

И. И. АРТОБОЛЕВСКИЙ, З. Ш. БЛОХ,
В. В. ДОБРОВОЛЬСКИЙ

СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ

ОГИЗ • ГОСТЕХИЗДАТ • 1944



И. И. АРТОБОЛЕВСКИЙ, З. Ш. БЛОХ, В. В. ДОБРОВОЛЬСКИЙ

СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ

О Г И З

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКВА 1944 ЛЕНИНГРАД

ПРЕДИСЛОВИЕ

В последние десятилетия мы являемся свидетелями исключительно быстрого развития как у нас в СССР, так и за границей всех отраслей машиностроения. Предвоенная и военная обстановка ещё в большей степени активизировала во всём мире развитие машиностроительной промышленности, поставив перед ней, кроме прежних задач, целый ряд новых, в громадном своём большинстве связанных с вопросами войны и обороны. Задача полного разгрома фашизма ставит перед советским машиностроением большое количество новых проблем по освоению и созданию различных видов машин, обеспечивающих высокий уровень нашей военной техники.

Основные задачи, стоящие перед советским машиностроением, сводятся к необходимости дальнейшего повышения производительности и эффективности современных машин путём создания автоматически действующих, быстроходных, прочных и износоустойчивых машин с максимальным использованием качества металла в их конструкциях.

Для решения этих поставленных задач целый ряд разделов науки о машинах должен получить самое широкое развитие. В максимально короткие сроки должны быть созданы новые дисциплины, позволяющие научно разрешать общие и частные проблемы конструирования и расчёта машин. Наконец, в технику должны быть внедрены и уже разработанные научные методы и достижения передовой науки.

Дальнейший рост науки о машинах невозможен без развития теории механизмов и машин — дисциплины, являющейся фундаментом всей этой науки. К сожалению, разработка вопросов этой теории шла и идёт ещё недопустимо медленно, отставая от запросов практики машиностроения и машиноиспользования. Если с этим приходилось мириться на рубеже XIX и XX столетий, когда русское машиностроение находилось в зачаточном состоянии, то в настоящее время, когда в СССР уже создана мощная машиностроительная промышленность, освоены самые сложные машины и впереди стоят ещё более трудные и сложные задачи в этой области, отставание теории механизмов и машин от практики является недопустимым и должно быть ликвидировано в кратчайший срок.

Вопрос об отставании теории механизмов и машин от задач практического машиностроения неоднократно поднимался как у нас, так и за границей. Причины этого отставания надо искать, в первую очередь, в отсутствии до последнего времени правильного подхода к решению отдельных задач. Большинство исследователей ставило и разрешало отвлечённые вопросы, оторванные от запросов практики. Это уводило их внимание от реальных механизмов и машин к некоторым условным схемам, представляющим собой чисто математический, абстрактный интерес. Далее исследователи, решая отдельные, частные задачи, не пытались создавать обобщающих теорий, позволяющих изучить целые виды и группы механизмов. Громадной ценности опыт, накопленный практическим машиностроением, не использовался и не обрабатывался для создания подлинной теории. Наконец, почти совершенно не использовались опыт и знания передовых людей техники: конструкторов, рабочих, стахановцев, новаторов производства и т. д.

Перелом в этом вопросе в сторону приближения теории механизмов и машин к задачам практики и как следствие к созданию действительной науки о механизмах и машинах наступил только в последние годы, и мы с гордостью можем констатировать, что советской школе в создании науки о механизмах и машинах принадлежит почётное место.

Воспитанная на традициях выдающихся русских ученых — Чебышева, Сомова, Жуковского, Ассура и др., советская школа смело начинает прокладывать новые пути в науке о механизмах. Советские работы по классификации механизмов, по методам кинематического и динамического их анализа, по теории пространственных механизмов и т. д. являются ведущими и в мировой науке. Но несмотря на несомненные достижения советской науки о механизмах до сих пор она ещё не является руководящей для практики машиностроения, особенно в тех областях, развитие которых более всего необходимо современному машиностроению.

К числу таких областей, наименее разработанных в теории механизмов и машин, относится раздел, посвященный теории создания новых механизмов и машин, или так называемый раздел синтеза механизмов и машин. Задачи современного автоматостроения, задачи точного приборостроения, наконец, задачи построения артиллерийских устройств и т. д. не могут быть рационально разработаны без использования современных научных методов синтеза механизмов. Вот почему этому вопросу должно быть уделено особое внимание, с тем, чтобы в ближайшие годы теория синтеза механизмов стала руководящим началом для широких кругов инженерных работников при проектировании новых машин.

Широкое использование современных методов синтеза механизмов практическими работниками машиностроения в значительной мере затрудняется отсутствием в технической литературе работ, излагающих в комплексном виде наиболее рациональные методы синтеза. Отдельные же работы по вопросам синтеза рассеяны по громадному количеству журналов, периодических изданий, трудов и т. п., являющихся часто библиографической редкостью и, следовательно, трудно доступных для широких кругов технических работников. Указанное обстоятельство побудило авторов настоящей монографии по инициативе Отдела теории машин и механизмов Института машиноведения Академии наук СССР приступить к составлению сводной монографии по теории синтеза механизмов, имея своей целью не только обобщение ранее полученных материалов, но и разработку ряда новых современных вопросов синтеза, имеющих значение в задачах конструирования машин.

Необходимость выпуска такой монографии диктовалась также и требованиями разработки дальнейшей идейной направленности в задачах синтеза, а следовательно, и необходимостью подведения итогов тому, что было в данной области науки о машинах разработано.

Настоящая монография охватывает вопросы синтеза плоских механизмов с высшими и низшими парами. Вследствие специфичности задач синтеза зубчатых механизмов с эвольвентным профилем зубьев этот раздел в монографии не излагается, тем более, что эти задачи прекрасно изложены в целом ряде работ, появившихся за последнее время.

Авторы в дальнейшем предполагают подготовить к изданию следующий выпуск, посвященный задачам синтеза: пространственных механизмов, некоторых механизмов, применяющихся в счётно-решающих машинах, и методам приближённого синтеза по Чебышеву.

Предисловие, введение и главы I—V написаны И. И. Артоболевским, главы VI—IX — В. В. Добровольским, главы X—XIII — З. Ш. Блохом. Список литературы по синтезу механизмов, помещённый в конце книги, составлен И. И. Артоболевским. Монография составлена под общей редакцией И. И. Артоболевского.

Москва, 31 мая 1942 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Введение	9
--------------------	---

Ч А С Т Ь I.

СИНТЕЗ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ С ВЫШНИМИ ПАРАМИ.

I. Геометрические методы синтеза	15
§ 1. Воспроизведение движения методом центроид	15
§ 2. Воспроизведение движения методом огибаемых и огибающих	19
§ 3. Основные задачи динамического синтеза	24
II. Аналитические методы синтеза	30
§ 4. Уравнения центроид в абсолютном движении	30
§ 5. Уравнения центроид в относительном движении	32
§ 6. Уравнения взаимноогibaемых кривых	36
III. Эмпирические методы синтеза	39
§ 7. Использование моделей или шаблонов для нахождения огибающих	39
§ 8. Замена высшей пары цепями с низшими парами	40
IV. Синтез кулачковых механизмов	44
§ 9. Виды кулачковых механизмов	44
§ 10. Кинематический синтез кулачковых механизмов первого вида	46
§ 11. Кинематический синтез кулачковых механизмов второго вида	51
§ 12. Кинематический синтез кулачковых механизмов третьего вида	56
§ 13. Динамический синтез кулачковых механизмов первого вида	58
§ 14. Динамический синтез кулачковых механизмов второго вида	68
§ 15. Динамический синтез кулачковых механизмов третьего вида	76
§ 16. Аналитический синтез кулачковых механизмов	78
V. Некоторые частные случаи кулачковых и зубчатых механизмов	82
§ 17. Механизмы перекачивающихся рычагов	82
§ 18. Механизмы мальтийских крестов	86
§ 19. Зубчатые механизмы с остановками	95
§ 20. Механизмы храповых колёс	100
§ 21. Зубчатые механизмы для реверсирования движения	103
§ 22. Особые случаи кулачковых механизмов	105

Ч А С Т Ь II.

СИНТЕЗ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ С НИЖНИМИ ПАРАМИ.

VI. Использование шатунных кривых при синтезе механизмов	112
§ 23. Уравнение шатунной кривой (уравнение Робертса)	112
§ 24. Теорема Робертса	114
§ 25. Построение шатунных кривых	115
§ 26. Двойные точки шатунных кривых	116
§ 27. Кривизна шатунных кривых	119
§ 28. Касание третьего порядка	125
§ 29. Касание четвертого порядка	129
§ 30. Касание пятого порядка	132

§ 31. Синтез направляющих механизмов	136
§ 32. Синтез механизмов с остановками	141
§ 33. Случай бесконечно удалённого полюса	142
§ 34. Классификация шатунных кривых	149
§ 35. Синтез кривошипно-шатунного механизма	154
§ 36. Синтез кулисного механизма	158
§ 37. Синтез механизмов с двумя поступательными парами	161
VII. Синтез механизмов методом геометрических мест	165
§ 38. Синтез четырёхзвенных механизмов по двум заданным положениям звеньев	166
§ 39. Синтез четырёхзвенных механизмов по трём заданным положениям звеньев	170
§ 40. Синтез четырёхзвенных механизмов по четырём заданным положениям звеньев	180
§ 41. Синтез четырёхзвенных механизмов по пяти заданным положениям звеньев	196
§ 42. Синтез направляющих механизмов	202
§ 43. Синтез механизмов с остановкой	207
VIII. Синтез механизмов при наличии добавочных условий	211
§ 44. Условия Грасгофа	211
§ 45. Задание мёртвых положений	214
§ 46. Задание угла передачи	221
§ 47. Задание равенства радиусов кривизны в двух и трёх положениях	225
§ 48. Задание равенства радиусов конечных дуг в двух и трёх местах траектории	228
§ 49. Задание передаточного отношения	230
IX. Синтез многозвенных механизмов	232
§ 50. Общие соображения	232
§ 51. Условие неестественности	233
§ 52. Задание угла передачи	234
§ 53. Использование шатунных кривых	237
§ 54. Метод геометрических мест	238
§ 55. Задание мёртвых положений	246
§ 56. Задание равномерного движения	246
X. Основные уравнения для синтеза простых кинематических цепей	252
§ 57. Предварительные замечания	252
§ 58. Уравнение замкнутости четырёхзвенной шарнирной цепи	252
§ 59. Применение основного уравнения к решению задач синтеза	252
§ 60. Уравнение замкнутости простой цепи	259
§ 61. Уравнение скоростей простой цепи	259
§ 62. Уравнение ускорений простой цепи	260
§ 63. Уравнения первых и вторых производных от ускорений простой цепи	26
§ 64. Постановка задач аналитического синтеза	26
§ 65. Определитель цепи	26
§ 66. Матрица цепи	26
§ 67. Общая схема решения задач синтеза	26
§ 68. Матрица цепи с вращательными парами	26
§ 69. Матрица цепи с одной неподвижной кулисой	26
§ 70. Матрица цепи с одной подвижной кулисой	26
§ 71. Матрица цепи с двумя подвижными кулисами	26
§ 72. Границы применимости метода	26
§ 73. Графическое представление комплексного определителя	27
§ 74. Вычисление комплексного определителя	27
XI. Синтез четырёхзвенных механизмов	27
§ 75. Типы четырёхзвенных механизмов	27
§ 76. Составление матриц шарнирного четырёхзвенника	27

§ 77. Составление матриц дезаксиального кривошипно-шатунного механизма	275
§ 78. Синтез шарнирного четырёхзвенного механизма по четырём заданным положениям кривошипа и коромысла	276
§ 79. Синтез дезаксиального кривошипно-шатунного механизма по четырём заданным положениям кривошипа и ползушки	281
§ 80. Исследование возможных решений задачи синтеза по четырём заданным положениям	282
§ 81. Построение годографов при помощи вспомогательного механизма	287
§ 82. Синтез шарнирного четырёхзвенника по значениям угла давления, заданным в четырёх положениях механизма	291
§ 83. Синтез шарнирного четырёхзвенника по четырём заданным положениям точки шатунной плоскости	292
§ 84. Синтез четырёхзвенных механизмов по четырём заданным положениям шатунной плоскости	303
§ 85. Синтез четырёхзвенных механизмов по трём заданным положениям двух звеньев и скоростям их в одном из этих положений	305
§ 86. Синтез четырёхзвенных механизмов по двум заданным положениям двух звеньев и их скоростям в этих положениях	308
§ 87. Задача о мёртвых положениях	312
§ 88. Синтез четырёхзвенных механизмов по двум положениям звеньев и скоростям и ускорениям звеньев в одном из этих положений	316
§ 89. Синтез четырёхзвенных механизмов по заданному предельному значению углового ускорения рабочего звена	318
§ 90. Синтез четырёхзвенных механизмов по пяти заданным положениям двух звеньев	322
§ 91. Синтез шарнирного четырёхзвенника по пяти заданным положениям точки шатунной плоскости	326
§ 92. Синтез четырёхзвенных механизмов по пяти заданным положениям шатунной плоскости	329
§ 93. Синтез четырёхзвенных механизмов по четырём заданным положениям двух звеньев и скоростям звеньев в одном из этих положений	330
§ 94. Синтез четырёхзвенных механизмов по трём заданным положениям двух звеньев и скоростям звеньев в двух из этих положений	332
§ 95. Синтез четырёхзвенных механизмов по двум заданным положениям звеньев, скоростям звеньев в этих положениях и ускорениям звеньев в одном положении	336
§ 96. Синтез четырёхзвенных механизмов по предельным значениям скоростей рабочего звена	338
§ 97. Синтез четырёхзвенных механизмов по предельным значениям угла давления	342
XII. Синтез шестизвенных механизмов.	344
§ 98. Типы шестизвенных механизмов	344
§ 99. Составление матрицы пятизвенной цепи	345
§ 100. Синтез шестизвенного механизма по четырём положениям трёх кривошипных звеньев	346
§ 101. Синтез пятизвенной цепи по трём положениям звеньев и одной скорости	348
§ 102. Синтез пятизвенной цепи по двум положениям звеньев, скоростям и ускорениям звеньев, заданным в одном положении	348
§ 103. Синтез пятизвенной цепи по пяти положениям звеньев	350
§ 104. Синтез пятизвенной цепи по шести положениям звеньев	351
§ 105. Синтез шестизвенного механизма по четырём заданным положениям точки шатунной плоскости	357

§ 106. Синтез шестизвездного механизма по шести заданным положениям точки шатунной плоскости	35
§ 107. Схема синтеза шестизвездного механизма по семи заданным положениям рабочего звена	364
XIII. Синтез многозвездных механизмов.	361
§ 108. Синтез многозвездных механизмов первого класса второго порядка	361
§ 109. Синтез механизмов первого класса третьего порядка	362
§ 110. Образование многозвездных механизмов	363
§ 111. Схемы решения задач синтеза многозвездных механизмов по различным условиям	366
§ 112. Синтез многозвездных механизмов по заданным положениям точки шатуна	370
§ 113. Синтез многозвездных механизмов по m заданным положениям шатунной плоскости	373
Библиография	375
Предметный и именной указатели	387

ВВЕДЕНИЕ.

Основы синтеза механизмов, т. е. теории создания новых механизмов были заложены учёными, работавшими ещё до начала нашей эры. Достаточно указать на автоматически действующие механизмы, которые строили Ктесбий и Герон Александрийский. Позже вопросы синтеза механизмов интересовали целый ряд учёных и инженеров, которые чисто эмпирическим путём создавали замечательные автоматы, представлявшие собой сложнейшие механизмы. Так, например, в XVIII в. знаменитый швейцарский часовщик Пьер Дро и его сын Анри Дро создают своих замечательных «механических людей», которые даже в настоящее время могут вызвать восхищение остроумной конструкцией использованных в них механизмов.

Несмотря на то, что построение подобных механизмов представляло собой несомненное разрешение некоторых частных задач синтеза, всё же надо отметить, что разрешение шло чисто эмпирическим путём, ощупью; на помощь приходила богатая интуиция авторов механизмов. Отсутствие какого-либо научного метода не позволяло распространить разработанные приёмы среди широких кругов техников и инженеров. Поэтому такие «механические люди» были только уникальными механическими игрушками.

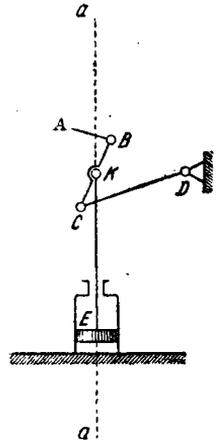
Началом создания настоящей теории синтеза надо считать конец XVIII и начало XIX в. Изобретение паровой машины поставило вопрос о создании

механизмов, трансформирующих прямолинейно-поступательное движение во вращательное, или наоборот. Попытка создания схем механизмов, воспроизводящих прямолинейно-поступательное движение, привела к разработке вопросов теории так называемых направляющих механизмов, т. е. шарнирно-рычажных механизмов, отдельные точки которых двигаются точно или приблизительно прямолинейно. С целью превращения прямолинейного поступательного движения во вращательное уже Уатт предлагает приблизительно-направляющий механизм, схема которого представлена на фиг. 1. Точка K звена BC двигается по некоторой траектории, весьма близкой к прямой aa . Благодаря этому Уатт смог присоединить шток KE к точке K и получить механизм, трансформирующий прямолинейно-поступательное движение поршня в качательное движение рычагов AB и CD .

Интерес к направляющим механизмам не ослабевает в течение всей второй половины XIX в. Начиная с 1854 г., знаменитый русский математик П. Л. Чебышев публикует целый ряд замечательных работ, посвящённых теории направляющих механизмов. В этих работах не только предлагается и рассматривается ряд новых приблизительно-направляющих механизмов, но излагается стройная математическая теория их синтеза, основанная на применении специально разработанной автором теории полиномов, наименее уклоняющихся от нуля.

Попутно Чебышев решает целый ряд важнейших для синтеза механизмов задач, из которых следует отметить: доказательство существования трёх шарнирных четырёхзвенников, описывающих одну и ту же шатунную кривую (теорема Роберта), обоснование структурных формул плоских механизмов и т. д.

В 1864 г. Поселье (Peaucellier) предлагает точный направляющий механизм, основанный на использовании принципа инвертирования кривых. Независимо от Поселье теорию механизма аналогичного типа разработывает русский учёный Липкин (1871 г.). Новый вид направляющего механизма



Фиг. 1.

предлагается в 1874 г. Гартом (Hart). В том же 1874 году появляется ряд других работ, посвящённых теории этого вопроса.

Исследования в области направляющих механизмов не ограничивались разрешением частной задачи воспроизведения прямолинейного движения точками шарнирных механизмов; одновременно разрабатываются геометрические и аналитические методы синтеза механизмов по заданным формам движения.

Во второй половине XIX в. много внимания уделяется проблеме синтеза механизмов для черчения кривых. В 1869 г. выходит работа Робертса (Roberts),

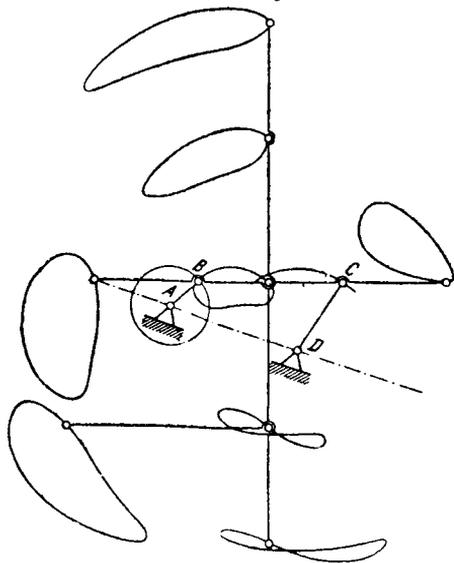
в которой рассматриваются вопросы механического черчения плоских кривых высших порядков с помощью шарнирных механизмов. Несколько позднее появляются работы Сильвестра (Sylvester), Кемпе (Kempe), Мангейма (Mannheim), Гринхилла (Greenhill), Кейлея (Keley) и др., посвящённые черчению с помощью шарнирных механизмов различных алгебраических кривых, конических сечений и т. д. Одновременно с этим Мюллер (Müller), Дарбу (Darboux) и др. изучают свойства так называемых шатунных кривых, т. е. кривых, которые описываются точками шатунов шарнирных механизмов (примеры шатунных кривых см. на фиг. 2).

Решение некоторых задач в области черчения прямых или различных кривых с помощью шарнирных механизмов означало по сути дела решение задач синтеза механизмов по заданным формам их движения, т. е. под-

водило базу под современные методы синтеза механизмов. Вот почему, когда в 20-х годах нашего столетия так остро встал вопрос о необходимости разработки синтеза механизмов, исследователи обратились к работам Чебышева, Робертса, Кемпе и др. и обрели в них мощное средство для построения современной теории синтеза. Новую струю в теорию синтеза механизмов вносят работы Бурместера (Burmeister), появившиеся в конце 80-х годов прошлого столетия. В своих работах Бурместер ставит вопрос о методах проектирования механизмов, отдельные звенья которых занимают ряд заданных положений. Бурместер показывает, что для шарнирного четырёхзвенника в общем случае задача может быть решена для четырёх заданных положений плоскости шатуна. Идея Бурместера состоит в том, что он отыскивает такие точки движущейся шатунной плоскости, ряд положений которой лежит на окружности какого-либо радиуса. Им были найдены методы построения соответствующих геометрических мест, точки которых удовлетворяют вышеуказанному условию. Эти точки и кривые получили название точек и кривых Бурместера.

Идеи Вурместера были значительно развиты целым рядом учёных, из которых, в первую очередь, надо отметить: Альта (Alt), Бейера (Beuer), Крауса (Kraus) и др. У нас этими вопросами занимались А. П. Котельников, Г. Г. Баранов, Н. Г. Бруевич, В. В. Добровольский, С. А. Чекуринов и др. Направление в синтезе механизмов, основоположником которого является Бурместер, можно назвать геометрическим, так как в основе его лежит использование аппарата элементарной и высшей геометрии.

В конце XIX в. работами Дарбу было положено начало развитию аналитических методов синтеза с применением аппарата комплексного переменного. Аналитические методы синтеза у нас в СССР разрабатывались С. А. Гершигоринцем, Л. Г. Лейцянским, А. П. Лурье и З. Ш. Блюхом.



Фиг. 2.

В конце XIX в. начинают развиваться методы структурного синтеза. В 1887 г. появляется работа Сомова, в которой он рассматривает вопрос о связи между степенями свободы механизма и числом его звеньев и кинематических пар различных видов. Ещё ранее на эту связь указывал Чебышев в одной из своих работ, посвящённых теории направляющих механизмов. В 1914—1917 гг. Л. В. Ассуром было написано замечательное сочинение по структуре и классификации механизмов. Можно считать, что работами Ассура положено начало советской школе теории механизмов.

Наконец, следует упомянуть и об экспериментальном методе синтеза механизмов, основа которого была заложена в работах Рело (Reuleaux). При применении экспериментального метода широко используются модели механизмов, шаблоны отдельных звеньев, экспериментально построенные траектории точек звеньев и т. д.

В каком состоянии находится синтез механизмов у нас и за границей в настоящее время?

В области геометрических методов синтеза в последние годы Альтом решён ряд частных задач синтеза шарнирного четырёхзвенника по четырём положениям его звеньев. Бейером решены некоторые простейшие задачи проектирования четырёхзвенного пространственного механизма также по положениям его звеньев. У нас в СССР С. А. Чекурдиновым рассмотрен вопрос о геометрических местах типа Бурместера-Альта при заданном размере кривошипа четырёхзвенника. В. В. Добровольский применил теорию Бурместера для проектирования сферических механизмов.

В области синтеза механизмов с высшими парами Н. И. Мерцаловым разработана теория проектирования зубчатых пространственных передач, зубцы которых построены по развёртывающимся и неразвёртывающимся поверхностям. И. И. Артоболевский развил геометрический метод синтеза плоских механизмов с высшими парами для любого заданного движения ведущего и ведомого звеньев механизма. Он указал точные методы решения этой задачи с помощью центроид или взаимноогibaемых кривых, т. е. с помощью катающихся без скольжения и со скольжением друг по другу кривых. Им же предложено приближённое решение данной задачи с помощью промежуточных шарнирных цепей. Целым рядом других авторов были разработаны методы проектирования различных частных случаев так называемых кулачковых и зубчатых механизмов.

