнения лучевого обмена энергией тел определим интенсивность энергии падающего излучения по направлению  $\vec{l}$  в точке  $M$  какого-либо тела (рис. 187), находящегося в окружении других излучающих тел:

$$I_{\text{пад}}(M, \vec{l}, \nu) = I_{\text{соб}}(P, \vec{l}, \nu) + \frac{1}{\pi} \int_{(2\pi)} \varrho(P, \vec{l}', \vec{l}, \nu) I_{\text{пад}}(P, \vec{l}', \nu) \cos(\vec{l}', \widehat{N}_P) d\omega(P, \vec{l}'), \quad (108,1)$$

где  $I_{\text{пад}}(M, \vec{l}, \nu)$  и  $I_{\text{пад}}(P, \vec{l}', \nu)$  — интенсивности энергии падающих излучений частоты  $\nu$  в рассматриваемую точку  $M$  по направлению  $\vec{l}$  и в любой другой пункт  $P$  по любому направлению  $\vec{l}'$ ;

- $I_{\text{соб}}(P, l, \nu)$  — интенсивность энергии собственного излучения тела в пункте  $P$  по рассматриваемому направлению  $\vec{l}$ ;
- $\varrho(P, \vec{l}', \vec{l}, \nu)$  — коэффициент отражения интенсивности энергии падающего излучения в пункте  $P$  из направления  $\vec{l}'$  в направление  $\vec{l}$ ;
- $\cos(\vec{l}', \widehat{N}_P)$  — косинус угла между направлением падающего луча  $\vec{l}'$  и нормалью к поверхности тела  $N_P$  в пункте  $P$ ;
- $d\omega(P, \vec{l}')$  — элементарный телесный угол по направлению луча  $\vec{l}'$  в пункте  $P$ .

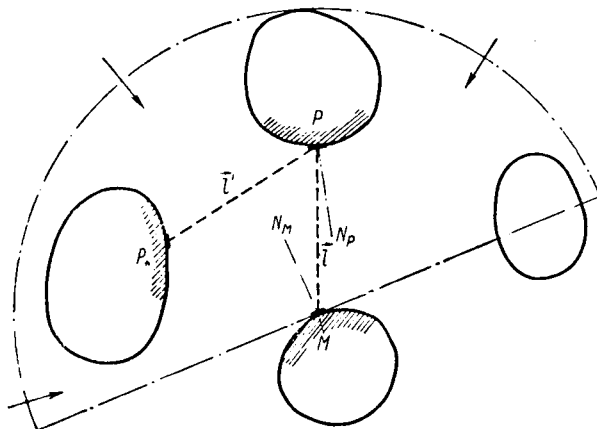


Рис. 187. К определению облученности единичной площадки тела в системе излучающих тел

При условии одинакового коэффициента отражения по всем направлениям

$$\varrho(P, \vec{l}', \vec{l}, \nu) \equiv R(P, \nu)$$

интегральное уравнение (108,1) запишется в виде:

$$I_{\text{пад}}(M, \vec{l}, \nu) = I_{\text{соб}}(P, \vec{l}, \nu) + \\ + \frac{1}{\pi} R(P, \nu) \int_{(2\pi)} I_{\text{пад}}(P, \vec{l}', \nu) \cos(\vec{l}', \widehat{N}_P) d\omega(P, \vec{l}').$$

Величина интеграла

$$\int_{(2\pi)} I_{\text{пад}}(P, \vec{l}', \nu) \cos(\vec{l}', \widehat{N}_P) d\omega(P, \vec{l}') = E_{\text{пад}}(P, \nu)$$

представляет удельный поток энергии падающего излучения для единичной площадки поверхности тела в пункте  $P$ . В связи с этим интенсивность энергии падающего излучения в рассматриваемой точке  $M$  по направлению  $\vec{l}$  в условиях одинакового отражения по всем направлениям, определяется следующим равенством:

$$I_{\text{пад}}(M, \vec{l}, \nu) = I_{\text{соб}}(P, \vec{l}, \nu) + \frac{1}{\pi} R(P, \nu) E_{\text{пад}}(P, \nu).$$

Удельный поток энергии падающего излучения в рассматриваемую точку  $M$  со всех пунктов  $P_*$  окружения находится интегрированием:

$$\begin{aligned} & \int_{(2\pi)} I_{\text{пад}}(M, \vec{l}, \nu) \cos(\vec{l}, \widehat{N}_M) d\omega(M, \vec{l}) = \\ & = \int_{(2\pi)} I_{\text{соб}}(P_*, \vec{l}, \nu) \cos(\vec{l}, \widehat{N}_M) d\omega(M, \vec{l}) + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{(2\pi)} R_*(P_*, \nu) E_{\text{пад}}(P_*, \nu) \cos(\vec{l}, \widehat{N}_M) d\omega(M, \vec{l}), \quad (108,2) \end{aligned}$$

где  $P_*$  и  $R_*(P_*, \nu)$  — отдельные пункты множества и коэффициенты отражения в них.

Для тел, подчиняющихся закону Ламберта,

$$I_{\text{соб}}(P, \vec{l}, \nu) \equiv \frac{1}{\pi} E_{\text{соб}}(P, \nu).$$

Имея в виду, что

$$\int_{(2\pi)} I_{\text{пад}}(M, \vec{l}, \nu) \cos(\vec{l}, \widehat{N}_M) d\omega(M, \vec{l}) = E_{\text{пад}}(M, \nu)$$

и  $d\omega = \frac{dF_P \cos(\vec{l}, \widehat{N}_P)}{l_{MP}^2}$ , приходим к следующему интегральному уравнению лучевого обмена энергией системы излучающих тел:

$$E_{\text{пад}}(M, \nu) = \int_{(V)} [E_{\text{соб}}(P_*, \nu) + R_*(P_*, \nu) E_{\text{пад}}(P_*, \nu)] K(M, P) dF_{P_*}. \quad (108,3)$$

Множитель

$$K(M, P) = \frac{\cos(\vec{l}, \widehat{N}_M) \cos(\vec{l}, \widehat{N}_P)}{\pi l_{MP}^2} \quad (108,4)$$

называется ядром интегрального уравнения и представляет геометрическую характеристику лучевого обмена двух единичных

площадок, пересекающих лучевой поток по направлению  $\vec{l}$ , расположенных на расстоянии  $l_{MP}$  под углами  $\vec{l}, \widehat{N}_M$  и  $\vec{l}, \widehat{N}_P$  (рис. 188).

Физический смысл составленного интегрального уравнения лучевого обмена энергией тел (108,3) заключается в том, что удельный поток энергии падающего излучения, или освещенность площадки в какой-либо точке  $M$ , со всех пунктов  $P$  окружающих тел определяется множеством энергии лучей, падающих на рассматриваемую площадку от собственного и отраженного излучений окружающих тел.

Сумма удельных потоков энергии собственного и отраженного излучений

$$E_{\text{соб}}(P_*, \nu) + R_*(P_*, \nu) E_{\text{пад}}(P_*, \nu) = E_{\text{эф}}(P_*, \nu)$$

представляет собой удельный поток энергии эффективного излучения. Пользуясь эффективным излучением, интегральное уравнение лучевого обмена энергией можно записать в виде:

$$E_{\text{пад}}(M, \nu) = \int_{(F)} E_{\text{эф}}(P_*, \nu) K(M, P) dF_{P_*}. \quad (108,5)$$

В частном случае термодинамического равновесия системы излучающих тел

$$E_{\text{пад}}(M, \nu) = E_{\text{эф}}(P, \nu) \equiv E_{\text{черн}}(T, \nu),$$

где  $E_{\text{черн}}(T, \nu)$  — удельный поток энергии излучения абсолютно черного тела с температурой  $T$ .

Таким образом, приходим к следующему интегральному равенству:

$$\int_{(F)} \frac{\cos(\vec{l}, \widehat{N}_M) \cos(\vec{l}, \widehat{N}_P)}{\pi l_{MP}^2} dF_{P_*} \equiv \int_{(F)} K(M, P) dF_{P_*} = 1. \quad (108,6)$$

Полученное равенство представляет важную геометрическую особенность лучевого обмена в системе излучающих тел: *общая облученность любой элементарной площадки поверхности геометрическим множеством лучей, испускаемых со всех окружающих поверхностей, равна единице.*

Представляя общую облученность рассматриваемой элементарной площадки в виде суммы облученностей с отдельных окружающих поверхностей (рис. 189), можно написать следующее

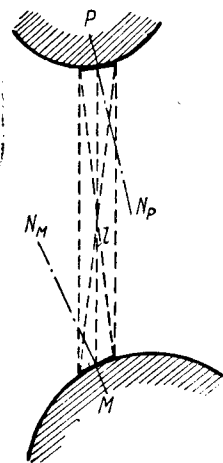


Рис. 188. Геометрическая характеристика взаимного лучевого обмена двух элементарных площадок



равенство:

$$\int_{(F_1)} K(M, P_1) dF_{P_1} + \int_{(F_2)} K(M, P_2) dF_{P_2} + \dots \\ \dots + \int_{(F_n)} K(M, P_n) dF_{P_n} = 1.$$

Обозначая отдельные облученности

$$\varphi_{M, 1} = \int_{(F_1)} \frac{\cos(\widehat{l_{M, P_1}, N_M}) \cos(\widehat{l_{M, P_1}, N_{P_1}})}{\pi l_{M, P_1}^2} dF_{P_1}, \\ \dots \\ \varphi_{M, n} = \int_{(F_n)} \frac{\cos(\widehat{l_{M, P_n}, N_M}) \cos(\widehat{l_{M, P_n}, N_{P_n}})}{\pi l_{M, P_n}^2} dF_{P_n},$$

получаем равенство:

$$\sum_1^n \varphi_{M, i} = 1; \quad (108,7)$$

$\varphi_{M, i}$  называют коэффициентом облученности единичной поверхности в точке  $M$  множеством падающих лучей, испускаемых с поверхности  $F_i$  (рис. 189).

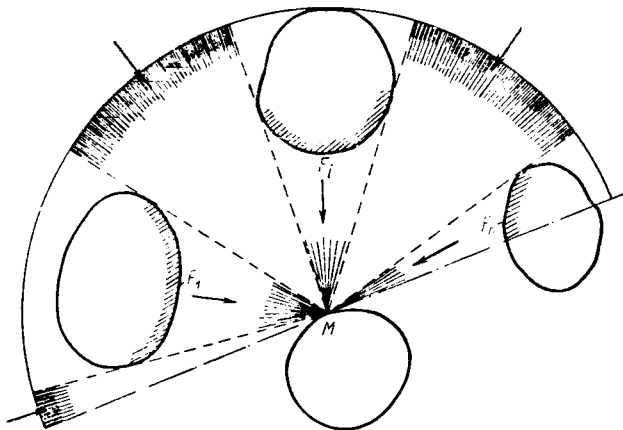


Рис. 189. К определению общей облученности элементарной площадки

Из условия симметрии взаимной облученности двух элементарных площадок  $dF_P$  и  $dF_M$  (рис. 188) имеем следующее равенство:

$$\frac{\cos(\widehat{l_{MP}, N_M}) \cos(\widehat{l_{MP}, N_P})}{\pi l_{MP}^2} dF_P = \frac{\cos(\widehat{l_{MP}, N_P}) \cos(\widehat{l_{MP}, N_M})}{\pi l_{MP}^2} dF_M$$

или

$$K(M, P) dF_P = K(P, M) dF_M \quad (108,8)$$

и

$$d\varphi_{MP} = d\varphi_{PM}. \quad (108,9)$$

Это равенство отражает другую важную геометрическую особенность лучевого обмена: *взаимная облученность двух элементарных поверхностей одинакова.*

Для взаимного лучевого обмена поверхностей  $F_1$  и  $F_2$  имеем равенство:

$$\int_{(F_1)} dF_1 \int_{(F_2)} d\varphi_{1,2} = \int_{(F_2)} dF_2 \int_{(F_1)} d\varphi_{2,1}.$$

Пользуясь средними коэффициентами облученности поверхностей

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varphi}_{1,2} &= \frac{\int_{(F_1)} dF_1 \int_{(F_2)} d\varphi_{1,2}}{F_1}, \\ \bar{\varphi}_{2,1} &= \frac{\int_{(F_2)} dF_2 \int_{(F_1)} d\varphi_{2,1}}{F_2}, \end{aligned} \right\} \quad (108,10)$$

приходим к равенству:

$$F_1 \bar{\varphi}_{1,2} = F_2 \bar{\varphi}_{2,1}.$$

Геометрические особенности лучевого обмена: *постоянство суммарной облученности (108,7) и равенство взаимной облученности элементарных площадок (108,9)* — широко используются в расчетах лучевого обмена энергией тел.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЛУЧЕННОСТИ ТЕЛ

### § 109. Метод лучевой алгебры для определения облученности поверхностей

Сущность метода лучевой алгебры (предложенного Г. Л. Поляком [43]) можно пояснить на примере лучевого обмена трех выпуклых поверхностей  $F_1$ ,  $F_2$  и  $F_3$  (рис. 190). Вводя понятие *взаимных поверхностей лучевого обмена*

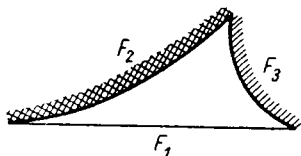


Рис. 190. К расчету лучевого обмена трех тел замкнутой излучающей системы

$$\left. \begin{aligned} F_1 \bar{\varphi}_{1,2} = F_2 \bar{\varphi}_{2,1} &\equiv H_{1,2} \equiv H_{2,1}, \\ F_1 \bar{\varphi}_{1,3} = F_3 \bar{\varphi}_{3,1} &\equiv H_{1,3} \equiv H_{3,1}, \\ F_2 \bar{\varphi}_{2,3} = F_3 \bar{\varphi}_{3,2} &\equiv H_{2,3} \equiv H_{3,2}, \end{aligned} \right\} \quad (109,1)$$

из условия суммарной облученности применительно к системе] трех излучающих тел можно написать следующие равенства:

$$\left. \begin{aligned} H_{1,2} + H_{1,3} &= F_1, \\ H_{2,1} + H_{2,3} &= F_2, \\ H_{3,1} + H_{3,2} &= F_3. \end{aligned} \right\} \quad (109,2)$$

Складывая эти равенства и имея в виду равенства (109,1), получаем:

$$H_{1,2} + H_{1,3} + H_{2,3} = \frac{1}{2} (F_1 + F_2 + F_3).$$

Путем вычитания из этого равенства поочередно каждого из равенств (109,2) находим формулы для определения взаимных

поверхностей лучевого обмена:

$$\left. \begin{aligned} H_{1,2} &= \frac{1}{2} (F_1 + F_2 - F_3), \\ H_{1,3} &= \frac{1}{2} (F_1 + F_3 - F_2), \\ H_{2,3} &= \frac{1}{2} (F_2 + F_3 - F_1). \end{aligned} \right\} \quad (109,3)$$

Соответствующие средние коэффициенты облученности поверхностей находятся:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varphi}_{1,2} &= \frac{F_1 + F_2 - F_3}{2F_1}, \\ \bar{\varphi}_{1,3} &= \frac{F_1 + F_3 - F_2}{2F_1}, \\ \bar{\varphi}_{2,3} &= \frac{F_2 + F_3 - F_1}{2F_2}. \end{aligned} \right\} \quad (109,4)$$

Полученные формулы особенно просто применить для расчета облученностей двух поверхностей, которые ограничены лишь в одном измерении.

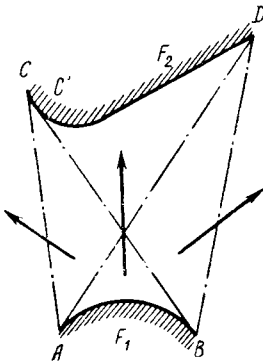


Рис. 191. К расчету облученности двух поверхностей

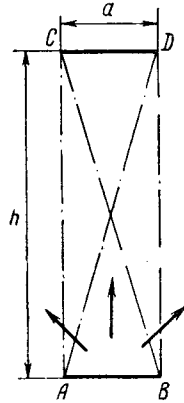


Рис. 192. К расчету облученности двух одинаковых полос неограниченной длины

Пусть, например, требуется рассчитать облученность двух поверхностей  $F_1$  и  $F_2$ , ограниченных в измерении на пересекающей их ортогональной плоскости (рис. 191).

Ограничивая линии следа поверхностей на пересекающей плоскости замкнутым контуром  $ACC'DB$ , средний коэффициент облученности  $\bar{\varphi}_{1,2}$  можно определить как разность:

$$\bar{\varphi}_{1,2} = 1 - \bar{\varphi}_{AB, BD} - \bar{\varphi}_{AB, AC}.$$

Согласно формулам (109,4) имеем:

$$\overline{\varphi}_{\overline{AB}, \overline{BD}} = \frac{\overline{AB} + \overline{BD} - \overline{AD}}{2\overline{AB}} ;$$

$$\overline{\varphi}_{\overline{AB}, \overline{AC}} = \frac{\overline{AB} + \overline{AC} - \overline{BC}}{2\overline{AB}} .$$

Вычитая сумму коэффициентов облученности из единицы, находим:

$$\overline{\varphi}_{1,2} = \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2\overline{AB}} - \frac{\overline{BD} + \overline{AC}}{2\overline{AB}} . \quad (109,5)$$

Например, для двух одинаковых полос (рис. 192) имеем:

$$\overline{AB} = \overline{CD} = a; \quad \overline{AC} = \overline{BD} = h.$$

Так как  $\overline{AD} = \overline{BC} = \sqrt{a^2 + h^2}$ , то для определения среднего коэффициента облученности полос находим формулу:

$$\overline{\varphi}_{1,2} = \sqrt{1 + \left(\frac{h}{a}\right)^2} - \frac{h}{a} . \quad (109,6)$$

Пользуясь этим методом, не прибегая к сложному двухкратному интегрированию (формулы 108,10), можно рассчитать средние коэффициенты облученности поверхностей более сложных форм и расположения.

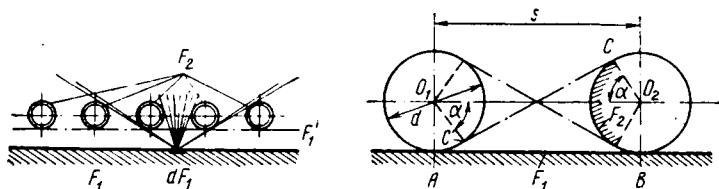


Рис. 193. К расчету облученности поверхности ряда труб от лучеиспускающей плоскости

В качестве примера вычислим средний коэффициент облученности поверхности ряда труб  $F_2$  от лучеиспускания плоскости  $F_1$  (рис. 193). Эта задача имеет практическое применение в технике и встречается, например, в расчетах лучистого обмена в котельных топках.

Если размеры плоскости лучеиспускания  $F_1$  и длина труб достаточно велики, то расстояние между поверхностями  $F_1$  и  $F_2$  не имеет значения для лучевого обмена, так как все лучи, испускаемые плоскостью  $F_1$ , пройдут сквозь плоскость, касательную к трубам. Поэтому касательную плоскость можно рассматривать как поверхность лучеиспускания.

Соответственно замкнутому контуру (рис. 193)  $ABCC'A$ , согласно формулам (109,4), средний коэффициент облученности

поверхности труб  $F_2$  лучеиспусканием плоскости  $F_1$  определяется равенством:

$$\bar{\varphi}_{1,2} = 2\bar{\varphi}_{\overline{AB}, \overline{BC}} = \frac{\overline{AB} + \overline{BC} - \overline{AC'C}}{2\overline{AB}}.$$

Так как  $\overline{AB} = s$  (расстояние между осями труб),

$$\overline{BC} = \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \frac{d}{2}, \quad \overline{AC'C} = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \frac{d}{2} + d \operatorname{tg} \alpha, \text{ то}$$

$$\bar{\varphi}_{1,2} = \frac{s - d(\operatorname{tg} \alpha - \alpha)}{s}.$$

Из прямоугольного треугольника имеем:

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\left(\frac{s}{d}\right)^2 - 1}; \quad \alpha = \operatorname{arctg} \sqrt{\left(\frac{s}{d}\right)^2 - 1}.$$

Путем подстановки этих величин в формулу для  $\varphi_{1,2}$  окончательно находим:

$$\bar{\varphi}_{1,2} = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{d}{s}\right)^2} + \frac{d}{s} \operatorname{arctg} \sqrt{\left(\frac{s}{d}\right)^2 - 1}. \quad (109,7)$$

Для различных отношений  $s/d$  средний коэффициент облученности плоскостью лучеиспускания  $F_1$  поверхности ряда труб составит:

Таблица 17

$s/d = 1$	1,5	2	3	4	5	10
$\bar{\varphi}_{1,2} = 1$	0,817	0,658	0,467	0,36	0,294	0,151

Средний коэффициент облученности от плоскости  $F_1$  быстро падает с увеличением просвета между трубами ( $s/d$ ).

Взаимная поверхность лучевого обмена плоскости лучеиспускания с поверхностью труб определяется произведениями:

$$H_{1,2} = \bar{\varphi}_{1,2} F_1 = \bar{\varphi}_{2,1} F_2. \quad (109,8)$$

Если за первым рядом труб находится второй ряд (рис. 194), то можно вычислить средний коэффициент облученности от плоскости лучеиспускания и второго ряда труб. Особенно просто средний коэффициент облученности второго ряда труб найти, если как первое приближение принять равномерное распределение интенсивности лучеиспускания плоскости  $F'_1$ , расположенной перед вторым рядом труб (рис. 194). Такое допущение отвечает условию  $s_2/d > s_1/d$ . Лучистый поток, падающий на плоскость  $F'_1$  за первым рядом, составляет долю  $(1 - \bar{\varphi}_{1,2})$  от потока лучеиспускания плоскости  $F_1$ , расположенной перед первым рядом.

От потока лучей, испускаемых плоскостью  $F_1'$ , падает на второй ряд труб доля  $\bar{\varphi}_{1',2'}$  (облученность от плоскости  $F_1'$  поверхности второго ряда труб  $F_2'$ ). Следовательно, средний коэффициент облученности второго ряда труб лучеиспусканием плоскости  $F_1'$ , расположенной перед первым рядом труб, составит:

$$\bar{\varphi}_{1,2'} = (1 - \bar{\varphi}_{1,2}) \bar{\varphi}_{1',2'}$$

Средний коэффициент облученности обоих рядов труб представляется суммой:

$$\bar{\varphi}_{1,2,2'} = \bar{\varphi}_{1,2} + \bar{\varphi}_{1,2'} = \bar{\varphi}_{1,2} + (1 - \bar{\varphi}_{1,2}) \bar{\varphi}_{1',2'} \quad (109,9)$$

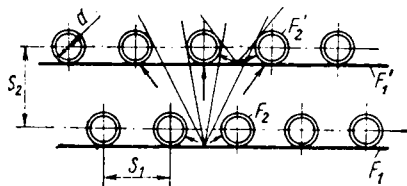


Рис. 194. К расчету облученности поверхностей двух рядов труб от лучеиспускающей плоскости

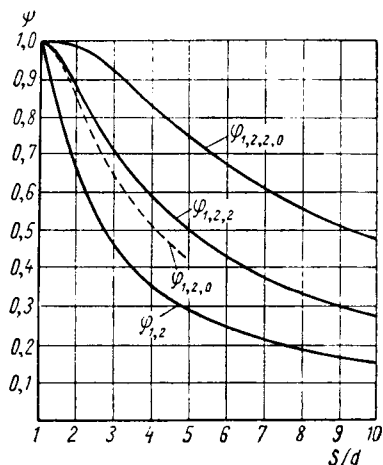


Рис. 195. Средняя облученность поверхности рядов труб от лучеиспускающей плоскости в зависимости от относительного расстояния между осями труб в ряду

Если оба ряда труб имеют одинаковое отношение  $s/d$ , то

$$\bar{\varphi}_{1,2} = \bar{\varphi}_{1',2'}$$

и формула среднего коэффициента облученности от плоскости  $F_1'$  обоих рядов труб запишется:

$$\bar{\varphi}_{1,2,2'} = \bar{\varphi}_{1,2}(2 - \bar{\varphi}_{1,2}) \quad (109,10)$$

Для различных отношений  $s/d$  средний коэффициент облученности от плоскости  $F_1'$  двух одинаковых рядов труб составит:

Таблица 18

$s/d = 1$	1,5	2	3	4	5	10
$\bar{\varphi}_{1,2,2'} = 1$	0,967	0,883	0,715	0,59	0,5	0,279

На рис. 195 представлены  $\bar{\varphi}_{1,2}$  и  $\bar{\varphi}_{1,2,2'}$  в зависимости от  $s/d$ . Необходимо иметь в виду, что формула (109,10) точно учиты-

вает лишь облученность первого ряда труб; облученность второго ряда учитывается приближенно, так как допускалась равномерная облученность плоскости перед вторым рядом труб. Однако ошибка оказывается не столь велика, так как из общего лучеиспускания плоскости, расположенной перед первым рядом труб, при малых отношениях  $s/d$  главная часть лучевого потока падает на первый ряд труб, а при больших отношениях  $s/d$  неравномер-

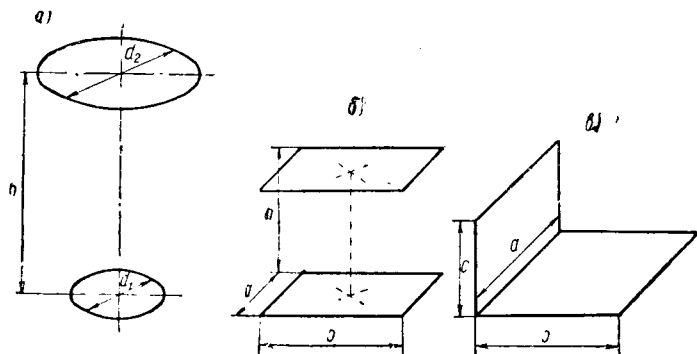


Рис. 196. К определению облученности двух плоских поверхностей: а) два параллельно расположенных круга с центрами на общей нормали; б) два параллельно расположенных прямоугольника с центрами тяжести на общей нормали; в) два прямоугольника, расположенных под прямым углом

ность облученности плоскости перед вторым рядом труб уменьшается.

Метод лучевой алгебры позволяет рассчитать облученность различных поверхностей, произвольно расположенных в пространстве.

Ниже приведены расчетные формулы средних коэффициентов облученности двух плоских поверхностей простейшей формы при различном расположении.

Два круга диаметрами  $d_1$  и  $d_2$ , расположенные на одной нормали к своим центрам, с расстоянием между ними  $h$  (рис. 196, а):

$$\bar{\varphi}_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left( \frac{d_2}{d_1} \right)^2 + \left( 2 \frac{h}{d_1} \right)^2 - \sqrt{\left[ 1 + \left( \frac{d_2}{d_1} \right)^2 + \left( 2 \frac{h}{d_1} \right)^2 \right]^2 - 4 \left( \frac{d_2}{d_1} \right)^2} \right\}. \quad (109,11)$$

Если  $d_1 = d_2$ , то формула упрощается и переходит в следующую:

$$\bar{\varphi}_{1,2} = \left[ \frac{h}{d} - \sqrt{1 + \left( \frac{h}{d} \right)^2} \right]^2. \quad (109,12)$$

Два одинаковых прямоугольника со сторонами  $a$  и  $b$ , расположенные на одной нормали к своим центрам тяжести, с расстоя-



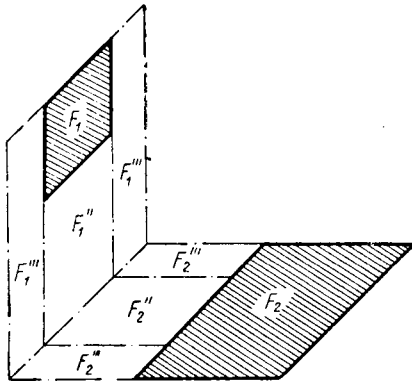
нием между ними  $h$  (рис. 196, б):

$$\bar{\Phi}_{1,2} = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{2}{a} \sqrt{a^2 + h^2} \operatorname{arctg} \frac{b}{\sqrt{a^2 + h^2}} + \frac{2}{b} \sqrt{b^2 + h^2} \operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{b^2 + h^2}} - 2 \frac{h}{a} \operatorname{arctg} \frac{b}{h} - 2 \frac{h}{b} \operatorname{arctg} \frac{a}{h} + \frac{h^2}{ab} \ln \frac{(a^2 + h^2)(b^2 + h^2)}{(a^2 + b^2 + h^2)h^2} \right]. \quad (109,13)$$

Для двух квадратов  $a = b$ , формула несколько упрощается:

$$\bar{\Phi}_{1,2} = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{4}{a} \sqrt{a^2 + h^2} \operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}} - 4 \frac{h}{a} \operatorname{arctg} \frac{a}{h} + \left( \frac{h}{a} \right)^2 \ln \frac{(a^2 + h^2)^2}{h^2(2a^2 + h^2)} \right]. \quad (109,14)$$

Два прямоугольника шириной  $b$  и  $c$ , расположенные под прямым углом, с общей длиной  $a$  (рис. 196, в):



$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{1,2} = \frac{1}{\pi} & \left[ \frac{c}{b} \operatorname{arctg} \frac{a}{c} + \operatorname{arctg} \frac{a}{b} - \sqrt{\left( \frac{c}{b} \right)^2 + 1} \times \right. \\ & \times \operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{b^2 + c^2}} + \frac{c^2}{4ab} \ln \frac{(a^2 + b^2 + c^2)c^2}{(a^2 + c^2)(b^2 + c^2)} + \\ & + \frac{b}{4a} \ln \frac{(a^2 + b^2 + c^2)b^2}{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)} - \left. \frac{a}{4b} \ln \frac{(a^2 + b^2 + c^2)a^2}{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)} \right]. \end{aligned} \quad (109,15)$$

Рис. 197. К расчету облученности поверхностей методом лучевой алгебры

Метод лучевой алгебры позволяет рассчитать облученность и в более сложных случаях расположения излучающих поверхностей. Например, для условий рис. 197 взаимная поверхность лучеобмена находится как разность:

$$H_{F_1, F_2} = H_{F_1', F_2'} - H_{F_1'', F_2''} - 2H_{F_1''', F_2''}$$

и для среднего коэффициента облученности получаем формулу:

$$\bar{\Phi}_{1,2} = \frac{H_{F_1, F_2}}{F_1}.$$

Величины отдельных взаимных поверхностей лучеобмена определяются произведением:

$$H_{F'_1, F'_2} = \bar{\Phi}_{F'_1, F'_2} F'_1,$$

$$H_{F''_1, F''_2} = \bar{\Phi}_{F''_1, F''_2} F''_1,$$

$$H_{F'''_1, F'''_2} = \bar{\Phi}_{F'''_1, F'''_2} F'''_1,$$

где отдельные коэффициенты облученности  $\bar{\Phi}_{F'_1 F'_2}$ ,  $\bar{\Phi}_{F''_1 F''_2}$ ,  $\bar{\Phi}_{F'''_1 F'''_2}$  определяются по формуле (109,15), а  $F'_1 = F_1 + F''_1 + 2F'''_1$ ,  $F'_2 = F_2 + F''_2 + 2F'''_2$ .

### § 110. Метод проекций для определения облученности поверхностей

Для определения облученности поверхностей применяют различные аналитические, графические и экспериментальные методы.

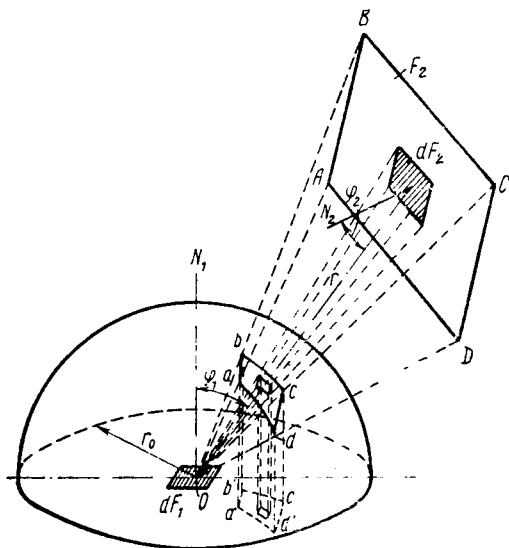


Рис. 198. К определению облученности поверхностей методом проекций

Наиболее известным является метод определения проекций облучаемой поверхности на плоскость лучеиспускания элементарной площадки (рис. 198).

Сущность этого метода заключается в следующем. Если из центра лучеиспускающей элементарной площадки  $dF_1$  провести контур пучка лучей, падающих на облучаемую поверхность  $F_2$ , а затем

спроектировать вырезанную этим контуром лучей площадь поверхности полусферы на плоскость лучеиспускающей площадки, то отношением проекции площади  $F'_2$  ко всей площади круга определяется облученность  $F_2$  с площадки  $dF_1$ :

$$\varphi_{dF_1, F_2} = \frac{F'_2_{\text{проектн}}}{\pi r_0^2}.$$

Для доказательства выделим на поверхности  $F_2$  элементарную площадку  $dF_2$ . Контур пучка лучей с  $dF_1$  на  $dF_2$  вырезает на поверхности полусферы радиуса  $r_0$  площадку, равную

$$dF_2 \cos \varphi_{2,2},$$

где  $r$  — расстояние между площадками.

Проекция вырезанной на оболочке полусферы площадки на плоскость лучеиспускания площадки  $dF_1$  равняется

$$dF_2 \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{r^2} r_0^2.$$

Разделив эту величину на площадь круга  $\pi r_0^2$ , получаем облученность элементарной площадки  $dF_2$  с площадки  $dF_1$ :

$$d\varphi_{dF_1, dF_2} = \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{\pi r^2} dF_2.$$

Распространяя это правило на весь контур облучения поверхности  $F_2$  с элементарной площадки  $dF_1$ , находим:

$$\varphi_{dF_1, F_2} = \int_{(F_2)} \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{\pi r^2} dF_2.$$

Вычисляя подобным образом облученность  $F_2$  со всей поверхности лучеиспускания  $F_1$ , находим взаимную поверхность лучевого обмена поверхностей  $F_1$  и  $F_2$ :

$$H_{1,2} = \int_{(F_1)} dF_1 \int_{(F_2)} \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{\pi r^2} dF_2.$$

Средняя облученность с  $F_1$  на  $F_2$  определяется формулой:

$$\varphi_{1,2} = \frac{H_{1,2}}{F_1}.$$

В качестве примера применения метода проекций вычислим облученность любой элементарной площадки на плоскости от излучающего шара диаметром  $d$ , находящегося на высоте  $h$  от плоскости (рис. 199).

Контур лучей  $O'A$ ,  $O'B$ , исходящих из центра элементарной площадки на плоскости, вырезает на поверхности сферы радиуса  $O'A$  площадь, соответствующую дуге  $AB$ . Величина этой площади

находится расчетом по известным  $r = \frac{d}{2}$ ,  $h$  и  $R$  — расстоянию облучаемой площадки от проекции центра излучающего шара на плоскости (рис. 199).

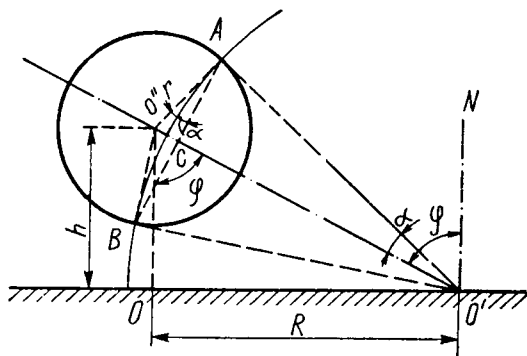


Рис. 199. К определению облученности элементарной площадки на плоскости от излучающего шара

Определяя величины

$$\overline{O'A^2} = h^2 + R^2 - r^2, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{\sqrt{h^2 + R^2 - r^2}},$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{r}{\sqrt{h^2 + R^2 - r^2}}, \quad \frac{1}{2} \widehat{AB} = \sqrt{h^2 + R^2 - r^2} \operatorname{arctg} \frac{r}{\sqrt{h^2 + R^2 - r^2}},$$

$$F_{\widehat{AB}} = \pi (h^2 + R^2 - r^2) \left[ \operatorname{arctg} \frac{r}{\sqrt{h^2 + R^2 - r^2}} \right]^2,$$

$$\cos \varphi = \frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}},$$

находим коэффициент облученности:

$$\varphi_{O, F_{\text{сферы}}} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}} \left[ \operatorname{arctg} \frac{r}{\sqrt{h^2 + R^2 - r^2}} \right]^2.$$

Наибольшая облученность отвечает площадке, находящейся под сферой по направлению нормали к плоскости от центра сферы:

$$\varphi_{O, F_{\text{сферы}}} = \left[ \operatorname{arctg} \frac{r}{\sqrt{h^2 - r^2}} \right]^2.$$

При этом, если  $h=r$ , то  $\varphi_{O, F_{\text{сферы}}} = 1$ .

Для экспериментального определения облученности поверхностей методом проекций были предложены различные приборы.

Например, известен механический интегратор со световым зайчиком для обводки контура облучаемой поверхности (рис. 200).

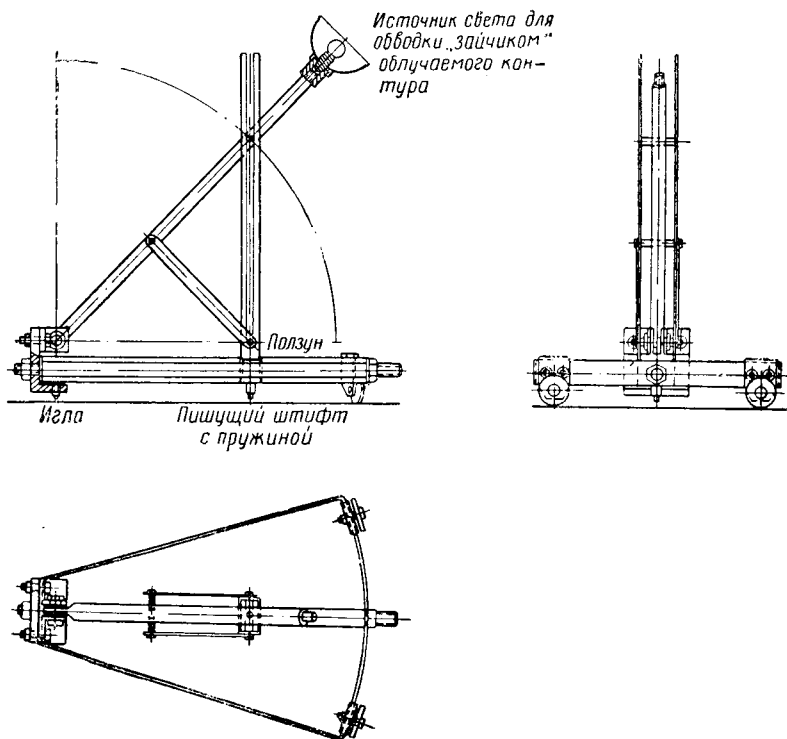


Рис. 200. Механический интегратор со световым зайчиком для определения облученности элементарной площадки от излучающего тела

Известен метод фотографирования освещаемых поверхностей с дальнего расстояния (рис. 201).

### § 111. Метод светового моделирования для определения облученности поверхностей

Метод светового моделирования основывается на полной аналогии лучевого обмена в любых частях спектра излучения тел. Метод световых моделей с успехом может быть применен для определения облученности поверхностей в самых сложных случаях.

Пусть, например, требуется определить облученность поверхностей  $F_1$  и  $F_2$  при произвольном расположении в пространстве

(рис. 202). Поместим вне рассматриваемых поверхностей две вспомогательные плоские поверхности  $F'_0$  и  $F''_0$  с размерами площади, достаточными для того, чтобы контур взаимной облученности поверхностей  $F_1$  и  $F_2$  находился внутри контура взаимной облученности вспомогательных поверхностей  $F'_0$  и  $F''_0$ .

Применяя метод лучевой алгебры, можно написать ряд равенств для определения взаимных поверхностей лучеобмена при различных условиях:

а) при отсутствии между вспомогательными поверхностями  $F'_0$  и  $F''_0$  первой основной поверхности  $F_1$ :

$$H_{F'_0, F''_0} (F_1=0) = H_{F'_0, F''_0} + H_{F''_0, F_1}; \quad (111,1)$$

б) при отсутствии второй основной поверхности  $F_2$ :

$$H_{F'_0, F''_0} (F_2=0) = H_{F'_0, F''_0} + H_{F'_0, F_2}; \quad (111,2)$$

в) при отсутствии обеих ос-

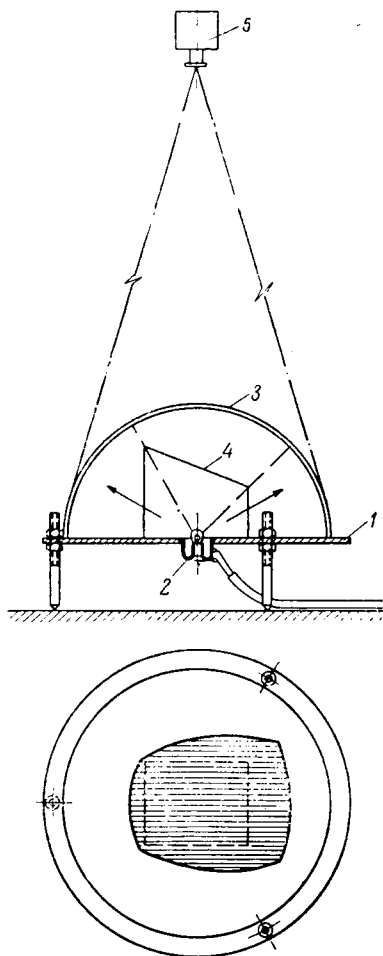


Рис. 201. Световой проектор для определения облученности тел: 1 — диск (плоскость проекции); 2 — источник света (электролампа); 3 — молочноматовая сферическая оболочка; 4 — облучаемая поверхность; 5 — фотокамера

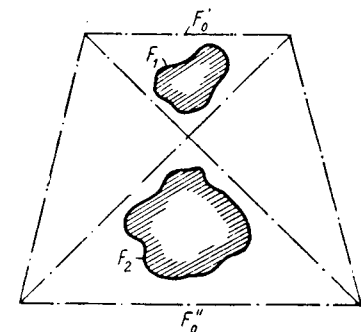


Рис. 202. К определению облученности тел методом световых моделей

новных излучающих поверхностей  $F_1$  и  $F_2$ :

$$H_{F'_0, F''_0} (F_1=0, F_2=0) = H_{F'_0, F''_0} + H_{F'_0, F_2} + H_{F''_0, F_1} + H_{F_1, F_2}. \quad (111,3)$$

Из условий (111,1)—(111,3) находим взаимную поверхность лучевого обмена основных поверхностей  $F_1$  и  $F_2$ :

$$H_{F_1, F_2} = H_{F'_0, F''_0 (F_1=0, F_2=0)} + H_{F'_0, F''_0} - H_{F'_0, F''_0 (F_1=0)} - H_{F'_0, F''_0 (F_2=0)}. \quad (111,4)$$

Соответственно определяется средний коэффициент облученности поверхностей  $F_1$  и  $F_2$ :

$$\bar{\Phi}_{1,2} = \frac{F'_0}{F_1} (\bar{\Phi}_{F'_0, F''_0 (F_1=0, F_2=0)} + \bar{\Phi}_{F'_0, F''_0} - \bar{\Phi}_{F'_0, F''_0 (F_1=0)} - \bar{\Phi}_{F'_0, F''_0 (F_2=0)}) \quad (111,5)$$

и находится

$$\bar{\Phi}_{2,1} = \bar{\Phi}_{1,2} \frac{F_1}{F_2}.$$

Если вспомогательную поверхность  $F'_0$  устроить светящейся, а основные поверхности черными, то измеряя свечение поверхности  $F'_0$  и освещенность  $F''_0$  при различных условиях:

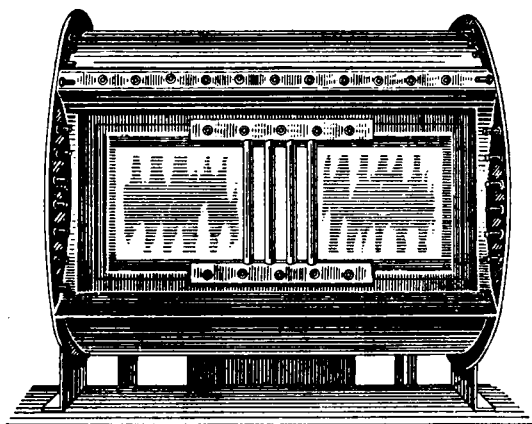


Рис. 203. Световая камера с диффузионно-излучающим окном

а) при отсутствии обеих основных поверхностей ( $F_1=0$ ;  $F_2=0$ ),  
 б) при наличии обеих основных поверхностей,  
 в) при отсутствии первой основной поверхности ( $F_1=0$ ),  
 г) при отсутствии второй основной поверхности ( $F_2=0$ ), можно определить соответствующие средние облученности:

$$\bar{\Phi}_{F'_0, F''_0 (F_1=0, F_2=0)}; \bar{\Phi}_{F'_0, F''_0}; \bar{\Phi}_{F'_0, F''_0 (F_1=0)}; \bar{\Phi}_{F'_0, F''_0 (F_2=0)}.$$

По формуле (111,5) можно вычислить среднюю облученность основных поверхностей  $\bar{\Phi}_{1,2}$  или  $\bar{\Phi}_{2,1}$ .

Святящейся поверхностью может служить световая камера с окном, закрытым диффузно пропускающим свет листом бумаги или пластиной молочного стекла (рис. 203). В качестве измерителей свечения и освещенности можно применить фотоэлементы или засвечивать определенное время фотопленку с последующей

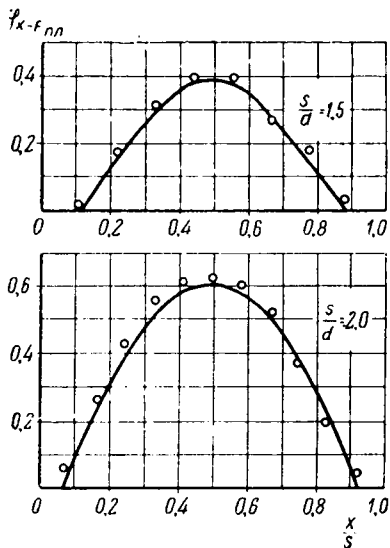


Рис. 204. Облученность плоскости через однорядный пучок труб, при различном расстоянии между осями (точки отвечают измеренной облученности; кривая — вычисленной облученности)

обработкой и фотометрированием. При правильно поставленных измерениях результаты определения облученности поверхностей методом светового моделирования получаются достаточно точными.

На рис. 204 представлена измеренная и вычисленная облученность плоскости через однорядный пучок труб с различным расстоянием между трубами.