Аналитический метод синтеза механизмов за границей разрабатывается сравнительно мало. У нас этому вопросу уделяется гораздо больше внимания. Аналитический метод с использованием комплексного переменного подробно изложен в работах З. Ш. Блоха. Им аналитически решены все основные задачи Бурместера, а также ряд других задач, из числа которых надо отметить задачу о проектировании четырёхзвенного механизма по экстремальным значениям скоростей. В последнее время З. Ш. Блох применил метод Чебышева для решения ряда задач синтеза кривошипно-шатунных и кулисных механизмов.

Очень плодотворным аналитический метод оказался в решении задач синтеза машин и механизмов для автоматического выполнения различных математических операций. Здесь заданная аналитическая зависимость между движениями звеньев машины осуществляется рядом последовательно или параллельно соединённых механизмов, каждый из которых представляет собой простейший механизм, выполняющий какую-либо элементарную математическую операцию. Кинематические схемы таких простейших механизмов хорошо разработаны. Так, имеются механизмы для сложения скалярных и векторных величин, умножения скалярных величин, возведения чисел в любую степень, определения тригонометрических функций, логарифмирования и т. д.

Сочетанием таких простейших механизмов можно создавать машины, выполняющие самые сложные математические операции, как, например, машины для решения дифференциальных уравнений, машины для решения системы линейных уравнений, машины и механизмы для черчения плоских и пространственных кривых самых высоких порядков и т. д. Основание этого метода положено работами Кемпе, Сильвестра и др., занимавшихся вопросами механического черчения кривых. У нас этот метод развивали Делоне (1894 г.), Власов (1907 г.) и Герингорин (1926 г.), создавший механизм для построения некоторых функций комплексного переменного, для черчения профилей самолётных крыльев типа Мизеса и для интегрирования уравнений Лапласа.

Аналитические методы построения механизмов для выполнения математических операций успешно разрабатывались в последние годы Н. Г. Бруевичем, применившим эти методы к построению сложных машин для черчения кривых.

Машины для механического решения сложнейших математических задач могут играть очень важную роль в технике вычислительных работ. Решение некоторых уравнений, имеющих большое значение для машиностроения, авиации, строительного дела и т. д., требует иногда месяцев кропотливой работы; между тем с помощью указанных машин эти уравнения могут быть решены в несколько минут. Точность получаемых решений в некоторых случаях значительно превышает точность, достигнутую современной механализированной вычислительной техникой.

Значение вопроса синтеза счётно-решающих механизмов далеко выходит за рамки решения чисто математических вычислительных задач. Большинство современных устройств по управлению артиллерийским огнём представляет собой комбинацию механизмов для выполнения математических операций. Этим, в первую очередь, объясняется тот громадный интерес, который проявляется к синтезу этих механизмов за границей и у нас в последние годы.

Эмпирическому методу синтеза в настоящее время также уделяется большое внимание. В работах Рау (Rauh), Яра (Jahr), Кнехтеля (Knechtel), Гродзинского (Grodzinsky) и др. содержится большое количество схем механизмов и методов получения новых чисто эмпирическим путём — опытным подбором размеров звеньев, последовательной остановкой звеньев, отысканием при помощи проб таких участков траектории, которые могут быть использованы для различных технических целей и т. д. Для облегчения выбора и подбора необходимых схем в течение последних лет выпускается целый ряд справочных материалов. Оформленные в виде справочников, справочных листов и т. д. со схемами механизмов и с краткими их характеристиками, эти материалы получили широкое распространение среди конструкторов и инженеров.

Задачи увеличения быстроходности механизмов поставили совершенно по-новому вопросы их синтеза; в первую очередь встал вопрос о синтезе так называемых «реальных» механизмов. При решении задачи синтеза механизма до последнего времени конструкторы очень часто отвлекались от целого ряда факторов, влияющих на воспроизводимый закон движения звеньев механизма. В частности, не учитывалось влияние упругости звеньев, зазоров в кинематических парах, сил трения и т. д., и в результате получался как бы некоторый «идеальный» механизм.

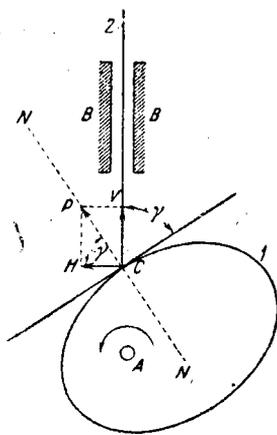
Действительная форма движения звеньев, полученная после постройки механизма, будет всегда отличаться от той формы, которая была запрограммирована. В тихоходных машинах разница между формами движения «идеальных» и «реальных» механизмов была настолько практически незначительной, что вопрос о методах синтеза реальных механизмов почти не вставал. В настоящее время в связи с повышением быстроходности машин вопрос о разработке методов синтеза реальных механизмов является особенно актуальным.

Методы синтеза реальных механизмов должны вытекать в первую очередь из изучения теории точности их действия. Эта теория заключается в разработке методов оценки погрешностей в перемещениях ведомых звеньев механизма при заданных законах ведущих звеньев и разработке методов уменьшения этих погрешностей путём рационального синтеза отдельных кинематических пар. Вопросы точности действия механизмов и задачи их синтеза с учётом всех погрешностей в движении отдельных звеньев имеют исключительно важное значение при проектировании машин и приборов, требующих особо большой точности действия (автоматы, приборы и устройства для управления артиллерийским огнём и т. д.).

Синтезом механизмов с учётом точности их действия вплотную начали заниматься только в последнее время. Некоторые графические и экспериментальные методы оценки точности действия механизмов были разработаны А. П. Ивановым. Вопросы точности действия зубчатых механизмов были разработаны Н. А. Калашиковым и другими исследователями, но все эти работы носят в значительной степени частный или предварительный характер. Подробное исследование этого вопроса было проведено в 1940 и 1941 гг. Н. Г. Бруевичем, давшим классификацию возможных ошибок в механизмах. Он разработал также оригинальную методику определения погрешностей с помощью планов малых перемещений (планов скоростей) и произвёл подро-

ный аналитический анализ погрешностей в различных шарнирных, кулачковых и зубчатых передачах. Работа Бруевича является первым глубоким исследованием в области теории точности действия механизмов.

Задачи синтеза реальных механизмов требуют также дальнейшей разработки методов так называемого динамического синтеза механизмов. Последний заключается в проектировании механизмов с большими коэффициентами полезного действия, в которых движение этих механизмов было бы возможным при наличии трения в кинематических парах. Эти условия могут быть сведены к проектированию механизмов с заданными минимальными углами давления. В качестве примера рассмотрим кулачковый механизм (фиг. 3).



Фиг. 3.

Пусть кулачок 1 является ведущим. Тогда сила P , действующая на точку C ведомого звена 2, будет направлена по нормали NN' к профилю кулачка в точке C . Разложив силу P по направлению оси звена 2 и перпендикулярно к нему, мы видим, что составляющая V производит работу подъема звена 2, а составляющая H вызывает боковые давления в направляющих BB' . Нетрудно видеть, что величина составляющей V тем больше, чем больше угол γ между абсолютной и относительной скоростями точки C ведомого звена. Наивыгоднейшие условия работы механизма будут иметь место при угле γ , равном 90° . Угол γ носит название угла давления. При малых значениях γ силы H могут вызвать значительное трение в направляющих, в результате которого звено 2 может в них заклинить, и механизм не будет приведен в движение. Для обеспечения нормальной работы механизма необходимо, чтобы угол γ не был меньше некоторого значения γ_{min} , зависящего от конструкции направляющих и коэффициентов трения в них.

Задача динамического синтеза механизмов в значительной степени сводится к проектированию механизмов, обеспечивающих для угла давления указанные выше условия.

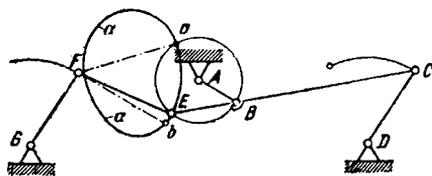
Вопросам динамического синтеза как у нас, так и за границей в настоящее время уделяют особо большое внимание. Здесь необходимо указать на работы Фурмана (Furman), Альта, Флокке (Flocke), Бейера. В СССР этими вопросами занимались Н. Г. Бруевич, В. В. Добровольский, И. И. Аргоболевский и В. А. Юдин.

Помимо надлежащего подбора углов давления для динамического синтеза механизмов громадное значение имеют вопросы выбора типа механизма, устойчивого в отношении заданного динамического режима его работы. В частности, в быстроходных механизмах весьма важную роль играют динамические давления в кинематических парах, возникающие при движении звеньев механизма с большими ускорениями. Наличие больших динамических давлений вызывает быстрый износ соприкасающихся элементов пар, соударение звеньев механизма и т. д. Различные способы соединения звеньев в кинематические пары могут быть в большей или меньшей степени устойчивы в отношении всех перечисленных явлений. Так, например, в кулачковом механизме (фиг. 3) кулачок 1 имеет соприкосновение со звеном 2 в точке или по линии (высшая кинематическая пара). Очевидно, что удельные давления при таком соприкосновении звеньев будут весьма значительными и могут вызвать быстрый износ деталей. Кроме того, возможности соударения звеньев в кулачковых механизмах будут весьма большими. Поэтому в быстроходных механизмах более устойчивыми в динамическом отношении должны явиться те конструкции, в которых соприкосновения элементов кинематических пар проходят по поверхностям (низшие кинематические пары). Такими кинематическими парами будут вращательная (шарнирная) и поступательная (призматическая) пары.

Стремление к созданию механизма со схемами, устойчивыми в динамическом отношении, привело к тому, что в настоящее время различные задачи синтеза механизмов быстроходных машин часто решаются проектированием не

кулачковых, а шарнирно-рычажных механизмов. Переход от кулачковых к шарнирным механизмам имеет место в самых различных машинах (упаковочные автоматы, автоматические устройства для стрельбы и т. д.). Этот переход связан с очень большими трудностями, так как задачи синтеза кулачковых механизмов достаточно хорошо разработаны, и можно считать, что этот тип механизма до сих пор не достиг воспроизведения точного движения степени сложности. Наоборот, задачи синтеза шарнирных механизмов ещё сравнительно мало разработаны. Как указывалось выше, установлены только некоторые геометрические методы синтеза приближённо направляющих механизмов. Далее, найдены методы построения шарнирных механизмов по нескольким заданным положениям звеньев и т. д. Но общая задача синтеза шарнирных механизмов, воспроизводящих движения любой сложности, ещё находится в стадии разработки.

Поэтому усилия специалистов по теории механизмов должны быть направлены на разработку теории синтеза шарнирных механизмов, в первую очередь, таких, которые могли бы с успехом заменить существующие кулачковые. В частности, важной задачей синтеза шарнирных механизмов, заменяющих соответствующие кулачковые, является задача синтеза этих механизмов с остановками на некоторых участках траектории их движения. Кулачковые механизмы с остановками построить нетрудно. Для этого необходимо только, чтобы участок профиля кулачка, соответствующий периоду остановки стержня, был очерчен по дуге круга, центром которого является центр вращения кулачка. При решении той же задачи для шарнирных механизмов приходится



Фиг. 4.

отыскивать точки звеньев, участки шатунных кривых которых являются дугами окружностей или участками прямых.

Пример такого механизма показан на фиг. 4. Точка E шатуна шарнирного четырёхзвенника $ABCD$ описывает шатунную кривую ae , участок ab которой представляет собой приближённо дугу круга с центром F . Тогда, если присоединить к шатуну BC звено FE и к последнему звено GF , то очевидно, что звено GF будет двигаться не непрерывно, а с остановками в те промежутки времени, когда точка E будет проходить по участку ab своей траектории. Таким образом, этим шарнирным механизмом осуществляется качательное движение звена GF с остановками.

Для отыскания таких участков в шатунных кривых и разработки теории синтеза подобных механизмов могут быть с успехом использованы упомянутые ранее работы Чебышева, Сильвестра, Кемпе и др. Сюда же примыкает и задача осуществления шарнирных механизмов, заменяющих кулачковые механизмы прерывистого и реверсивного движения (мальтийские, звездчатые, мангальные механизмы и др.).

Весьма важной в синтезе шарнирных механизмов является задача приближённого воспроизведения заданного движения. В целом ряде случаев для решения той или иной практической задачи достаточно ограничиться не точным, а приближённым осуществлением заданного движения. Эта задача в случае движения по прямой, окружности или эллипсу может быть решена с помощью методов, разработанных Чебышевым, Теоте и др. В общем случае для решения задачи можно воспользоваться и эмпирическим методом построения шатунных кривых, разработанным Рау.

В настоящее время наиболее актуальными задачами синтеза механизмов и машин являются: 1) синтез машин-автоматов в целом; 2) синтез механизмов с электрическими, гидравлическими и другими видами связей; 3) синтез реальных механизмов; 4) создание комплексных типов автоматов с использованием механизмов как с механическими, так и другими видами связей.

Для разрешения этих задач необходима дальнейшая разработка: а) геометрических, аналитических и эмпирических методов проектирования отдельных типов механизмов; б) теории синтеза машин-автоматов; в) методов динамического синтеза механизмов.

СИНТЕЗ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ С ВЫСШИМИ ПАРАМИ.

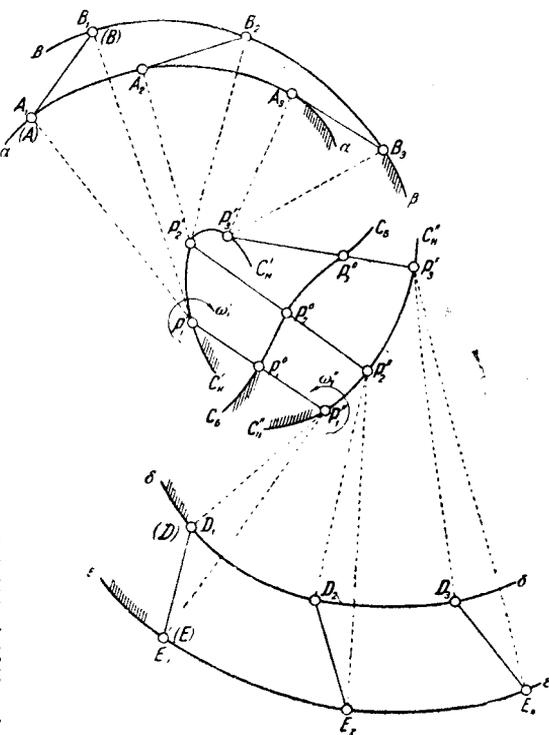
1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ СИНТЕЗА.

§ 1. Воспроизведение движения методом центроид.

Простые высшие кинематические пары, входящие в состав плоских механизмов, могут быть IV или V классов. В кинематических парах IV класса элементы пар перекатываются друг по другу со скольжением. В кинематических парах V класса элементы пар перекатываются друг по другу без скольжения. Поэтому с точки зрения кинематики плоского движения элементы пар V класса будут представлять собой центроиды в относительном движении, а элементы пар IV класса — взаимноогibaемые кривые. Тогда общая задача о синтезе плоских механизмов с высшими парами может быть всегда разделена на две самостоятельные задачи. Первая — задача о проектировании элементов высшей пары, представляющих собой центроиды, и вторая — задача о проектировании элементов высшей пары, представляющих собой взаимноогibaемые кривые.

В данном параграфе рассмотрим в общем виде первую задачу. Пусть требуется определить профили центроид, образующих высшую кинематическую пару, если заданы законы движения её элементов, т. е. если для каждого момента времени известны положения и скорости звеньев высшей пары. Тогда задача сводится к рассмотрению относительного движения элементов высшей пары и нахождению общими методами центроид в относительном движении. Профили этих центроид и образуют элементы искомой высшей пары.

Решение задачи ведётся следующим образом¹⁾. Пусть движение звена первой пары задано скольжением отрезка (AB) (фиг. 5) своими концами по неподвижным кривым $\alpha\alpha$ и $\beta\beta$, причём заданное перемещение S_A точки A есть некоторая функция от времени, т. е. $S_A = f(t)$. Тогда для каждого положения отрезка (AB) ($A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, \dots$) находим соответствующие мгновенные центры вращения P_1, P_2, P_3, \dots . Геометрическим местом этих центров будет неподвижная центроида $C_{II}C'_{II}$. Модули мгновен-



Фиг. 5.

¹⁾ Артоболовский И. И.: Синтез механизмов, изд. АН СССР, Москва, 1939.

венных угловых скоростей отрезка (AB) определяются из уравнений:

$$\omega_1' = \frac{v_{A_1}}{P_1'A_1}, \quad \omega_2' = \frac{v_{A_2}}{P_2'A_2}, \quad \dots$$

где v_{A_1}, v_{A_2}, \dots суть модули скоростей точки (A) в её различных положениях, определяемые из заданного уравнения $S_A = f(t)$, а $P_1'A_1, P_2'A_2$ — расстояния точек A_1, A_2 до соответствующих мгновенных центров вращения P_1', P_2' . Заданием неподвижной centroиды и мгновенных угловых скоростей вполне определяется закон движения звена I высшей пары.

Пусть далее движение сопряжённого звена 2 высшей пары задано скольжением отрезка (DE) своими концами по неподвижным кривым $\delta\delta$ и $\epsilon\epsilon$, причём заданное перемещение S_D точки (D) также есть функция от времени, т. е. $S_D = \psi(t)$. Неподвижной centroидой этого звена будет кривая $C''_н C''_н$. Пусть точки $P_1'', P_2'', P_3'', \dots$ этой centroиды соответствуют по времени точкам P_1', P_2', P_3', \dots centroиды звена I . Модули мгновенных угловых скоростей соответственно равны:

$$\omega_1'' = \frac{v_{D_1}}{P_1''D_1}, \quad \omega_2'' = \frac{v_{D_2}}{P_2''D_2}, \quad \dots$$

Находим далее бицентроиду, т. е. геометрическое место мгновенных центров вращения в относительном движении звеньев высшей пары, принадлежащее неподвижной плоскости. Пусть это будет кривая $C_B C_B$. Точки $P_1^0, P_2^0, P_3^0, \dots$ кривой $C_B C_B$ будут

мгновенными центрами вращения в относительном движении звеньев высшей пары. Положения этих точек определяются из условий:

$$\frac{P_1'P_1^0}{P_1''P_1^0} = \frac{\omega_1''}{\omega_1'}, \quad \frac{P_2'P_2^0}{P_2''P_2^0} = \frac{\omega_2''}{\omega_2'}, \quad \dots$$

и

$$P_1'P_1'' = P_1'P_1^0 + P_1^0P_1'', \quad P_2'P_2'' = P_2'P_2^0 + P_2^0P_2'', \quad \dots$$

Бицентроида $C_B C_B$ представляет собой линию зацепления centroид в относительном движении, образующих несомые сопряжённые профили высшей пары. Нахождение этих профилей сводится к определению на звеньях (AB) и (DE) точек, последовательно приходящих в соприкосновение в точках $P_1^0, P_2^0, P_3^0, \dots$. Для этого строим обычными методами подвижные centroиды $C'_н$ и $C''_н$ (фиг. 6). На этих centroидах отмечаем точки π'_1, π'_2, \dots и π''_1, π''_2, \dots , для чего откладываем на centroидах дуги:

$$\begin{aligned} \frown \pi'_1 \pi'_2 &= \frown P_1' P_2', \\ \frown \pi''_2 \pi''_3 &= \frown P_2' P_3', \quad \dots \end{aligned}$$

и

$$\frown \pi''_1 \pi''_2 = \frown P_1'' P_2'', \quad \frown \pi''_2 \pi''_3 = \frown P_2'' P_3'', \quad \dots$$

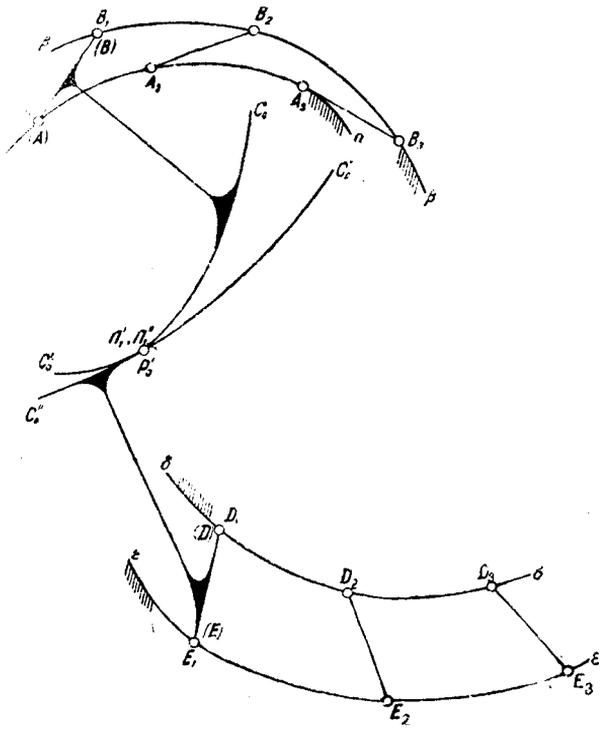
Для того, чтобы найти, например, точку Π''_2 centroиды $C''_н$, перекатываем centroиду $C'_н$ в то её положение, в котором в соприкосновение придут точ-

ки π'_2 и P'_2 (это положение показано пунктиром). Точка P'_1 при этом займёт положение P''_1 . Соединив точки P'_1 и P'_2 с точкой P''_3 , получаем фигуру $P'_1P'_2P''_3$. Далее, на дуге $\pi'_1\pi''_3$, равной дуге $P'_1P'_2$, строим фигуру $\pi'_1\pi''_3\Pi'_2$, равную фигуре $P'_1P'_2P''_3$. Таким образом, определится точка Π'_2 профиля, принадлежащего центруде C''_{II} [звену (AB)] и приходящего в соприкосновение в точке P''_3 с сопряжённым профилем, принадлежащим центруде C''_{III} [звену (DE)]. С помощью аналогичных построений определяются остальные точки Π'_3, Π'_4, \dots

профиля элемента высшей пары. Соединив точки $\Pi'_1, \Pi'_2, \Pi'_3, \dots$ плавной кривой, получим профиль C'_0 элемента высшей пары, принадлежащий звену (AB) . Профиль C''_0 элемента высшей пары, принадлежащий звену (DE) , определится с помощью аналогичных построений. Полученные профили C'_0 и C''_0 представляют собой центрыды относительно движения звеньев (AB) и (DE) . Соединив профили C'_0 и C''_0 жёстко со звеньями (AB) и (DE) (фиг. 7), получим возможность воспроизведения заданных движений звеньев (AB) и (DE) при помощи высшей пары. При перемещении отрезка (AB) своими концами по заданным траекториям $\alpha\alpha$ и $\beta\beta$ (фиг. 5) с заданной скоростью точки (A) отрезок (DE) будет двигаться своими концами по траекториям $\delta\delta$ и $\varepsilon\varepsilon$ с заданной скоростью точки (D) . Таким образом, задача о нахождении профилей элементов высшей пары в общем случае может быть разрешена путем построения центрыды в относительном движении. Рассмотренный случай задачи движения звеньев высшей пары скольжением отрезков (AB) и (DE) по заданным кривым является частным случаем заданного движения. Очевидно, что число возможных способов задания движения звеньев высшей пары может быть бесконечно велико, но во всех случаях это движение может быть воспроизведено значением подвижной центрыды по неподвижной с заданными мгновенными угловыми скоростями.

Мгновенная угловая скорость ω , скорость u перемены мгновенных центров вращения и радиусы кривизны B_{II}, R_{II} неподвижной и подвижной центрыды связаны между собой условием¹⁾:

$$\omega = \frac{1}{R_{II}} \pm \frac{1}{R_{II'}}. \quad (1)$$



Фиг. 7.

¹⁾ Мерцалов Н. П.: Кинематика механизмов, Москва, 1916, стр. 79-402.