## § 112. Определение облученности поверхностей с участием отражения излучения от других поверхностей

В ряде случаев задача об облученности поверхностей осложняется влиянием отражения излучения от других поверхностей. Например, такая задача встречается при расчете облученности трубчатых экранов в котельных топках, за которыми находится



отражающая стенка обмуровки (рис. 205). Если за трубами экрана находится стенка, полностью отражающая излучение, падающее на нее через просветы труб, то трубы, помимо прямой радиации плоскости лучеиспускания  $F_1$ , облучаются отраженной радиацией.

Средний коэффициент облученности  $\bar{\varphi}_{1,2}$  труб экрана прямой радиацией плоскости  $F_1$  находится по формуле (109,7). Поток лучей, падающих на отражающую стенку, составляет долю  $(1 - \bar{\varphi}_{1,2})$  от потока лучеиспускания плоскости  $F_1$  (рис. 205, а). Если стенка,

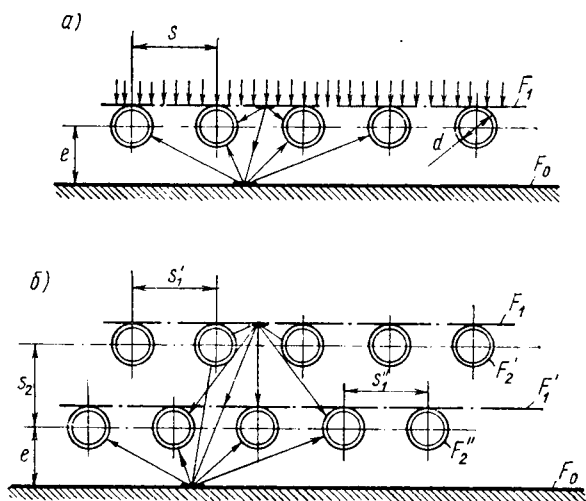


Рис. 205. К определению облученности поверхности рядов труб с отражением от задней стенки: а) однорядный пучок; б) двухрядный пучок

полностью отражающая радиацию, находится на достаточно большом расстоянии за трубами ( $e > s/d$ ), то средняя облученность экрана отраженной радиацией стенки составит долю  $\bar{\varphi}_{0,2} (1 - \bar{\varphi}_{1,2})$  от пропущенной через просветы труб радиации. Так как для рассматриваемой схемы облучения поверхностей  $\bar{\varphi}_{0,2} = \bar{\varphi}_{1,2}$ , то средняя облученность труб экрана прямой и отраженной радиацией составит:

$$\bar{\varphi}_{1,2,0} = \bar{\varphi}_{1,2} + \bar{\varphi}_{1,2} (1 - \bar{\varphi}_{1,2}) = \bar{\varphi}_{1,2} (2 - \bar{\varphi}_{1,2}). \quad (112,2)$$

Если трубчатый экран составлен из двух рядов труб с различным расстоянием между осями труб в ряду ( $\frac{s'_1}{d} \neq \frac{s''_1}{d}$ ) (рис. 205, б), то при достаточно больших расстояниях между рядами труб ( $\frac{s_2}{d} > \frac{s_1}{d}$ ) и труб от стенки ( $e > \frac{s_1}{d}$ ) средняя облу-

ченность двухтрубного экрана с отражением от стенки определяется формулой:

$$\bar{\varphi}_{1, 2', 2'', o} = \bar{\varphi}_{1, 2'} + \bar{\varphi}_{1, 2''}(1 - \bar{\varphi}_{1, 2'}) + \\ + [\bar{\varphi}_{1, 2'} + \bar{\varphi}_{1, 2''}(1 - \varphi_{1, 2'})] \{1 - [\bar{\varphi}_{1, 2'} + \bar{\varphi}_{1, 2''}(1 - \bar{\varphi}_{1, 2'})]\} \quad (112,2)$$

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Средняя облучен-} \\ \text{ность обоих рядов} \\ \text{труб с отражением} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} \text{Облучен-} \\ \text{ность пер-} \\ \text{вого ряда} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{l} \text{Облучен-} \\ \text{ность второ-} \\ \text{го ряда} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{l} \text{Облучен-} \\ \text{ность отра-} \\ \text{жением} \end{array} \right]$$

Если оба ряда труб в экране расставлены на одинаковом расстоянии между осями ( $s'_1 = s''_1$ ) и имеют одинаковый диаметр ( $\frac{s'_1}{d} = \frac{s''_1}{d}$ ), то  $\bar{\varphi}_{1, 2'} = \bar{\varphi}_{1, 2''} = \varphi_{1, 2}$ , и формула (112,2) переходит в следующую:

$$\bar{\varphi}_{1, 2', 2'', o} = \bar{\varphi}_{1, 2}(2 - \bar{\varphi}_{1, 2}) [2 - \bar{\varphi}_{1, 2}(2 - \bar{\varphi}_{1, 2})]. \quad (112,3)$$

На рис. 195 представлены кривые облученности однорядного и двухрядного трубчатого экрана в зависимости от относительного расстояния между осями труб ( $s/d$ ).

Необходимо отметить, что полностью отражающая стенка применительно к падающей на стенку тепловой радиации не обязательно требует равенства нулю коэффициента поглощения ( $A=0, R=1$ ). При термодинамическом равновесии стенки с поступающей на нее тепловой радиацией (согласно закону Кирхгофа) падающее на стенку тепловое излучение и эффективное излучение стенки одинаковы и равны излучению черного тела при температуре стенки:

$$E_{\text{пад}} = E_{\text{эф}} = \sigma_0 T^4.$$

Поэтому независимо от степени черноты излучения и поглощательной способности стенки в условиях термодинамического равновесия с падающей радиацией стенка является абсолютно отражающей. Для выполнения этого условия необходимо, чтобы *результатирующее излучение стенки, или ее теплопередача, была равна нулю* ( $q_{\text{рез}} = E_{\text{пад}} - E_{\text{эф}} = 0$ ).

Если расстояние отражающей стенки за трубчатым экраном мало ( $e < s/d$ ) и мал коэффициент теплопроводности материала стенки, то расчет облученности трубчатого экрана с отражением от стенки по формуле (112,1) будет не точным. Расчет можно уточнить для случая идеальной отражающей стенки с коэффициентом теплопроводности, близким к нулю ( $\lambda \approx 0$ ).

Средняя облученность отражающей стенки от лучеиспускающей плоскости перед трубами экрана ( $F_1$ ) находится:

$$\bar{\varphi}_{1, o} = \frac{1}{F_1} \int_{F_0} \varphi_{dF_0, F_1} dF_0,$$

где  $\varphi_{dF_0, F_1}$  — облученность элементарной площадки  $dF_0$  от лучеиспускающей плоскости  $F_1$ .

Поток лучей, возвращенных отражением от стенки на плоскость  $F_1$ , составит:

$$\bar{\varphi}_{1, 0, 1} = \frac{1}{F_1} \int_{(F_0)} \varphi_{dF_0, F_1}^2 dF_0.$$

Облученность труб экрана с отражением находится как разность

$$\bar{\varphi}_{1, 2, 0} = 1 - \bar{\varphi}_{1, 0, 1}.$$

Определяя  $\varphi_{dF_0, F_1}$  и вычисляя интеграл  $\int_{F_0} \varphi_{dF_0, F_1}^2 dF_0$ , приходим к следующей формуле:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_{1, 2, 0} = & 1 - \frac{1}{s/d} \left\{ \sqrt{(s/d)^2 - 1} - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{(s/d)^2 - 1} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \sqrt{(s/d)^2 - 1} - \frac{1}{4s/d [(s/d)^2 + 1]} \times \right. \\ & \left. \times \left[ \ln \frac{s/d - \sqrt{(s/d)^2 - 1}}{s/d + \sqrt{(s/d)^2 - 1}} - 2s/d \operatorname{arctg} \sqrt{(s/d)^2 - 1} \right] \right\}. \quad (112,4) \end{aligned}$$

В табл. 19 приведены результаты расчета облученности трубчатого экрана с отражением от стенки по формулам (112,1) и (112,4).

Т а б л и ц а 19

$s/d = 1,0$	1,5	2	4	5
ф-ла (112,1) $\bar{\varphi}_{1,2,0} = 1,0$	0,967	0,883	0,59	0,5
ф-ла (112,4) $\bar{\varphi}_{1,2,0} = 1,0$	0,9438	0,834	0,5125	0,424

Как видно, при больших расстояниях между осями труб ( $s/d$ ) ошибка в расчете облученности труб получается вполне заметной.

### § 113. Определение облученности торцовых поверхностей в канале с участием отражения от образующей поверхности

Более сложно решается задача об облученности торцовых поверхностей в каналах при отражении от образующих поверхностей (рис. 206).

Облученность торцовых поверхностей канала  $\bar{\varphi}_{1,2}$  прямой радиацией находится расчетом по формулам (109,12)—(109,14).

Для определения облученности торцовой поверхности радиацией от образующих стенок, которые предполагаются абсолютно отражающими ( $R=1$ ), можно воспользоваться уравнением сум-

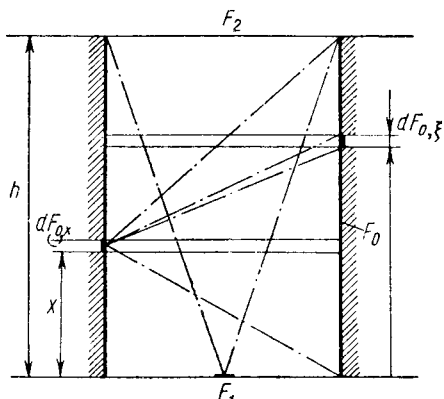


Рис. 206. К определению облученности торцовых поверхностей в камере с отражением от боковых поверхностей

марной облученности элементарной площадки  $dF_{0,x}$ , образующей поверхности канала:

$$\varphi_{dF_{0,x}, F_1} + \varphi_{dF_{0,x}, F_2} + \int_{(F_0)} d\varphi_{dF_{0,x}, dF_{0,\xi}} = 1.$$

Отсюда находим облученность торцовой поверхности  $F_2$ , отраженной радиацией элементарной площадки:

$$\varphi_{dF_{0,x}, F_2} = 1 - \varphi_{dF_{0,x}, F_1} - \int_{(F_0)} d\varphi_{dF_{0,x}, dF_{0,\xi}}. \quad (113,1)$$

Облученность торцовой поверхности канала  $F_2$  лучеиспусканием поверхности  $F_1$  прямой и отраженной радиацией находится:

$$\bar{\varphi}_{1,2,o} = \bar{\varphi}_{1,2} + \frac{1}{F_1} \int_{(F_0)} \varphi_{dF_{0,x}, F_2} dF_0 \dots \quad (113,2)$$

Облученности элементарных площадок  $\varphi_{dF_{0,x}, F_1}$  и  $d\varphi_{dF_{0,x}, dF_{0,\xi}}$  находятся по формулам (109,12) — (109,14):

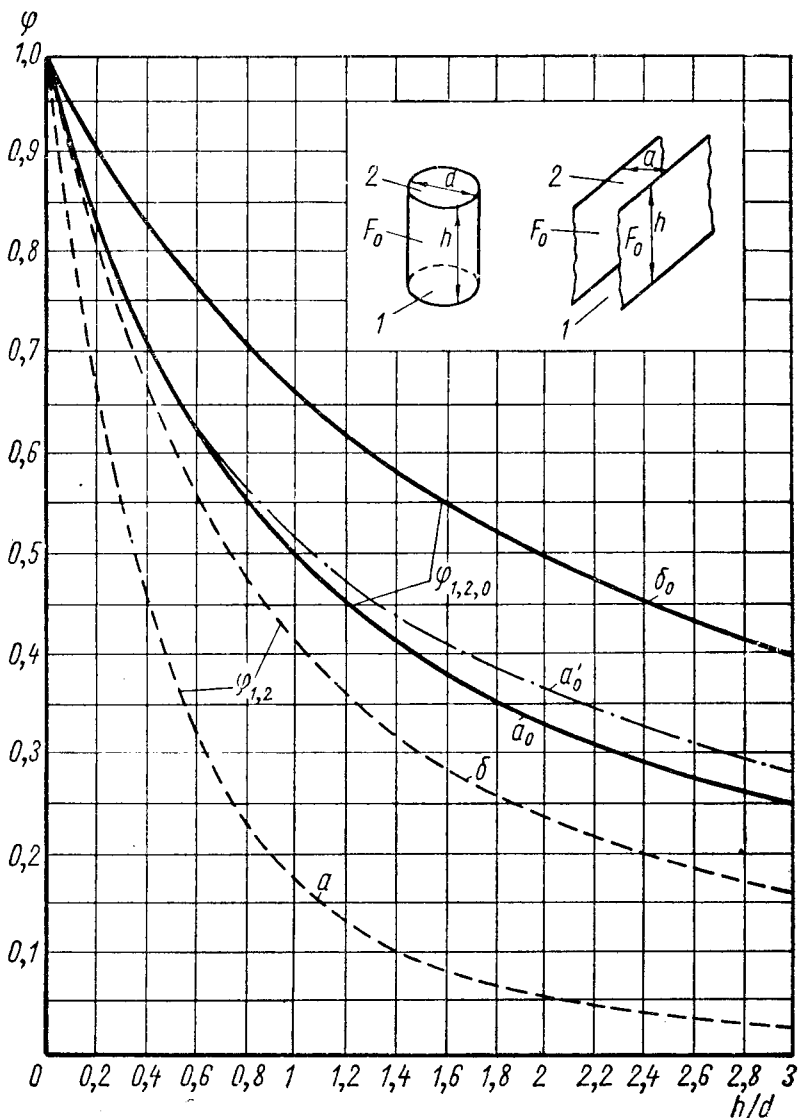


Рис. 207. Средняя облученность торцовых поверхностей в камере различной формы в зависимости от относительной высоты камеры: прямая облученность торцовых поверхностей в камере цилиндрической ( $a$ ) и щелевой ( $\delta$ ) формы; облученность торцовых поверхностей с участием отражения боковых поверхностей в цилиндрической ( $a_0$ ) и щелевой ( $\delta_0$ ) камере; ( $a'_0$ ) — расчет приближенным решением интегрального уравнения (задача Власова — Хоттеля)

$$\begin{aligned} \Phi_{dF_0, x, F_1} &= (\bar{\Phi}_{F_1, F_{x+dx}} - \bar{\Phi}_{F_1, F_x}) \frac{F_1}{dF_0, x}, \\ d\Phi_{dF_0, x, dF_0, \xi} &= \Phi_{dF_0, x, F_{\xi+d\xi}} - \Phi_{dF_0, x, F_{\xi}}, \\ \Phi_{dF_0, x, F_{\xi+d\xi}} &= (\bar{\Phi}_{F_{\xi+d\xi}, F_{x+dx}} - \bar{\Phi}_{F_{\xi+d\xi}, F_x}) \frac{F_{\xi+d\xi}}{dF_0, x}, \\ \Phi_{dF_0, x, F_{\xi}} &= (\bar{\Phi}_{F_{\xi}, F_{x+dx}} - \bar{\Phi}_{F_{\xi}, F_x}) \frac{F_{\xi}}{dF_0, x}. \end{aligned}$$

Таким образом, задача об облученности торцовых поверхностей капаля при отражении стенок сводится к сложному интегрированию.

Приближенную формулу для определения облученности торцовых поверхностей в канале с отражающими стенками можно получить, используя диффузионные представления о переносе фотонов излучения.

Боковые стенки канала с диффузным отражением падающей на них радиации являются препятствием лучевому переносу с одной торцовой поверхности на другую. Если бы длина канала  $h$  была много меньше размера  $d$  торцовых поверхностей ( $h/d \ll 1$ ), то облученность торцовых поверхностей приблизилась бы к единице ( $\varphi_{1, 2, 0} \rightarrow 1$ ). Наличие боковых поверхностей в канале с полным многократным отражением вызывает диффузионное сопротивление лучевому переносу в канале. Эквивалентная оптическая плотность среды, отвечающая диффузионному сопротивлению лучевому переносу в канале, определяется произведением коэффициента ослабления на длину канала  $kh$  (критерий Бугера). Коэффициент ослабления лучевого переноса в канале можно определить величиной, обратной средней длине пробега фотонов при их многократном отражении от стенок ( $k=1/\bar{l}_{\Phi}$ ). Средняя длина пробега фотонов отвечает эквивалентному размеру объема пространства канала  $V$ , ограниченного отражающими стенками:

$$\bar{l}_{\Phi} = \frac{4V}{F_0}.$$

Сопротивление лучевому переносу в канале с отражающими стенками ( $kh=h/\bar{l}_{\Phi}$ ) понижает облученность торцовых поверхностей так, что для определения облученности можно написать следующую формулу:

$$\bar{\Phi}_{1, 2, 0} = \frac{1}{1+h/\bar{l}_{\Phi}}. \quad (113,3)$$

На рис. 207 представлены вычисленные по этой формуле кривые облученности с отражением для различных форм поперечного сечения канала (круглая, прямоугольная, щелевая) в зависимости от отношения длины канала к поперечному размеру  $\left(\frac{h}{d}\right)$ . Здесь же проведена кривая, отвечающая более точному расчету облученности путем приближенного решения интегрального уравнения. Как видно из рис. 207, для больших отношений  $h/d$  коэффициент облученности с отражением в несколько раз превышает прямую облученность.

## ЛУЧИСТЫЙ ТЕПЛОБМЕН В ОСЛАБЛЯЮЩЕЙ СРЕДЕ

### § 114. Физические основы и уравнение лучевого переноса энергии в ослабляющей среде

При прохождении лучевого потока в среде интенсивность его может ослабляться за счет возможного поглощения и рассеяния. Поглощение и рассеяние лучевого потока возникают при взаимодействии электромагнитных волн излучения с частицами вещества среды. Такое взаимодействие излучения осуществляется, например, с различными полярными молекулами в газах, с различными структурными ансамблями в жидкостях и твердых телах, с частицами пыли, дыма и капельками жидкости, взвешенными в газовой среде, например в атмосфере земли, в продуктах сгорания топок котлов и печей и т. п.

При прохождении световых лучей в темной среде рассеяние лучевого потока вызывает заметную яркость освещенной среды. Примером служит видимый сноп света, как след луча прожектора в атмосфере, освещенность солнечными лучами атмосферы земли и т. п.

В отличие от рассеяния, при поглощении световых фотонов в среде, не способной к люминесценции, не возникает свечения. Интенсивность свечения такой среды полностью определяется рассеянием освещаемого лучевого потока. В этих условиях различные перемещения среды заметно не меняют положения рассеивающих объемов пространства (луч прожектора при ветре в атмосфере, лунная дорожка на поверхности текущей воды и т. п.).

При прохождении тепловых лучей в среде поглощенная энергия переходит в тепло, изменяет тепловое состояние среды и снова частично или полностью излучается. Помимо поглощенной



энергии, собственное тепловое излучение среды, находящейся в единичном объеме пространства, вызывается различными результирующими переносами и превращениями энергии: конвективный и теплопроводный переносы энергии, освобождение энергии в химических и других превращениях среды, работа сжатия ударных волн и т. п. В этих условиях на лучевом переносе тепла в среде в большой мере сказывается перемещение среды, а также оказывают заметное влияние и другие указанные энергетические процессы.

Пользуясь относительными эффективными сечениями ослабления и излучения среды в лучевом переносе энергии или соответствующими им коэффициентами ослабления  $k(\nu)$  и излучения  $\epsilon_*(\nu)$ , уравнение лучевого переноса энергии, с учетом рассеяния излучения по всем направлениям, можно записать в следующем виде [уравнение (6,4)]:

$$\frac{dI_l(\nu)}{dl} = -[\alpha(\nu) + \beta(\nu)] I_l(\nu) + \epsilon_*(\nu) B(\nu) + \frac{1}{4\pi} \beta(\nu) \int_{(4\pi)} I_{l'}(\nu) \gamma(\vec{l}', \vec{l}) d\omega_{l'}, \quad (114,1)$$

где  $I_l(\nu)$  — интенсивность энергии излучения частоты  $\nu$  в направлении  $\vec{l}$ ;

$B(\nu)$  — интенсивность энергии собственного излучения среды;

$\alpha(\nu) + \beta(\nu) = k(\nu)$  — суммарный коэффициент ослабления интенсивности лучевого переноса, включающий коэффициент поглощения  $\alpha(\nu)$  и коэффициент рассеяния  $\beta(\nu)$ ;

$I_{l'}(\nu)$  — интенсивность падающего излучения по любому другому направлению  $l'$ ;

$\gamma(\vec{l}', \vec{l})$  — индикатриса рассеяния излучения, представляющая угловое распределение рассеянного излучения в данном месте по различным направлениям;  $\vec{l}'$  — любое направление луча, из которого рассеянное излучение переходит в рассматриваемое направление  $\vec{l}$  лучевого переноса энергии.

В частном случае равновесного излучения в среде необходимо положить:

$$\frac{dI_l(\nu)}{dl} = 0; \quad I_l(\nu) = B(\nu); \quad \alpha(\nu) = \epsilon_*(\nu)$$

и

$$\frac{1}{4\pi} \int_{(4\pi)} \gamma(\vec{l}', \vec{l}) d\omega = 1. \quad (114,2)$$

Последнее равенство отвечает условию замкнутости рассеяния радиации аналогично замкнутости облученности в системе

излучающих тел:

$$\int_{(2\pi)} K(M, P) dF_{P_*} = 1.$$

При равномерном рассеянии излучения по всем направлениям

$$\gamma(\vec{l}', \vec{l}) \equiv 1. \quad (114,3)$$

Индикатрисы рассеяния различных сред отличаются от простого сферического рассеяния. Например, для рассеяния излучения молекулярными и атомарными частицами, размер которых значительно меньше длины волны излучения ( $d < \frac{1}{10} \lambda$ ), индикатриса рассеяния, согласно Релею, определяется формулой:

$$\gamma(\vec{l}', \vec{l}) = \frac{3}{4} [1 + \cos^2(\vec{l}', \vec{l})], \quad (114,4)$$

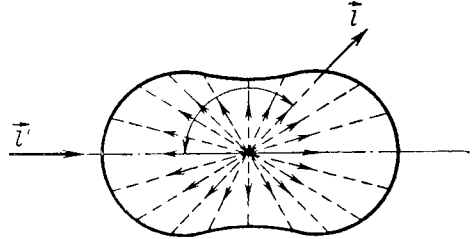


Рис. 208. Индикатриса рассеяния интенсивности излучения частицами среды с размерами, значительно меньшими длины волны излучения (Релеевское рассеяние)

т. е. интенсивность рассеяния вперед по лучу и назад одинаковы и в два раза превышают рассеяние в перпендикулярном направлении (рис. 208).

Для другого крайнего случая рассеяния излучения частицами размером много больше длины волны излучения ( $d \gg \lambda$ ) индикатриса рассеяния вследствие дифракции имеет форму, вытянутую по направлению луча.

Если уравнение (114,1), записанное для выбранной точки  $M$ , по рассматриваемому направлению  $l$  в пространстве с поглощающей и рассеивающей средой проинтегрировать по всевозможным направлениям  $\vec{l}$ , отвечающим элементарным телесным углам  $d\omega_l$ , то в соответствии с формулами (6,18), (6,20), (6,22), а также с учетом (114,2), получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U(\nu, M)}{\partial \tau} + \operatorname{div} \vec{q}_n(\nu, M) = \\ & = \int_{(4\pi)} \varepsilon_*(\nu, M) B(\nu, M) d\omega_l - \int_{(4\pi)} \alpha(\nu, M) I_l(\nu, M) d\omega_l, \quad (114,5) \end{aligned}$$

где  $U(\nu, M) = \frac{1}{c} \int_{(4\pi)} I_l(\nu, M) d\omega$  — объемная плотность энергии излучения в рассматриваемой точке;

$\vec{q}_n(\nu, M)$  — вектор лучевого потока энергии, определяемый составляющими  $\int_{(4\pi)} I_l(\nu, M) \cos(l, x_i) d\omega$  ( $x_i = 1, 2, 3$ ).

Для серой излучающей среды, находящейся в локальном термодинамическом равновесии с падающим излучением  $\varepsilon_*(\nu, M) \equiv \equiv \alpha(\nu, M) \equiv \alpha(M)$ , собственное излучение для всего спектра частот  $\nu$  составит:

$$\int_0^{\infty} d\nu \int_{(4\pi)} \varepsilon_*(\nu, M) B(\nu, M) d\omega_l = 4\alpha(M) \sigma_0 T^4(M),$$

где  $T(M)$  — температура среды в рассматриваемой точке.

Поглощенная радиация в точке  $M$  для всего спектра частот излучения серой среды отвечает равенству:

$$\int_0^{\infty} d\nu \int_{(4\pi)} \alpha(\nu, M) I_l(\nu, M) d\omega = \alpha(M) \int_{(4\pi)} I_l(M) d\omega. \quad (114,6)$$

Радиацию, поступающую в рассматриваемую точку  $M$  со всех мест окружения серой излучающей среды, находящейся в объеме  $V$  и ограниченной серыми излучающими стенками с поверхностью  $F$ , можно определить интегральным уравнением, которое представляет равенство:

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Общая энергия} \\ \text{излучения, падаю-} \\ \text{щего в рассматри-} \\ \text{ваемую точку } M \text{ со} \\ \text{всех мест окруже-} \\ \text{ния} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} \text{Энергия излучения,} \\ \text{падающего в точку } M \\ \text{от собственного из-} \\ \text{лучения среды всех} \\ \text{пунктов } P \text{ в объеме } V \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{l} \text{Энергия излуче-} \\ \text{ния, падающего в} \\ \text{точку } M \text{ от рассе-} \\ \text{янного излучения} \\ \text{всех пунктов } P \text{ в} \\ \text{объеме } V \end{array} \right] + \\ + \left[ \begin{array}{l} \text{Энергия излучения,} \\ \text{падающего в точку } M \\ \text{от собственного излу-} \\ \text{чения всех точек } S \\ \text{на поверхности } F \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{l} \text{Энергия излучения,} \\ \text{падающего в точку } M \\ \text{от отраженного излу-} \\ \text{чения всех точек } S \\ \text{на поверхности } F \end{array} \right].$$

В математической форме это равенство представится:

$$\int_{(4\pi)} I_l(M) d\omega = \int_{(V)} \alpha(P) 4\sigma_0 T^4(P) \frac{e^{-\int_M^P k dl}}{4\pi l_{MP}^2} dV_P + \\ + \int_{(V)} \frac{e^{-\int_M^P k dl}}{4\pi l_{MP}^2} dV \cdot \beta(P) \int_{(4\pi)} I_{l'}(P) \gamma(l', \widehat{l}) d\omega_{l'} + \int_{(F)} A(S) \sigma_0 T^4(S) \times \\ \times \frac{e^{-\int_M^S k dl} \cos(l, \widehat{N}_S)}{\pi l_{MS}^2} dF_S + \int_{(F)} \frac{e^{-\int_M^S k dl} \cos(l, \widehat{N}_S)}{\pi l_{MS}^2} dF \times \\ \times R(S) \int_{(2\pi)} I_{l'}(S) \cos(l'', \widehat{N}_S) d\omega_{l'}, \quad (114,7)$$

где  $\alpha(P)$  и  $\beta(P)$  — коэффициенты поглощения и рассеяния лучистой энергии в текущем пункте  $P$  объема  $V$ ;

$k = \alpha + \beta$  — коэффициент общего ослабления интенсивности излучения;

$A(S)$  и  $R(S)$  — степень черноты поглощения и коэффициент отражения стенки в текущей точке  $S$ ;

$T(P)$  и  $T(S)$  — температуры среды и стенки в соответствующих точках;

$l_{M,P}$  и  $l_{M,S}$  — расстояния между соответствующими пунктами  $M$  и  $P$ ,  $M$  и  $S$ .

Разрешающие ядра, или резольвенты, этого интегрального уравнения определяются сходящимися рядами:

$$\Gamma(M, P) = K_{V-V}(M, P) + \sum_{m=1}^{\infty} K_{V-V, m}(M, P),$$

$$\Gamma(M, S) = K_{F-V}(M, S) + \sum_{m=1}^{\infty} K_{F-V, m}(M, S),$$

где

$$K_{V-V}(M, P) = e^{-\int_M^P k dl} \frac{1}{\pi l_{MP}^2} \quad \text{и} \quad K_{F-V}(M, S) = e^{-\int_M^S k dl} \frac{\cos(l, N_S)}{\pi l_{MS}^2}$$

представляют собой ядра исходного интегрального уравнения (114,7), а  $K_{V-V, m}(M, P)$  и  $K_{F-V, m}(M, S)$  — итерации  $m$ -го порядка ядер.

Пользуясь функциями  $\Gamma(M, P)$  и  $\Gamma(M, S)$ , можно написать следующее интегральное равенство:

$$\int_{(4\pi)} I_l(M) d\omega = \int_{(V)} \Gamma(M, P) 4\alpha(M) \sigma_0 T^4(P) dV_P + \int_{(F)} \Gamma(M, S) A(S) \sigma_0 T^4(S) dF_S. \quad (114,8)$$

При полном термодинамическом равновесии рассматриваемой излучающей системы  $T(P) \equiv T(S) \equiv T(M)$  имеем следующее равенство:

$$\int_{(4\pi)} I_l(M) d\omega = 4\sigma_0 T^4(M),$$

и, следовательно:

$$\int_{(V)} \Gamma(M, P) \alpha(M) dV_P + \int_{(F)} \frac{\Gamma(M, S)}{4} A(S) dF_S = 1. \quad (114,9)$$

Это равенство отвечает условию замкнутости лучевого обмена в любой выбранной точке  $M$  с окружающей средой и стенками.

Левая часть уравнения (114,5), проинтегрированная для всего спектра частот  $\nu$ , определяет результирующее излучение в рассматриваемом месте:

$$\frac{\partial U(M)}{\partial \tau} + \operatorname{div} \vec{q}_n(M) = 4\alpha(M) \sigma_0 T^4(M) - \alpha(M) \int_{(4\pi)} I_l(M) d\omega. \quad (114,10)$$

Согласно балансу энергии, это результирующее излучение в общем случае уравновешивается суммарным изменением во времени энергии различных форм в рассматриваемой точке объема  $\frac{\partial}{\partial \tau} [\Sigma E(M)]$ , результирующим переносом энергии различных форм путем конвекции и диффузии  $\operatorname{div} [\Sigma \vec{q}(M)]$  и суммарной мощностью действующих источников энергии в рассматриваемой точке ( $\Sigma q_n$ ).

На этом основании, пользуясь равенствами (114,8), (114,9) и (114,10), получаем следующее уравнение распространения энергии в среде с лучевым обменом:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tau} [\Sigma E(M)] + \operatorname{div} [\Sigma \vec{q}(M)] - \Sigma q_n(M) + \\ & + 4\alpha(M) \left\{ \int_{(V)} \sigma_0 [T^4(M) - T^4(P)] \Gamma(M, P) \alpha(M) dV_P + \right. \\ & \left. + \int_{(F)} \sigma_0 [T^4(M) - T^4(S)] \frac{\Gamma(M, S)}{4} A(S) dF_S \right\} = 0. \quad (114,11) \end{aligned}$$

Решение этого уравнения даже для сравнительно простых частных случаев представляет большие математические трудности. Поэтому приходится прибегать к тем или иным упрощающим предпосылкам. Одной из таких предпосылок является использование градиентного представления о векторе лучевого переноса энергии.

В приближенных инженерных расчетах лучистый теплообмен излучающей среды со стенками, например в топках котлов и в печах, определяют, допуская наибольшее упрощение: принимают нереальное условие изотермичности среды во всех точках объема  $T(P) \equiv T(M)$ . Теплопередача излучением в этих условиях определяется интегралом:

$$Q_{V-F} = \sigma_0 [T^4(M) - T^4(S)] \int_{(V)} dV \int_{(F)} \alpha(M) \frac{\Gamma(M, S)}{4} A(S) dF_S, \quad (114,12)$$

где  $Q_{V-F}$  — тепло, переданное поверхности нагрева.

Формулу (114,12), определяющую лучевой обмен энергией изотермической излучающей среды, находящейся в объеме  $V$ ,

с окружающими стенками поверхностью  $F$  можно представить в виде:

$$Q_{V-F} = \sigma_0 [T^4(M) - T^4(S)] F \cdot \Phi_{V-F},$$

где  $\Phi_{V-F}[\alpha l_0, A(S)]$  — функция, представляющая оптическую плотность излучающей среды, находящейся в объеме известной формы, с характерным размером  $l_0$  и коэффициентом черноты поглощающих стенок  $A(S)$ .

Максимальная величина  $\Phi = 1$  отвечает достаточно большой оптической плотности изотермической излучающей среды ( $\alpha l_0 > 3,5$ ) и абсолютно черной поглощающей поверхности стенок [ $A(S) = 1$ ].

Для приближения к реальным условиям неизотермической излучающей среды используют схему с несколькими температурными зонами лучевого обмена энергией. Однако деление объема камеры и ограждающей поверхности на несколько зон требует детального знания характеристик распределения источников выделения энергии в зонах, и расчет лучевого обмена энергией неизбежно усложняется.

## § 115 Дифференциальное уравнение лучевого переноса энергии

Уравнение лучевого переноса энергии (114,1) применительно к плоскопараллельному слою поглощающей среды запишется в виде:

$$\frac{dI_l(\nu)}{dx} \cos(\vec{l}, \hat{x}) = -\alpha(\nu) I_l(\nu) + \varepsilon_*(\nu) B(\nu), \quad (115,1)$$

где  $\vec{l}, \hat{x}$  — угол между направлением излучения  $\vec{l}$  и нормалью к поверхности слоя, которая принимается за направление координаты  $x$ .

Умножая все члены уравнения (115,1) на  $\cos(\vec{l}, \hat{x}) d\omega$ , интегрируя их в пределах полного пространственного угла  $\omega = 4\pi$  и имея в виду, что

$$\begin{aligned} & \int_{(4\pi)} I_l(\nu) \cos^2(\vec{l}, \hat{x}) dx = c p_{\text{луч}}(\nu), \\ & \int_{(4\pi)} I_l(\nu) \cos(\vec{l}, \hat{x}) d\omega = \\ & = \int_{(+2\pi)} I_{+l}(\nu) \cos(\vec{l}, \hat{x}) d\omega - \int_{(-2\pi)} I_{-l}(\nu) \cos(\vec{l}, \hat{x}) d\omega = \\ & = E_{+x}(\nu) - E_{-x}(\nu) = q_{\text{луч}x}(\nu), \\ & \int_{(4\pi)} \varepsilon_*(\nu) B(\nu) \cos(\vec{l}, \hat{x}) d\omega = \varepsilon_*(\nu) B(\nu) \int_{(4\pi)} \cos(\vec{l}, \hat{x}) d\omega = 0, \end{aligned}$$

получаем следующую формулу:

$$q_{\text{луч}, x}(\nu) = -\frac{c}{\alpha(\nu)} \frac{dp_{\text{луч}}(\nu)}{dx}, \quad (115,2)$$

где  $q_{\text{луч}}(\nu)$  — удельный поток лучевого переноса энергии;  
 $c$  — скорость распространения излучения;  
 $p_{\text{луч}}(\nu)$  — лучевое давление.

Если ввести среднюю величину лучевого давления  $[\bar{p}_{\text{луч}}(\nu)]$ , отвечающую объемной плотности энергии изотропного излучения [формула (101,7)]

$$\bar{p}_{\text{луч}}(\nu) = \frac{1}{3} U(\nu),$$

то удельный поток лучевого переноса энергии в плоскопараллельном слое представится формулой:

$$q_{\text{луч}, x}(\nu) = -\frac{1}{3} \frac{c}{\alpha(\nu)} \frac{dU(\nu)}{dx}. \quad (115,3)$$

В общем случае неизотропного излучения лучевое давление определяется тензором  $P_{\text{луч}}$ , компоненты которого находятся по формуле:

$$p_{i, j}(\nu) = \frac{1}{c} \int_{(4\pi)} I(\nu) l_i l_j d\omega, \quad (115,4)$$

где  $l_i = \cos(\vec{l}, x_i)$ ,  $l_j = \cos(\vec{l}, x_j)$  — направляющие косинусы (между направлением излучения  $\vec{l}$  и направлением соответствующих координат  $x_i, x_j$ ).

Тензор лучевого давления является симметричным тензором второго ранга, у которого составляющие  $p_{i, j} = p_{j, i}$ , а диагональные составляющие  $p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}$  (главные напряжения) определяются формулой:

$$p_{ii}(\nu) = \frac{1}{c} \int_{(4\pi)} I(\nu) l_i l_i d\omega = \frac{1}{c} \int_{(4\pi)} I(\nu) \cos^2(\vec{l}, \hat{x}_i) d\omega$$

и в сумме отвечают объемной плотности энергии излучения:

$$p_{11}(\nu) + p_{22}(\nu) + p_{33}(\nu) = U(\nu).$$

В условиях, достаточно близких к изотропному излучению,

$$p_{11}(\nu) = p_{22}(\nu) = p_{33}(\nu) = \frac{1}{3} U(\nu).$$

Таким образом, формула (115,3) является приближенной и строго отвечает условиям, достаточно близким к изотропному излучению.

Величины  $q_{\text{луч}, x}$ ,  $q_{\text{луч}, y}$ ,  $q_{\text{луч}, z}$ , определяемые формулой (115,3), можно рассматривать как составляющие вектора лучевого переноса энергии:

$$\vec{q}_{\text{луч}}(\nu) = -\frac{1}{3} \frac{c}{\alpha(\nu)} \nabla U(\nu), \quad (115,5)$$

где  $\nabla U(\nu)$  — градиент объемной плотности энергии излучения частоты  $\nu$ .

Если тепловое состояние среды в слое отвечает равновесию с излучением, то

$$U(\nu) = \frac{4\pi}{c} B(\nu, T),$$

где  $B(\nu, T)$  — функция Планка для интенсивности энергии излучения абсолютно черного тела.

В этих условиях удельный поток лучевого переноса тепла в слое определяется формулой:

$$q_{\text{луч}, x}(\nu) = -\frac{1}{3} \frac{4\pi}{\alpha(\nu, T)} \frac{\partial B(\nu, T)}{\partial x}. \quad (115,6)$$

Для всего спектра теплового излучения среды

$$\begin{aligned} q_{\text{луч}, x} &= -\frac{4\pi}{3} \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha(\nu, T)} \frac{\partial B(\nu, T)}{\partial x} d\nu = \\ &= -\frac{4\pi}{3} \frac{\partial B(T)}{\partial x} \frac{\int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha(\nu, T)} \frac{\partial B(\nu, T)}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} d\nu}{\int_0^{\infty} \frac{\partial B(\nu, T)}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} d\nu}, \end{aligned} \quad (115,7)$$

где  $\alpha(\nu, T)$  — спектральный коэффициент поглощения.

Следуя Росселанду, вводим среднюю величину коэффициента поглощения  $\bar{\alpha}(T)$  для всего спектра излучения среды:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha(\nu, T)} \frac{\partial B(\nu, T)}{\partial T} d\nu = \frac{1}{\bar{\alpha}(T)} \int_0^{\infty} \frac{\partial B(\nu, T)}{\partial T} d\nu. \quad (115,8)$$

Имея в виду, что

$$B(T) = \frac{1}{\pi} \sigma_0 T^4,$$

получаем следующую формулу для определения лучевого переноса тепла в слое:

$$q_{\text{луч}, x} = -\frac{4\sigma_0}{3\bar{\alpha}(T)} \frac{\partial T^4}{\partial x} = -\frac{16}{3} \frac{\sigma_0 T^3}{\bar{\alpha}(T)} \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (115,9)$$



Множитель  $\frac{16}{3} \frac{\sigma_0 T^3}{\alpha(T)} = \lambda_{\text{луч}}$  представляет собой коэффициент лучистой теплопроводности поглощающей среды, пользуясь которым, формулу (115,9) можно записать в виде:

$$q_{\text{луч}, x} = -\lambda_{\text{луч}} \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (115,10)$$

Для сред с показателем преломления  $n$ , заметно отличающимся от единицы, в формулу коэффициента лучистой теплопроводности следует ввести множитель  $n^2$ :

$$\lambda_{\text{луч}} = \frac{16}{3} n^2 \frac{\sigma_0 T^3}{\alpha(T)}.$$

Таким образом, для лучевого переноса тепла получена формула, аналогичная формуле Фурье для теплопроводности. Ограничения для использования формулы (115,10)—достаточная изотропность интенсивности распространения энергии по направлениям и термодинамическое равновесие—касаются также и формулы Фурье для переноса тепла различными носителями.

Изотропное излучение в условиях лучевого переноса тепла отвечает случаям распространения энергии с достаточно малыми градиентами температур. Такие условия достаточно близко отвечают турбулентным потокам раскаленных излучающих сред (продукты сгорания углеводородного топлива), в которых лучевой перенос оказывается одного порядка с турбулентным переносом и значительно уступает по величине конвективному переносу энергии.

Дифференциальное уравнение распространения тепла в турбулентных потоках излучающих сред запишется в виде:

$$\text{div } \vec{q}_{\text{конв}} + \text{div } \vec{q}_{\text{турб}} + \text{div } \vec{q}_{\text{луч}} = q_{\text{и}}, \quad (115,11)$$

где  $\vec{q}_{\text{конв}} = \omega c_p T$  — вектор конвективного переноса тепла;  
 $\vec{q}_{\text{турб}} = -\lambda_{\text{турб}} \nabla T$  — вектор турбулентного переноса тепла ( $\lambda_{\text{турб}}$  — коэффициент турбулентной теплопроводности);  
 $\vec{q}_{\text{луч}} = -\lambda_{\text{луч}} \nabla T$  — вектор лучистого переноса тепла;  
 $q_{\text{и}}$  — удельная производительность, или мощность ( $\text{вт}/\text{м}^3$ ), источников тепла.

Для одномерного потока среды, излучающей тепло при отсутствии каких-нибудь тепловых источников, дифференциальное уравнение распределения температур представится в виде:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{w}{\lambda_{\text{луч}} \rho c_p} \frac{dT}{dx} = 0. \quad (115,12)$$

## § 116. Лученоглощающая способность газовых сред

### А. Чистые газы

Такие среды, как многоатомные газы, поглощают энергию излучения не во всех частях спектра: имеются активные участки,

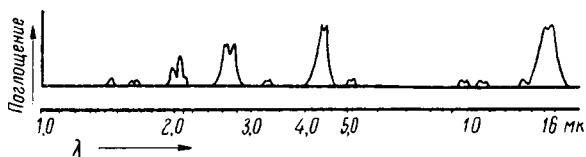


Рис. 209. Спектр поглощения газа двуокиси углерода ( $\text{CO}_2$ )

в которых располагается множество полос с различной способностью поглощения. На рис. 209 и 210 представлены спектры

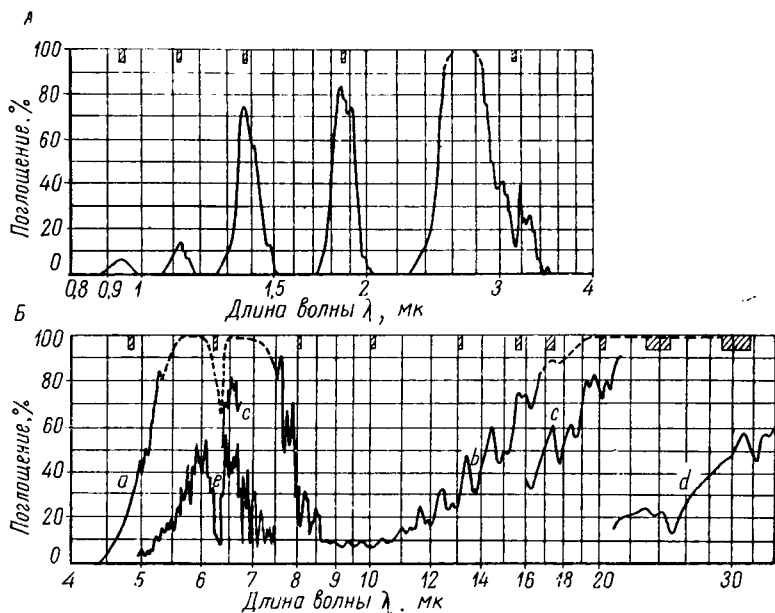


Рис. 210. Спектр поглощения водяного пара ( $\text{H}_2\text{O}$ ): А) для коротковолнового участка ( $\lambda$  от 0,8 до 4 мк) температура пара  $127^\circ\text{C}$ , толщина слоя 109 см; Б) для длинноволнового участка ( $\lambda$  от 4 до 34 мк):

а) температура пара  $127^\circ\text{C}$ , толщина слоя 109 см; б)  $t = 127^\circ\text{C}$ ,  $l = 104$  см;  
 в)  $t = 127^\circ\text{C}$ ,  $l = 32,4$  см; д) смесь 12,35%  $\text{H}_2\text{O}$  + воздух,  $t = 81^\circ\text{C}$ ,  
 $l = 32,4$  см; е) смесь 3,18%  $\text{H}_2\text{O}$  + воздух,  $t = 18^\circ\text{C}$ ,  $l = 220$  см

поглощения тепловой радиации двуокиси углерода ( $\text{CO}_2$ ) и водяного пара ( $\text{H}_2\text{O}$ ). Как показывают детальные измерения, отдельные участки спектра поглощения газов в свою очередь состоят

из множества отдельных узких полос с различной способностью поглощения (рис. 211). Существование активных участков в спектре поглощения радиации газами связано с взаимодействием электромагнитных волн излучения с различными изменениями в состоянии молекул и атомов газа. Например, с переходами электронов

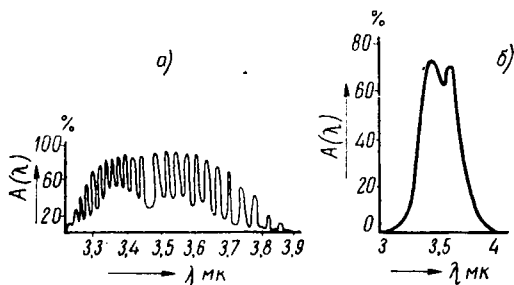


Рис. 211. Полоса поглощения вращательно-колебательных переходов молекул HCl на участке спектра 3,5 мк: а) при большой разрешающей способности; б) при малой разрешающей способности оптической системы [70]

с одного уровня энергии на другой, с квантовыми изменениями в колебательном и вращательном движениях атомных ядер в молекулах и т. д. Появление множества отдельных полос в спектре поглощения излучения газом и является результатом такого взаимодействия. При этом электронные переходы ( $\epsilon'_{эл} - \epsilon''_{эл} = h\nu_{эл}$ )

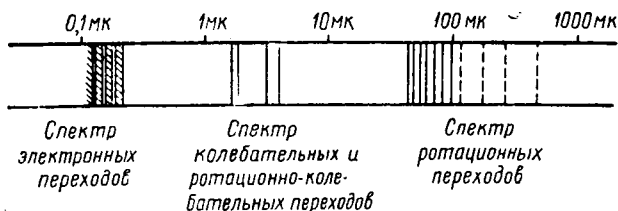


Рис. 212. Полосатый спектр HCl, отвечающий различным переходам молекул при излучении энергии

отвечают сравнительно большим энергиям и соответственно большей частоте или малой длине волны излучения, т. е. коротковолновой радиации. Изменения в различных колебательных движениях атомных ядер в молекулах ( $\epsilon'_{кол} - \epsilon''_{кол} = h\nu_{кол}$ ) отвечают меньшей энергии по сравнению с электронными переходами и, соответственно, большей длине волны излучения (рис. 212). Изменения энергии вращательных движений молекул ( $\epsilon'_{рот} - \epsilon''_{рот} = h\nu_{рот}$ ) отвечают соответственно длинноволновой области спектра.