В уравнение (1) входят четыре величины, определяющие закон движения и профили сопряжённых centroид. Очевидно, что для полной определённости движения достаточно знать только три из четырёх величин, входящих в уравнение (1). Например, достаточно знать профили centroид и мгновенную угловую скорость для каждого положения звена, или неподвижную centroиду и скорости ω и u для каждого положения звена, и т. д. В первом случае из уравнения (1) определится скорость u , во втором случае определится профиль подвижной centroиды и т. д. Поэтому каким бы способом ни было задано движение звеньев пары, необходимо только, чтобы условия, наложенные на эти движения, были достаточны для определения любых трёх величин из числа входящих в уравнение (1). Так, например, при задании движения звена скольжением двух его точек по заданным траекториям (фиг. 5) профили centroид вполне определяются этими траекториями. Кроме профилей centroид необходимо иметь заданными или мгновенную угловую скорость ω или скорость u . Для этого достаточно иметь заданной линейную скорость одной из точек звена. Тогда угловая скорость ω определится из условия:

$$\omega = \frac{v_A}{L},$$

где v_A — скорость выбранной точки, L — расстояние точки (A) до мгновенного центра вращения.

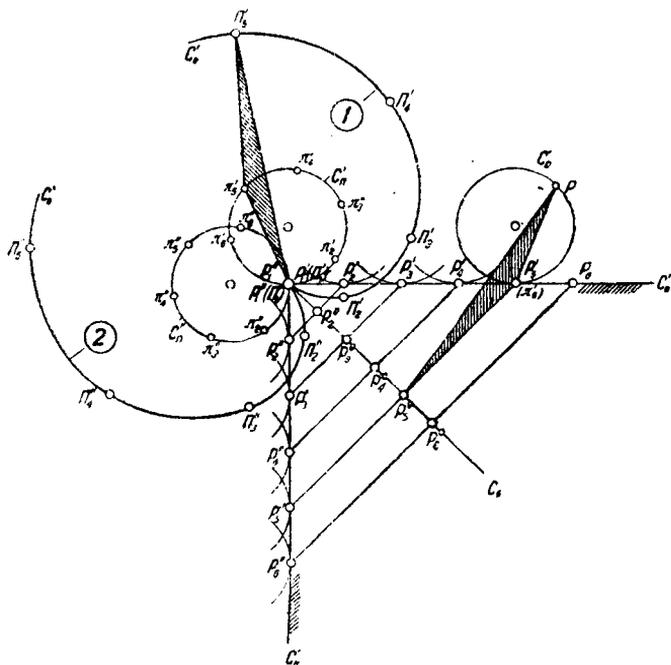
Если число параметров, определяющих движение звена, недостаточно для определения всех величин, входящих в уравнение (1), то одна или две из этих величин могут быть выбраны произвольными. Так, например, если задана траектория и скорости только одной из точек звена, можно задаться дополнительно произвольным профилем неподвижной centroиды. Тогда определятся мгновенные угловые скорости звена и подвижная centroида, т. е. движение звена будет уже вполне определённым. Аналогичный случай будем иметь при решении задачи о построении centroид в относительном движении звеньев пары. Так, например, если мгновенные угловые скорости одного из звеньев не заданы, для решения задачи достаточно задаться произвольным очертанием бицентроиды или профиля элемента одного из звеньев или произвольным значением мгновенной угловой скорости относительного движения и т. д.

Пример 1. На фиг. 8 показано построение профилей элементов высшей пары, представляющих собой centroиды относительного движения. Движение звена 1 задано качением подвижной centroиды C'_n по неподвижной centroиде C''_n с постоянной мгновенной угловой скоростью ω_1 . Движение звена 2 задано качением подвижной centroиды C''_n по неподвижной centroиде C'_n с угловой скоростью ω_2 . Centroиды C'_n и C''_n представляют собой две равные окружности. Centroиды C'_n и C''_n представляют собой две взаимноперпендикулярные прямые. Отношение i_{12} угловых скоростей ω_1 и ω_2 равно:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -1.$$

Бицентроида C_{12} представляет собой прямую, проходящую через точку пересечения неподвижных centroид. Положения точек $P_1^0, P_2^0, P_3^0, \dots$ определяются из заданного отношения i_{12} . Точки $II'_1, II'_2, II'_3, \dots$ и $II''_1, II''_2, II''_3, \dots$ centroид C'_0 и C''_0 определяются, если для каждого положения звеньев 1 и 2 найти точки, принадлежащие этим звеньям и последовательно совпадающие с точками $P_1^0, P_2^0, P_3^0, \dots$ бицентроиды. На фиг. 8 показано определение точки II'_2 centroиды C'_0 . Для определения точки II'_2 перекатываем centroиду C'_n в то положение, в котором мгновенным центром вращения является точка P_2^0 . При этом точка centroиды C'_n , совпадавшая в первоначальном положении цент

ронды с мгновенным центром P'_1 , переместился в положение P : Соединив точку P с точками P'_5 и P''_5 , получим треугольник $PP'_5P''_5$. Возвращаем, далее, центроиду $C'_п$ в первоначальное её положение. Тогда треугольник $PP'_5P''_5$



Фиг. 8.

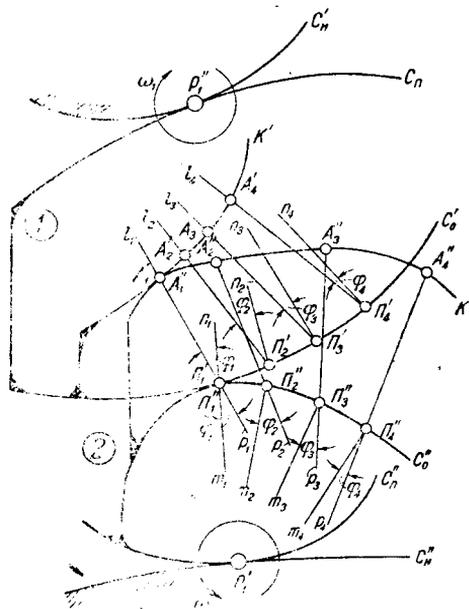
займет положение $P'_1P'_2P'_3$ и тем самым определится положение точки Π'_3 . С помощью аналогичных построений определятся остальные точки центроид C'_0 и C''_0 . Кривые $\Pi'_1\Pi'_2\Pi'_3\dots$ и $\Pi''_1\Pi''_2\Pi''_3\dots$ будут представлять собой профили элементов высшей пары, принадлежащие звеньям 1 и 2. Соединив первый профиль жёстко с окружностью $C'_п$, а второй профиль с окружностью $C''_п$, можно воспроизвести заданное движение звеньев 1 и 2 воздействием друг на друга построенных профилей.

§ 2. Воспроизведение движения методом огибаемых и огибающих.

Если воспроизведение заданного движения звеньев осуществляется парой IV класса, то, как было указано в § 1, элементы этих пар будут взаимноогibaемыми кривыми. Как известно, эти взаимноогibaемые кривые должны удовлетворять условию, чтобы общая нормаль в точке соприкосновения кривых проходила через мгновенный центр вращения в относительном движении звеньев высшей пары, т. е. в каждом положении эта нормаль должна проходить через соответствующую точку бицентроиды. Число пар взаимноогibaемых кривых, удовлетворяющих указанному условию, бесконечно велико, но каждой одной выбранной кривой будет удовлетворять только одна сопряжённая ей кривая. Нахождение сопряжённой кривой может быть всегда сделано следующим образом.

Пусть в качестве профиля элемента высшей пары звена 1 выбрана произвольная кривая K' (фиг. 9), принадлежащая этому звену, и требуется построить кривую K'' , принадлежащую звену 2 и представляющую собой про-

филь сопряжённого с первым звеном элемента высшей пары. — Отмечаем на кривой K' ряд точек A'_1, A'_2, A'_3, \dots и проводим в этих точках нормали $A'_1l_1, A'_2l_2, A'_3l_3, \dots$ к кривой K_1 , до пересечения их с центроидой C'_0 в точках $\Pi'_1, \Pi'_2, \Pi'_3, \dots$



Фиг. 9.

Далее, на центроиде C''_0 откладываем дуги $\overset{\frown}{\Pi''_1\Pi''_2} = \overset{\frown}{\Pi'_1\Pi'_2}$, $\overset{\frown}{\Pi''_2\Pi''_3} = \overset{\frown}{\Pi'_2\Pi'_3}, \dots$ Через точки $\Pi''_1, \Pi''_2, \Pi''_3, \dots$ проводим нормали $\Pi''_1n_1, \Pi''_2n_2, \Pi''_3n_3, \dots$ к центроиде C''_0 , а через точки $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots$ — нормали $\Pi_1m_1, \Pi_2m_2, \Pi_3m_3, \dots$ к центроиде C'_0 . Нормаль к кривой K' образует с нормалью Π_1n_1 в своём первом положении A'_1l_1 угол φ_1 , а во втором положении A'_2l_2 образует с нормалью Π_2n_2 угол φ_2 и т. д. Углы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ нам известны. В моменты соприкосновения центроид C'_0 и C''_0 направления нормалей $\Pi_1n_1, \Pi_2n_2, \Pi_3n_3, \dots$ будут последовательно совпадать с направлением нормалей

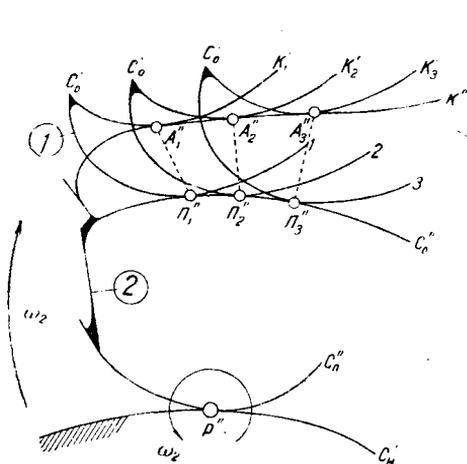
$\Pi''_1m_1, \Pi''_2m_2, \Pi''_3m_3, \dots$ и, следовательно, нормали к кривой K' будут образовывать с нормальями $\Pi''_1m_1, \Pi''_2m_2, \dots$ известные нам углы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ Строим при этих нормальях углы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ и проводим прямые $\Pi''_1p_1, \Pi''_2p_2, \Pi''_3p_3, \dots$. Тогда при соприкосновении центроид C'_0 и C''_0 направления прямых $\Pi''_1p_1, \Pi''_2p_2, \Pi''_3p_3, \dots$ будут последовательно совпадать с направлениями нормалей к кривой K' , а именно, прямая Π''_1p_1 совпадёт с нормалью A'_1l_1 , прямая Π''_2p_2 совпадёт с нормалью A'_2l_2 и т. д.

Согласно вышеуказанному свойству кривых K' и K'' эти кривые в точках соприкосновения имеют одну общую нормаль, проходящую через мгновенный центр вращения. Тогда точки $A''_1, A''_2, A''_3, \dots$, образующие кривую K'' , должны лежать в моменты соприкосновения центроид соответственно на направлениях нормалей $A'_1l_1, A'_2l_2, A'_3l_3, \dots$ или, так как с этими нормальями в эти моменты совпадают прямые $\Pi''_1p_1, \Pi''_2p_2, \Pi''_3p_3, \dots$, то точки $A''_1, A''_2, A''_3, \dots$ должны лежать также на прямых $\Pi''_1p_1, \Pi''_2p_2, \Pi''_3p_3, \dots$

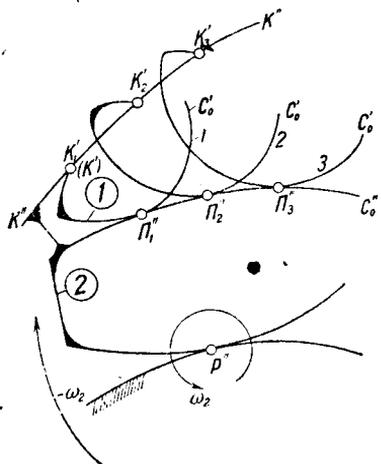
Для того, чтобы найти на этих прямых точки $A''_1, A''_2, A''_3, \dots$, надо отложить отрезки $\Pi''_1A''_1 = \Pi'_1A'_1, \Pi''_2A''_2 = \Pi'_2A'_2, \Pi''_3A''_3 = \Pi'_3A'_3, \dots$ Соединив полученные точки $A''_1, A''_2, A''_3, \dots$ плавной кривой, получаем сопряжённую с кривой K' кривую K'' . Из построения следует, что прямые $\Pi''_1A''_1, \Pi''_2A''_2, \dots$ должны быть нормальями к кривой K'' .

Таким способом по точкам строятся профили элементов высшей пары, воздействием которых друг на друга и могут быть воспроизведены требуемые движения звеньев 1 и 2.

Построение профиля K'' можно выполнить иным путём, пользуясь методом обращения движения. Для этого сообщаем звеньям в каждый данный момент общую угловую скорость, равную, но обратную по знаку мгновенной угловой скорости ω_2 звена 2 (Фиг. 10). Тогда звено 2 будет как бы неподвижным, и относительное движение звена 1 по отношению к звену 2 можно будет рассматривать как качение без скольжения центроиды C'_0 по центроиде C''_0 . Перекатываем эти центроиды друг по другу и строим положения заданной кривой K' для ряда положений. Построение последовательных наложений кривой K' может быть сделано по точкам. Для этого на кривой K' намечаем ряд точек. Далее на центроидах откладываем дуги, на которые перекатываются эти центроиды. Соединив какую-либо точку кривой K' с крайними точ-



Фиг. 10.



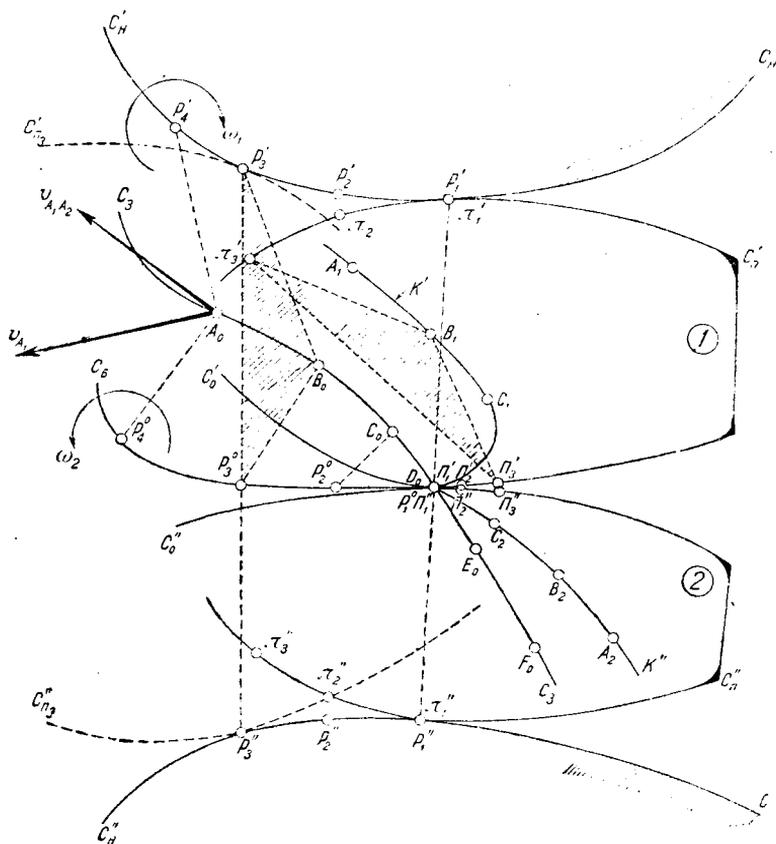
Фиг. 11.]

ками одной из дуг и перекатывая центроиды друг по другу засечками из крайних точек выбранной дуги получим ряд последовательных положений выбранной точки кривой K' . Проведя эти построения для целого ряда точек кривой K' , получим последовательные положения K'_1, K'_2, K'_3, \dots этой кривой, соответствующие мгновенным центрам $P''_1, P''_2, P''_3, \dots$. Так как кривая K'' должна касаться кривой K' во всех этих положениях, то построение кривой K'' сведётся к построению огибающей всех положений кривой K' . Таким образом, кривая K' будет огибаемой, а кривая K'' — огибающей. Огибающая K'' будет принадлежать центроиде C''_0 .

Вследствие громоздкости этих построений удобно пользоваться специально сделанными шаблонами центроид, вырезанными из фанеры, целлулоида или сделанными из кальки с нанесённой на них кривой K' (см. § 7).

В том частном случае, когда вместо кривой K' в качестве огибаемой задана точка или прямая, построение огибающей может быть сделано тем же приёмом. Пусть, например (Фиг. 11), на звене 1 задана точка (K') и требуется найти ту кривую K'' , которая воздействием на точку (K') воспроизведла бы заданные движения звеньев 1 и 2. Обращаем движение, для чего сообщаем обоим звеньям общую угловую скорость — ω_2 . Тогда центроида C'_0 будет перекатываться по центроиде C''_0 , и выбранная точка K'_1 займёт последовательно положения K'_1, K'_2, K'_3, \dots . Соединив полученные точки K'_1, K'_2, K'_3, \dots плавной кривой, получим кривую K'' , представляющую собой огибающую всех положений точки (K'). Передачу движения можно практически осуществить, если в точке (K') поставить палец, жёстко связанный со звеном 1, а кривую K'' выполнить в виде кулисы, жёстко связанной со звеном 2.

Подбор профилей элементов высшей пары, построенных в виде взаимноогibaемых кривых, и исследование условий их работы удобнее всего выполнить, если построить геометрическое место точек соприкосновения двух сопряжённых взаимноогibaемых кривых, принадлежащее неподвижной плоскости. Как известно, такое геометрическое место носит название линии зацепления. Покажем, что если задан закон движения звеньев 1 и 2 и дана линия зацепления $A_0B_0C_0D_0E_0F_0$ — кривая C_3 (фиг. 12), то всегда могут быть определены соответствующие взаимноогibaемые кривые, точки которых последо-



Фиг. 12.

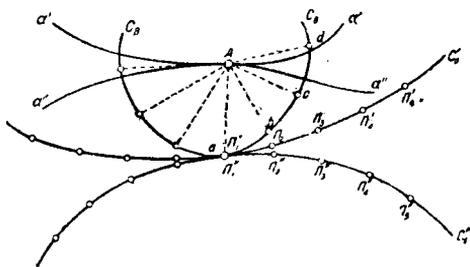
вательно приходят в соприкосновение в точках A_0, B_0, C_0, \dots линии зацепления.

Пусть движение звена 1 задано значением центроид C'_1 и C''_1 , а движение звена 2 — значением центроид C'_2 и C''_2 , и пусть кривая C_3 будет бисцентроидой. Пусть, далее, искомые взаимноогibaемые кривые K' и K'' приходят в соприкосновение в точке B_0 линии зацепления в тот момент, когда центроиды C'_1 и C''_1 соприкасаются в точке P'_2 бисцентroidы. Тогда центроид C'_1 переместится в положение C'_{12} , а центроид C''_1 — в положение C''_{12} . Пользуясь ранее указанным построением, находим точки Π'_3 и Π''_3 , принадлежащие центроидам C'_1 и C''_1 и приходящие в соприкосновение в точке P'_3 бисцентroidы.

Соединяем точку B_0 линии зацепления с точками P_3^0 и P_3' . Получаем треугольник $B_0P_3^0P_3'$. Находим, далее, точку π_3' , принадлежащую центроиде C_{II}' , для чего откладываем на подвижной центроиде C_{II}' дугу $\pi_3'\pi_3$, равную дуге $P_3^0P_3'$. Так как при качении подвижной центроиды C_{II}' по неподвижной C_{II} точка π_3' совпадёт с точкой P_3' , а точка Π_3' совпадёт с точкой P_3^0 бицентроиды, то, очевидно, отрезок $P_3^0P_3'$ будет равен отрезку $\pi_3'\Pi_3'$. Тогда для того, чтобы найти точку B_1 центроиды C_{II} , совпадающую при качении с точкой B_0 линии зацепления, достаточно на отрезке $\pi_3'\Pi_3'$ построить треугольник $B_1\Pi_3'\pi_3$, равный треугольнику $B_0P_3^0P_3'$. Можно видеть, что вследствие равенства указанных треугольников при качении подвижной центроиды C_{II}' по неподвижной C_{II} точка B_1 действительно совпадёт с точкой B_0 . Аналогичным построением всегда может быть найдена точка B_2 , принадлежащая подвижной центроиде C_{II}' и приходящая в соприкосновение с точкой B_1 в точке B_0 линии зацепления. То же самое построение может быть проделано и для точек линии зацепления $A_0, B_0, C_0, D_0, \dots$. Тогда получим точки A_1, B_1, C_1, \dots и A_2, B_2, C_2, \dots , соединив которые плавными кривыми, найдём взаимноогibaемые кривые K' и K'' ; эти кривые будут иметь линию зацепления кривую C_3 .

В заключение настоящего параграфа отметим, что в некоторых случаях в качестве огibaемой и огibaющей могут быть выбраны траектории какой-либо вспомогательной центроиды. Пусть, например, построены центроиды C_0' и C_0'' (фиг. 13) в относительном движении звеньев 1 и 2. Выберем некоторую кривую C_B за вспомогательную центроиду и отметим на ней какую-либо точку A , траектории которой в относительном движении и выберем за профили элементов высшей пары. Построение этих профилей можно сделать следующим образом. Намечаем на вспомогательной центроиде C_B ряд точек a, b, c, d, \dots . Далее, на центроидах C_0' и C_0'' откладываем дуги $\Pi_1'\Pi_2' = \Pi_1''\Pi_2'' = ab$; $\Pi_2'\Pi_3' = \Pi_2''\Pi_3'' = bc$ и т. д. Перекатывая центроиду C_B по центроидам C_0' и C_0'' , получим общими методами траектории $a'a'$ и $a''a''$ точки A . Траектория $a'a'$ будет профилем элемента высшей пары звена 1, а траектория $a''a''$ — профилем элемента высшей пары звена 2. Согласно теореме Камуса¹⁾ эти траектории будут взаимноогibaемыми кривыми, т. е. удовлетворяют кинематическим условиям передачи движения.

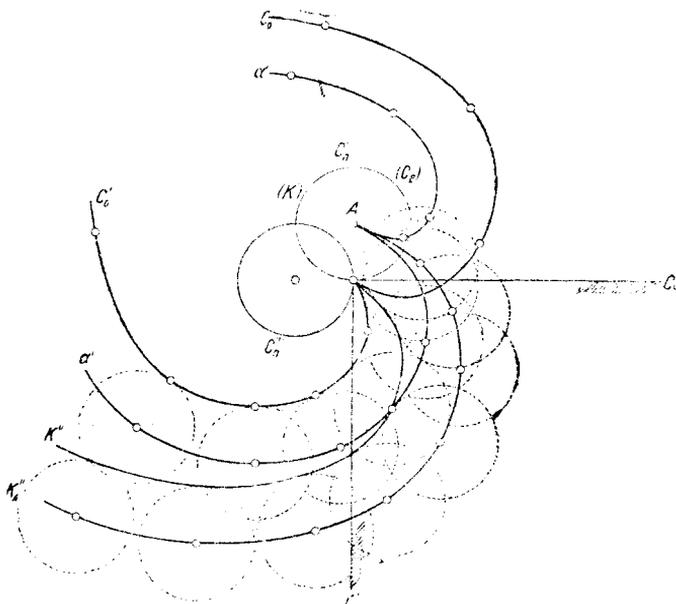
Пример 2. На фиг. 14 показаны профили элементов высшей пары, представляющие собой огibaемые и огibaющие кривые для случая, рассмотренного в примере 1 § 1. Если в качестве огibaемой кривой K' звена 1 выбрать самую центроиду C_{II}' , то огibaющей кривой будет кривая K'' . Таким образом, профилем элемента высшей пары, принадлежащей звену 1, будет окружность K' , а профиль элемента высшей пары, принадлежащей звену 2, будет представлять собой некоторую кривую K'' . Построение кривой K'' на фиг. 14 сделано способом обращения движения. Если в качестве элемента пары звена 1 выбрана точка A центроиды C_{II}' , то профиль элемента, принадлежащего звену 2, представится в виде кривой K''_A . Построение кривой K''_A сделано также методом обращения движения. Если, наконец, центроиду C_{II}' выбрать в качестве вспомогательной центроиды, а траектории точки A при качении центроиды C_{II}' по центроидам C_0' и C_0'' за взаимноогibaемые кривые, то профили эле-



Фиг. 13.

¹⁾ Мерцалов Н. И. Кинематика механизмов, Москва, 1916.