Для тепловой радиации, отвечающей температурам не выше  $2000^\circ\text{K}$ , полосы в спектре поглощения отвечают главным обра-

зом изменениям в колебательных и вращательных движениях атомов и молекул газа.

Для одного и того же газа поглощательная способность слоя изменяется с температурой. На рис. 213 показана поглощатель-

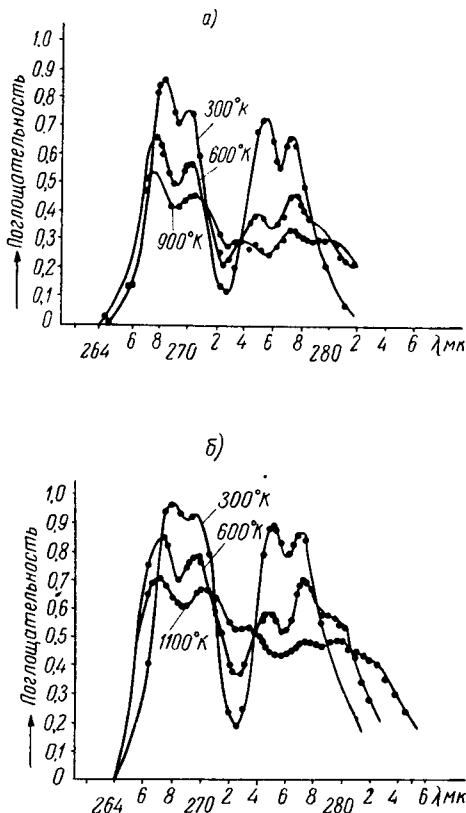


Рис. 213. Поглощательность газового слоя  $\text{CO}_2$  на участке спектра 2,7 мк: а) толщина слоя 5,2 см,  $p=1$  атм; б) толщина слоя 11 см,  $p=1$  атм [70]

ность слоев двуокиси углерода ( $\text{CO}_2$ ) толщиной 5,2 см и 11 см при  $p=1$  атм в диапазоне длин волн 2,6 ÷ 2,9 мк.

Как видно, с повышением температуры поглощательность слоя газа  $\text{CO}_2$  в некоторых участках полосы падает, а в некоторых возрастает.

Спектральная поглощательность слоя газа определяется соотношением:

$$A(\nu) = \frac{I_{\text{пад}}(\nu) - I_{\text{проп}}(\nu)}{I_{\text{пад}}(\nu)},$$

где  $I_{\text{пад}}(\nu)$  и  $I_{\text{проп}}(\nu)$  — интенсивности падающей и пропущенной радиации.

Согласно изложенному в § 6 [формула (6, 10)], поглощательность изотермического слоя газа определяется разностью:

$$A(\nu) = 1 - \frac{I_{\text{проп}}(\nu)}{I_{\text{пад}}(\nu)} = 1 - e^{-\int_0^L \alpha(\nu) dl}, \quad (116,1)$$

где  $\alpha(\nu)$  — спектральный коэффициент поглощения.

При одинаковом спектральном коэффициенте поглощения во всех местах слоя

$$A(\nu) = 1 - e^{-\alpha(\nu)L}, \quad (116,2)$$

где  $L$  — путь поглощения.

Средний интегральный коэффициент поглощения для всего спектра частот излучения и на всем пути поглощения ( $L$ ) находится из равенства:

$$\frac{\int_0^{\infty} I_{\text{проп}}(\nu) d\nu}{\int_0^{\infty} I_{\text{пад}}(\nu) d\nu} = \frac{I_{\text{проп}}}{I_{\text{пад}}} = e^{-\bar{\alpha}L} = \frac{\int_0^{\infty} I_{\text{пад}}(\nu) e^{-\alpha(\nu)L} d\nu}{I_{\text{пад}}},$$

откуда находим:

$$\bar{\alpha}_{\text{интегр}} = -\frac{1}{L} \ln \frac{\int_0^{\infty} I_{\text{пад}}(\nu) e^{-\alpha(\nu)L} d\nu}{I_{\text{пад}}}. \quad (116,3)$$

Полученная формула для  $\bar{\alpha}_{\text{интегр}}$  показывает, что:

1) при одинаковом спектральном коэффициенте поглощения для всех частот излучения [ $\alpha(\nu) = \text{const}$ ] средний интегральный коэффициент поглощения равняется спектральному:

$$\bar{\alpha}_{\text{интегр}} = \alpha(\nu);$$

2) для любой зависимости спектрального коэффициента поглощения от частоты излучения средний интегральный коэффициент поглощения на пути излучения уменьшается с увеличением длины пути ( $L$ ) [отношение под логарифмом в формуле (116,3) всегда меньше единицы, так как  $\frac{I_{\text{проп}}}{I_{\text{пад}}} = 1 - A$ ].

Уменьшение среднего интегрального коэффициента поглощения с длиной пути поглощения радиации оказывается тем сильнее, чем более резко выражен селективный характер спектрального коэффициента поглощения.

Необходимо здесь отметить, что в дифференциальном уравнении лучевого переноса энергии [уравнение (115,9)] содержится средний дифференциальный коэффициент поглощения, который для селективно излучающих сред всегда больше среднего интегрального коэффициента поглощения:

$$\bar{\alpha}_{\text{диф}} \geq \bar{\alpha}_{\text{интегр}}(L).$$

На рис. 214 представлен средний интегральный коэффициент поглощения  $\bar{\alpha}_{\text{интегр}}(L)$  тепловой радиации двуокиси углерода ( $\text{CO}_2$ ) и водяного пара ( $\text{H}_2\text{O}$ ) в зависимости от пути поглощения ( $L$ ) при  $p = 1 \text{ атм}$  для различных температур.

На рис. 215 представлен средний дифференциальный коэффициент по-

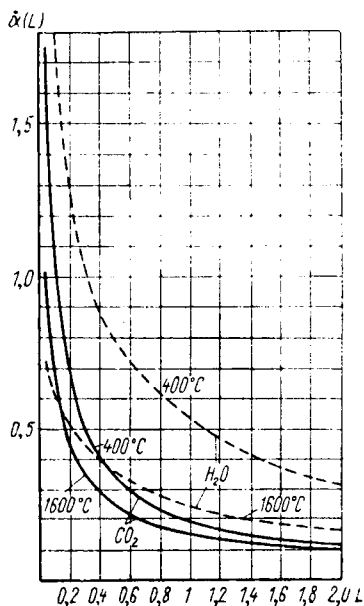


Рис. 214. Средний интегральный коэффициент ослабления интенсивности энергии излучения в газовом слое  $\text{CO}_2$  и  $\text{H}_2\text{O}$  в зависимости от длины пути ослабления

глощения ( $\bar{\alpha}_{\text{диф}}$ ), приближенно вычисленный по данным измерения тепловой радиации тонких слоев двуокиси углерода ( $\text{CO}_2$ ) и водяного пара ( $\text{H}_2\text{O}$ ) в зависимости от температуры при  $p = 1 \text{ атм}$ .

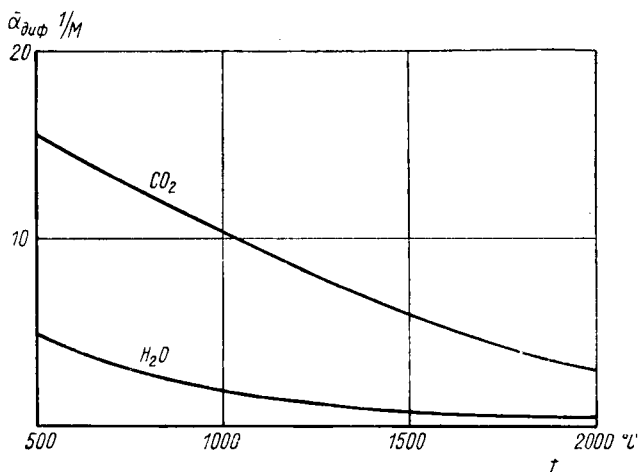
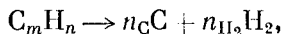


Рис. 215. Средний дифференциальный коэффициент ослабления газов  $\text{CO}_2$  и  $\text{H}_2\text{O}$  в зависимости от температуры

Присутствие в газе большого количества мелких взвешенных частиц пыли, капелек жидкости или частиц дыма придает среде мутный характер. Мутная газовая среда способна ослаблять лучевой поток во всех частях спектра, хотя и не в равной мере. К мутным средам можно отнести туманы и облака в атмосфере, сажистое светящееся пламя в топках котлов и печей и т. п.

Практический интерес в теплотехнике представляет сажистое светящееся пламя, образуемое при диффузионном горении природного и других углеводородных газов, при сжигании нефтяных продуктов и летучих продуктов твердого топлива, т. е. при горении всех тех топлив, которые содержат углеводороды.

Образование сажи происходит при нагревании масс углеводородного топлива в отсутствии масс окисляющей среды. Формула крекинга углеводородов на сажу может быть записана в следующем виде:



где  $n_C$  и  $n_{H_2}$  — стехиометрические коэффициенты образования углерода и водорода.

Термический крекинг углеводородов на сажу связывает определенное количество энергии, которое зависит от состава конечных и исходных продуктов. Количество образуемой сажи и расход энергии при термическом крекинге углеводородных газов могут быть найдены путем термодинамического расчета из условия равновесного состава реагирующей системы при заданной температуре. Как показывают расчеты, даже для наиболее устойчивого в химическом отношении предельно насыщенного углеводорода  $CH_4$  реакция сажеобразования заканчивается при температуре несколько более  $1000^\circ C$ . Другие непредельные углеводороды ( $C_2H_4$ ,  $C_2H_2$ ,  $C_6H_6$ ) разлагаются с выделением сажи при еще более низких температурах нагрева. В табл. 20 приведены результаты

Таблица 20

Газы	Теплота сгорания, $10^3 \frac{\text{кдж}}{\text{нм}^3}$	Теоретическая температура сгорания		Максимальное сажеобразование, $\frac{\text{г}}{\text{нм}^3}$	Расход энергии на сажеобразование, $10^3 \frac{\text{кдж}}{\text{нм}^3}$
		$t^\circ C$	$T^\circ K$		
Метан $CH_4$ . . . . .	35,8	2040	2313	268	3,35
Этан $C_2H_6$ . . . . .	64,2	2051	2324	357	3,78
Пропан $C_3H_8$ . . . . .	91,2	2107	2380	402	4,65
Этилен $C_2H_4$ . . . . .	59,05	2285	2558	553	2,33
Пропилен $C_3H_6$ . . . . .	86	2318	2591	553	2,385
Ацетилен $C_2H_2$ . . . . .	56,05	2619	2892	1070	10,13
Коксовый газ . . . . .	17,56	2009	2282	97,8	0,745

расчета некоторых основных характерных величин при сгорании углеводородных газов (теплота сгорания и теоретическая температура) и при термическом крекинге (максимальное сажеобразование и расход энергии).

Как видно из данных табл. 20, наименьшее количество сажи образуется при термическом крекинге метана, наибольшее — ацетилена.

Необходимо отметить, что в реальном пламени, образуемом при диффузионном сжигании углеводородных газов, концентрация сажи будет значительно меньше, так как нагрев исходного газа осуществляется в условиях смешения с окисляющей средой и продуктами сгорания; при этом часть образуемой сажи газифицируется. Кроме того, в реальных условиях термического крекинга углеводородов, помимо сажи и водорода, образуются и другие продукты.

Структура сажистых частиц и их размеры в зависимости от условий сажеобразования в пламени и рода углеводородов могут быть весьма различными. Размер образуемых в пламени сажистых частиц обычно не превышает 0,1 мк, и число их в единичном объеме светящегося пламени оказывается огромным (порядка миллиона в 1 см<sup>3</sup>).

Способность ослаблять лучевой поток сажиистой газовой средой определяется коэффициентом ослабления, который определяется, исходя из следующих соображений.

Число частиц сажи в элементарном слое толщиной  $\delta l$  и площадью  $F$  составляет:

$$N_{\delta l} = \frac{CF\delta l}{1/6\pi d^3 \rho},$$

где  $C$  — концентрация частиц;

$d$  — размер частиц;

$\rho$  — плотность частиц.

Суммарное сечение ослабления лучевого потока в элементарном слое запыленного газа находится согласно равенству:

$$\Sigma \delta F_{\text{осл}} = N_{\delta l} \frac{\pi}{4} d^2 \Phi(\lambda) = F \delta l \frac{3}{2} \frac{C}{\rho d} \Phi(\lambda),$$

где  $\Phi(\lambda)$  — оптическая характеристика сажистых частиц, зависящая от их структуры и длины волны проходящего излучения.

Составляя отношение  $\frac{\Sigma \delta F_{\text{осл}}}{F \delta l} = k$ , находим коэффициент ослабления интенсивности лучевого потока:

$$k(\lambda) = \frac{3}{2} \frac{C}{\rho d} \Phi(\lambda). \quad (116,4)$$

Как показывают исследования оптических свойств слоев сажи, характеристика  $\Phi(\lambda)$  находится в зависимости от длины



волны проходящего излучения.

$$\Phi(\lambda) \sim \frac{1}{\lambda^n - m \lg \lambda}, \quad (116,5)$$

где  $n$  и  $m$  — показатели, зависящие от рода пламени и области спектра проходящего излучения.

В табл. 21 приведены показатели  $n$  и  $m$  формулы (116,5), а также указан приблизительный размер частиц сажи для различного пламени.

Таблица 21

Род пламени	Световой спектр $n$ ( $m = 0$ )	Инфракрасный спектр		Средний размер частиц сажи, $10^{-3}\mu\text{к}$
		$m$	$n$	
Ацетилен . . . . .	0,8	0,25	0,83	2,0
Пламя стеариновой свечи . . . . .	1,2	0,45	1,12	12,5
Светильный газ . . . . .	1,3	0,50	1,30	17,5
Амлацетат (пламя Гейзера) . . . . .	1,35	0,55	1,20	25,0

С повышением температуры спектр излучения абсолютно черного тела сдвигается в сторону коротких длин волн и поэтому коэффициент ослабления лучевого потока теплового излучения в сажистой газовой среде с повышением температуры возрастает. Средний интегральный коэффициент ослабления сажистой газовой среды вследствие зависимости спектрального коэффициента ослабления от длины волны должен уменьшаться с увеличением пути поглощения  $L$  (формула 116,3). Сложная зависимость спектрального коэффициента ослабления сажистого газа от длины волны, трудности определения концентрации и размера частиц не позволяют надежно рассчитать коэффициент ослабления раскаленного сажистого газа — пламени.

Для приближенной оценки среднего коэффициента ослабления теплового излучения *светящегося пламени* А. М. Гурвич рекомендует эмпирическую формулу:

$$k = 1,6 \cdot 10^{-3} T - 0,5 \text{ 1/м.} \quad (116,6)$$

Формула эта аппроксимирует приближенные расчеты коэффициента ослабления теплового излучения сажистого пламени в диапазоне температур 1000 — 1900° К.

Для приближенной оценки коэффициента ослабления теплового излучения *запыленного* газа частицами золы при сгорании угольной пыли А. М. Гурвичем рекомендована формула:

$$k = 7C \sqrt[3]{\frac{1}{T^2 d^2}}, \quad (116,7)$$

где  $C$  — концентрация пыли,  $г/мм^3$  продуктов сгорания;

$T$  — температура газа,  $^{\circ}K$ ;

$d$  — средний диаметр пылевых частиц,  $мк$ .

Из формулы (116,7) следует, что коэффициент ослабления теплового излучения при температуре  $1000 \div 2000^{\circ} K$  множества пылевых частиц в раскаленном газе, получаемых при сгорании угольной пыли, оказывается приблизительно на порядок ниже дифференциального коэффициента поглощения теплового излучения чистыми продуктами сгорания топлива, содержащими  $CO_2$  и  $H_2O$ . Даже коэффициент ослабления множества частиц сажи в раскаленном газе светящегося пламени [формула (116,6)] оказывается сравним с дифференциальным коэффициентом поглощения раскаленных продуктов сгорания  $CO_2$  и  $H_2O$ .

### § 117. Тепловое излучение изотермического слоя газа ( $CO_2$ и $H_2O$ )

По известным коэффициентам поглощения  $[\alpha(\lambda, T)]$  теплового излучения для всего множества полос дискретного спектра поглощения газа можно рассчитать интенсивность теплового излучения  $I(T, L)$  изотермического слоя газа толщиной  $L$  при температуре  $T$ :

$$I(T, L) = \sum_{i=1}^n \bar{B}(T, \lambda_i) [1 - e^{-\bar{\alpha}(\lambda_i, T) L}], \quad (117,1)$$

где  $\bar{B}(T, \lambda_i)$  — средняя интенсивность энергии излучения абсолютно черного тела в  $i$ -ой полосе спектра при температуре  $T$ ;

$\bar{\alpha}(\lambda_i, T)$  — средний коэффициент поглощения в  $i$ -ой полосе спектра.

Подобные приближенные расчеты проводились А. Шаком и др. [59]. Однако на практике предпочитают пользоваться данными непосредственных измерений степени черноты теплового излучения изотермических слоев газа:

$$\epsilon(T, L) = \frac{I(T, L)}{B(T)} \equiv \frac{I(T, L)}{\frac{1}{\pi} \sigma_0 T^4}. \quad (117,2)$$

На рис. 216 и 217 представлены кривые степени черноты излучения  $\epsilon(T, L)$  различных изотермических слоев  $CO_2$  и  $H_2O$  в зависимости от температуры. Эти данные отвечают экспериментальным измерениям Хоттеля [VII].

Различные толщины слоев  $L$  на рис. 216 отвечают полному давлению газа  $p = 1$  атм. При изменении давления газа  $CO_2$  степень черноты излучения  $\epsilon(T, p_{CO_2} \cdot L, p)$  несколько изменяется. На рис. 218 представлено отношение степеней черноты

$\frac{\varepsilon(T, p_{\text{CO}_2} \cdot L, p)}{\varepsilon(T, p_{\text{CO}_2} \cdot L)}$  теплового излучения  $\text{CO}_2$  в зависимости от полного давления, при котором находится излучающий газ.

Для водяного пара степень черноты излучения зависит не только от произведения  $p_{\text{H}_2\text{O}} \cdot L$ , но и от парциального давления

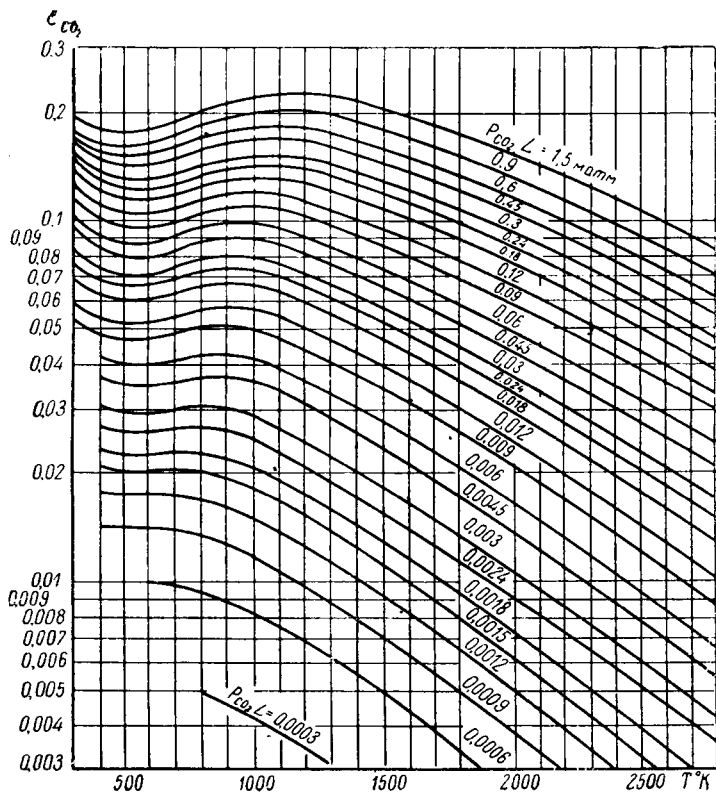


Рис. 216. Степень черноты теплового излучения изотермических слоев газа  $\text{CO}_2$  в зависимости от температуры для различных приведенных толщин слоев ( $p_{\text{CO}_2} \cdot L$ ) м·атм

$p_{\text{H}_2\text{O}}$ . В связи с этим данные рис. 217 условно приведены к полному давлению газовой смеси  $p = 1 \text{ атм}$  и  $p_{\text{H}_2\text{O}} \rightarrow 0$ . Для пересчета степени черноты излучения на любое парциальное давление водяного пара служит рис. 219.

Общая степень черноты теплового излучения газовой среды, одновременно содержащей  $\text{CO}_2$  и  $\text{H}_2\text{O}$  в различных концентрациях, в первом приближении можно находить путем суммирования степеней черноты  $\text{CO}_2$  и  $\text{H}_2\text{O}$ :

$$\varepsilon(T, pL) = \varepsilon_{\text{CO}_2}(T, p_{\text{CO}} \cdot L, p) + \varepsilon_{\text{H}_2\text{O}}(T, p_{\text{H}_2\text{O}} \cdot L, p_{\text{H}_2\text{O}}), \quad (117,2)$$

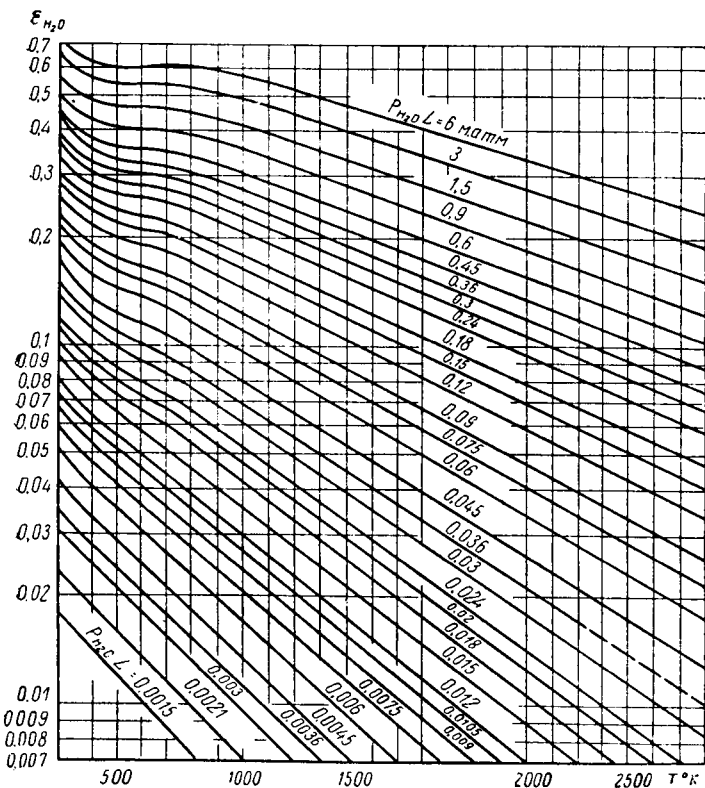


Рис. 217. Степень черноты теплового излучения изотермических слоев газа  $\text{H}_2\text{O}$  в зависимости от температуры для различных приведенных толщин слоев ( $p_{\text{H}_2\text{O}} \cdot L$ ) м·атм при полном давлении смеси газовых молекул  $p=1$  атм и парциальном давлении  $p_{\text{H}_2\text{O}} \rightarrow 0$  (поправка на  $p_{\text{H}_2\text{O}}$ , см. рис. 219).