ментов высшей пары представится в виде кривых α' и α'' . Первая кривая будет профилем элемента, принадлежащего звену 1, а вторая кривая — профилем элемента, принадлежащего звену 2. Из рассмотренного примера видно,



Фиг. 14.

что предписанное движение может быть воспроизведено взаимодействием профилей элементов высшей пары самого разнообразного вида. В зависимости от выбора огибаемых кривых задача может иметь бесконечно большое количество решений.

§ 3. Основные задачи динамического синтеза.

Основной задачей динамического синтеза элементов высшей пары является проектирование таких профилей элементов, которые своими размерами и формой обеспечивали бы движение звеньев пары (под действием заданных сил) с максимальным коэффициентом полезного действия. Как известно из теории механизмов, одним из условий, обеспечивающих вышеуказанное требование, является обеспечение в высшей паре соответствующих углов давления ведомых звеньев¹⁾.

Начиём рассмотрение вопроса об определении угла давления γ с того случая, когда движение звеньев 1 и 2 воспроизводится посредством центроид в относительном движении (фиг. 15). Так как обе центроиды в точке соприкосновения имеют общую скорость v_{P_0} , то угол γ будет у них общим и равным, независимо от того, какая из центроид является ведущей. Переменные расстояния точек P_0 от мгновенных центров вращения звеньев 1 и 2 обозначим через ρ_1 и ρ_2 . Пусть за бесконечно малый промежуток времени центроида C'_π повернулась около центра P' на угол $d\beta_1$. На центроиде C'_0 отложим из точки P_0 бесконечно малую дугу P_0a и из точки a опустим на направление ρ_1 перпендикуляр aa_1 . Тогда угол a_1aP_0 будет с точностью до бесконечно малых

¹⁾ Углом давления называется угол, образованный направлениями абсолютной и относительной скоростей ведомого звена пары. См. Артоболевский и П. И.: Теория механизмов и машин, Москва, 1940.

второго порядка равен углу давления γ , и следовательно,

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{P_0 a_1}{a a_1}.$$

Так как с точностью до бесконечно малых высших порядков можно положить, что

$$P_0 a_1 = \frac{\partial z_1}{\partial \beta_1} d\beta_1 \quad \text{и} \quad a a_1 = r_1 d\beta_1,$$

то

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\frac{\partial z_1}{\partial \beta_1}}{r_1}.$$

Из условия передаточного отношения следует:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}.$$

Кроме того,

$$P'P'' = r_1 + r_2 = l.$$

Отсюда определяем r_1 :

$$r_1 = l \frac{\omega_2}{1 + \frac{\omega_2}{\omega_1}}.$$

Так как

$$\omega_2 = \frac{d\beta_2}{dt} \quad \text{и} \quad \omega_1 = \frac{d\beta_1}{dt},$$

где β_1 и β_2 суть углы поворота центров, то предыдущее равенство принимает вид

$$r_1 = l \frac{\frac{d\beta_2}{dt}}{1 + \frac{d\beta_2}{d\beta_1}}.$$

Тогда

$$\frac{\partial r_1}{\partial \beta_1} = l \frac{\frac{d^2 \beta_2}{d\beta_1^2}}{\left(1 + \frac{d\beta_2}{d\beta_1}\right)^2} + \frac{\frac{d\beta_2}{d\beta_1}}{1 + \frac{d\beta_2}{d\beta_1}} \frac{\partial l}{\partial \beta_1},$$

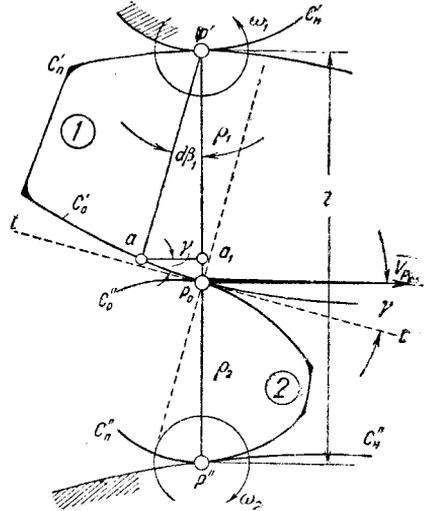
откуда

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\frac{d^2 \beta_2}{d\beta_1^2}}{\frac{d\beta_2}{d\beta_1} \left(1 + \frac{d\beta_2}{d\beta_1}\right)} + \frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial \beta_1} \quad (2)$$

Из уравнения (2) следует, что при $l = \text{const.}$, т. е. при передаче центрами с неподвижными центрами вращения, угол давления зависит только от углов поворота центров.

В рассмотренном случае воспроизведения движения угловые скорости ω_1 и ω_2 были различными по знаку. В том случае, когда угловые скорости ω_1 и ω_2 имеют одинаковые знаки, уравнение (2) принимает следующий вид:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\frac{d^2 \beta_2}{d\beta_1^2}}{\frac{d\beta_2}{d\beta_1} \left(1 - \frac{d\beta_2}{d\beta_1}\right)} + \frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial \beta_1} \quad (3)$$



Фиг. 15.

В уравнения (2) и (3) входят производные $\frac{\partial l}{\partial \beta_1}$, $\frac{d\beta_2}{d\beta_1}$ и $\frac{d^2\beta_2}{d\beta_1^2}$. Определение

этих производных делается либо графически, либо аналитически, в зависимости от характера задания величин $\beta_2 = f(\beta_1)$ и $l = \psi(\beta_1)$. Центроиды будут работать без заклинивания только на тех участках, где все значения полученного угла давления γ будут больше некоторого минимального значения γ_{\min} , рекомендуемого для данного вида высшей пары. Величины угла γ_{\min} , допускаемые в высших парах, различны и зависят от коэффициента трения в парах и конструкции самих пар. На тех участках профилей, где угол γ меньше угла γ_{\min} , пара работать не будет; здесь необходима замена центроид взаимноогibaемыми кривыми, т. е. необходима установка дополнительных зубцов, кулис и т. д.

Воспроизведение движения звеньев высшей пары, когда профили её элементов представляют собой центроиды, практически удобно только в редких случаях. На практике чаще всего бывает, что расстояние между осями вращения звеньев пары остаётся постоянным и механизм имеет периодическое замкнутое движение; поэтому в некоторых положениях звеньев угол давления γ будет равен нулю; в самом деле, в этом случае в уравнении (2) или (3) величина l постоянная и, следовательно,

$$\frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial \beta_1} = 0.$$

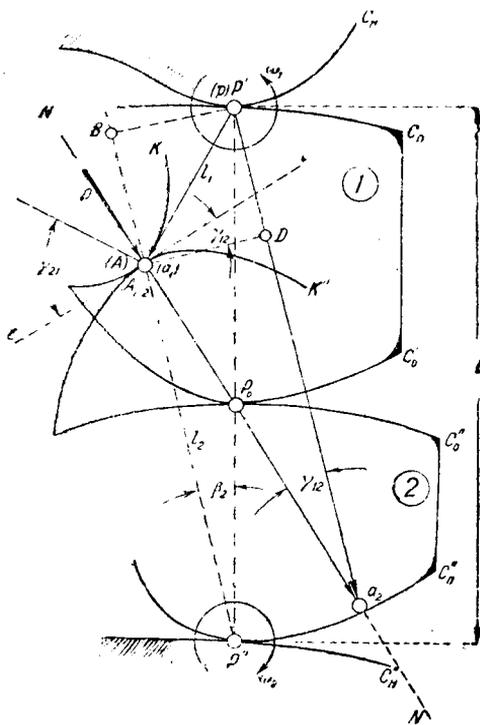
Далее, при периодическом замкнутом движении производная $\frac{d\beta_2}{d\beta_1}$ хотя бы два раза будет иметь экстремум, так как в начале и конце периода значения $\frac{d\beta_2}{d\beta_1}$ становятся одинаковыми. Следовательно, в этих положениях будет

$$\frac{d^2\beta_2}{d\beta_1^2} = 0.$$

Отсюда следует, что в рассматриваемых положениях угол давления γ будет равен нулю и передача движения будет невозможной. Но как известно, передача движения является невозможной на всех значениях угла давления в пределах от нуля до заданного угла $\pm \gamma_{\min}$, поэтому практически передача движения будет невозможной на всех участках, вблизи которых $\frac{d^2\beta_2}{d\beta_1^2} = 0$.

Переходим теперь к рассмотрению того случая, когда движение звеньев пары воспроизводится посредством профилей элементов, представляющих собой взаимноогibaемые кривые.

Пусть движение звеньев 1 и 2 воспроизводится взаимодействием двух взаимноогibaемых кривых K' и K'' (фиг. 16). Условимся угол давления γ обозначать с двумя индексами, причём первый индекс будет указывать номер ведущего звена, а второй индекс — номер ведомого звена. Тогда, если ведущим будет звено 1, то угол давления будет обозначаться γ_{12} . При ведущем звене 2 угол давления будет равен γ_{21} . Определим величину угла давления γ_{12} . Для этого построим повернутый план скоростей механизма при точке P' . Скорость v_{D_1}



Фиг. 16.

точки A , принадлежащей звену 1, отложена в виде отрезка $(P'A) = (pa_1)$. Тогда скорость v_{A_2} точки A , принадлежащей звену 2, будет равна:

$$v_{A_2} = v_{A_1} + v_{A_2A_1}$$

Из точки A проводим направление повернутой относительной скорости $v_{A_2A_1}$, совпадающее с направлением общей нормали NV в точке соприкосновения кривых K' и K'' . Полная повернутая скорость точки A , принадлежащей звену 2, определится, если из точки P' (p) провести направление, параллельное отрезку $(P'A)$ до пересечения в точке a_2 с нормалью NV . Скорости v_{A_1} и v_{A_2} будут равны:

$$\left. \begin{aligned} v_{A_1} &= \omega_1 l_1 = \omega_1 (pa_1), \quad + \\ v_{A_2} &= \omega_2 l_2 = \omega_1 (pa_2), \quad - \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

так как масштаб μ_v плана скоростей выбран равным $\mu_v = \omega_1$.

Из точки A (a_1) опустим перпендикуляр AD на направление $P'a_2$, а из точки $P'(p)$ — перпендикуляр $P'B$ на направление $P''A$. Имеем:

$$\operatorname{tg} \gamma_{12} = \frac{AD}{Da_2}$$

так как

$$A_1D = P'B$$

и

$$Da_2 = P'a_2 - P'D = P'a_2 - AB = P'a_2 - P''B + P''A,$$

то

$$\operatorname{tg} \gamma_{12} = \frac{P'B}{P'a_2 - P''B + P''A} \quad (5)$$

Из треугольника $P'P''B$ следует:

$$P'B = l \sin \beta_2, \quad P''B = l \cos \beta_2.$$

Далее, из уравнения (4) имеем:

$$P'a_2 = pa_2 = \frac{\omega_2}{\omega_1} l_2.$$

Подставляя значения $P'B$, $P''B$ и $P'a_2$ в равенство (5), получим окончательно:

$$\operatorname{tg} \gamma_{12} = \frac{l \sin \beta_2}{\frac{\omega_2}{\omega_1} l_2 - l \cos \beta_2 + l_2} \quad (6)$$

Аналогично может быть определён и угол давления γ_{21} .

Из равенства (6) следует, что в случае передачи движения посредством взаимноогibaемых кривых угол давления в отличие от случая передачи центрами всегда зависит от размеров l и l_2 звеньев.

Кроме вопроса об угле давления при проектировании профилей элементов высшей пары по взаимноогibaемым кривым необходимо иметь в виду, что трение скольжения этих кривых друг по другу будет также уменьшать коэффициент полезного действия механизма. Так как мощность, расходуемая на трение, пропорциональна относительной скорости движения взаимноогibaемых кривых, то очевидно, что чем больше будут эти скорости, тем больше будут потери на трение и, следовательно, тем меньше будет коэффициент полезного действия механизма. Пусть передача движения между звеньями 1 и 2 осуществляется посредством профилей, очерченных по взаимноогibaемым кривым K' и K'' (фиг. 16). Мощность, расходуемая на трение скольжения этих кривых, будет равна:

$$N = F v_{A_2A_1}, \quad (7)$$

где F есть сила трения, а $v_{A_2A_1}$ — относительная скорость кривой K'' относительно кривой K' , или наоборот.

Силу трения примем равной $F = fP$, где P есть давление в точке A , направленное по нормали NV , а f — коэффициент трения скольжения; скорость скольжения $v_{A_2A_1}$ равна:

$$v_{A_2A_1} = \Omega (P_0A).$$

где Ω есть мгновенная угловая скорость относительного движения звена 2 относительно звена 1; угловая скорость Ω равна:

$$\Omega = \omega_1 + \omega_2,$$

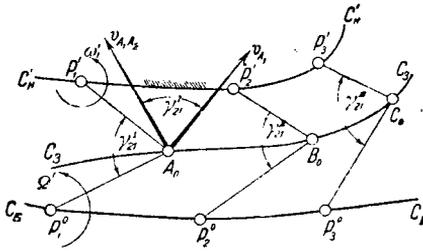
следовательно,

$$v_{A_2 A_1} = (\omega_1 + \omega_2) (P_0 A).$$

Подставляя полученные выражения для силы трения и скорости в равенство (7), получим:

$$N = fP (\omega_1 + \omega_2) (P_0 A). \quad (8)$$

Из уравнения (8) следует, что мощность N зависит от расстояния точки соприкосновения A кривых K' и K'' до мгновенного центра вращения P_0 в относительном движении и будет тем больше, чем больше расстояние $P_0 A$. Как было показано в § 2, точки соприкосновения взаимноогibaемых кривых, принадлежащие неподвижной плоскости, образуют линию зацепления. Следовательно, чем дальше удалены точки линии зацепления от соответствующих мгновенных центров вращения в относительном движении, тем больше будут потери на трение. В связи с этим при проектировании механизмов необходимо, чтобы линия зацепления для сопряжённых профилей не имела точек, значительно удалённых от относительного мгновенного центра вращения. Для этого в некоторых случаях передачу движения удобно воспроизводить не двумя взаимноогibaемыми кривыми, а целым рядом таких кривых, последовательно входящих в соприкосновение.



Фиг. 17.

Покажем далее, что задание неподвижной centroиды, бицентроиды и линии зацепления является вполне достаточным для исследования динамических условий (углов давлений), обеспечивающих передачу движения. Пусть заданы неподвижная centroида C'_n звена 1, бицентроида C'_b и линия зацепления C'_z (фиг. 17). Пусть для первого положения звена 1 мгновенный центр вращения будет в точке P'_1 , мгновенный центр вращения в относительном движении будет в точке P^0_1 и точкой зацепления будет точка A_0 . Соответственно для последующих положений звена 1 будем иметь точки P'_2, P'_3, B_1 и т. д. Точку A_0 линии зацепления соединяем с точками P'_1 и P^0_1 . Точку B_1 соединяем с точками P'_2 и P^0_2 и т. д.

Величина абсолютной скорости той точки A_1 взаимноогibaемой кривой, принадлежащей звену 1, которая приходит в соприкосновение в точке A_2 с точкой A_2 взаимноогibaемой кривой, принадлежащей звену 2, будет равна:

$$v_{A_1} = \omega'_1 (P'_1 A_0),$$

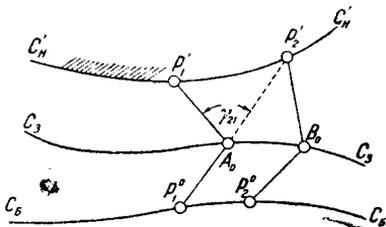
где ω'_1 есть мгновенная угловая скорость, соответствующая рассматриваемому положению звена. Направление скорости v_{A_1} перпендикулярно к прямой $P'_1 A_0$, соединяющей мгновенный центр вращения P'_1 в абсолютном движении с точкой зацепления A_0 . Скорость относительного движения $v_{A_1 A_2}$ точки A_1 относительно точки A_2 будет равна:

$$v_{A_1 A_2} = \Omega' (P^0_1 A_0),$$

где Ω' есть мгновенная угловая скорость относительного движения, равная для данного момента $\Omega' = \omega'_1 + \omega'_2$. Скорость $v_{A_1 A_2}$ направлена перпендикулярно к прямой $P^0_1 A_0$, соединяющей мгновенный центр вращения P^0_1 в относительном движении с точкой зацепления A_0 . Угол, образуемый скоростями v_{A_1} и $v_{A_1 A_2}$, будет углом давления γ_{21} (фиг. 17). Вследствие перпендикулярности прямых $P^0_1 A_0, P^0_1 B_0, \dots$ к направлениям скорости $v_{A_1 A_2}, v_{B_1 B_2}, \dots$ и пря-

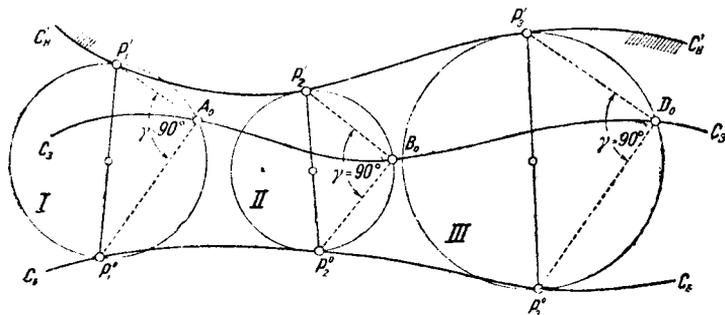
мых $P'_1 A_0, P'_2 B_0, \dots$ к направлениям скоростей v_{A_0}, v_{B_0}, \dots углы, образуемые этими прямыми, между собою будут также всегда равны углам давления $\gamma_{21}^I, \gamma_{21}^{II}, \dots$.

Таким образом, для того, чтобы исследовать вопрос об углах давления в высшей паре, достаточно соединить соответствующие точки линии зацепления с соответствующими мгновенными центрами вращения. В том случае, когда угол, образуемый этими двумя прямыми, будет больше 90° , угол давления γ_{21} будет добавочным до угла в 180° (фиг. 18). Для правильной работы передачи полученные углы γ_{21} должны быть больше заданного угла γ_{\min} .



Фиг. 18.

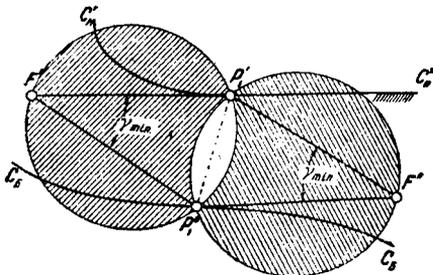
Пользуясь указанным свойством линии зацепления, можно решить и обратную задачу о подборе линии зацепления, наиболее удовлетворяющей заданным динамическим условиям передачи движения. Рассмотрим, например, задачу о построении профилей по взаимноогibaемым кривым с углом передачи, равным углу $\gamma = 90^\circ$. Как было показано выше, при указанном угле давления мы, получаем наиболее выгодные динамические условия воспроизведения движения. Пусть задана неподвижная centroида C'_n (фиг. 19), бисцентроида C_n и последовательные положения мгновенных центров вращения P'_1, P'_2, P'_3, \dots и $P''_1, P''_2, P''_3, \dots$. Соединяем точку P'_1 с точкой P''_1 , точку P'_2 с точкой P''_2 и т. д. На отрезках $(P'_1 P''_1), (P'_2 P''_2), \dots$ строим, как на диаметрах окружности. Первая точка A_0 линии зацепления должна быть выбрана на



Фиг. 19.

окружности I; вторая точка B_0 линии зацепления должна быть выбрана на окружности II и т. д. В самом деле, если соединить любую точку окружности I или окружности II с соответствующими мгновенными центрами вращения, то проведённые прямые будут всегда образовывать угол давления γ , равный 90° . Выбор на окружностях I, II, III, ... точек зацепления A_0, B_0, D_0, \dots может быть сделан совершенно произвольно, но в большинстве практических расчётов выбор этих точек обуславливается дополнительными расчётными данными. Так, может быть задано усилие, которое должно действовать на профили, или задана максимальная потеря мощности на трение и т. п. В зависимости от этих дополнительных условий и могут быть окончательно выбраны точки зацепления A_0, B_0, D_0, \dots (фиг. 12). По выбранной линии зацепления могут быть построены, как было показано в § 2, взаимноогibaемые кривые, принадлежащие звеньям I и 2. В некоторых случаях может быть заранее задана линия зацепления. Тогда точки зацепления получатся в пересечении заданной линии зацепления с построенными окружностями.

Если задан некоторый предельный угол γ_{\min} , то всегда можно определить ту область, в которой может быть выбрана соответствующая точка зацепления. Для этого строим на отрезках, соединяющих мгновенные центры абсолютного и относительного вращений, заданные углы γ_{\min} (фиг. 20). Проводим



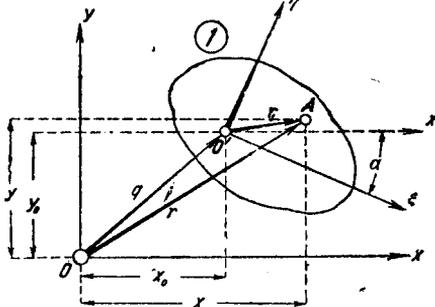
Фиг. 20.

далее через точки P_1, F', F'' и P_1^0 две окружности, которые будут вмещать в себя заданные углы γ_{\min} . Тогда точка зацепления для рассматриваемого положения может быть выбрана только в пределах области, ограниченной проведёнными окружностями (на рис. 20 эта область заштрихована).

II. АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ СИНТЕЗА.

[§ 4. Уравнения центроид в абсолютном движении.]

В тех случаях, когда законы движения звеньев высшей пары заданы в аналитическом виде, в форме уравнений движения, для нахождения профилей элементов высшей пары удобно применять аналитические методы синтеза. Аналитические методы позволяют производить построение профилей элементов по точкам с любой степенью точности. Рассмотрение этих методов синтеза начнём с вывода уравнений для центроид в абсолютном движении звеньев пары.



Фиг. 21.

Пусть задано движение звена 1 высшей пары (фиг. 21). Выберем какую-либо систему координат Oxy за неподвижную. Пусть вторая система координат $O'\xi\eta$ жёстко соединена со звеном 1. Тогда движение звена 1 будет полностью определяться вектором q и углом поворота α системы координат $O'\xi\eta$ относительно оси, перпендикулярной к плоскости движения звена. Выбираем на звене 1 какую-либо точку A . Для точки A можем написать следующее векторное уравнение:

$$r = q + r_1, \quad (9)$$

где r_1 есть вектор постоянного модуля, соединяющий точку A с точкой O' . Так как $r = r(t)$, $q = q(t)$ и $r_1 = r_1(t)$, то, дифференцируя уравнение (9) по времени, получаем:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dq}{dt} + \frac{dr_1}{dt} = \frac{dq}{dt} + \bar{\omega} \times r_1,$$

где $\bar{\omega}$ есть вектор мгновенной угловой скорости звена 2.

Если точка A совпадает с центром мгновенного вращения, то скорость её равна нулю, т. е.

$$\frac{dr}{dt} = 0,$$

откуда

$$\frac{dq}{dt} + \bar{\omega} \times r_1 = 0.$$

Умножая правую и левую части полученного уравнения [на единичный вектор $\bar{\omega}^0$, имеем:

$$\frac{dq}{dt} \times \bar{\omega}^0 + [\bar{\omega} \times r_1] \times \bar{\omega}^0 = 0,$$

откуда получаем:

$$r_1 = \frac{\bar{\omega}^0 \times \frac{dq}{dt}}{\omega}.$$

Так как

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dq}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = \omega \frac{dq}{d\alpha},$$

то

$$r_1 = \bar{\omega}^0 \times \frac{dq}{d\alpha}. \quad (10)$$

Если в уравнении (10) вектор r_1 задан в функции угла α , то это будет уравнение подвижной centroиды. Уравнение неподвижной centroиды получится, если подставить выражение для вектора r_1 из уравнения (10) в уравнение (9). Получаем:

$$r = q + \bar{\omega}^0 \times \frac{dq}{d\alpha}. \quad (11)$$

В уравнения (10) и (11) входят векторы r , q и r_1 ; если один из них задан в функции угла α , то остальные могут быть легко определены. Таким образом, аналитическое решение задачи о построении centroид сводится к решению уравнений (10) и (11).

Уравнения подвижной и неподвижной centroид могут быть представлены в координатной форме. Для этого обозначим координаты точек O' и A (фиг. 21) через x_0, y_0 и x, y . Тогда координаты x_P и y_P мгновенного центра вращения будут:

$$\left. \begin{aligned} x_P &= x_0 - \frac{y_0}{\alpha}, \\ y_P &= y_0 - \frac{x_0}{\alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Координаты ξ_P и η_P мгновенного центра вращения, принадлежащие подвижной centroиде, в координатной системе $O'\xi\eta$ будут равны:

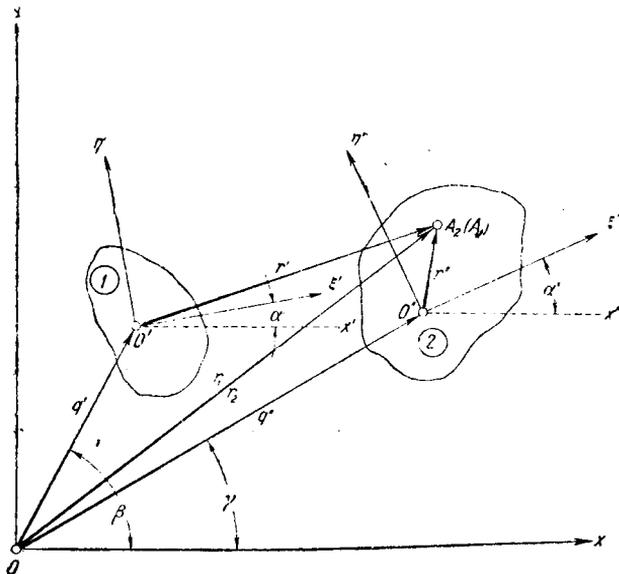
$$\left. \begin{aligned} \xi_P &= \frac{x_0 \sin \alpha - y_0 \cos \alpha}{\alpha}, \\ \eta_P &= \frac{x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha}{\alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Исключая из каждой пары написанных уравнений время, получим уравнения неподвижной и подвижной centroид.

Так как функции $x_0 = f(t)$, $y_0 = \varphi(t)$ и $\alpha = \psi(t)$ являются заданными, то по уравнениям (12) и (13) могут быть построены неподвижная и подвижная centroиды, т. е. аналитически разрешена задача о centroидах в абсолютном движении звена 1 высшей пары. Аналогично могут быть построены и centroиды в абсолютном движении звена 2 высшей пары.

§ 5. Уравнения центроид в относительном движении.

Переходим к выводу уравнений центроид в относительном движении. Пусть задано движение звеньев 1 и 2 (фиг. 22). Выберем систему координат Oxy за неподвижную. Пусть далее система координат $O'z't'$ связана жёстко со звеном 1, а система координат $O''z''t''$ — со звеном 2. Движение звена 1 будет определяться вектором q' и углом поворота α' , а движение звена 2 —



Фиг. 22.

вектором q'' и углом поворота α'' . Для составления уравнений центроид в относительном движении найдём уравнение бицентроиды, для чего рассмотрим относительное движение звена 2 относительно звена 1. На звене 2 выберем произвольную точку A_2 . Для этой точки имеем (фиг. 22):

$$r_2 = q'' + r''.$$

Дифференцируя это уравнение по времени, получим уравнение, определяющее скорость точки A_2 :

$$\frac{dr_2}{dt} = \frac{dq''}{dt} + \frac{dr''}{dt} = \frac{dq''}{dt} + \bar{\omega}_2 \times r'',$$

где $\bar{\omega}_2$ есть вектор мгновенной угловой скорости звена 2. Так как

$$\frac{dr_2}{dt} = v_{A_2} \quad \text{и} \quad \frac{dq''}{dt} = v_{O''},$$

то

$$v_{A_2} = v_{O''} + \bar{\omega}_2 \times r''. \quad (14)$$

Сообщим звеньям 1 и 2 общую угловую скорость, равную и обратную угловой скорости $\bar{\omega}_1$. Тогда звено 1 будет как бы неподвижным, а звено 2 получит кроме угловой скорости $\bar{\omega}_2$ дополнительную угловую скорость $\bar{\omega}_1$. В этом движении точка A_2 звена 2 будет иметь скорость

$$v_{A_2 A_1} = v_{A_2} - v_{A_1}, \quad (15)$$

где v_{A_1} есть скорость точки A_1 , принадлежащей звену 1.

Вектор r_1 , определяющий точку A_1 на звене 1, равен

$$r_1 = q' + r',$$

следовательно,

$$\frac{dr_1}{dt} = \frac{dq'}{dt} + \bar{\omega}_1 \times r'.$$

Так как

$$\frac{dr_1}{dt} = v_{A_1} \quad \text{и} \quad \frac{dq'}{dt} = v_{O'},$$

то

$$v_{A_1} = v_{O'} + \bar{\omega}_1 \times r'. \quad (16)$$

Подставляя в уравнение (15) выражения для v_{A_1} и v_{A_2} из уравнений (14) и (16), получим:

$$v_{A_2 A_1} = v_{O''} + \bar{\omega}_2 \times r'' - v_{O'} - \bar{\omega}_1 \times r'. \quad (17)$$

Имея в виду, что

$$v_{O''} = \dot{q}'', \quad v_{O'} = \dot{q}', \quad r_1 = r_2 = r, \\ r'' = r - q'' \quad \text{и} \quad r' = r - q',$$

перепишем уравнение (17) в следующем виде:

$$v_{A_2 A_1} = (\dot{q}'' - \dot{q}') + \bar{\omega}_2 \times (r - q'') - \bar{\omega}_1 \times (r - q'),$$

или

$$v_{A_2 A_1} = (\dot{q}'' - \dot{q}') + (\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1) \times r - (\bar{\omega}_2 \times q'' - \bar{\omega}_1 \times q').$$

Если точка A_2 есть мгновенный центр вращения в относительном движении звеньев пары, то $v_{A_2 A_1} = 0$, и следовательно, уравнение

$$(\dot{q}'' - \dot{q}') + (\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1) \times r - (\bar{\omega}_2 \times q'' - \bar{\omega}_1 \times q') = 0 \quad (18)$$

есть уравнение бицентроиды.

В координатной форме уравнение бицентроиды имеет вид:

$$(\dot{x}_{O''} - \dot{x}_{O'}) - (\omega_2 - \omega_1) y + (\omega_2 y_{O''} - \omega_1 y_{O'}) = 0,$$

$$(\dot{y}_{O''} - \dot{y}_{O'}) + (\omega_2 - \omega_1) x - (\omega_2 x_{O''} - \omega_1 x_{O'}) = 0,$$

где x и y — текущие координаты бицентроиды, а $x_{O'}$, $y_{O'}$ и $x_{O''}$, $y_{O''}$ — координаты точек O' и O'' . Отсюда легко получаем параметрические уравнения бицентроиды ¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{(\omega_2 x_{O''} - \omega_1 x_{O'}) - (\dot{y}_{O''} - \dot{y}_{O'})}{\omega_2 - \omega_1}, \\ y &= \frac{(\omega_2 y_{O''} - \omega_1 y_{O'}) + (\dot{x}_{O''} - \dot{x}_{O'})}{\omega_2 - \omega_1}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Для нахождения уравнения центроид, связанных со звеньями 1 и 2, необходимо в уравнениях (19) координаты x и y выразить через координаты ξ' , η' и ξ'' , η'' , принадлежащие координатным осям $O' \xi' \eta'$ и $O'' \xi'' \eta''$.

Как известно, формулы преобразования координат имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \xi' &= (x - x_{O'}) \cos \alpha' + (y - y_{O'}) \sin \alpha', \\ \eta' &= (y - y_{O'}) \cos \alpha' - (x - x_{O'}) \sin \alpha'. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Подставляя в уравнения (20) значения x и y из уравнений (19), получим

¹⁾ Антонов А. М.: Бицентроида и центроиды в относительном движении, Вестник инженеров и техников, № 7, 1940.

параметрические уравнения центроиды звена 1:

$$\left. \begin{aligned} \xi' &= \frac{(x_{O''} - x_{O'}) \omega_2 - (\dot{y}_{O''} - \dot{y}_{O'})}{\omega_2 - \omega_1} \cos \alpha' + \\ &\quad + \frac{(y_{O''} - y_{O'}) \omega_2 + (\dot{x}_{O''} - \dot{x}_{O'})}{\omega_2 - \omega_1} \sin \alpha', \\ \eta' &= \frac{(y_{O''} - y_{O'}) \omega_2 + (\dot{x}_{O''} - \dot{x}_{O'})}{\omega_2 - \omega_1} \cos \alpha' - \\ &\quad - \frac{(x_{O''} - x_{O'}) \omega_2 - (\dot{y}_{O''} - \dot{y}_{O'})}{\omega_2 - \omega_1} \sin \alpha'. \end{aligned} \right\} (21)$$

Параметрические уравнения центроиды, принадлежащей звену 2, имеют аналогичный вид.

Имея уравнения центроид звеньев 1 и 2, профили элементов высшей пары можно построить по точкам, так как известны законы движения звеньев:

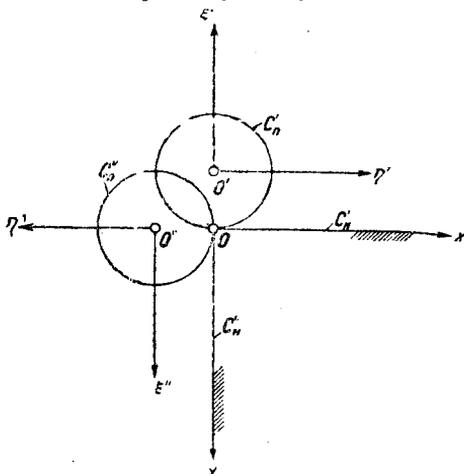
$$\begin{cases} x_{O'} = f(t), & y_{O'} = \varphi(t), & \alpha' = \phi(t); \\ x_{O''} = F(t), & y_{O''} = \Phi(t), & \alpha'' = \Psi(t), \end{cases}$$

и следовательно, могут быть определены величины:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{O'} &= \frac{dx_{O'}}{dt}, & \dot{y}_{O'} &= \frac{dy_{O'}}{dt} & \text{и} & \quad \omega_1 = \frac{d\alpha'}{dt}; \\ \dot{x}_{O''} &= \frac{dx_{O''}}{dt}, & \dot{y}_{O''} &= \frac{dy_{O''}}{dt} & \text{и} & \quad \omega_2 = \frac{d\alpha''}{dt}. \end{aligned}$$

В некоторых случаях удобнее пользоваться уравнениями центроид в полярной системе координат. Прямоугольные координаты $x_{O'}$, $y_{O'}$, $x_{O''}$, $y_{O''}$ связаны с радиусами-векторами q' , q'' и углами β и γ (фиг. 22) следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} x_{O'} &= q' \cos \beta, & y_{O'} &= q' \sin \beta; \\ x_{O''} &= q'' \cos \gamma, & y_{O''} &= q'' \sin \gamma. \end{aligned}$$



Фиг. 23.

координат Oxy , $O'\xi'\eta'$ и $O''\xi''\eta''$ так, как координаты точек O' и O'' будут:

$$x_{O'} = r' \alpha'; \quad y_{O'} = r'; \quad x_{O''} = -r'' \quad \text{и} \quad y_{O''} = -r'' \alpha'',$$

где r' и r'' суть радиусы центроид C'_II и C''_{II} , а α' и α'' — углы их поворота. Так как по заданию

$$r' = r'' = r \quad \text{и} \quad \alpha' - \alpha'' = \alpha,$$

то

$$x_{O'} = r\alpha; \quad y_{O'} = r; \quad x_{O''} = -r \quad \text{и} \quad y_{O''} = -r\alpha.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \dot{x}_{O'} &= r \frac{d\alpha}{dt} = r\omega, & \dot{y}_{O'} &= 0; \\ \dot{x}_{O''} &= 0, & \dot{y}_{O''} &= -r \frac{d\alpha}{dt} = -r\omega. \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в уравнения (19) для бицентроиды, найдём:

$$x = \frac{r\alpha}{2}, \quad y = -\frac{r\alpha}{2}.$$

Исключая параметр α , получим:

$$x = -y,$$

т. е. бицентроида представляет собой прямую, проходящую через начало осей координат Oxy и образующую угол в 45° с осями x и y .

Для определения уравнений центроиды C'_0 представляем значения x , y , $x_{O'}$, $y_{O'}$, $x_{O''}$, $y_{O''}$ и α' в уравнения (20). Получаем

$$\xi' = -\frac{r}{2} [\alpha \cos \alpha - (\alpha + 2) \sin \alpha]$$

и

$$\eta' = -\frac{r}{2} [(\alpha + 2) \cos \alpha - \alpha \sin \alpha].$$

Аналогично определяются параметрические уравнения для центроиды C''_0 .

Пример 4. Составим уравнения центроид C'_0 и C''_0 звеньев 1 и 2

для случая, когда звено 1 вращается около некоторой точки O' с угловой скоростью ω_1 , а звено 2 — около некоторой точки O'' с угловой скоростью ω_2 (фиг. 24).

Имеем:

$$\begin{aligned} x_{O'} &= 0, & y_{O'} &= 0, & x_{O''} &= l, & y_{O''} &= 0; \\ x_{O'} &= 0, & y_{O'} &= 0, & \dot{x}_{O'} &= 0 & \text{и} & \dot{y}_{O'} = 0. \end{aligned}$$

Уравнения бицентроиды будут:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} l, \\ y &= 0, \end{aligned}$$

т. е. точки бицентроиды лежат на отрезке $O'O'' = l$ и делят расстояние l на части, обратно пропорциональные угловым скоростям. Уравнения центроиды C'_0 будут:

$$\begin{aligned} \xi' &= \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} l \cos \alpha', \\ \eta' &= \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} l \sin \alpha'. \end{aligned}$$

Полярные параметрические уравнения центроиды будут:

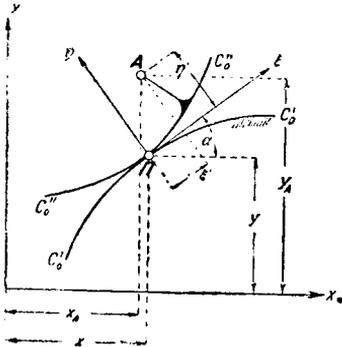
$$r' = \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} l, \quad \alpha' = \int_t^t \omega_1 dt.$$

Исключая из этих уравнений время, получим полярное уравнение центроиды C'_0 .

§ 6. Уравнения взаимноогibaемых кривых

Перейдём к аналитическому решению задачи профилирования элементов высшей пары в том случае, когда эти элементы представляют собой взаимноогibaемые кривые. Как было показано выше, задача сводится к нахождению огibaющей кривой по полжениям огibaемой, заданным в относительном движении. Полжения огibaемой в относительном движении звеньев пары будут вполне определены, если известны центры относительного движения и мгновенная угловая скорость относительного движения. Совокупность положений огibaемой будет образовывать семейство линий, к которому и должна быть найдена огibaющая.

Найдём уравнение огibaющей кривой. Как было указано в § 2, в качестве огibaемой могут быть выбраны точка или линия. Если в качестве огibaемой выбрана точка, принадлежащая одному из звеньев пары, то огibaющей будет траектория, описанная этой точкой при качении centroиды данного звена по сопряжённой centroиде, принадлежащей другому звену и принятой в относительном движении за неподвижную. Уравнения этой траектории определяются из следующих соображений.



Фиг. 25.

Пусть centroида C''_0 (фиг. 25), принадлежащая звену 2 пары, перекачивается в своём относительном движении по centroиде C'_0 , принадлежащей звену 1 и принятой за неподвижную. Centroида C'_0 пусть задана уравнениями $x = f(t)$ и $y = \varphi(t)$, где x и y — текущие координаты в неподвижной системе координат Oxy . В качестве системы координат, принадлежащей centroиде C''_0 , выберем систему $P\xi\eta$, ось $P\xi$ которой совпадает в каждом положении с направлением касательной к centroидам в их точке соприкосновения, а ось $P\eta$ совпадает с направлением нормали в той же точке. Таким образом, начало P системы координат $P\xi\eta$ будет следовать закону перемены мгновенного центра вращений в относительном движении. Полжение системы координат $P\xi\eta$ в каждый момент времени будет определяться известными значениями координат x и y и угла α наклона оси $P\xi$ к оси Ox . Переменные координаты ξ и η какой-либо точки A , принадлежащей centroиде C''_0 звена 2, в системе $O\xi\eta$ будут известны для каждого положения centroиды C''_0 . Тогда координаты x_A , y_A точки A в системе Oxy будут:

$$\left. \begin{aligned} x_A &= x + \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha, \\ y_A &= y + \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Заменяя $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ их выражениями:

$$\sin \alpha = \frac{dy}{ds}, \quad \cos \alpha = \frac{dx}{ds},$$

где ds есть дифференциал дуги centroиды C''_0 , пробегасмой точкой P , и имея в виду, что

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2},$$

перепишем уравнения (22) в следующем виде

$$\left. \begin{aligned} x_A &= x + \frac{\xi dx - \eta dy}{ds}, \\ y_A &= y + \frac{\xi dy + \eta dx}{ds}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Это есть параметрические уравнения траектории точки A в системе координат Oxy .

Таким образом, если в качестве огибаемой выбрана точка A , то уравнения (23) вполне определяют огибающую кривую. Если же в качестве огибаемой будет выбрана какая-либо линия, принадлежащая центроиде C_0'' , то координаты любой точки этой линии могут быть также определены из уравнений (23) для каждого положения центроиды C_0'' .

Если уравнение выбранной линии задано в виде

$$F(x, y) = 0,$$

то совокупность линий для всех положений центроиды C_0'' представится уравнением:

$$\Phi(x, y, a) = 0, \quad (24)$$

где a есть переменный параметр, определяющий закон перемены положений выбранной линии. Уравнение (24) есть уравнение семейства кривых. Для нахождения уравнения огибающей определяем частную производную от уравнения семейства по параметру a и приравниваем её нулю:

$$\frac{\partial \Phi(x, y, a)}{\partial a} = 0. \quad (25)$$

Исключая из уравнений (24) и (25) параметр a , получаем уравнение искомой огибающей в виде:

$$\Psi(x, y) = 0. \quad (26)$$

Если огибаемая и огибающие строятся с помощью вспомогательной центроиды C_B (рис. 13), как траектории какой-либо её точки A (см. § 2), то уравнения огибаемой и огибающей можно найти, используя уравнения (23). Для кривой $\alpha'\alpha'$ (рис. 13) эти уравнения будут следующие:

$$\left. \begin{aligned} x'_A &= x' + \frac{\xi' dx' - \eta' dy'}{ds'} \\ y'_A &= y' + \frac{\xi' dy' + \eta' dx'}{ds'} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

где x' и y' суть координаты начала O^1 координатной системы $O^1\xi'\eta'$, принадлежащей вспомогательной центроиде C_B . Ось $O^1\xi'$ будет касательной к центроиде C_0' звена 1 и вспомогательной центроиде C_B , проведённой в точке их соприкосновения. Ось $O^1\eta'$ совпадает с общей нормалью к тем же центроидам, проведённой через точку касания. Координаты ξ' и η' определяют положение точки A в системе $O^1\xi'\eta'$.

Для кривой $\alpha''\alpha''$ уравнения (23) напишутся так:

$$\left. \begin{aligned} x''_A &= x'' + \frac{\xi'' dx'' - \eta'' dy''}{ds''} \\ y''_A &= y'' + \frac{\xi'' dy'' + \eta'' dx''}{ds''} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

где x'' и y'' суть координаты начала O'' координатной системы $O''\xi''\eta''$, принадлежащей вспомогательной центроиде C_B . Ось $O''\xi''$ будет касательной к центроиде C_0'' звена 2 и вспомогательной центроиде C_B , проведённой в точке их соприкосновения. Ось $O''\eta''$ совпадает с общей нормалью к тем же центроидам, проведённой через точку касания. Координаты ξ'' и η'' определяют положение точки A в системе $O''\xi''\eta''$. Кривые, определяемые уравнениями (27) и (28), будут взаимноогибаемыми.

Пример 5. Пусть центроида относительного движения звена 1 представляет собой прямую C'_0 , а центроида относительного движения, принадлежащая звену 2, представляет собой окружность C''_0 (фиг. 26). Пусть, далее, в качестве огибаемой выбрана точка K'' центроида C''_0 . Требуется найти уравнение огибающей $K'K'$.

Огибающей $K'K'$ будет, очевидно, траектория точки K'' центроида C''_0 в её движении относительно центроида C'_0 . Центроиду C'_0 закрепляем с неподвижной системой координат Oxy . Тогда уравнением этой центриды будет:

$$\begin{aligned} x &= t, \\ y &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $dx = dt$, $dy = 0$ и

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dt.$$

Ось $O''\xi''$ подвижной системы координат $O''\xi''\eta''$, принадлежащей центриде C''_0 , совпадает с осью Ox , а ось $O''\eta''$ параллельна оси Oy . Координаты ξ'' и η'' будут:

$$\xi'' = -r \sin \alpha, \quad \eta'' = r - r \cos \alpha,$$

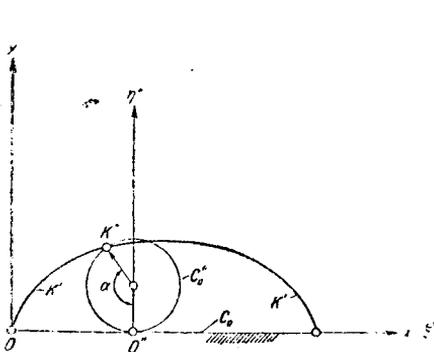
где r есть радиус центриды C''_0 .

Подставляя полученные выражения в уравнение (23) и принимая во внимание, что $x = t = s = r\alpha$ и $dt = r d\alpha$, получим:

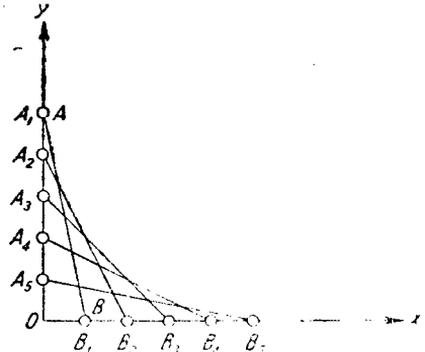
$$x_K = r\alpha - \frac{r \sin \alpha \cdot r d\alpha}{r d\alpha} = r(\alpha - \sin \alpha),$$

$$y_K = \frac{(r - r \cos \alpha) r d\alpha}{r d\alpha} = r(1 - \cos \alpha).$$

Это есть параметрические уравнения циклоиды, т. е. огибающей $K'K'$, принадлежащей звену 1, будет циклоида.



Фиг. 26.



Фиг. 27.

Пример 6. Пусть в качестве огибаемой звена 1 задана прямая AB (фиг. 27), уравнение которой будет:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

где a и b суть отрезки, отсекаемые этой прямой на осях x и y . Требуется найти уравнение огибающей, принадлежащей звену 2, если движение отрезка AB задано условием, что

$$ab = K^2,$$

где K есть некоторая постоянная величина.

Подставляя в уравнение прямой значение a или b , определяемое из заданного условия, получим уравнение семейства прямых:

$$\frac{x}{a} + \frac{ya}{K^2} = 1.$$

Составляем частную производную по параметру a и приравниваем её нулю:

$$-\frac{x}{a^2} + \frac{y}{K^2} = 0,$$

откуда находим:

$$a = K \sqrt{\frac{x}{y}}.$$

Подставляя в уравнение прямой полученные значения a и b , получаем:

$$\frac{x}{K \sqrt{\frac{x}{y}}} + \frac{yK \sqrt{\frac{x}{y}}}{K^2} = 1,$$

откуда

$$xy = \frac{K}{4}.$$

Следовательно, огибающая, принадлежащая звену 2, будет гиперболой.

III. ЭМПИРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ СИНТЕЗА.

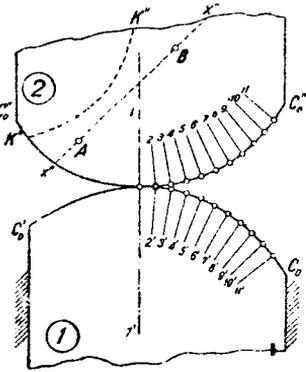
§ 7. Использование моделей или шаблонов для нахождения огибающих.