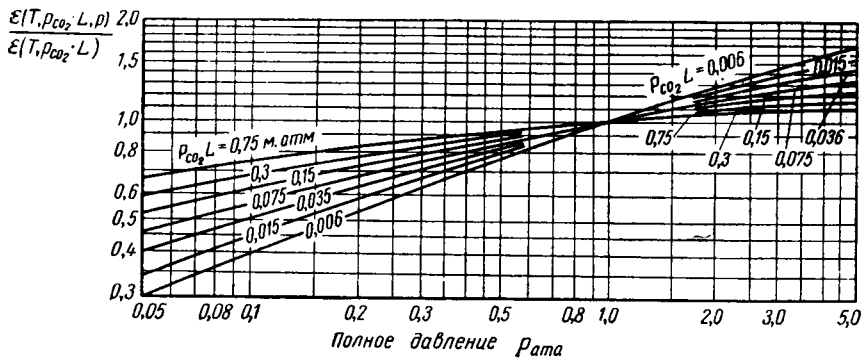


Рис. 218. Поправка на изменение степени черноты газа  $\text{CO}_2$  в зависимости от полного давления смеси газовых молекул

где  $p_{\text{CO}_2}$  и  $p_{\text{H}_2\text{O}}$  — парциальные давления  $\text{CO}_2$  и  $\text{H}_2\text{O}$  в газовой смеси;

$p$  — полное давление газовой смеси.

Величины  $\epsilon(T, L)$  рис. 216 и 217 отвечают интенсивности собственного теплового излучения изотермического слоя газа толщиной  $L$  по направлению излучения  $l$ . Для вычисления энергии собственного излучения газа, падающей на элементарную

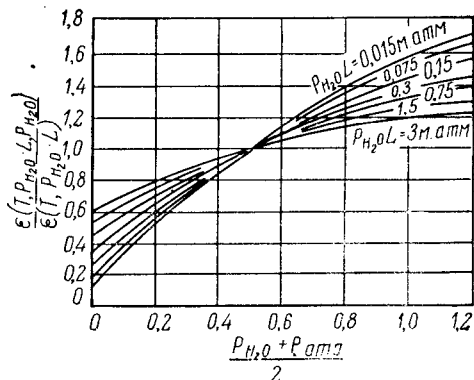


Рис. 219. Поправка на изменение степени черноты газа  $\text{H}_2\text{O}$  в зависимости от парциального давления  $p_{\text{H}_2\text{O}}$

площадку со всех направлений излучающего объема газа, необходимо ввести понятие эквивалентной толщины слоя излучающей среды  $L_{\text{ЭКВ}}$ . Для этой цели определим лучевой поток собственного теплового излучения изотермического объема газа, падающий на единичную площадку окружающей оболочки со всех направлений  $\vec{l}$ :

$$E(T, \alpha L_0) = \int_0^{\infty} d\lambda \int_{(2\pi)} B(\lambda, T) [1 - e^{-\alpha(\lambda) \frac{L_0}{\cos \varphi}}] \cos \varphi \cdot d\omega =$$

$$= \int_0^{\infty} d\lambda \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} B(\lambda, T) [1 - e^{-\alpha(\lambda) \frac{L_0}{\cos \varphi}}] \sin \varphi \cos \varphi \cdot d\varphi, \quad (117,3)$$

где  $L_0$  — характерный размер рассматриваемого объема излучающего газа;

$\alpha(\lambda)$  — спектральный коэффициент поглощения газа;

$\theta$  и  $\varphi$  — угол долготы ( $\theta$ ) и дополнительный угол широты  $\varphi$  в сферических координатах направления излучения

$$l = \frac{l_0}{\cos \varphi}.$$

Введя понятие средней оптической плотности среды  $\bar{\alpha}L_0$  для всего спектра излучения и сопоставляя формулу (117,3) с фор-

мулой определения степени черноты излучения изотермического слоя среды

$$\varepsilon(T, \bar{\alpha}L_{\text{экв}}) = \frac{E(T, \bar{\alpha}L_0)}{\sigma_0 T^4} = 1 - e^{-\bar{\alpha}L_{\text{экв}}}, \quad (117,4)$$

можно вычислить эквивалентную толщину слоя излучающей среды в объеме.

Ввиду трудностей такого расчета целесообразно оценить эквивалентную толщину слоя излучающего газа в объеме, исходя из следующих соображений.

Излучающий изотермический газ, находящийся в объеме  $V$  с окружающей оболочкой  $F$ , можно рассматривать как множество отдельных источников собственного излучения, распределенных по объему в различных местах (атомы, молекулы и их ансамбли). Среднее время пробега фотонов  $\bar{\tau}$  от источников до оболочки отвечает средней длине нути пробега  $\bar{L} = c\bar{\tau}$ , где  $c$  — скорость фотонов. Для изотермической среды, находящейся в термодинамическом лучистом равновесии с окружающей оболочкой, количество фотонов частоты излучения  $\nu$ , проходящих оболочку  $F$ , определяется равенством:

$$Fq_n(\nu)\bar{\tau} = F\pi j(\nu)\bar{\tau} = F\pi j(\nu)\frac{\bar{L}}{c},$$

где  $q_n(\nu)$  — удельный поток фотонов в направлении нормали к оболочке;

$j(\nu)$  — интенсивность потока.

Количество фотонов, проходящих оболочку рассматриваемого объема за время  $\bar{\tau}$ , в условиях термодинамического равновесия отвечает количеству фотонов, находящихся в объеме в каждый момент времени:

$$VU(\nu) = V \frac{4\pi j(\nu)}{c}.$$

Из равенства

$$Fq_n(\nu)\bar{\tau} = VU(\nu)$$

находится средняя длина пути пробега фотонов от всех источников излучения до оболочки:

$$\bar{L} = \frac{4V}{F}. \quad (117,5)$$

Эту среднюю длину нути пробега фотонов от множества источников излучения газа, находящегося в газовом объеме, приближенно можно принять за эквивалентную толщину слоя излучающего газа. Погрешность, получаемая от такой приближенной оценки  $L_{\text{экв}}$ , оказывается тем меньше, чем меньше оптическая плотность излучающей среды ( $\bar{\alpha}L_0$ ). В табл. 22 приведены харак-

терные размеры  $L_0$  и эквивалентные толщины слоев  $L_{\text{экр}}$ , отвечающие различным формам объемов излучающего газа, вычисленные по формуле (117,5).

Т а б л и ц а 22

Форма объема	Характерный размер $L_0$	Эквивалентная толщина слоя $L_{\text{экр}}$
Сфера	Диаметр	2/3
Цилиндр с $L/d \gg 1$	Диаметр	1
Цилиндр с $L/d = 1$	Диаметр	2/3
Плоскопараллельный слой	Толщина	2
Куб	Ребро	2/3
Параллелепипед с отношением граней 1 : 2 : 6	Меньшее ребро	1,2

Влияние оптической плотности излучающей среды ( $\alpha L_0$ ) на эквивалентную толщину слоя учитывается множителем

$$L_{\text{экр}} = m \frac{4V}{F}.$$

Для практических расчетов принимают  $m \approx 0,9$ .

Если оболочка, окружающая объем излучающего газа, будет частично пропускающей фотоны излучения и частично отражающей их

$$F = F_{\text{проп}} + F_{\text{отр}},$$

то в расчет средней длины свободного пробега фотонов от источников излучения в газе до пропускающей оболочки следует вводить величину:

$$L_{\text{экр}} = m \frac{4V}{F_{\text{проп}}}.$$

Для полностью отражающей оболочки даже один источник излучения в объеме дает  $L_{\text{экр}} \rightarrow \infty$  (абсолютно черное тело).

### § 118. Лучистый теплообмен изотермической излучающей среды с поверхностью нагрева

Хотя условие изотермичности среды в процессах переноса тепла и является нереальным, тем не менее представляет методический интерес определить лучистый теплообмен в этих условиях. Излучающая изотермическая среда с температурой  $T_1$ , средней степенью черноты собственного теплового излучения  $\epsilon_1(T_1)$  и поглощательностью  $A_1(T_2)$  находится в окружении поверхности нагрева стенки  $H$  с температурой  $T_2$ , степенью черноты

собственного теплового излучения  $\varepsilon_2(T_2)$  и поглощательностью  $A_2(T_2)$ . Для расчета лучистого теплообмена излучающей среды со стенкой можно воспользоваться следующими формулами потоков эффективного излучения:

для среды

$$Q_{\text{эф, 1}} = H \frac{\varepsilon_1(T_1)}{A_1(T_2)} \sigma_0 T_1^4 - \left[ \frac{1}{A_1(T_2)} - 1 \right] Q_{\text{рез}},$$

для стенки

$$Q_{\text{эф, 2}} = H \frac{\varepsilon_2(T_2)}{A_2(T_1)} \sigma_0 T_2^4 - \left[ \frac{1}{A_2(T_1)} - 1 \right] Q_{\text{рез}}.$$

Результирующее излучение, или теплопередача, поверхности нагрева в стационарных условиях определяется разностью:

$$Q_{\text{рез}} = Q_{\text{эф, 1}} - Q_{\text{эф, 2}}.$$

Решая систему этих уравнений относительно  $Q_{\text{рез}}$ , находим:

$$Q_{\text{рез}} = H \frac{\frac{\varepsilon_1(T_1)}{A_1(T_2)} \sigma_0 T_1^4 - \frac{\varepsilon_2(T_2)}{A_2(T_1)} \sigma_0 T_2^4}{\frac{1}{A_1(T_2)} + \frac{1}{A_2(T_1)} - 1}. \quad (118,1)$$

При условии приближенных равенств

$$\varepsilon_1(T_1) \approx A_1(T_2), \quad \varepsilon_2(T_2) \approx A_2(T_1)$$

формула теплопередачи излучением запишется в виде:

$$Q_{\text{рез}} = H A_{1,2} \sigma_0 (T_1^4 - T_2^4), \quad (118,2)$$

где  $A_{1,2} = \frac{1}{\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} - 1}$  — обобщенная поглощательность среды

и стенки в лучистом теплообмене.

Если теплоотдачу излучением среды к стенке условно определить согласно закону Ньютона — Рихмана

$$Q = H \alpha_{\text{изл}} (T_1 - T_2),$$

то коэффициент теплоотдачи излучением находится по формуле:

$$\alpha_{\text{изл}} = \frac{A_{1,2} \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{T_1 - T_2} = A_{1,2} \sigma_0 T_1^3 \left[ 1 + \frac{T_2}{T_1} + \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^2 + \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^3 \right]. \quad (118,3)$$

При малой разности температур  $\alpha_{\text{изл}}$  стремится к величине

$$\alpha_{\text{изл}, \Delta T \rightarrow 0} = 4 A_{1,2} \sigma_0 T_1^3. \quad (118,4)$$



На рис. 220 представлена зависимость  $\alpha_{\text{изл}}$  от  $T_1$  для различных  $T_2/T_1$  и  $A_{1,2} = 1$ .

В реальных условиях лучистого теплообмена температура излучающей среды неодинакова во всех точках объема и особенно

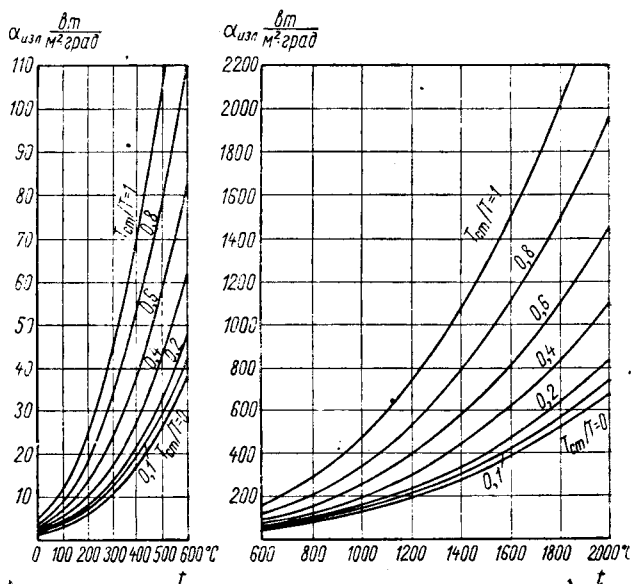


Рис. 220. Коэффициент теплоотдачи излучением при лучистом обмене черных тел в зависимости от их температур

заметно изменяется вблизи поверхности нагрева. На температурное поле излучающей среды, помимо переноса энергии излучения, оказывают влияние различные другие виды переноса энергии и в первую очередь конвективный перенос.

### § 119. Граничные условия лучистого теплообмена излучающей среды со стенкой

Теплопередача излучением на границе среды со стенкой определяется разностью лучевых потоков падающего излучения на стенку ( $E_{\text{пад}}$ ) и эффективного излучения стенки ( $E_{\text{эф, ст}}$ ):

$$q_{\text{луч}} = E_{\text{пад}} - E_{\text{эф, ст}} \quad (119,1)$$

Удельные потоки падающего и эффективного излучений (рис. 221) находятся интегрированием соответствующих интенсивностей излучения ( $I_{\text{пад}}$  и  $I_{\text{эф, ст}}$ ) в пределах полупространствен-

ного угла ( $+2\pi$  и  $-2\pi$ ):

$$E_{\text{пад}} = \int_{(+2\pi)} I_{+l} \cos(\vec{l}, \vec{n}) d\omega = \pi \bar{I}_{\text{пад}},$$

$$E_{\text{эф, ст}} = \int_{(-2\pi)} I_{-l} \cos(\vec{l}, \vec{n}) d\omega = \pi \bar{I}_{\text{эф, ст}},$$

где  $\vec{l}$  и  $\vec{n}$  — направление интенсивности излучения и нормали к стенке;

$d\omega$  — элементарный пространственный угол;

$\bar{I}_{\text{пад}}$  и  $\bar{I}_{\text{эф, ст}}$  — усредненные интенсивности падающего и эффективного излучений.

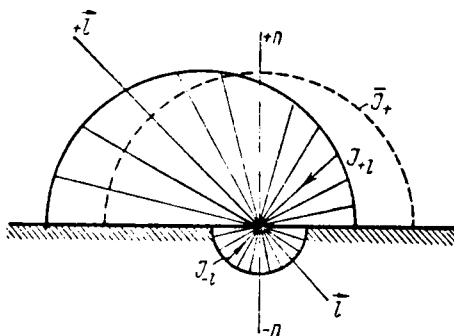


Рис. 221. К определению лучистого обмена энергией на границе

Объемная плотность энергии излучения на границе со стенкой определяется интегралом:

$$U = \frac{1}{c} \int_{(4\pi)} I_l d\omega = \frac{1}{c} \left( \int_{(+2\pi)} I_{+l} d\omega + \int_{(-2\pi)} I_{-l} d\omega \right).$$

Пользуясь средними величинами интенсивностей энергии излучения в удельных потоках

$$\bar{I}_{+l} \equiv \bar{I}_{\text{пад}} = \frac{1}{\pi} E_{\text{пад}}, \quad \bar{I}_{-l} \equiv \bar{I}_{\text{эф, ст}} = \frac{1}{\pi} E_{\text{эф, ст}},$$

объемную плотность энергии излучения определяем следующим равенством:

$$U = \frac{1}{c} (2E_{\text{пад}} + 2E_{\text{эф, ст}}). \quad (119,2)$$

Эффективное излучение стенки определяется формулой:

$$E_{\text{эф, ст}} = E_{\text{ст}} + \left( \frac{1}{A_{\text{ст}}} - 1 \right) q_{\text{луч}}, \quad (119,3)$$

где  $E_{ст}$  — удельный поток собственного излучения стенки;  
 $A_{ст}$  — поглощательность стенки.

Путем совместного решения уравнений (119,1) — (119,3) получаем следующую формулу для определения удельной теплопередачи излучением на границе со стенкой:

$$q_{луч, ст} = \frac{\frac{1}{4} cU - \frac{1}{A_{ст}} E_{ст}}{\frac{1}{A_{ст}} - \frac{1}{2}}. \quad (119,4)$$

В условиях, достаточно близких к тепловому равновесию,

$$cU = 4\sigma_0 T^4, \quad E_{ст} = \varepsilon_{ст} \sigma_0 T_{ст}^4, \quad \varepsilon_{ст} = A_{ст}$$

и формула (119,4) представляется в виде:

$$q_{луч, ст} = \frac{\sigma_0 (T^4 - T_{ст}^4)}{\frac{1}{A_{ст}} - \frac{1}{2}}. \quad (119,5)$$

Формула (119,5) показывает, что в условиях лучистого теплообмена излучающей среды со стенкой ( $q_{луч} \neq 0$ ) на границе имеет место температурный скачок:

$$T^4 - T_{ст}^4 = \frac{q_{луч} \left( \frac{1}{A_{ст}} - \frac{1}{2} \right)}{\sigma_0}. \quad (119,6)$$

Величина температурного скачка будет тем значительнее, чем больше  $q_{луч}$  и чем больше сопротивление переносу энергии излучения к стенке  $\left( \frac{1}{A_{ст}} - \frac{1}{2} \right)$ .

## § 120. Лучистый теплообмен двух плоскопараллельных стенок при наличии между ними слоя поглощающей среды

Имеются две стенки с плоскопараллельными поверхностями неограниченных размеров, с неизменными во времени и одинаковыми во всех местах температурами  $T_1$  и  $T_2$ . Между стенками находится слой неподвижной, однородной лучепоглощающей среды толщиной  $s$ . Требуется определить теплопередачу излучением стенок.

В стационарных условиях при локальном термодинамическом равновесии удельный лучевой поток энергии в слое определяется формулой (115,9):

$$q_{луч} = -\frac{4}{3} \frac{\sigma_0}{\alpha} \frac{dT^4}{dx}.$$

Из этой формулы при условии постоянного коэффициента поглощения и при отсутствии других переносов тепла, кроме луче-

вого, находится распределение температуры в слое:

$$T^4(x) = T'^4 - q_{\text{луч}} \cdot \frac{3}{4} \frac{\alpha}{\sigma_0} x.$$

Разность температур среды на обеих границах слоя определяется равенством:

$$T'^4 - T''^4 = q_{\text{луч}} \frac{3/4 \alpha s}{\sigma_0}. \quad (120,1)$$

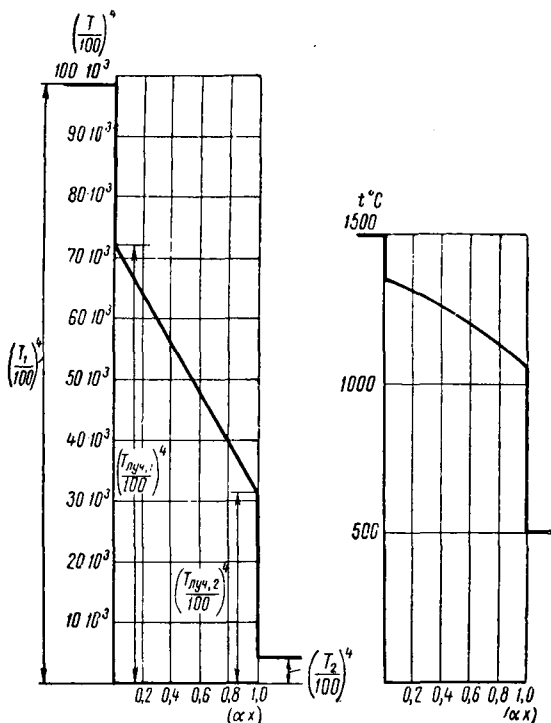


Рис. 222. Распределение температур в неподвижном слое поглощающей среды при лучистом обмене тел с плоскопараллельными поверхностями

Разность температур стенки и среды на каждой границе находится согласно (119,6):

$$T_1^4 - T'^4 = q_{\text{луч}} \frac{1}{A_1} \frac{1}{2}, \quad (120,2)$$

$$T''^4 - T_2^4 = q_{\text{луч}} \frac{1}{A_2} \frac{1}{2}. \quad (120,3)$$

Складывая левые и правые части равенств (120, 1) — (120, 3), приходим к следующему решению поставленной задачи:

$$q_{\text{луч}} = \frac{\sigma_0 (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} - 1 + \frac{3}{4} \bar{\alpha}_s}. \quad (120,4)$$

Если между стенками находится лучепрозрачная среда ( $\alpha_s = 0$ ), то формула (120, 4) упрощается и переходит в обычную формулу теплопередачи излучением двух тел с плоскопараллельными поверхностями (106, 2).

На рис. 222 показано распределение величин  $\left(\frac{T}{100}\right)^4$  и соответствующих температур  $t^\circ \text{C}$  в неподвижном плоскопараллельном слое поглощающей среды с оптической плотностью  $\alpha_s = 1$ . Необходимо отметить, что полученное распределение температур отвечает лишь лучевому переносу тепла, без участия других видов переноса (конвективного, турбулентного, молекулярного), а также при отсутствии источников тепла. Решение задачи лучевого переноса тепла с участием других видов переноса и источников тепла весьма усложняется и может быть выполнено лишь при упрощающих допущениях.

### § 121. Лучистый теплообмен турбулентного потока излучающей среды со стенками канала

В цилиндрический канал ограниченной длины (рис. 223) направляется турбулентный поток излучающей среды с заданной температурой ( $T_1$ ) и одинаковой скоростью ( $w$ ) по всему сечению потока. Движущаяся излучающая среда в канале вступает в лучистый теплообмен с ограждающими стенками заданной и постоянной во всех местах температурой ( $T_{\text{ст}}$ ). Требуется найти распределение температур среды в канале и определить теплопередачу излучением стенкам.

Уравнение, описывающее стационарный конвективно-радиационный перенос тепла в турбулентном потоке без учета диссипации энергии и других источников тепла, представится в следующем виде:

$$\text{div } \vec{q}_{\text{конв}} + \text{div } \vec{q}_{\text{турб}} + \text{div } \vec{q}_{\text{луч}} = 0, \quad (121,1)$$

где  $\vec{q}_{\text{конв}} = \vec{w} \rho c_p T$  — вектор конвективного переноса энтальпии среды ( $\vec{w}$  — вектор скорости,  $\rho$  — плотность,  $c_p$  — теплоемкость,  $T$  — температура);

$\vec{q}_{\text{турб}} = -\lambda_{\text{турб}} \nabla T$  — вектор турбулентного переноса тепла ( $\lambda_{\text{турб}}$  — коэффициент турбулентной теплопроводности);

$\vec{q}_{\text{луч}}$  — вектор лучевого (радиационного) переноса тепла.