Нахождение огибаемых или огибающих кривых, используемых в качестве профилей элементов высшей пары, во многих случаях требует большого количества построений или вычислений. Кроме того, при нахождении этих профилей можно задаться только одним из них. Сопряжённый же профиль получается только после целого ряда построений или вычислений. Полученный сопряжённый профиль может оказаться неудовлетворяющим требованиям конструкции, производства и т. п. Тогда необходимо задаться изменённым профилем элемента 1 и снова, повторив все построения или вычисления, найти новый профиль элемента звена 2. Если в этом случае полученный профиль будет неудовлетворительным, придется ещё раз изменять профиль звена 1 и т. д. Очевидно, такой длительный процесс является чрезвычайно трудоёмким. Практическое решение задачи может быть значительно упрощено, если воспользоваться экспериментальными методами нахождения сопряжённых профилей. Для этого необходимо построить модели или шаблоны centroид относительного движения звеньев пары. Эти модели или шаблоны могут быть сделаны из картона, целлулоида, фанеры и т. д. Так как для нахождения сопряжённых профилей необходимо построенные шаблоны перекачивать друг по другу без скольжения, то необходимо на этих шаблонах отметить ряд точек, расположенных на равных расстояниях друг от друга, считая вдоль дуги; при перекатывании эти точки должны последовательно приходиться в соприкосновение (фиг. 28). Для того, чтобы получить достаточно точные результаты, необходимо взять большое количество точек, т. е. разбить очертания профилей centroид на малые дуги. Далее необходимо в полученных точках провести нормали к профилям. При проведении нормалей можно воспользоваться методом, предложенным Головинным¹⁾. Если выбранная огибаемая принадлежит centroиду C'_0 звена 2, то закрепляем неподвижно centroиду C'_0 звена 1 и перекачиваем centroиду C''_0 по centroиде C'_0 .

¹⁾ Головин Д. Н.: Графическая математика, 1931, стр. 12—14.

Вследствие равенства отложенных по обеим центроидам дуг размеченные точки начнут приходить последовательно в соприкосновение, при этом направления нормалей 1, 2, 3, 4, ... будут совпадать с направлениями нормалей 1', 2', 3', 4', ... Совпадение каждой пары нормалей фиксирует правильное положение центроиды C_0'' .

Если в качестве огибаемой выбрана какая-либо кривая линия $K''K''$ (фиг. 28), то в шаблоне должна быть сделана соответствующая прорезь или шаблон должен быть обрезан по выбранной кривой $K''K''$. В каждом положении шаблона C_0'' карандашом напомним кривую $K''K''$. Тогда получим семейство огибаемых кривых $K''K''$, к которому и проводим огибающую кривую. Таким образом, может быть экспериментально построен сопряжённый профиль, принадлежащий звену 1.



Фиг. 28.

Если вместо кривой линии $K''K''$ будет задана прямая $x''x''$ (фиг. 28), то можно ограничиться рассмотрением последовательного положения каких-либо двух точек этой прямой, например, A и B . Для этого делаем в этих точках на шаблоне C_0'' отверстия и фиксируем эти точки в каждом положении центроиды. Соединив прямой каждую пару точек, получим семейство прямых, к которому и приводим искомую огибающую.

Если в качестве огибаемой выбрана точка, например A , то построение огибающей сведётся к проведению кривой через все положения точки A , т. е. к построению её траектории. С помощью шаблонов можно весьма быстро подыскать наиболее удобные огибаемую и огибающую. Экспериментальное нахождение огибающих можно значительно упростить, если пользоваться светочувствительной бумагой, укрепляя её позади шаблонов на специальной доске. Шаблоны освещаются параллельными пучками света и медленно перекатываются друг по другу. Тогда на светочувствительной бумаге непосредственно получается непрерывное очертание профиля огибающей.

§ 8. Замена высшей пары цепями с низшими парами.

Иногда необходимо заданное движение звеньев 1 и 2 воспроизвести точно или приближённо не с помощью высшей пары, а с помощью промежуточной цепи, состоящей из звеньев, входящих в низшие пары.

Для этого по заданным движениям звеньев 1 и 2 строим, их подвижные и неподвижные центроиды. Затем, рассматривая относительное движение этих звеньев, находим бицентроиду. Наконец, по построенной бицентроиде строим центроиды в относительном движении. Таким образом, первая часть задачи решается так, как было показано выше. Далее приступаем к замене передачи движения посредством высшей пары промежуточными кинематическими цепями с низшими парами. Для этого рассмотрим вопрос о том, какими кинематическими цепями может быть заменена высшая пара. Звенья 1 и 2 обладают каждый одной степенью подвижности, а оба вместе — двумя степенями подвижности. Связывая эти звенья посредством промежуточных кинематических цепей, необходимо получить систему только с одной степенью подвижности, т. е. чтобы промежуточные кинематические цепи накладывали лишь одно условие связи. Выясним, какие кинематические цепи, состоящие из низших пар, накладывают только одно условие связи. Структурная формула такой цепи будет, очевидно, следующей:

$$3n - 2p_5 + 1 = 0, \quad (29)$$

где n есть число звеньев, а p_5 — число пар V класса. Из уравнения (29) выводим:

$$p_5 = \frac{3}{2}n + \frac{1}{2}. \quad (30)$$

Так как n и p_3 есть числа целые, то уравнению (30) могут удовлетворять следующие числа звеньев и пар:

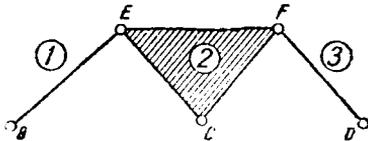
$$\left. \begin{aligned} n &= 1, 3, 5, 7 \text{ и т. д.} \\ p_3 &= 2, 5, 8, 11 \text{ и т. д.} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Первое сочетание звеньев и пар показано на фиг. 29. Звено AB , чтобы иметь относительную подвижность, должно входить в точке A в кинематическую пару с одним из основных звеньев, а в точке B — в кинематическую пару с другим основным звеном.

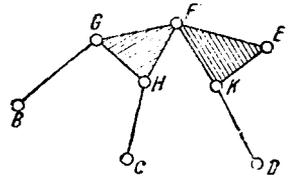
Второе сочетание звеньев и пар показано на фиг. 30. Здесь присоединение к основным звеньям осуществляется вхождением цепи в кинематические пары в точках B, C и D . Нетрудно видеть, что к одному из основных звеньев эта цепь может быть присоединена парами в точках B и D , а к другому — парой в точке C , так как при присоединении цепи к одному из основных звеньев парами в точках B и C или парами в точках C и D звенья 1 и 2 или 2 и 3



Фиг. 29.



Фиг. 30.

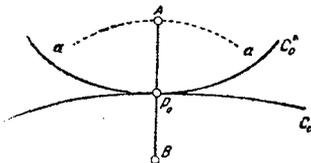


Фиг. 31.

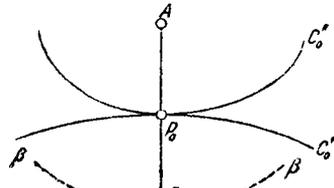
теряют относительную подвижность, и мы получаем ранее рассмотренную промежуточную цепь, состоящую из одного звена, входящего в две кинематические пары.

Следующее сочетание звеньев и пар образует цепь, показанную на фиг. 31. Эта цепь к первому из основных звеньев может быть присоединена парами в точках B, C и D , а к другому — парой в точке E . При других вариантах присоединения необходимо следить за тем, чтобы звенья цепи обладали относительной подвижностью. Более сложные цепи могут быть получены из следующих по порядку сочетаний (31) звеньев и пар.

Рассмотрим теперь вопрос о том, в каких случаях какая из указанных цепей может быть использована. Если два основных звена связать цепью, показанной на фиг. 29, то движение точки B относительно A , или наоборот, будет движением по дуге радиуса AB и поэтому при качении центроид относительного движения основных звеньев друг по другу те точки, к которым присоединяется цепь AB , должны в относительном движении описывать окружности. Следовательно, если в относительном движении центроид C'_0 и C''_0 на одной из центроид, например C''_0 , каким-либо способом найдена точка A , движущаяся по дуге окружности $\alpha\alpha$ (фиг. 32), то цепь AB в точке A



Фиг. 32.



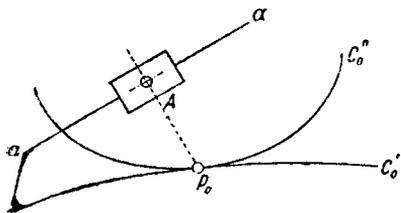
Фиг. 33.

должна входить в кинематическую пару с центроидом C''_0 , а в точке B , совпадающей с центром окружности $\alpha\alpha$, — в кинематическую пару с центроидом C'_0 . При обращении движения точка B будет описывать дугу окружности $\beta\beta$, а точка A будет центром этой дуги (фиг. 33).

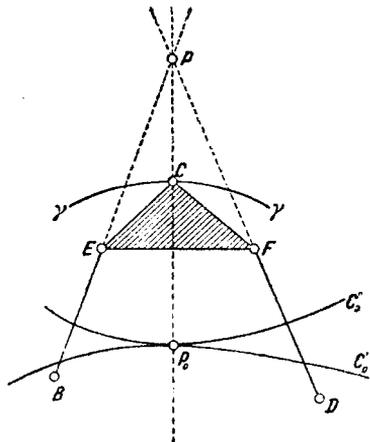
Если точки A или B описывают в относительном движении точные дуги окружностей, то направление звена AB должно проходить через центр мгновенного вращения в относительном движении, т. е. через точку P_0 (фиг. 32 и 33). Это следует из условия, что вектор относительной скорости точки A относительно B , или наоборот, должен быть одновременно перпендикулярен к звену AB и к отрезку, соединяющему исследуемую точку с центром P_0 .

Если в относительном движении центроид C'_0 и C''_0 каким-либо способом найдена точка A , движущаяся прямолинейно, то одна из пар, в которые входит цепь AB , должна быть поступательной (фиг. 34). Прямолинейный отрезок aa траектории точки A должен быть выполнен в виде кулисы, жёстко связанной со звеном I . В точке A должен быть укреплен на шарнире ползун. Так же, как и в предыдущем случае, нормаль в точке A к кулисе aa должна проходить через центр мгновенного вращения P_0 .

Если основные звенья связаны кинематической цепью, показанной на фиг. 30, то в относительном дви-



Фиг. 34.



Фиг. 35.

жении центроиды C''_0 относительно центроиды C'_0 точка C должна описывать так называемую шатунную кривую $\gamma\gamma$ (фиг. 35). Таким образом, если в относительном движении звеньев I и II в системе одного из них будет найдена точка, движущаяся по шатунной кривой, то движение звеньев I и II может быть воспроизведено не центроидами или взаимноогibaемыми, а промежуточной кинематической цепью, показанной на фиг. 35.

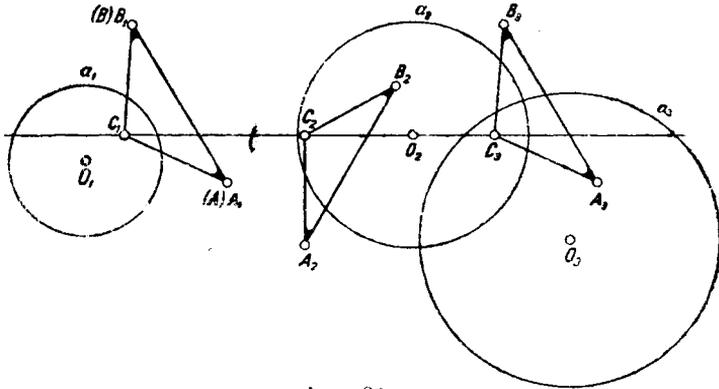
При увеличении порядка шатунной кривой может быть использована цепь, показанная на фиг. 31, или какая-либо более сложная цепь, удовлетворяющая условию (30).

Необходимо отметить, что при подборе цепи, точно воспроизводящей требуемую траекторию, она должна удовлетворять вполне определённым геометрическим условиям. Так, в цепи, показанной на фиг. 35, точки P , C и P_0 должны находиться на одной прямой, так как вектор относительной скорости точки C должен быть одновременно перпендикулярен к отрезкам P_0C и PC . Это следует из того, что точка P_0 есть центр мгновенного вращения при перекатывании центроиды C''_0 по центроиде C'_0 , а точка P есть центр мгновенного вращения при движении звена ECF относительно звена BD , жёстко связанного с центроидой C_0 . Аналогичные геометрические условия должны выполняться и для цепей более сложной структуры, удовлетворяющих условию (30). В случае приближённого решения задачи указанные условия могут удовлетворяться не полностью.

Таким образом, задача о воспроизведении движения звеньев I и II посредством промежуточных цепей с низшими парами может быть решена, если будут найдены точки звеньев, описывающие в относительном движении дуги окружностей, отрезки прямых или участки шатунных кривых. В том случае, если будут найдены точки, точно описывающие указанные траектории, может быть использована одна из указанных выше промежуточных кинематических цепей, состоящая из низших пар и точно воспроизводящая заданное движение.

ние. Обычно удаётся отыскать точки, только приближённо описывающие вышеуказанные виды траекторий. В этом случае указанными видами промежуточных цепей с низшими парами движение можно воспроизвести только приближённо.

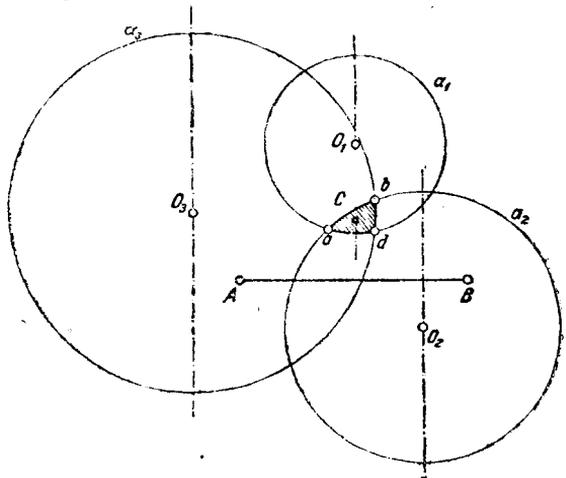
Точки, имеющие указанные выше траектории, могут быть найдены при помощи различных методов. Первый метод состоит в изучении кинематических вейств построенных центровод относительного движения. Для этого при на-



Фиг. 36.

хождении точек, двигающихся точно или приближённо прямолинейно, можно использовать метод поворотных кругов, предложенный Мерцаловым¹⁾. Из теоретической механики известно, что при плоско-параллельном движении звена геометрическим местом точек звена, для которых нормальное ускорение равно нулю, будет окружность, носящая название поворотного круга²⁾. Если найдены точки звена, нормальное ускорение которых равно нулю, то очевидно, что в рассматриваемые моменты времени эти точки движутся прямолинейно.

Тогда, если найти на звене точку, которая для ряда соседних положений лежит на соответствующих поворотных кругах, то, очевидно, траектория этой точки за рассматриваемый промежуток времени будет прямолинейной. Однако, обычно не удаётся найти такой точки, которая для всех рассмотренных положений звена оказалась бы лежащей на поворотных кругах, но можно найти точки, лежащие вблизи поворотных кругов. Такие точки будут иметь траектории, близкие к прямой линии. Пусть, например, для трёх положений A_1B_1 , A_2B_2 , A_3B_3 прямой AB , принадлежащей одной из центровод относительного



Фиг. 37.

движения, найдены поворотные круги α_1 , α_2 и α_3 (Фиг. 36) в относительном движении звеньев 1 и 2. Совместим отрезки A_1B_1 , A_2B_2 и A_3B_3 (Фиг. 37) вместе с поворотными кругами таким образом, чтобы точки A_1 , A_2 и A_3 со-

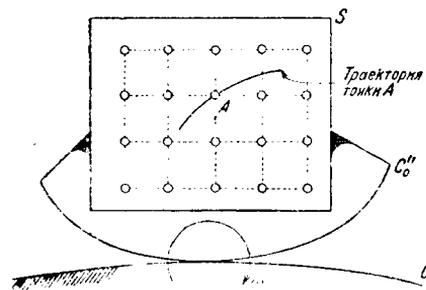
¹⁾ Мерцалов Н. И.: Кинематика механизмов, Москва, 1914, стр. 357—358.

²⁾ Мерцалов Н. И.: Кинематика механизмов, Москва, 1916, стр. 48—74.

впали в одной точке A , а точки B_1, B_2 и B_3 — в одной точке B . Тогда поворотные круги, в общем случае, выделяют некоторую общую им всем область abd , все точки которой лежат вблизи построенных поворотных кругов. Если в этой области выбрать некоторую точку C , то траектория этой точки, как расположенная весьма близко к кругам α_1, α_2 и α_3 , будет приближённо прямолинейной. Чем меньше будет общая всем трём кругам abd область, тем ближе траектория точки C будет приближаться к прямой. Перемещая полученную точку C вместе с отрезком AB , получим точки C_1, C_2 и C_3 , которые образуют кривую, достаточно близкую к прямой (фиг. 36).

Итак, мы нашли точку, траектория которой в относительном движении звеньев 1 и 2 на рассмотренном участке приближённо прямолинейна, и следовательно, для передачи движения может быть использована промежуточная цепь, показанная на фиг. 34.

Для нахождения точек траектории, которые в относительном движении описывают дуги окружностей или участки шатунных кривых, необходимо опреде-



Фиг. 38.

лять радиусы кривизны этих траекторий, для чего может быть использована теорема Савари¹⁾. Часто более удобным окажется применение изложенного выше метода шаблонов. Для этого с шаблоном одной из центроид, например центроиды C_0'' , соединяют жестко плоскость S (фиг. 38). В этой плоскости делают ряд отверстий, расположенных в определенном порядке. Перекачивая центрионду C_0'' по центрионде C_0' , получим ряд траекторий, число которых будет равно числу сделанных отверстий. Из полученных траекторий выбираем те, у которых отдельные участки могут быть,

точно или приближённо, заменены дугами окружностей, прямыми или участками шатунных кривых. Найдя экспериментально удобные для использования участки, можно потом — точно аналитически или приближённо графически — проверить степень отклонения выбранных участков от точных траекторий.

Для нахождения траекторий в относительном движении звеньев пары можно также пользоваться упомянутым выше приёмом проектирования отверстий, сделанных в подвижной плоскости S , на светочувствительную бумагу. Таким путём можно не только построить траектории точек, но и определить скорости их движения на отдельных участках. Для этого при непрерывном качении центрионды с заданной скоростью плоскость S освещается пучком света не непрерывно, а через вполне определённые короткие интервалы. Тогда траектории точек получатся в виде штриховых линий. По длине отдельных штрихов или расстояний между штрихами можно определить скорость движения точек по своим траекториям.

IV. СИНТЕЗ КУЛАЧКОВЫХ МЕХАНИЗМОВ.

§ 9. Виды кулачковых механизмов.

Рассмотрим некоторые частные задачи синтеза механизмов с высшими парами, и в первую очередь — задачи синтеза кулачковых механизмов. Как было показано выше, профили элементов высших пар, входящих в состав этих механизмов, могут представлять собой или центрионды или взаимноогнбаемые кривые. Механизмы, у которых профили элементов высшей пары представляют центрионды, применяются в технике сравнительно редко вследствие указанных выше динамических и кинематических недостатков. Гораздо чаще применя-

¹⁾ Мерцалов Н. И.: Кинематика механизмов, Москва, 1914, стр. 48—102.

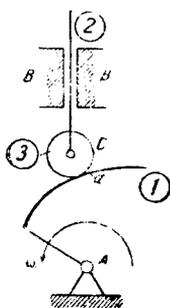
ются кулачковые механизмы с профилями элементов высших пар, очерченных по взаимноогibaемым кривым. Для большей стройности дальнейшего изложения разобьём все кулачковые механизмы по формам движения ведомого звена высшей пары на следующие три вида:

- а) ведомое звено движется поступательно в неподвижных направляющих;
- б) ведомое звено движется вращательно около неподвижной оси;
- в) ведомое звено имеет произвольное плоско-параллельное движение.

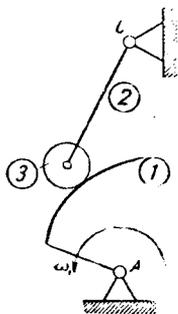
Примером первого вида может служить механизм, показанный на фиг. 39. Плоская кривая **1** вращается около оси **A** с заданной угловой скоростью. Воздействуя на ролик **3**, свободно вращающийся около оси **C**, кривая **1** заставляет звено **2** двигаться поступательно в направляющих **BB**. Условимся в кулачковых механизмах называть кулачком то звено высшей пары, форма элемента которого определяется из условия заданного относительного движения звеньев, входящих в высшую пару. Профилем плоского кулачка условимся называть сечение кулачка плоскостью, параллельной плоскости движения кулачка. Тогда в механизме, показанном на фиг. 39, звено **1** будет кулачком, а кривая **a** — профилем кулачка.

На фиг. 40 показан второй вид кулачкового механизма. Кривая **1** вращается около оси **A** и, воздействуя на ролик **3**, заставляет звено **2** вращаться около точки **C**.

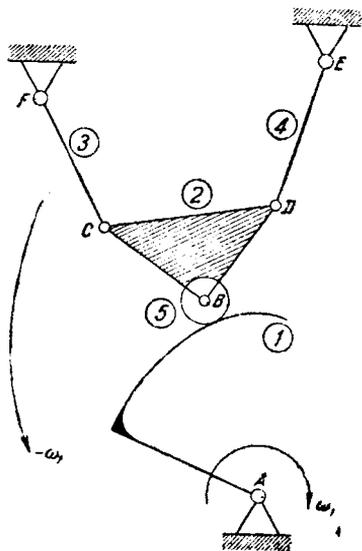
На фиг. 41 показан третий вид кулачкового механизма. Кривая **1** вращается около оси **A** и, воздействуя на ролик **5**, приводит звено **2** в плоско-параллельное движение, соответствующее движению шатуна четырёхзвенника **FCDE** (фиг. 41).



Фиг. 39.



Фиг. 40.



Фиг. 41.

щается около оси **A** и, воздействуя на ролик **5**, приводит звено **2** в плоско-параллельное движение, соответствующее движению шатуна четырёхзвенника **FCDE** (фиг. 41).

При кинематическом и динамическом синтезе кулачкового механизма должны быть заданы законы движения ведущего и ведомого звеньев и минимальный угол давления γ . Кроме того, дополнительно должен быть задан вид огибаемой, принадлежащей ведомому звену.

Движение ведущего и ведомого звеньев обычно задаётся или аналитически в виде уравнения движения или же графически в виде диаграмм перемещений. Вид этих уравнений или диаграмм может быть различным в зависимости от заданных условий движения. Чаще всего закон движения ведомого звена даётся в функции закона движения ведущего звена, т. е. из двух уравнений движения ведущего и ведомого звена, заданных в функции времени t , путём исключения времени получают одно уравнение.

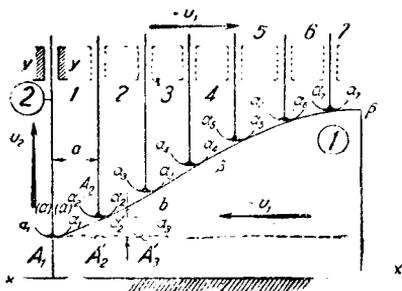
Остановимся ещё на выборе очертания профиля огибаемой. Огибаемые могут быть трёх видов. Во-первых, в качестве огибаемой может быть выбрана какая-либо кривая. Чаще всего выбирается окружность, эвольвента, циклоидальная кривая и т. д. Во-вторых, в качестве огибаемой может быть взята точка, и наконец, в качестве огибаемой может быть взята прямая. Этими видами огибаемых практически ограничивается их выбор в плоских кулачковых механизмах.

§ 10. Кинематический синтез кулачковых механизмов первого вида.

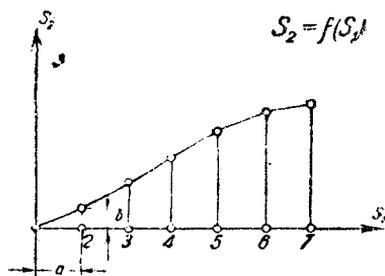
К первому виду кулачковых механизмов мы отнесли те механизмы, ведомые звенья которых двигаются поступательно (фиг. 39). В зависимости от движения ведущего звена, которое может двигаться или также поступательно или вращательно, могут быть два случая кулачковых механизмов первого вида.