Последний вектор в общем случае неизотропного излучения имеет сложное определение, связанное с тензором лучевого давления. Однако для потока излучающей среды с достаточно большим коэффициентом поглощения в каналах достаточно большого

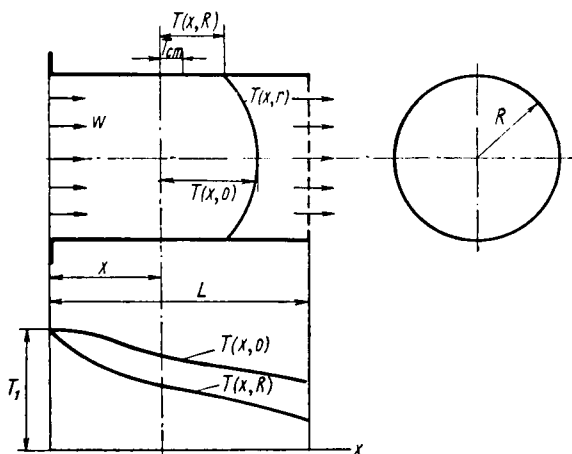


Рис. 223. К определению лучистого теплообмена потока излучающей среды со стенками камеры

размера вектор лучевого переноса тепла приближенно можно определить дифференциальной формулой через градиент температуры:

$$\vec{q}_{\text{луч}} = -\lambda_{\text{луч}} \nabla T, \quad (121,2)$$

где  $\lambda_{\text{луч}} = \frac{16}{3} \frac{\sigma_0 T^3}{\bar{k}}$  — коэффициент лучистой теплопроводности среды ( $\bar{k}$  — средний дифференциальный коэффициент ослабления).

Порядок величин удельных потоков переноса тепла можно оценить, исходя из конкретных условий.

Удельный поток конвективного переноса энтальпии ( $q_{\text{конв}} = \omega c_p t$ ) даже при сравнительно небольшой удельной скорости потока газа ( $1 \div 10 \text{ нм}^3/\text{м}^2 \text{сек}$ ) при температуре  $1000 \div 2000^\circ \text{C}$  оказывается достаточно большим ( $q_{\text{конв}} = 1500 \div 35000 \text{ квт}/\text{м}^2$ ); конвективный перенос тепла играет преимущественную роль. В сравнении с конвективным переносом радиационный перенос тепла в излучающей среде такой же температуры ( $1000 \div 2000^\circ \text{C}$ ) оказывается приблизительно на порядок ниже, даже если не учитывать ослабления лучевого потока энергии излучения ( $q_{\text{луч}} = \sigma T^4$ ). Перенос тепла турбулентной теплопроводностью ( $q_{\text{турб}} = -\lambda_{\text{турб}} \nabla T$ ) находится в зависимости от коэффициента турбу-

лентного переноса тепла  $a_{\text{турб}} = \frac{\lambda_{\text{турб}} \delta}{\rho c_p}$ , который определяется скоростью дрейфа и длиной свободного пробега турбулентных глобул в потоке ( $a_{\text{турб}} \sim \omega_{\text{турб}} l_{\text{турб}}$ ). При большой начальной скорости турбулентного потока и при достаточно большом поперечном размере канала ( $a_{\text{турб}} \sim \omega_0 d_0$ ) турбулентный перенос тепла по порядку может быть вполне сравним с радиационным переносом. *Перенос тепла молекулярной теплопроводностью* ( $\vec{q}_r = -\lambda \nabla T$ ) заметную роль играет лишь в ламинарном пограничном слое у стенки.

Дифференциальные представления о радиационном и турбулентном переносах тепла в потоке излучающей среды позволяют условно объединить оба вида переноса одним общим вектором:

$$\vec{q}_* = -\lambda_* \nabla T, \quad (121,3)$$

где  $\lambda_* = \lambda_{\text{луч}} + \lambda_{\text{турб}}$  — обобщенный коэффициент теплопроводности.

Для осесимметричного потока среды в цилиндрическом канале дифференциальное уравнение переноса тепла представится в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{w}{a_*} \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \quad (121,4)$$

где  $\theta = T - T_{\text{ст}}$  — разность температуры среды и постоянной температуры стенки;

$a_* = \frac{\lambda_*}{\rho c_p}$  — обобщенный коэффициент температуропроводности.

Пользуясь методом Фурье для нахождения искомой функции в виде произведения

$$\theta(x, r) = \theta(x) \cdot \theta(r), \quad (121,5)$$

получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\theta''(r) + \frac{1}{r} \theta'(r) + \varepsilon^2 \theta(r) = 0, \quad (121,6)$$

$$\theta''(x) - \frac{w}{a_*} \theta'(x) - \varepsilon^2 \theta(x) = 0, \quad (121,7)$$

где  $\varepsilon$  — произвольная размерная величина  $\left(\frac{1}{m}\right)$ .

При постоянной скорости потока среды в канале частные решения этих уравнений находятся в виде:

$$\theta(r) = A J_0(\varepsilon r), \quad (121,8)$$

$$\theta(x) = C_1 e^{\gamma_1 x} + C_2 e^{\gamma_2 x}, \quad (121,9)$$

где  $J_0(\varepsilon r)$  — функция Бесселя нулевого порядка первого рода:

$$\gamma_1 = \frac{1}{2} \frac{w}{a_*} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} \frac{w}{a_*}\right)^2 + \varepsilon^2}, \quad (121,10)$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{2} \frac{w}{a_*} - \sqrt{\left(\frac{1}{2} \frac{w}{a_*}\right)^2 + \varepsilon^2}. \quad (121,11)$$

Рассмотрим граничное условие теплопередачи излучением к стенке канала.

Пренебрегая переносом тепла молекулярной теплопроводностью к стенке по сравнению с лучевым переносом, составляем следующее уравнение граничного условия:

$$\text{при} \quad r = R - \lambda_{\text{луч}} \theta'(r)|_{r=R} = \alpha_{\text{луч}} \theta(r)|_{r=R},$$

$$\text{или} \quad \mu \frac{J_1(\mu)}{J_0(\mu)} = \frac{\alpha_{\text{луч}} R}{\lambda_{\text{луч}}} \equiv Nu_{\text{луч}}, \quad (121,12)$$

где  $Nu_{\text{луч}}$  — критерий Нуссельта для лучевого переноса тепла;  $J_0(\mu)$  и  $J_1(\mu)$  — функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядка ( $\mu = \varepsilon R$ ).

Имея в виду, что

$$\alpha_{\text{луч}} = \frac{q_{\text{луч}}}{T - T_{\text{ст}}} \quad \text{и} \quad \lambda_{\text{луч}} = \frac{16}{3} \frac{\sigma_0 T^3}{k}$$

и пользуясь для определения  $q_{\text{луч}}$  формулой (119,5), получаем следующее уравнение граничного условия теплопередачи к стенке:

$$\mu \frac{J_1(\mu)}{J_0(\mu)} = (\bar{k}R) \frac{1}{\frac{1}{A_{\text{ст}}} - \frac{1}{2}} \left[ 1 + \frac{T_{\text{ст}}}{T} + \left(\frac{T_{\text{ст}}}{T}\right)^2 + \left(\frac{T_{\text{ст}}}{T}\right)^3 \right]. \quad (121,13)$$

Как видно из этой формулы, критерий лучистого теплообмена излучающей среды со стенкой канала в малой мере зависит от температуры  $\left(\frac{T_{\text{ст}}}{T} < 1\right)$  и определяется в основном критерием оптической плотности среды (критерий Бугера  $Bu = \bar{k}R$ ) и поглощательностью стенки ( $A_{\text{ст}}$ ).

Трансцендентное уравнение (121,13) имеет бесконечное множество корней, каждый из которых может служить для частного решения (121,8).

Краевое условие при входе потока излучающей среды в канал запишется следующим равенством:

$$\theta(r)|_{x=0} = \theta_1 = T_1 - T_{\text{ст}}.$$

Это условие отвечает ряду частных решений:

$$\theta_1 = \sum_{i=1}^{i=\infty} A(\mu_i) J_0\left(\mu_i \frac{r}{R}\right).$$



Определяя коэффициенты этого ряда уже известным методом (§ 56), находим:

$$A(\mu_i) = \theta_1 \frac{2J_1(\mu_i)}{\mu_i [J_1^2(\mu_i) + J_0^2(\mu_i)]}. \quad (121,14)$$

При  $x=0$  частное решение (121,9) представляет равенство:

$$C_1 + C_2 = \theta_1. \quad (121,15)$$

При  $x=L$  имеем следующее граничное условие теплопередачи излучением к торцовой стенке канала:

$$-\lambda_{\text{луч}} \theta'(x)_{x=L} = \alpha_{\text{луч}} \theta(x)_{x=L},$$

или

$$C_1 \gamma_1 e^{\gamma_1 L} + C_2 \gamma_2 e^{\gamma_2 L} = -m(C_1 e^{\gamma_1 L} + C_2 e^{\gamma_2 L}), \quad (121,16)$$

где

$$m = \frac{\alpha_{\text{луч}}}{\lambda_{\text{луч}}} = \bar{k} \frac{1}{\frac{1}{A_{\text{ср}}} - \frac{1}{2}} \left[ 1 + \frac{T_{\text{ср}}}{T_2} + \left( \frac{T_{\text{ср}}}{T_2} \right)^2 + \left( \frac{T_{\text{ср}}}{T_2} \right)^3 \right]; \quad (121,17)$$

$T_2$  — конечная температура среды в канале.

Путем совместного решения (121,16) и (121,17) находим:

$$C_1 = -\theta_1 \frac{e^{(\gamma_2 - \gamma_1)L} \cdot \beta_2 / \beta_1}{1 - e^{(\gamma_2 - \gamma_1)L} \cdot \beta_2 / \beta_1}, \quad (121,18)$$

$$C_2 = \theta_1 \frac{1}{1 - e^{(\gamma_2 - \gamma_1)L} \cdot \beta_2 / \beta_1},$$

где  $\beta_1 = m + \gamma_1$ ;  $\beta_2 = m + \gamma_2$ .

Пользуясь найденными  $A(\mu_i)$ ,  $C_1$  и  $C_2$ , приходим к следующему решению поставленной задачи:

$$\frac{\theta(x, r)}{\theta_1} = \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{2J_1(\mu_i)}{\mu_i [J_1^2(\mu_i) + J_0^2(\mu_i)]} J_0\left(\mu_i \frac{r}{R}\right) e^{\gamma_2 x} \frac{1 - e^{(\gamma_2 - \gamma_1)(L-x)} \cdot \beta_2 / \beta_1}{1 - e^{(\gamma_2 - \gamma_1)L} \cdot \beta_2 / \beta_1}. \quad (121,19)$$

Средняя температура излучающей среды на выходе из теплообменного канала ( $x=L$ ) определяется интегрированием:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\theta}_2}{\theta_1} &= \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{2J(\mu_i)}{\mu_i [J_1^2(\mu_i) + J_0^2(\mu_i)]} e^{\gamma_2 x} \frac{1 - e^{(\gamma_2 - \gamma_1)(L-x)} \cdot \beta_2 / \beta_1}{1 - e^{(\gamma_2 - \gamma_1)L} \cdot \beta_2 / \beta_1} \frac{\int_0^R 2\pi r J_0\left(\mu_i \frac{r}{R}\right) dr}{\pi R^2} = \\ &= \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{4J_1^2(\mu_i)}{\mu_i^2 [J_1^2(\mu_i) + J_0^2(\mu_i)]} e^{\gamma_2 x} \frac{1 - e^{(\gamma_2 - \gamma_1)(L-x)} \cdot \beta_2 / \beta_1}{1 - e^{(\gamma_2 - \gamma_1)L} \cdot \beta_2 / \beta_1}. \quad (121,20) \end{aligned}$$

Для канала неограниченной длины ( $L \rightarrow \infty$ ) формула (121,20) переходит в следующую:

$$\frac{\bar{\theta}_2}{\theta_1} = \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{4J_1^2(\mu_i)}{\mu_i^2 [J_1^2(\mu_i) + J_0^2(\mu_i)]} \times \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{x}{d} \left[ \sqrt{\left(\frac{wd}{a_*}\right)^2 + 16\mu_i^2} - \frac{wd}{a_*} \right]\right\}. \quad (121,20')$$

В критериальном виде полученное решение запишется:

$$\frac{\bar{\theta}_2}{\theta_1} = f\left(\frac{wd}{a_*}, \bar{k}d, A_{ст}, \frac{T_{ст}}{T_1}, \frac{L}{d}\right), \quad (121,21)$$

где  $\frac{wd}{a_*}$  — критерий конвективно-радиационного переноса тепла в турбулентном потоке излучающей среды.

Этот критерий можно представить в виде:

$$\frac{wd}{a_*} = \frac{wd}{v} \frac{v}{a} \frac{1}{\frac{a_{луч}}{a} + \frac{a_{турб}}{a}},$$

где  $\frac{wd}{v}$  — критерий Рейнольдса;

$\frac{v}{a}$  — критерий Прандтля;

$\frac{a_{луч}}{a} = \frac{16}{3} \frac{\sigma_0 T^3}{\bar{k}\lambda}$  — критерий радиационно-кондуктивного переноса тепла;

$\frac{a_{турб}}{a} = \kappa \frac{wd}{v} \frac{v}{a}$  — критерий турбулентно-кондуктивного переноса тепла ( $\kappa$  — множитель, отвечающий переходу от скорости потока и его поперечного размера к скорости и длине пробега турбулентных масс в потоке).

Таким образом, температура среды на выходе из канала определяется критериальным уравнением:

$$\frac{\bar{\theta}_2}{\theta_1} = \varphi\left(\frac{wd}{v}, \bar{k}d, A_{ст}, \frac{\sigma_0 T_1^3}{\bar{k}\lambda}, \frac{v}{a}, \frac{T_{ст}}{T_1}, \frac{L}{d}\right). \quad (121,22)$$

В сравнении с задачей конвективно-кондуктивного теплообмена в канале конвективно-радиационный теплообмен определяется дополнительными критериями:  $\bar{k}d$  — критерий Бугера;  $A_{ст}$  — поглощательность стенки;  $\frac{\sigma_0 T_1^3}{\bar{k}\lambda}$  — критерий радиационно-кондуктивного переноса тепла.

Пользуясь формулой (121,22), можно составить критерий теплообмена в канале:

$$\frac{T_1 - \bar{T}_2}{T_1 - T_{ст}} \equiv \frac{1 - \frac{\bar{T}_2}{T_1}}{1 - \frac{T_{ст}}{T_1}} \equiv \frac{1 - \bar{\theta}_2}{1 - \theta_{ст}}, \quad (121,23)$$

который представляет отношение разности температур потока излучающей среды при входе и выходе из теплообменного канала к максимально возможной разности температур.

Для определения количества тепла, отдаваемого потоком излучающей среды стенкам канала, имеем следующее равенство:

$$Q = H w_n \bar{\rho} \bar{c}_p (T_1 - \bar{T}_2), \quad (121,24)$$

где  $H$  — поверхность нагрева стенок канала;

$w_n$  — скорость потока среды, отнесенная к единичной площади поверхности нагрева стенок;

$\bar{\rho}$  и  $\bar{c}_p$  — плотность и средняя теплоемкость среды.

Определяя теплообмен в канале формулой Ньютона — Рихмана:

$$Q = H \bar{\alpha}_n (T_1 - T_{ст}).$$

Критерий теплообмена (121,23) можно заменить равнозначным ему критерием Стентона:

$$St \equiv \frac{1 - \bar{\theta}_2}{1 - \bar{\theta}_{ст}} \equiv \frac{\bar{\alpha}_n}{w_n \bar{\rho} \bar{c}_p}. \quad (121,25)$$

Таким образом, приходим к следующему критериальному уравнению теплообмена потока излучающей среды со стенками канала:

$$St = \Phi \left( \frac{wd}{\nu}, \bar{k}d, A_{ст}, \frac{\sigma_0 T_1^3}{\bar{k}\lambda}, \frac{\nu}{a}, \frac{T_{ст}}{T_1}, \frac{L}{d} \right). \quad (121,26)$$

На рис. 224 представлены результаты обобщения экспериментальных данных по теплообмену потока продуктов сгорания смеси природного и коксового газа (около 75% природного и 25% коксового) в сквозном канале диаметром  $d = 0,1$  м и длиной  $L = 8d$ . Опыты проводились в диапазоне изменения начальных температур  $t_1$  от 942 до 1727°С и при содержании  $CO_2$  8 ÷ 9% и  $H_2O$  18 ÷ 20%, при общем давлении  $p = 1$  атм. Поглощаемость стенок канала была измерена и составляла  $A_{ст} = 0,925$ ; стенки охлаждались водой со средней температурой 40 ÷ 60°С.

Необходимо отметить, что, хотя диапазон изменения критерия Рейнольдса  $\left(\frac{wd}{\nu}\right)$  в опытах и находился в переходной области (от 800 до 8000), режим течения излучающей среды в канале был турбулентным, так как продукты сгорания поступали из камеры, в которую вдувалась турбулентная струя горючей смеси с числом  $Re_0 = \frac{w_0 d_0}{\nu_0}$  от 5000 до 62000.

Коэффициент теплообмена в критерии  $St = \frac{\bar{\alpha}}{w \bar{\rho} \bar{c}_p}$  находится из

равенства:

$$\bar{\alpha} = \frac{Q_H}{H(\bar{T} - \bar{T}_{ст})},$$

где  $\bar{T}$  и  $\bar{T}_{ст}$  — средние температуры потока среды и стенок канала;

$Q_H$  — количество переданного тепла от потока среды к стенкам канала;

$H$  — поверхность нагрева стенок канала.

Обобщение результатов опытов одним определяющим критерием [Рейнольдса  $\left(\frac{wd}{\nu}\right)$  при неизменном отношении  $L/d$ , неизменном  $A_{ст}$  и при сравнительно небольшом изменении оптической плотности среды  $\bar{k}d$  (так как состав продуктов сгорания

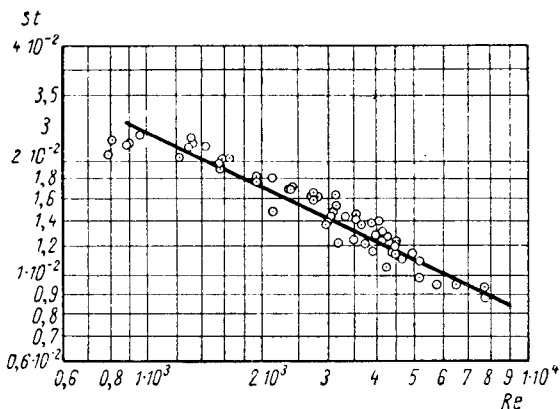


Рис. 224. Обобщение экспериментальных данных по конвективно-лучистому теплообмену потока продуктов сгорания в трубе

в опытах изменялся мало) показывает, что, несмотря на значительное изменение начальной температуры излучающих продуктов сгорания газа, критерий лучисто-кондуктивного переноса тепла  $\frac{\sigma_0 T_1^3}{k\lambda}$  заметно не сказывается на теплообмене. Произведение

$\bar{k}\lambda$  в знаменателе этого критерия слабо изменяется с температурой, так как с ее повышением уменьшается коэффициент ослабления ( $\bar{k}$ ) и увеличивается коэффициент теплопроводности среды ( $\lambda$ ). Числитель критерия ( $\sigma_0 T_1^3$ ), а следовательно, и сам критерий в опытах изменялся примерно в 4,5 раза. Таким

образом, более чем четырехкратное изменение критерия  $\frac{\sigma_0 T_1^3}{\bar{k}\lambda}$

заметно не меняет однозначной критериальной зависимости  $St = f(Re)$ .

Обнаруженное в опытах слабое влияние температуры излучающей среды на критерий теплообмена в канале отвечает формуле (121,13), определяющей теплопередачу излучением на границе со стенкой канала.

Для каналов с другим диаметром на теплообмен, помимо критерия  $Re$ , будет оказывать влияние критерий Бугера ( $\bar{k}d$ ).

## § 122. Теплообмен в камере сгорания газа

В камеру сгорания поступает смесь топлива и окисляющей среды, которая сгорает с освобождением химической энергии топлива и образованием раскаленных продуктов сгорания. В этих условиях уравнение, описывающее стационарный перенос энергии в камере сгорания, без учета диссипации и других источников, представится в следующем виде:

$$\operatorname{div} \vec{q}_{\text{конв}(T+x)} + \operatorname{div} \vec{q}_{\text{турб}(T+x)} + \operatorname{div} \vec{q}_{\text{луч}} = 0, \quad (122,1)$$

где  $\vec{q}_{\text{конв}(T+x)} = \vec{\omega}(\rho c_p T_1 + \rho_i E_{\text{хим}})$  — вектор конвективного переноса начальной энтальпии ( $\rho c_p T_1$ ) и химической энергии ( $\rho_i E_{\text{хим}}$ ) среды с горючим компонентом ( $\rho_i$ ) и химической энергией ( $E_{\text{хим}}$ );

$\vec{q}_{\text{турб}(T+x)} = (-\lambda_{\text{турб}} \nabla T) + (-D_{\text{турб}} E_{\text{хим}} \nabla \rho_i)$  — вектор турбулентного переноса тепла и химической энергии ( $D_{\text{турб}}$  — коэффициент турбулентного переноса);

$\vec{q}_{\text{луч}} = -\lambda_{\text{луч}} \nabla T$  — вектор лучевого переноса тепла ( $\lambda_{\text{луч}}$  — коэффициент лучистой теплопроводности).

На рис. 225 изображены различные удельные потоки энергии до и после зоны реакции горения. Как и в предыдущей задаче, наибольший поток энергии в камере сгорания соответствует конвективному переносу энтальпии и химической потенциальной энергии.

Пользуясь понятием обобщенной температуры

$$T_* = T_1 + \theta_{\text{хим}},$$

где  $\theta_{\text{хим}} = \frac{\rho_i E_{\text{хим}}}{\rho c_p}$  представляет условную потенциальную температуру, отвечающую химической энергии среды, уравнение переноса энергии можно записать в следующем виде:

$$\operatorname{div} (\vec{\omega} \rho c_p T_*) + \operatorname{div} (-\lambda_{* \text{турб}} \nabla T_*) + \operatorname{div} \vec{q}_{\text{луч}} = 0, \quad (122,2)$$

где  $\lambda_{* \text{турб}} = D_{\text{турб}} \rho c_p$  — условный коэффициент турбулентной теплопроводности, отвечающий градиенту обобщенной температуры  $\nabla T_*$ .

Решение задачи о температурном поле в камере сгорания требует знания закономерности развития и протекания процесса

сгорания, который находится в зависимости от условий смешения и реагирования топлива с окислителем. Для решения этой задачи, помимо уравнения переноса энергии, необходимо привлечь уравнение переноса реагирующей массы, а также уравнение обмена импульсами масс в потоке среды (уравнение движения).

В предельном случае мгновенного сгорания топлива, вводимого в камеру с одинаковой скоростью по всему поперечному сечению, критериальная формула определения теплообмена сохраняется такой же, как и полученная в предыдущей задаче [кри-

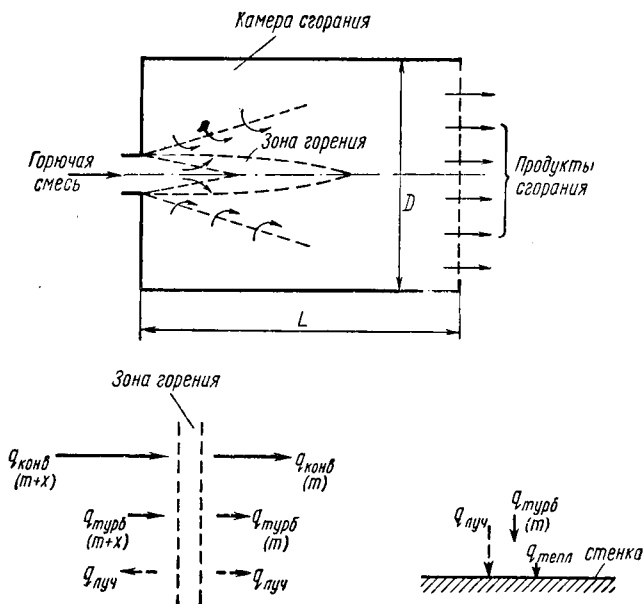


Рис. 225. К определению теплообмена в камерах сгорания газа

териальное уравнение (121,26)], при условии, что начальная температура потока отвечает обобщенной температуре  $T_*$ .

При локализованном вводе в камеру сгорания топлива и окисляющей среды с помощью горелок зона сгорания топлива в камере находится в зависимости от условий предварительного смешения реагирующих масс, их физико-химических свойств, условий зажигания и аэродинамических условий вдувания струй. Для заданного состава горючей смеси известной начальной температуры, одинаковых условий предварительного смешения и подобных условий ввода и зажигания горючей смеси зона сгорания топлива локализуется в определенном месте объема камеры сгорания, вблизи горелок. При этом площадь образуемого турбулентного фронта воспламенения горючей смеси заданного состава,

как показывает специальное исследование, определяется критерием  $\frac{T_*}{T_1}$ .

Вместо обобщенной температуры  $T_* = T_1 + \theta_{\text{хим}}$  в расчетах обычно пользуются отвечающей ей величиной теоретической температуры сгорания топлива:

$$T_{\text{теор}} = 273 + \frac{c_p t_1 + Q_{\text{сгор}}}{c_{p\text{сгор}}}, \quad (122,3)$$

где  $c_p t_1$  — начальная энтальпия поступающей в камеру единичной массы смеси;

$Q_{\text{сгор}}$  — теплота сгорания единичной массы смеси;

$c_{p\text{сгор}}$  — средняя теплоемкость единичной массы продуктов сгорания.

За характерный размер камеры сгорания можно принять эквивалентный размер, отвечающий объему камеры ( $V$ ) с ограждающими стенками ( $H_{\text{ст}}$ ):

$$l_{\text{эkv}} = \frac{4V}{H_{\text{ст}}}. \quad (122,4)$$

Скорость потока смеси, поступающей в камеру в количестве  $V_{\text{см}} = V_{\text{г}} + V_{\text{ок}}$ , целесообразно отнести к поверхности нагрева  $H$ , с которой осуществляется теплообмен:

$$\omega_H = \frac{V_{\text{см}}}{H}. \quad (122,5)$$

При этих условиях критериальное уравнение для определения теплообмена в камерах сгорания с подобными геометрическими формами и условиями ввода и зажигания горючей смеси, можно представить в следующем виде:

$$\frac{1 - \frac{\bar{T}_2}{T_{\text{теор}}}}{1 - \frac{T_{\text{ст}}}{T_{\text{теор}}}} \equiv \frac{\alpha_H}{(\omega_H Q c_p)_{\text{сгор}}} = \varphi \left( \frac{\bar{\omega}_H l_{\text{эkv}}}{v_1}, \bar{k} l_{\text{эkv}}, A_{\text{ст}}, \frac{\sigma_0 T_1^3}{\bar{k} \lambda_1}, \right. \\ \left. \frac{v_1}{a_1}, \frac{T_{\text{ст}}}{T_1}, \frac{T_{\text{теор}}}{T_1} \right). \quad (122,6)$$

Критерий поглощательности стенки  $A_{\text{ст}}$  для камер сгорания, находящихся длительное время в эксплуатации, существенно не изменяется. Критерий  $\frac{\sigma_0 T_1^3}{\bar{k} \lambda_1}$ , определяемый для температуры горючей смеси, поступающей в камеру, не может оказать заметного влияния на теплообмен раскаленных продуктов сгорания с поверхностью нагрева. Для заданной температуры стенки и начальной температуры смеси  $\left( \frac{T_{\text{ст}}}{T_1} \right)$  при сжигании известного газа с небольшим изменением коэффициента избытка воз-

духа  $\left(\frac{T_{\text{теор}}}{T_1} \cong \text{const}\right)$  критериальное уравнение (122,6) упрощается:

$$\frac{1 - \bar{\vartheta}_2}{1 - \vartheta_{\text{ст}}} = \Phi \left( \frac{\omega_H l_{\text{ЭКВ}}}{\nu_1}, \bar{k} l_{\text{ЭКВ}} \right), \quad (122,7)$$

где  $\bar{\vartheta}_2 = \frac{\bar{T}_2}{T_{\text{теор}}}$  и  $\vartheta_{\text{ст}} = \frac{T_{\text{ст}}}{T_{\text{теор}}}$  — соответствующие безразмерные температуры.

В тех случаях, когда задается не температура стенки, а температура охлаждающей среды ( $T_0$ ), средняя температура стенки ( $T_{\text{ст}}$ ) определяется средней удельной теплопередачей поверхности нагрева ( $\bar{q}_H$ ) и суммарным термическим сопротивлением стенки ( $R_H$ ):

$$\bar{T}_{\text{ст}} = T_0 + \bar{q}_H R_H.$$

Суммарное термическое сопротивление стенки переносу тепла со стороны камеры горения к охлаждающей среде для плоской стенки определяется формулой:

$$R_H = \frac{1}{\alpha_0} + \sum R_{\text{ст}},$$

где  $\alpha_0$  — коэффициент теплоотдачи охлаждающей среды:

$\sum R_{\text{ст}}$  — суммарное термическое сопротивление всех слоев стенки.

Имея в виду, что

$$\bar{q}_H = (\omega_H \bar{q} \bar{c}_p)_{\text{гор}} (T_{\text{теор}} - \bar{T}_2),$$

для определения безразмерной температуры стенки  $\left(\bar{\vartheta}_{\text{ст}} = \frac{\bar{T}_{\text{ст}}}{T_{\text{теор}}}\right)$  получаем следующую формулу:

$$\bar{\vartheta}_{\text{ст}} = \bar{\vartheta}_0 + (1 - \bar{\vartheta}_2) (\omega_H \bar{q} \bar{c}_p)_{\text{гор}} R_H. \quad (122,8)$$

Таким образом, при заданной температуре охлаждающей среды критериальная формула теплообмена в камере сгорания запишется в следующем виде:

$$\frac{1 - \bar{\vartheta}_2}{1 - \bar{\vartheta}_0} \cong \frac{\bar{k}_H}{(\omega_H \bar{q} \bar{c}_p)_{\text{гор}}} = \frac{1}{\frac{1}{\Phi} + (\omega_H \bar{q} \bar{c}_p)_{\text{гор}} R_H}, \quad (122,9)$$

где  $\Phi \left( \frac{\omega_H l_{\text{ЭКВ}}}{\nu_1}, \bar{k} l_{\text{ЭКВ}} \right)$  — экспериментальная функция;

$\bar{\vartheta}_0 = \frac{T_0}{T_{\text{теор}}}$  — безразмерная температура охлаждающей среды;

$\bar{k}_H$  — средний коэффициент теплопередачи поверхности нагрева.



Структура формулы (112,9) показывает, что в камерах сгорания со значительным термическим сопротивлением стенок критерий теплообмена в более сильной мере зависит от критериев  $\frac{\omega_H l_{\text{ЭКВ}}}{v_1}$  и  $\bar{k} l_{\text{ЭКВ}}$ . При малом термическом сопротивлении стенок

$(\omega_H \bar{Q} c_p)_{\text{сгор}} R_H \ll \frac{1}{\Phi}$  формула (122,9) переходит в (122,7).

Полученная критериальная формула для определения теплообмена в камерах сгорания использована для обобщения некоторых экспериментальных данных. Для этой цели были привлечены экспериментальные исследования теплообмена в небольших моделях камер сгорания, а также в больших котельных топках при сжигании природного газа с применением смесительных горелок с закрученной струей.

Ввиду трудности определения дифференциального коэффициента ослабления ( $\bar{k}$ ) продуктов сгорания была использована в качестве приближенного эталона небольшая камера сгорания с  $l_{\text{ЭКВ}} = 0,115$  м. Калориметрическое определение теплообмена в небольшой камере сгорания не связано с возможными существенными ошибками определения средней выходной температуры потока продуктов сгорания в больших котельных топках. При сравнительно малом изменении в составе продуктов сгорания сжигаемого газа (коэффициент избытка воздуха изменялся в диапазоне 1,1 ÷ 1,2) относительный критерий Бугера в камерах сгорания различных размеров определяется отношением эквивалентных размеров:

$$\frac{Bu}{Bu_{\text{этал}}} \approx \frac{l_{\text{ЭКВ}}}{l_{\text{ЭКВ, этал}}} = \frac{l_{\text{ЭКВ}}}{0,115},$$

где  $l_{\text{ЭКВ}} = \frac{4V}{H_{\text{ст}}}$  ( $V$  — объем камеры,  $H_{\text{ст}}$  — поверхность ограждающих стен).

Результаты обобщения теплообмена в камерах сгорания газа аппроксимируются формулой:

$$\frac{1 - \bar{\Phi}_2}{1 - \bar{\Phi}_{\text{ст}}} = \frac{1}{1 + 0,0102 \left( \frac{\omega_H l_{\text{ЭКВ}}}{v_1} \right)^{0,82} \cdot \left( \frac{l_{\text{ЭКВ}}}{0,115} \right)^{-1}}. \quad (122,10)$$

Для камер сгорания газа с заданной температурой охлаждающей среды при определении теплообмена в первом приближении можно воспользоваться формулой (122,9), которая в соответствии с аппроксимационной формулой (122,10) запишется в следующем виде:

$$\frac{1 - \bar{\Phi}_2}{1 - \bar{\Phi}_0} = \frac{1}{1 + 0,0102 \left( \frac{\omega_H l_{\text{ЭКВ}}}{v_1} \right)^{0,82} \cdot \left( \frac{l_{\text{ЭКВ}}}{0,115} \right)^{-1} + (\omega_H \bar{Q} c_p)_{\text{сгор}} R_H}, \quad (122,11)$$

где  $R_H$  — термическое сопротивление стенок поверхности нагрева передачи тепла со стороны камеры сгорания к охлаждающей среде.

Расчет средней температуры потока продуктов сгорания на выходе из камеры сгорания газа сводится к определению  $\bar{\vartheta}_2 = \frac{\bar{T}_2}{T_{\text{теор}}}$  из уравнения (122,11) при известных

$$\omega_H = \frac{V_{\Gamma} + V_{\text{вз}}}{3600H}, \quad l_{\text{экв}} = \frac{4V}{H_{\text{ст}}}, \quad \nu_1 \text{ и } R_H.$$

Расчет необходимой поверхности нагрева проектируемой камеры сгорания с заданной выходной температурой продуктов сгорания  $\bar{\vartheta}_2 = \frac{\bar{T}_2}{T_{\text{теор}}}$  при известных расходах газа ( $V_{\Gamma}$ ) и окисляющей среды ( $V_{\text{вз}}$ ) проводится последовательным приближением в решении уравнения (122,11), путем оценки наперед искомой поверхности нагрева  $H$ . При этом объем камеры сгорания можно предварительно определить из размеров эквивалентного куба  $V = \left(\frac{H_{\text{ст}}}{6}\right)^{\frac{3}{2}}$ .

## ОГЛАВЛЕНИЕ

/Предисловие . . . . .		3
Условные обозначения . . . . .		4
Раздел первый. Основы теории переноса		
§ 1. Общая характеристика процессов переноса . . . . .		11
<i>Глава I.</i> Перенос энергии . . . . .		14
§ 2. Различные виды переноса энергии . . . . .		14
§ 3. Теплопроводность . . . . .		15
§ 4. Конвекция . . . . .		27
§ 5. Турбулентный перенос энергии . . . . .		28
§ 6. Излучение . . . . .		30
§ 7. Уравнение распространения энергии . . . . .		39
§ 8. Перенос энергии в среде на границе с поверхностью тела . . . . .		45
<i>Глава II.</i> Перенос массы . . . . .		50
§ 9. Диффузионный перенос массы газа . . . . .		50
§ 10. Уравнение переноса массы . . . . .		53
§ 11. Уравнение переноса массы в частных случаях . . . . .		56
§ 12. Уравнение диффузии в условиях конвективного переноса массы и ее химического превращения . . . . .		59
§ 13. Конвективно-диффузионный перенос энергии химически реагирующей среды . . . . .		63
§ 14. Диффузионно-конвективный перенос пара в газовой среде при испарении жидкости на поверхности . . . . .		68
§ 15. Перенос массы в среде на границе с поверхностью тела . . . . .		70
§ 16. Перенос массы в пористых телах . . . . .		71
<i>Глава III.</i> Перенос импульсов . . . . .		76
§ 17. Перенос импульсов в газах . . . . .		76
§ 18. Уравнение движения вязкой жидкости . . . . .		80
§ 19. Уравнение одномерного течения . . . . .		87
§ 20. Теплотрения и кинетическая температура среды, движущейся с большими скоростями . . . . .		90
§ 21. Перенос импульса на стенку или торможение текущей среды . . . . .		94
<i>Глава IV.</i> Коэффициенты переноса . . . . .		98
§ 22. Влияние температуры и давления на коэффициенты переноса в газах . . . . .		99
§ 23. Критерии физических свойств газа . . . . .		101
§ 24. Особенности переноса в разреженном газе . . . . .		102

§ 25. Особенности переноса в плотных газах и парах . . . . .	109
§ 26. Коэффициенты переноса в газовых смесях . . . . .	112
§ 27. Коэффициенты переноса в жидкостях . . . . .	115
§ 28. Коэффициент теплопроводности твердых тел . . . . .	117
<i>Глава V. Методы решения задач явлений переноса</i>	126
§ 29. Условия однозначности для процессов в явлениях переноса	126
§ 30. Различные возможности решения задач явлений переноса	127
§ 31. Понятие о подобии физических процессов . . . . .	129
§ 32. Критерии подобия в явлениях переноса . . . . .	130
§ 33. Критерии подобия в процессах переноса тепла	132
§ 34. Критерии подобия в процессах переноса массы	136
§ 35. Критерии подобия в процессах переноса импульса . . . . .	138
§ 36. Критериальные уравнения физических процессов . . . . .	141
§ 37. Условия подобия физических процессов . . . . .	144
<b>Раздел второй. Теплопроводность и теплопередача тел</b>	
<i>Глава VI. Общая характеристика задач теплопроводности</i>	149
§ 38. Исходные понятия и дифференциальное уравнение теплопроводности . . . . .	149
§ 39. Начальные и граничные условия задач теплопроводности тел	154
§ 40. Решение дифференциального уравнения теплопроводности	156
§ 41. Определение расхода тепла . . . . .	159
<i>Глава VII. Стационарная теплопроводность и теплопередача тел</i>	161
§ 42. Теплопроводность и теплопередача плоской стенки . . . . .	161
§ 43. Теплопроводность и теплопередача стенок труб . . . . .	164
§ 44. Теплопроводность и теплопередача сферических слоев . . . . .	168
§ 45. Теплопроводность и теплопередача полуограниченного массива с одной трубой . . . . .	171
§ 46. Теплопроводность и теплопередача ряда труб в массиве . . . . .	176
§ 47. Теплопроводность и теплопередача стержня . . . . .	179
§ 48. Теплопроводность и теплопередача концентрических ребер	183
§ 49. Теплопроводность и теплопередача массива с плоской поверхностью . . . . .	185
§ 50. Теплопроводность и теплопередача угловых степ . . . . .	190
§ 51. Теплопроводность и теплопередача плоскопараллельного слоя с источниками тепла . . . . .	191
§ 52. Теплопроводность и теплопередача тела цилиндрической формы с источниками тепла . . . . .	192
§ 53. Теплопроводность и теплопередача полого цилиндра с источниками тепла . . . . .	193
§ 54. Теплопроводность и теплопередача шара с источниками тепла . . . . .	195
§ 55. Теплоотдача тел в условиях электронагрева . . . . .	196
<i>Глава VIII. Нестационарная теплопроводность тел</i>	198
§ 56. Нагревание или охлаждение плоской стенки . . . . .	198
§ 57. Нагревание или охлаждение цилиндра . . . . .	208
§ 58. Нагревание или охлаждение шара . . . . .	214
§ 59. Нестационарная теплопроводность тел сложной формы	217
§ 60. Нагревание и охлаждение тел при малых критериях Био ( $Bi \ll 1$ ) . . . . .	220
§ 61. Нагревание и охлаждение тел при больших критериях Био ( $Bi \gg 1$ ) . . . . .	221
§ 62. Регулярный режим нагревания и охлаждения тел . . . . .	224
§ 63. Нестационарная теплопроводность полуограниченного массива . . . . .	227
§ 64. Нестационарная теплопроводность с фронтом превращения вещества . . . . .	233
<i>Глава IX. Температурные волны</i>	241
§ 65. Температурные волны в полуограниченном массиве . . . . .	242

§ 66. Температурные волны в плоской стенке ограниченной толщины	249
§ 67. Температурные волны при двухстороннем тепловом воздействии на плоскую стенку	253
§ 68. Теплопроводность и теплопередача степен при распространении температурных волн	254
<b>Р а з д е л т р е т и й. Конвективный перенос тепла</b>	
<b>Глава X. Основы теории конвективного переноса тепла</b>	259
§ 69. Различные схемы конвективного переноса и формулы для определения конвективного теплообмена	259
§ 70. Аналитическое решение задачи конвективно-кондуктивного переноса тепла в капале	263
§ 71. Конвективный перенос тепла в канале с плоскопараллельными стенками	274
§ 72. Распределение скоростей и температур в пограничном слое обтекаемых тел	277
§ 73. Плоскопараллельное течение в слое среды, увлекаемой движущимся телом (течение Куэтта)	280
§ 74. Распределение скоростей в пограничном слое среды при обтекании пластины	283
§ 75. Теплоотдача пластины при обтекании плоскопараллельным ламинарным потоком	288
§ 76. Теплоотдача цилиндра при обтекании ламинарным потоком	292
§ 77. Теплоотдача тел в условиях естественной конвекции	295
§ 78. Турбулентный режим течения	305
§ 79. Распределение скоростей в поперечном сечении турбулентного потока	310
§ 80. Применение диффузионной теории переноса к турбулентному потоку среды с $Pr \approx 1$	314
§ 81. Применение диффузионной теории переноса к турбулентному потоку среды с $Pr \neq 1$	318
<b>Глава XI. Результаты экспериментального исследования конвективного теплообмена</b>	323
§ 82. Теплообмен в условиях естественной конвекции	323
§ 83. Особенности конвективного переноса тепла в условиях вынужденного потока	328
§ 84. Определение средней температуры потока в условиях конвективного теплообмена	330
§ 85. Конвективный теплообмен при продольном обтекании пластины	333
§ 86. Конвективный теплообмен потока жидкости в трубах	334
§ 87. Конвективный теплообмен при поперечном обтекании труб	336
§ 88. Особенности теплообмена жидких металлов	340
<b>Глава XII. Теплоотдача при конденсации пара</b>	342
§ 89. Общие сведения о конденсации пара	342
§ 90. Теория пленочной конденсации пара	344
§ 91. Расчетные формулы теплоотдачи при пленочной конденсации пара	351
§ 92. Теплоотдача при капельной конденсации пара	353
§ 93. Теплоотдача при конденсации пара из паро-газовой смеси	356
<b>Глава XIII. Теплоотдача при кипении жидкости</b>	361
§ 94. Физические особенности процесса кипения	361
§ 95. Зарождение, рост и отрыв паровых пузырьков при кипении жидкости	362
§ 96. Переход от пузырькового к пленочному кипению жидкости	367
§ 97. Критерияльное уравнение для определения теплоотдачи при кипении жидкости	369

§ 98. Расчетные формулы теплоотдачи при пузырьковом кипении жидкости . . . . .	371
§ 99. Расчет критической тепловой нагрузки при кипении жидкости . . . . .	373
<b>Раздел четвертый. Лучистый теплообмен</b>	
<i>Глава XIV.</i> Основные понятия и физические основы теплового излучения . . . . .	379
§ 100. Тепловое, или температурное, излучение . . . . .	379
§ 101. Определение основных величин в процессах излучения энергии . . . . .	382
§ 102. Термодинамика теплового излучения . . . . .	389
§ 103. Излучательная, поглотительная и отражательная способности различных тел . . . . .	398
<i>Глава XV.</i> Лучистый теплообмен тел, находящихся в прозрачной среде . . . . .	408
§ 104. Различные условия обмена энергией излучения тел . . . . .	408
§ 105. Лучистый теплообмен двух тел . . . . .	410
§ 106. Лучистый теплообмен двух тел с плоскопараллельными поверхностями неограниченных размеров . . . . .	411
§ 107. Лучистый теплообмен тела, находящегося в окружении поверхности другого тела . . . . .	413
§ 108. Интегральное уравнение лучистого обмена энергией в системе излучающих тел . . . . .	414
<i>Глава XVI.</i> Определение облученности тел . . . . .	420
§ 109. Метод лучевой алгебры для определения облученности поверхностей . . . . .	420
§ 110. Метод проекций для определения облученности поверхностей . . . . .	427
§ 111. Метод светового моделирования для определения облученности поверхностей . . . . .	430
§ 112. Определение облученности поверхностей с участием отражения излучения от других поверхностей . . . . .	433
§ 113. Определение облученности торцовых поверхностей в канале с участием отражения от образующей поверхности . . . . .	436
<i>Глава XVII.</i> Лучистый теплообмен в ослабляющей среде . . . . .	441
§ 114. Физические основы и уравнение лучевого переноса энергии в ослабляющей среде . . . . .	441
§ 115. Дифференциальное уравнение лучевого переноса энергии . . . . .	447
§ 116. Лучепоглощающая способность газовых сред . . . . .	451
§ 117. Тепловое излучение изотермического слоя газа ( $\text{CO}_2$ и $\text{H}_2\text{O}$ ) . . . . .	459
§ 118. Лучистый теплообмен изотермической излучающей среды с поверхностью нагрева . . . . .	464
§ 119. Граничные условия лучистого теплообмена излучающей среды со стенкой . . . . .	466
§ 120. Лучистый теплообмен двух плоскопараллельных стенок при наличии между ними слоя поглощающей среды . . . . .	468
§ 121. Лучистый теплообмен турбулентного потока излучающей среды со стенками канала . . . . .	470
§ 122. Теплообмен в камере сгорания газа . . . . .	478
Литература . . . . .	484

### Замеченные опечатки

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
40	10 снизу	$\oint$ (V)	$\oint$ (F)
84	6 снизу	$\operatorname{div} = 0$	$\operatorname{div} \vec{w} = 0$
166	4 снизу	$+\sum_1^n R_{\text{ТР}} + \frac{1}{\pi d_n a_1}$	$+\sum_1^n R_{\text{ТР}} + \frac{1}{\pi d_{n+1} a_2}$
203	7 сверху	$\tau =$	$Q\tau =$
229	5 снизу	$\xi = \varepsilon^2 \sqrt{a\tau}$	$\xi = \varepsilon^2 \sqrt{a\tau}$
244	6 снизу	$e^{-\sqrt{\frac{\pi}{z}} x}$	$e^{-\sqrt{\frac{\pi}{az}} x}$
248	12 снизу	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$
304	(рис. 121a)	Направление стрелок циркуляции изменить в обратную сторону	
390	15 сверху	$\frac{(\lambda)_{\text{соб. 2}}}{A(\lambda)_2} =$	$\frac{E(\lambda)_{\text{соб. 2}}}{A(\lambda)_2} =$