Пусть ведущее звено 1 (фиг. 42) движется поступательно с заданной постоянной скоростью, а ведомое звено 2 движется поступательно в направляющих yy . Закон движения звена 2 пусть задан диаграммой $S_2 = f(S_1)$ (фиг. 43).

Задача может быть решена только с помощью взаимноогibaемых кривых. Пусть (фиг. 42) в качестве огibaемой задана произвольная кривая $\alpha\alpha$, при-



Фиг. 42.



Фиг. 43.

надлежащая звену 2; начальное положение этой огibaемой пусть будет $\alpha_1\alpha_1$. Так как огibaемая $\alpha\alpha$ нам задана и её последовательные положения могут быть определены по графику $S_2 = f(S_1)$, то для построения огibaемой можно не строить бицентроиды и центроиды в относительном движении, а можно непосредственно построить огibaющую $\beta\beta$, принадлежащую звену 1.

Для нахождения последовательных положений огibaемой воспользуемся приёмом обращения движения. Для этого сообщаем звеньям 1 и 2 общую скорость $+v_1$. Тогда звено 1 будет неподвижным, а звено 2 будет двигаться поступательно с постоянной скоростью $+v_1$ вдоль направляющих xx и поступательно со скоростью $\pm v_2$ вдоль направляющих yy .

Выберем на кривой $\alpha_1\alpha_1$ (фиг. 42) какую-либо точку A_1 и переместим эту кривую вправо на отрезок a , равный в выбранном масштабе пути, проходимому звеном 1 из положения 1 в положение 2 (фиг. 43). Тогда кривая $\alpha_1\alpha_1$ займёт положение $\alpha'_2\alpha'_2$, а точка A_1 займёт положение A'_2 . Переместим далее кривую $\alpha'_2\alpha'_2$ на отрезок b , равный в том же масштабе пути, проходимому звеном 2 из положения 1 в положение 2 (фиг. 43). Тогда точка A'_2 перейдёт в положение A_2 , а кривая $\alpha'_2\alpha'_2$ займёт положение $\alpha_2\alpha_2$. Аналогично находим все последующие положения огibaемой $\alpha\alpha$.

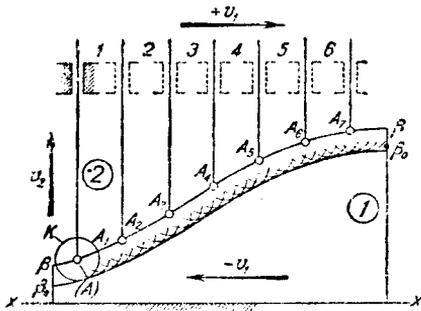
Обогнув все полученные положения огibaемой $\alpha\alpha$ огibaющей $\beta\beta$, получаем профиль кулачка 1. Если огibaемая будет точкой (фиг. 44), то аналогичным приёмом находим точки A_1, A_2, A_3, \dots , представляющие отдельные положения точки A . Соединив точки A_1, A_2, A_3, \dots плавной кривой $\beta\beta$, получим огibaющую, которая и представит собой профиль кулачка 1.

Если звено 2 снабжено роликом K , свободно вращающимся около оси A , то кривая $\beta\beta$ будет геометрическим местом центров ролика, а истинным профилем кулачка будет эквидистантная кривая $\beta_0\beta_0$, отстоящая от кривой $\beta\beta$ на расстоянии, равном радиусу ролика. Для построения эквидистантной кривой из различных точек кривой $\beta\beta$ проводят окружности радиусом, равным радиусу ролика. Кривая $\beta_0\beta_0$ получится как огibaющая всех положений ролика K .

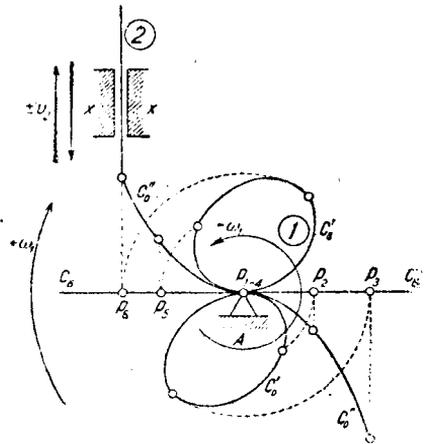
Если ведущее звено (кулачок) движется вращательно, то передача движения может быть осуществлена двояко: центроидами или взаимноогibaемыми кривыми.

Рассмотрим сначала тот случай, когда передача осуществляется центроидами. Пусть ведущее звено 1 (фиг. 45) вращается около оси A с постоянной угловой скоростью $-\omega_1$, а ведомое звено 2 движется поступательно в направлении xx со скоростью $\pm v_2$. Закон движения звена 2 пусть задан графиком $v_2 = f(\varphi_1)$, где φ_1 есть угол поворота первого звена (фиг. 46).

Для построения центроид в относительном движении находим бицентроиду,



Фиг. 44.



Фиг. 45.

т. е. геометрическое место мгновенных центров вращения в относительном движении звеньев 1 и 2, принадлежащее неподвижной плоскости. Мгновенный центр вращения звена 1 будет всегда совпадать с точкой A , а мгновенный центр вращения звена 2, как движущегося поступательно, будет находиться в бесконечности. Тогда точки бицентроиды C_B будут, очевидно, лежать на прямой AC_B , перпендикулярной к направлению движения звена 2. Для определения точек бицентроиды C_B сообщаем системе 1 и 2 общую угловую скорость $+\omega_1$ (фиг. 45). Тогда звено 1 будет неподвижным, а звено 2 получит добавочную скорость $+\omega_1$.

Найдём в звене 2 точки, скорости которых в этом сложном движении будут последовательно равняться нулю. Очевидно, это будут те точки, в которых скорость v_2 будет в каждом рассматриваемом положении равна и обратна по знаку линейной скорости v_1 , получаемой вследствие дополнительного вращения звена 2 с угловой скоростью $+\omega_1$. Этому условию могут удовлетворять только точки, лежащие на прямой AC_B . Положение этих точек для каждого отдельного положения будет определяться из условия:

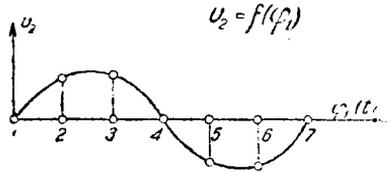
$$v_2 = v_1 = \omega_1 L,$$

где L есть расстояние искомого мгновенного центра вращения P в относительном движении от оси вращения A .

Из последнего уравнения имеем:

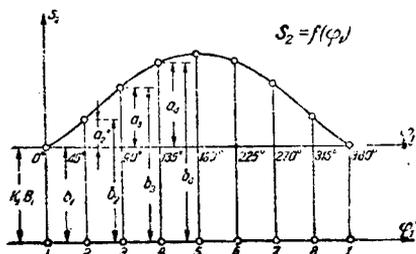
$$L = \frac{v_2}{\omega_1}.$$

Подставляя в полученное уравнение значения скоростей v_2 , взятые из графика на фиг. 46, мы определим ряд точек P_1, P_2, P_3, \dots , образующих бицентроиду, которая для данного случая является отрезком прямой. Центроиды C'_0 и C''_0 в относительном движении определяются по построенной бицентроиде приёмом, изложенным в главе 1. Так как в точках 1 и 4 (фиг. 45) скорость v_2 звена 2 равна нулю, то профили обеих центроид проходят через центр вращения A . Качением центроиды C'_0 по центроиде C''_0 и будет осуществляться поступательное движение звена 2 с заданными скоростями v_2 .



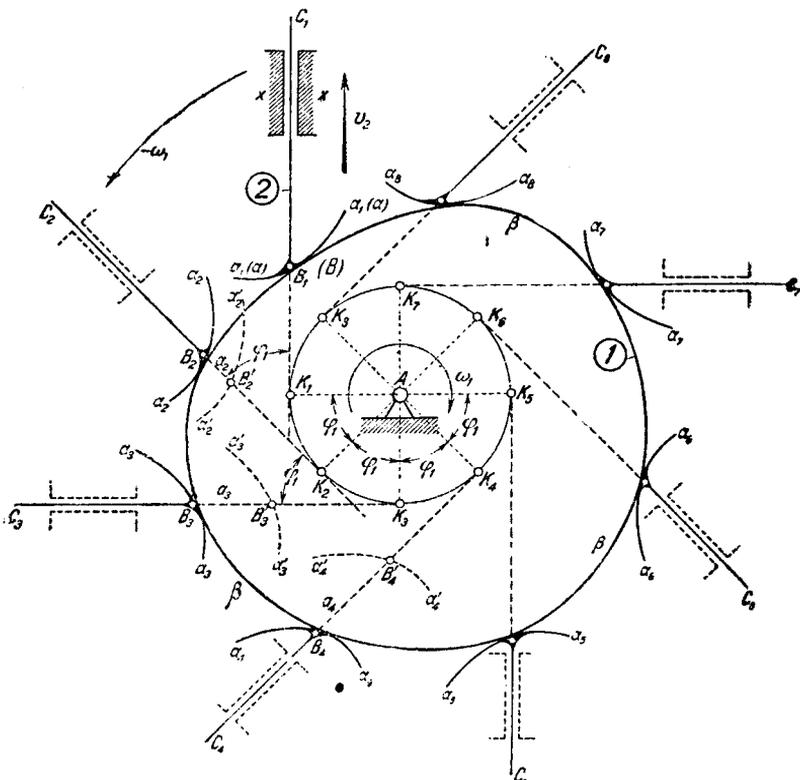
Фиг. 46.

Рассмотрим случай, когда передача осуществляется не центроидами, а взаимноогибаемыми кривыми. Пусть закон движения звена 2 задан графиком $S_2 = f(\varphi_1)$ (фиг. 47) и угловая скорость кулачка 1 принята постоянной. В качестве огибаемой пусть задана кривая aa с начальным положением $a_1 a_1$ (фиг. 48).



Фиг. 47.

Для нахождения огибающей построим последовательные положения огибаемой aa , для чего воспользуемся графиком $S_2 = f(\varphi_1)$ и заданной угловой скоростью ω_1 . Если законы движения огибающей и огибаемой заданы непосредственно, то все построения могут быть сделаны без предварительного построения бицентриды и центриды в относительном движении. Для этого сообщаем звеньям 1 и 2 общую угловую скорость ω_1 . Тогда звено 1 будет неподвижным, а звено 2 вместе с огибаемой aa будет двигаться сложным движением, вращаясь около точки A с угловой скоростью $-\omega_1$ и двигаясь поступательно в направлениях xx со скоростью ω_1 нами принята постоянной, то звено 2 будет вращаться около точки A .

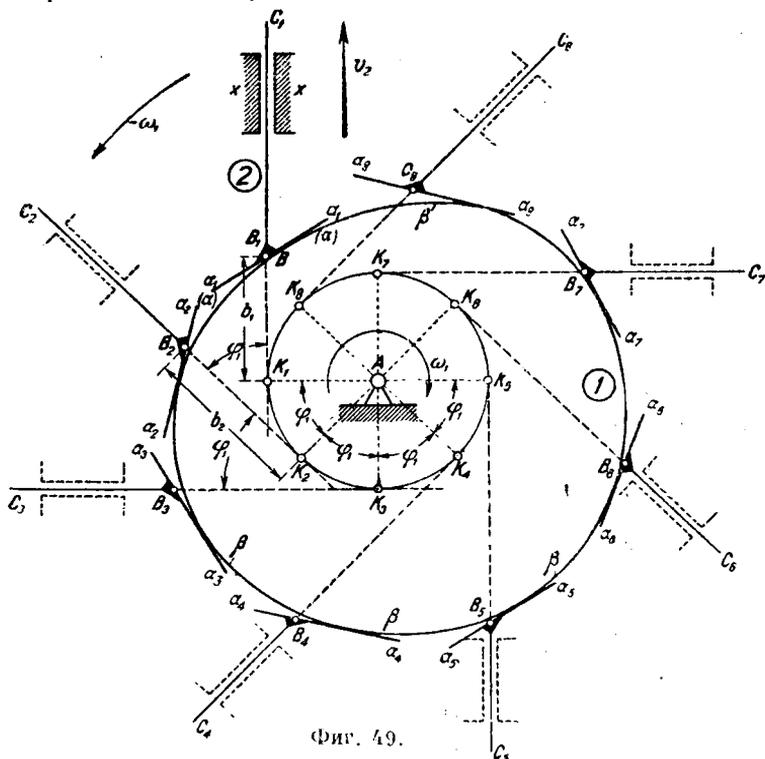


Фиг. 48.

поворачиваясь каждый раз на один и тот же угол φ_1 (фиг. 48). Для нахождения последовательных положений кривой aa опустим из точки A на направление $B_1 C_1$ движения звена 2 перпендикуляр $A K_1$ и проведём окружность радиуса $A K_1$. Разобьём полученную окружность на равные дуги, стягивающие

углы φ_1 , и найдём точки K_2, K_3, K_4, \dots . При вращении звена 2 с угловой скоростью $-\omega_1$ направления B_1C_1, B_2C_2, \dots будут всегда касательны к построенной окружности в точках K_1, K_2, K_3, \dots . Проведём направления B_1C_1, B_2C_2, \dots и найдём на них последовательные положения какой-либо точки B , огибающей $\alpha\alpha$ звена 2. Для этого из точек K_1, K_2, K_3, \dots отложим равные отрезки $K_1B_1 = K_2B'_2 = K_3B'_3 \dots$. Далее строим положения огибаемой $\alpha\alpha$, получаемые от вращения звена 2 около точки A с угловой скоростью $-\omega_1$. Это будут положения $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots$. Так как кроме вращения около точки A звено 2 перемещается в направляющих xx по закону, заданному диаграммой на фиг. 47, то окончательные положения кривой $\alpha\alpha$ найдутся, если из точек B_1, B_2, B'_3, \dots отложить в выбранном масштабе отрезки $B'_2B_2 = a_2, B'_3B_3 = a_3, B'_4B_4 = a_4, \dots$, взятые с диаграммы на фиг. 47. Таким образом мы получим ряд положений огибаемой $\alpha\alpha$. Огибающая получится, если обогнуть все положения огибаемой $\alpha\alpha$ плавной кривой $\beta\beta$. Огибающая кривая $\beta\beta$ и образует профиль кулачка. Вращая кулачок 1 около оси A с угловой скоростью ω_1 , получим заданное движение звена 2 со скоростью $\pm v_2$.

Из фиг. 48 видно, что для получения точного очертания профиля необходимо построить в общем случае достаточное количество положений огибаемой



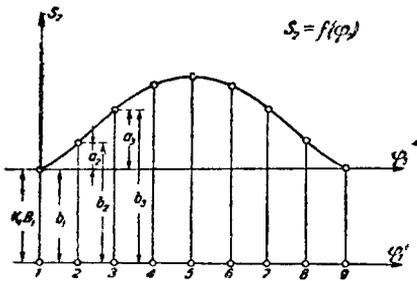
Фиг. 49.

кривой $\alpha\alpha$. Соприкосновение огибающей с огибаемой будет происходить в различных точках огибаемой. Построение кулачка можно упростить, если принять во внимание, что отрезки $K_1B_1, K_2B'_2, K_3B'_3, \dots$ равны между собой. Тогда можно отложить постоянный отрезок, равный K_1B_1 , вниз от оси φ_1 диаграммы $S = f(\varphi_1)$ (фиг. 42) и провести ось φ_1 . Для определения точек B_1, B_2, B_3, \dots достаточно отложить из точек K_1, K_2, K_3, \dots отрезки b_1, b_2, b_3, \dots .

Если в качестве огибаемой задана прямая $\alpha\alpha$ (фиг. 49), то построение будет аналогичным. На фиг. 49 показано построение для случая,

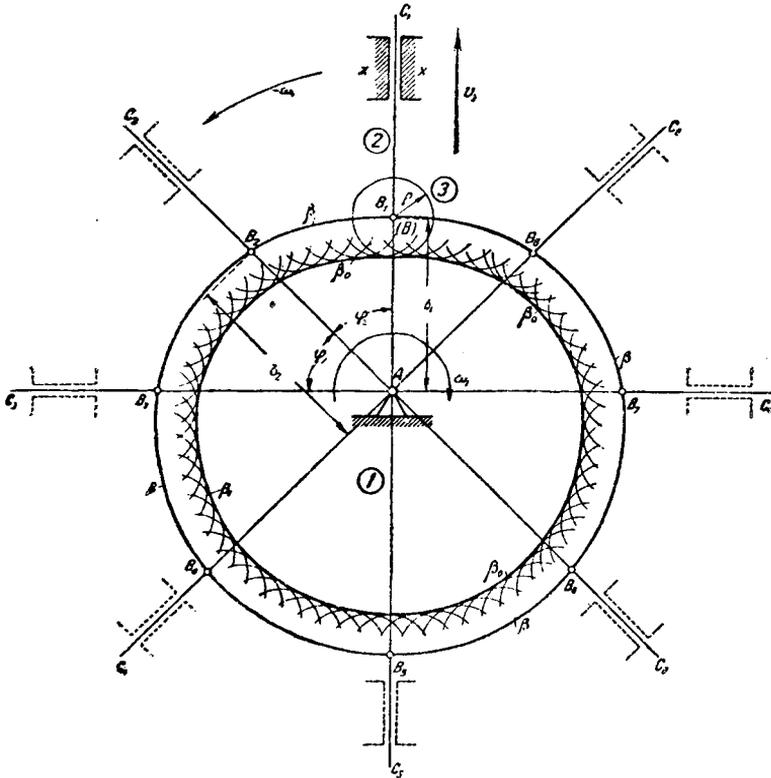
когда $\omega_1 = \text{const.}$ и закон движения звена 2 задан графиком $S_2 = f(\varphi_1)$ (фиг. 50).

В качестве огибаемой может быть задана также точка (фиг. 51, точка B). Тогда огибающая $\beta\beta$ пройдет через все положения точки B . На фиг. 51 показано построение профиля кулачка этого вида для случая, когда закон движения звена 2 задан диаграммой $S_2 = f(\varphi_1)$, изображённой на фиг. 47. Огибающая $\beta\beta$ будет профилем кулачка, если звено 2 оканчивается в точке B остриём. Если же в точке B поставлен ролик 3 радиуса ρ , то прсфиль $\beta\beta$ будет теоретическим профилем, практическим же профилем $\beta_0\beta_0$ будет кривая, эквидистантная профилю $\beta\beta$. Для построения практического профиля проводим из точек профиля $\beta\beta$ окружности радиусами ρ : огибающая $\beta_0\beta_0$ этих окружностей и будет практическим профилем кулачка (фиг. 51).



Фиг. 50.

Если направление движения звена 2 проходит через ось вращения A кулачка, то окружность радиуса AK_1 на фиг. 49 превращается в точ-



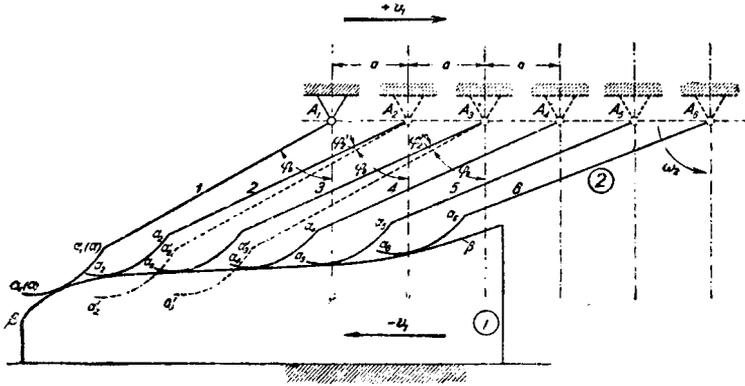
Фиг. 51.

ку, и все отрезки b_1, b_2, b_3, \dots с диаграммы $S_2 = f(\varphi_1)$ на фиг. 47 откладываются непосредственно на лучах, проходящих через центр A (фиг. 51).

§ 11. Кинематический синтез кулачковых механизмов второго вида.

Ко второму виду кулачковых механизмов мы отнесли те механизмы, ведомые звенья которых имеют вращательное движение. Здесь можно различать два случая: 1) ведущее звено движется поступательно и 2) ведущее звено движется вращательно.

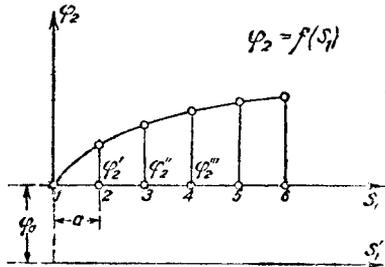
Пусть звено 1 (фиг. 52) движется поступательно с постоянной скоростью $-v_1$, а ведомое звено 2 движется вращательно с угловой скоростью ω_2 .



Фиг. 52.

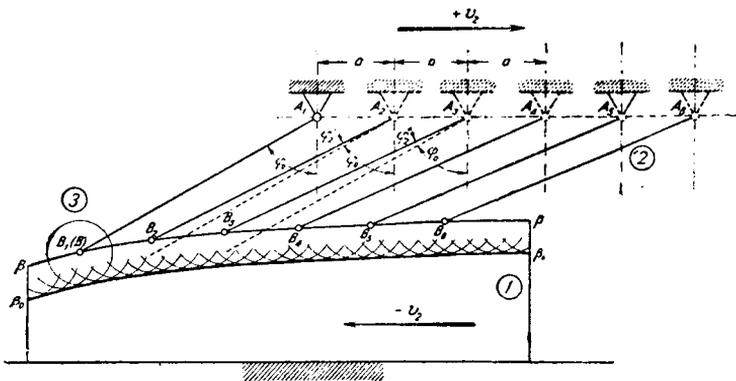
ростью $\pm \omega_2$. Закон углов поворота звена 2 в функции перемещения S_1 звена 1 пусть задан графиком $\varphi_2 = f(S_1)$ (фиг. 53).

Передача заданного движения с помощью центроид относительного движения может быть решена так же, как это было сделано для кулачковых механизмов первого вида. При передаче с помощью взаимноогibaемых кривых задача решается следующим образом. Выберем в качестве огibaемой какую-либо произвольную кривую $\alpha\alpha$, принадлежащую звену 2, и начальное положение которой пусть будет положение $\alpha_1\alpha_1$ (фиг. 52). Сообщим обоим звеньям общую линейную скорость $+v_1$. Тогда звено 1 будет неподвижным, а звено 2 будет двигаться сложным движением, перемещаясь поступательно со скоростью $+v_1$ и вращаясь около оси A с угловой скоростью $\pm \omega_2$. Так как скорость v_1 принята постоянной, то поступательное перемещение звена 2 представит собой перемещение всех его точек на постоянный отрезок a , взятый в некотором масштабе с диаграммы $\varphi_2 = f(S_1)$ (фиг. 53). Точка A звена 2 будет занимать последовательно положения A_1, A_2, \dots . Соответственно кривая $\alpha\alpha$ будет занимать положения $\alpha'_2\alpha'_2, \alpha'_3\alpha'_3, \dots$. Вращательное движение звена 2 около оси A определяется углом φ_2 , закон изменения которого дан на графике $\varphi_2 = f(S_1)$. Имея масштаб углов, можно для каждого положения звена 2 определить соответствующий угол его поворота. Если обозначим первоначальный угол, образованный звеном 2 с перпендикуляром к направлению движения звена 1, через φ_0 , то в следующем положении звено 2 образует с этим перпендикуляром угол $\varphi_0 + \varphi'_2$, потом угол $\varphi_0 + \varphi'_2$ и т. д. Откладывая указанные углы, получим последовательные положения $\alpha_2\alpha_2, \alpha_3\alpha_3, \dots$ огibaемой $\alpha\alpha$. Огибающая $\beta\beta$ всех положений кривой $\alpha\alpha$ и образует профиль кулачка. Так же, как и в ранее разобранном типе кулачков, угол φ_0 может быть отложен на графике $\varphi_2 = f(S_1)$ в том же масштабе, как и углы φ_2 .



Фиг. 53.

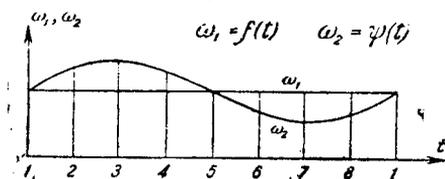
Тогда отсчёт углов может вестись от полой оси S'_1 (фиг. 53). В случае, когда огибаемой является прямая $\alpha\alpha$, профиль кулачка строится аналогичным образом. Если в качестве огибаемой выбрана точка, например точка B (фиг. 54), то огибающая $\beta\beta$ пройдёт через все последовательные положения этой точки:



Фиг. 54.

B_1, B_2, B_3, \dots Если в точке B установлен ролик 3, то практический профиль $\beta_0\beta_0$ получится как огибающая всех положений ролика 3.

Переходим теперь к рассмотрению второго случая данного типа кулачков, когда ведущее звено, так же как и ведомое, вращается. Если передача осуществляется центроидами в относительном движении, то для построения этих



Фиг. 55.

центроид можно использовать приём, изложенный в главе I. Пусть движение звеньев 1 и 2 задано графиками $\omega_1 = f(t)$ и $\omega_2 = \psi(t)$ (фиг. 55), причём угловая скорость ω_1 принята постоянной. Угловые скорости ω_1 и ω_2 приняты разными по знаку.

По заданным угловым скоростям ω_1 и ω_2 строим бицентроиду. Для этого соединяем точки A и B (фиг. 56) прямой и находим мгновенный центр враще-

ния в относительном движении звеньев 1 и 2. Имеем: $\frac{L_{AP}}{L_{BP}} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ и $L_{AP} + L_{BP} = L_{AB}$, откуда

$$L_{AP} = L_{AB} \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2}.$$

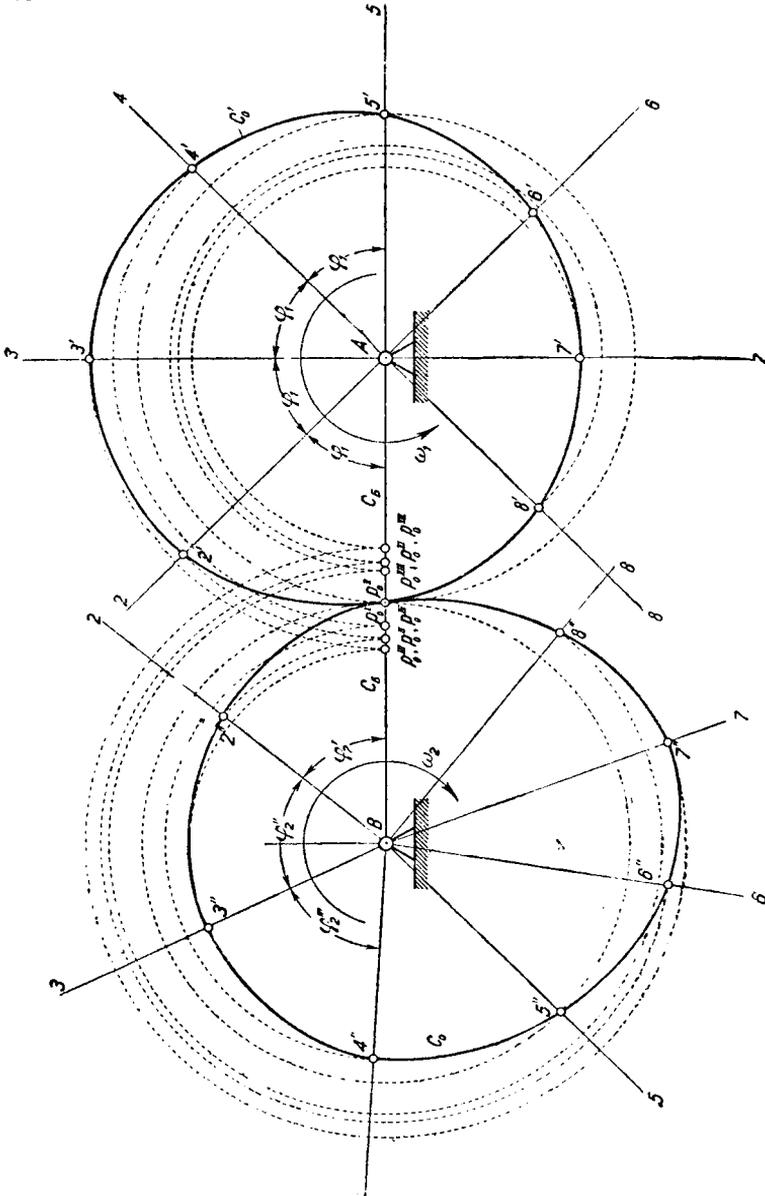
Подставляя в полученное уравнение соответствующие значения угловых скоростей ω_1 и ω_2 , взятые из диаграммы на фиг. 55, находим на прямой AB положения мгновенных центров вращения $P_0^I, P_0^{II}, P_0^{III}, \dots$. Прямая на участке $P_0^{III}P_0^{IV}$ и представит собой искомую бицентроиду C_B .

Имея бицентроиду, строим центроиды, для чего находим точки, принадлежащие звеньям 1 и 2 и приходящие последовательно в соприкосновение друг с другом в точках $P_0^I, P_0^{II}, P_0^{III}, \dots$. Для этого определяем углы поворота φ_1 и φ_2 звеньев 1 и 2 из условий:

$$\varphi_1 = \int_{t_0}^t \omega_1 dt, \quad \varphi_2 = \int_{t_0}^t \omega_2 dt.$$

Из этих уравнений следует, что углы φ_1 и φ_2 могут быть определены по графикам $\omega_1 = f(t)$ и $\omega_2 = \psi(t)$ (фиг. 55) методом графического интегрирования. Графики $\varphi_1 = F(t)$ и $\varphi_2 = \Psi(t)$ показаны на фиг. 57.

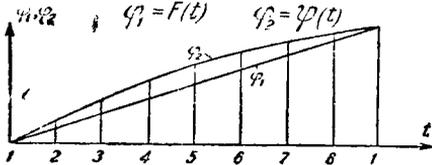
Так как угловая скорость ω_1 была нами принята постоянной, то график $\varphi_1 = F(t)$ будет прямой линией, наклонённой к оси абсцисс, т. е. угол поворота φ_1 звена I в единицу времени будет постоянным. Полученные углы φ_1



Фиг. 56.

откладываем при точке A (фиг. 56). Тогда получаем ряд прямых $A1, A2, A3, A4, \dots$. Углы φ_2 будут переменными. Значения $\varphi_1', \varphi_2'', \varphi_2', \dots$ этого угла, полученные из графика $\varphi_2 = \Psi(t)$, откладываем при точке B . Тогда получим ряд прямых $B1, B2, B3, \dots$ (фиг. 56). Из точки A радиусами, равными $AP_0^{II}, AP_0^{III}, AP_0^{IV}, \dots$ проводим дуги до пересечения в точках $2', 3', 4', \dots$ с ранее

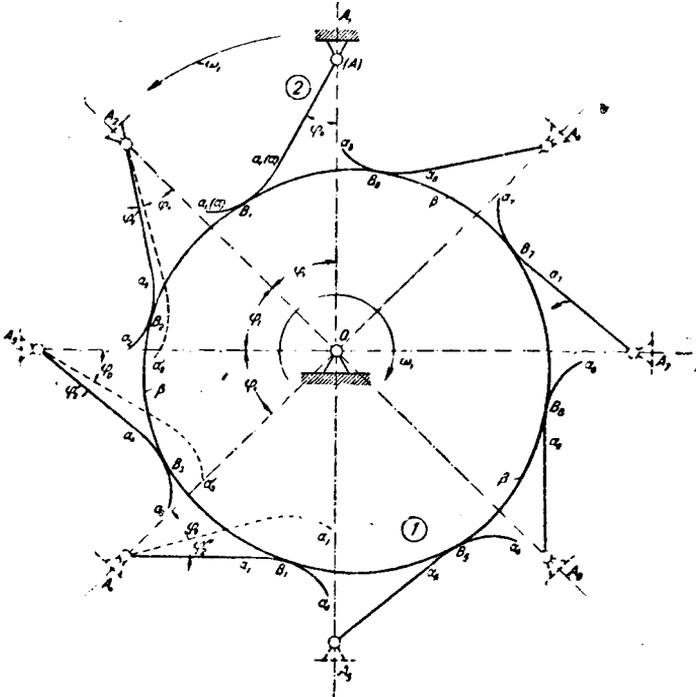
проведёнными через точку A прямыми. Соединив полученные точки $P_0^I, 2', 3', \dots$ плавной кривой, получим центроиду C_0' , принадлежащую звену 1. Точно так же из точки B радиусами, равными $BP_0^{II}, BP_0^{III}, BP_0^{IV}, \dots$, проводим дуги до пересечения в точках $2'', 3'', 4'', \dots$ с прямыми, проведёнными через B . Соединив полученные точки $P_0^I, 2'', 3'', \dots$ плавной кривой, получим центроиду C_0'' , принадлежащую звену 2. Движение звеньев 1 и 2 будет осуществляться качением центроид C_0' и C_0'' друг по другу.



Фиг. 57.

Вследствие динамических условий, которые будут рассмотрены ниже, передача центроидами может быть осуществлена только на части оборота. Поэтому эти центроиды для получения непрерывно действующей передачи движения снабжаются зубцами.

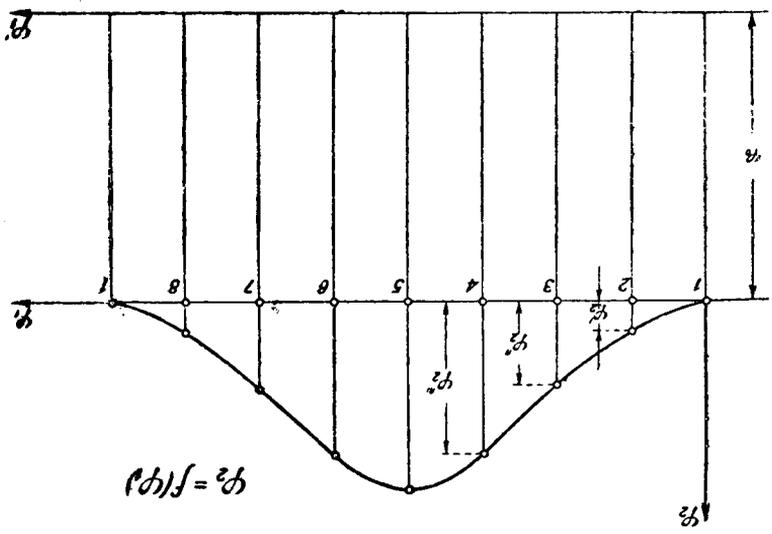
Рассмотрим теперь случай, когда такая же передача должна быть осуществлена взаимноогibaемыми кривыми. Пусть в качестве огibaемой задана кри-



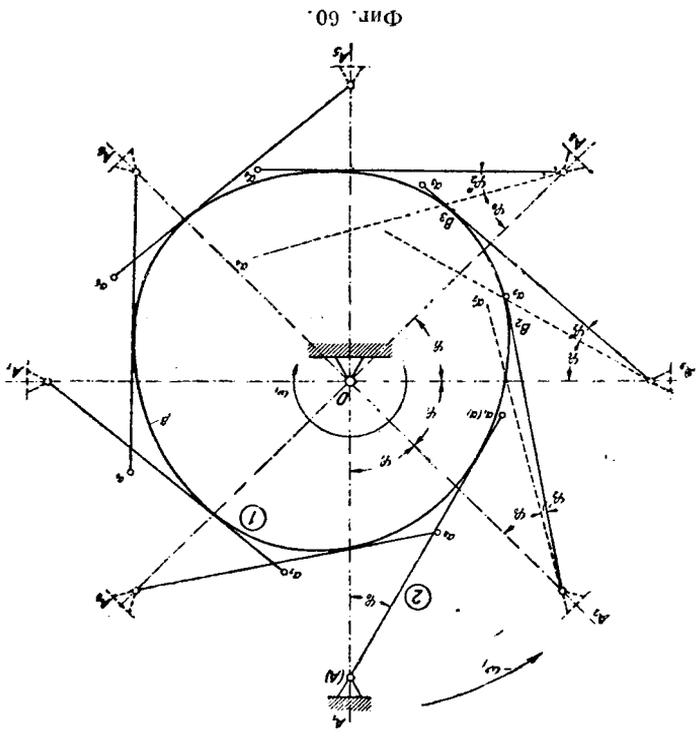
Фиг. 58.

вая $\alpha\alpha$, вращающаяся около оси A и имеющая своим начальным положением $\alpha_1\alpha_1$ (Фиг. 58). Углы поворота φ_2 кривой $\alpha\alpha$ пусть заданы графиком $\varphi_2 = f(\varphi_1)$ (Фиг. 59). Начальное положение кривой $\alpha\alpha$ определяется углом φ_0 .

Для нахождения последовательных положений кривой $\alpha\alpha$ сообщаем звеньям 1 и 2 общую угловую скорость $-\omega_1$. Тогда звено 1 будет неподвижным, а звено 2 будет иметь сложное движение, состоящее из вращения около оси O на постоянные углы φ_1 и вращения около оси A на углы φ_2 , определяемые графиком (Фиг. 59). Из точки O радиусом OA проводим окружность разде-



Фиг. 59.

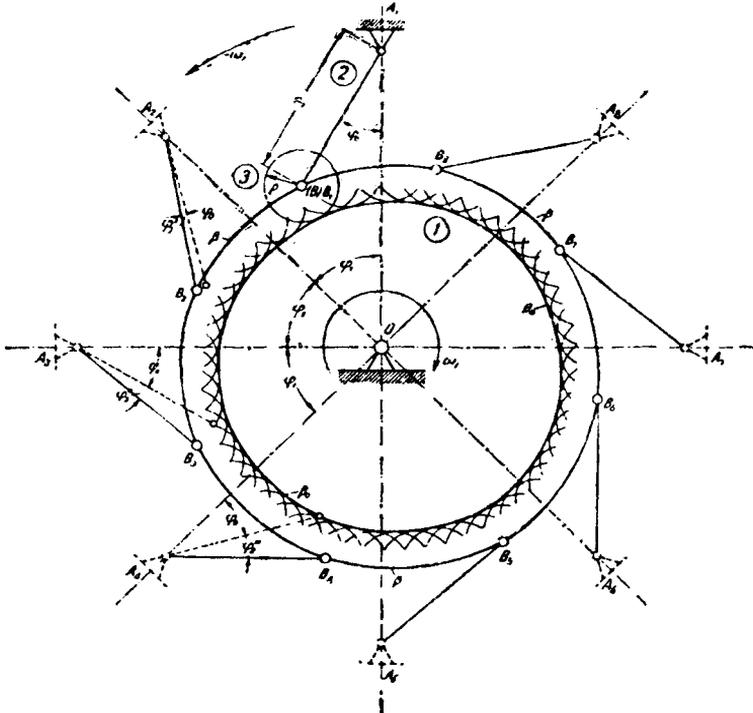


Фиг. 60.

лим её на равные дуги φ_1 , и находим на ней точки A_1, A_2, A_3, \dots . Далее, по графику $\varphi_2 = f(\varphi_1)$ определяем углы $\varphi_2', \varphi_2'', \varphi_2''', \dots$ и при радиусах OA_2, OA_3, OA_4, \dots откладываем углы $\varphi_0 + \varphi_2', \varphi_0 + \varphi_2'', \varphi_0 + \varphi_2''', \dots$. Тогда получим ряд положений a_1a_1, a_2a_2, \dots огибаемой кривой aa . Огибающая $\beta\beta$ всех положений огибаемой aa и образует профиль кулачка. Для удобства подсчёта углов $\varphi_0 + \varphi_2', \varphi_0 + \varphi_2'', \dots$ можно начальный угол φ_0 отложить на графике $\varphi_2 = f(\varphi_1)$ (фиг. 59) и отсчёт углов вести от новой оси абсцисс φ_1' .

В том случае, когда в качестве огибаемой выбрана прямая Aa (фиг. 60), построение кулачка ведётся так же, как и в только что рассмотренном случае.

Если в качестве огибаемой задана точка B (фиг. 61), то огибающую $\beta\beta$, представляющую собой теоретический профиль кулачка, мы найдём, соединив



Фиг. 61.

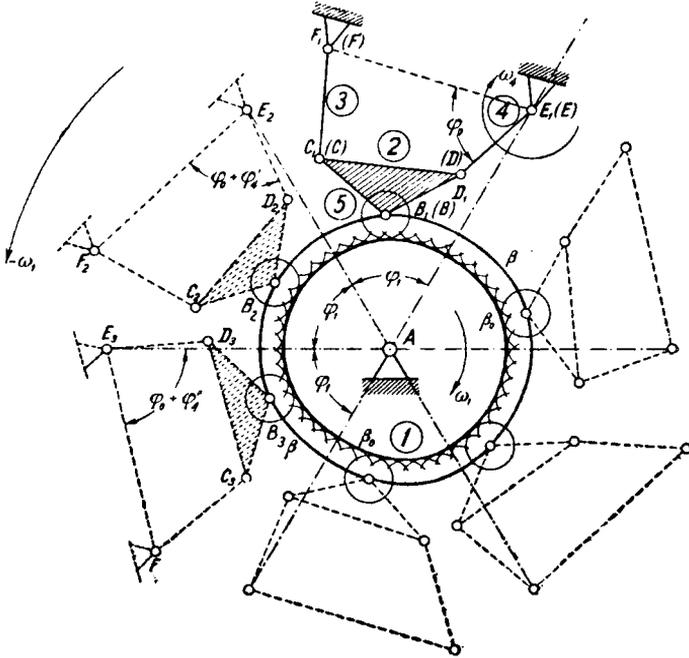
все полученные точки B_1, B_2, B_3, \dots плавной кривой. Для получения практического профиля $\beta_0\beta_0$ необходимо построить положения ролика 3. Огибающая положений ролика и даст практический профиль $\beta_0\beta_0$ кулачка.

§ 12. Кинематический синтез кулачковых механизмов третьего вида.

К третьему виду кулачковых механизмов мы отнесли те кулачковые механизмы, у которых ведомое звено движется сложным плоско-параллельным движением. Закон движения ведомого звена 2 (фиг. 62) обычно задаётся как функция законов движения одного из звеньев: звена 3 или звена 4. Движение кулачка 1 обычно принимается происходящим с постоянной угловой скоростью. Так как кулачковые механизмы третьего вида встречаются в машинах сравнительно редко, то рассмотрим только некоторые общие вопросы, связанные с их проектированием.

Кинематическое проектирование может быть выполнено общими методами, изложенными в главе I. Так, если движение воспроизводится центроидами в

относительного движения, то по заданному закону движения звена 3 или 4 находим мгновенные центры вращения звена 2. Соединив полученные мгновенные центры вращения прямыми с точкой A , находим на этих прямых мгновенные центры вращения в относительном движении звеньев 1 и 2. Геометрическое место этих центров определяет бицентроиду механизма. По полу-

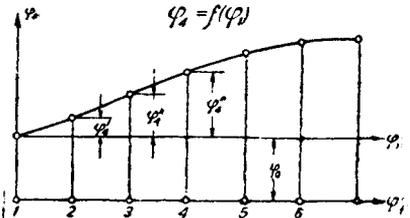


Фиг. 62а

ченной бицентроиде обычными приёмами строим centroиды, одну из которых жёстко связываем со звеном 2, а другую со звеном 1.

Если движение воспроизводится взаимноогibaемыми кривыми, то проектирование профиля может быть сделано ранее изложенными приёмами. В качестве примера рассмотрим только один случай, показанный на фиг. 62. Пусть задан закон движения четырёхзвенника $EDCF$.

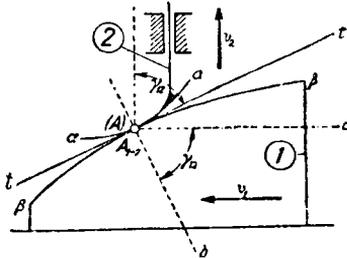
Требуется воспроизвести заданное движение воздействием кулачка 1 на ведомое звено 2, на котором в качестве огибаемой выбрана точка B . Так как четырёхзвенник $EDCF$ представляет собой систему с одной степенью подвижности, то достаточно иметь заданным закон движения какого-либо одного звена этого четырёхзвенника. Пусть, например, задан закон изменения угла поворота φ_4 звена 4 в виде графика $\varphi_4 = f(\varphi_1)$ (фиг. 63). Сообщаем обеим системам общую угловую скорость $-\omega_1$. Тогда система 1 будет неподвижной, а четырёхзвенник $EDCF$ последовательно займёт положения $E_1D_1C_1F_1, E_2D_2C_2F_2, \dots$. При этом звено 2 будет образовывать со стойкой EF последовательно углы $\varphi_0, \varphi_0 + \varphi_4, \dots$, заданные графиком $\varphi_4 = f(\varphi_1)$. Тогда определятся последовательные положения B_1, B_2, B_3, \dots точки B . Соединив эти точки плавной кривой $\beta_0\beta_1\beta_2\beta_3$, получим теоретический профиль кулачка 1. Для получения практического профиля $\beta_0\beta_1\beta_2\beta_3$ следует обогнуть кривой все положения ролика 5 (фиг. 62).



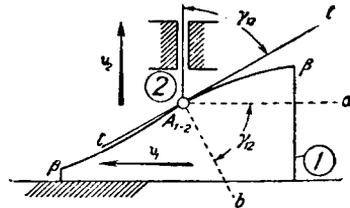
Фиг. 63.

§ 13. Динамический синтез кулачковых механизмов первого вида.

Для обеспечения необходимого коэффициента полезного действия кулачкового механизма и для надёжности его работы углы давления механизма должны иметь вполне определённые значения. Рассмотрим вопрос об определении углов давления в кулачковом механизме с поступательно движущимся кулачком (фиг. 64). Для определения угла давления необходимо, как это было показано в § 3, соединить точку зацепления с соответствующими мгновенными центрами вращения, лежащими на неподвижной центроиде и бицентро-

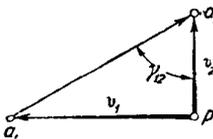


Фиг. 64.



Фиг. 65.

иде. Точкой зацепления для рассматриваемого вида кулачка будет точка A соприкосновения профиля $\beta\beta$ с огибаемой $\alpha\alpha$. Мгновенный центр вращения звена 2 находится в бесконечности и лежит на прямой Aa , перпендикулярной к направлению движения звена 2. Мгновенный центр вращения звена 2 при его движении относительно звена 1 лежит на общей нормали Ab к кривым $\beta\beta$ и $\alpha\alpha$, проведённой в точке соприкосновения A . Угол, образуемый прямыми Aa и Ab , будет углом давления γ_{12} . Нетрудно видеть, что тот же угол образуют прямая, параллельная направлению движения звена 2, и общая касательная tt , проведённая к профилям $\alpha\alpha$ и $\beta\beta$ в точке A .



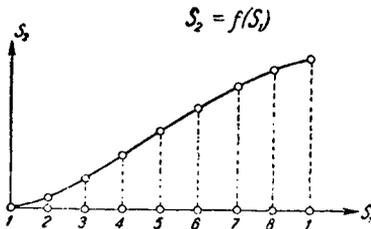
Фиг. 66.

На фиг. 65 показано определение угла давления для того случая, когда огибаемая звена 2 будет точка. Для определения величины угла γ_{12} как для первого, так и для второго механизма, строим план скоростей (фиг. 66). Из плана скоростей получаем:

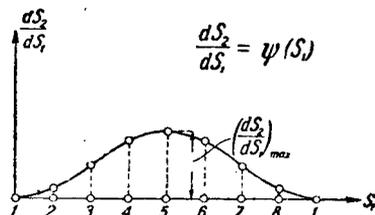
$$\operatorname{ctg} \gamma_{12} = \frac{(pa_2)}{(pa_1)} = \frac{v_{A_2}}{v_{A_1}} = \frac{dS_2}{dS_1} = \frac{dS_2}{dS_1},$$

откуда следует, что угол давления γ_{12} не зависит от размеров кулачка.

Для определения $\operatorname{ctg} \gamma_{12}$, очевидно, следует по заданной функции $S_2 = f(S_1)$ определить первую производную $\frac{dS_2}{dS_1}$. Если функция $S_2 = f(S_1)$ за-



Фиг. 67.



Фиг. 68.

дана в виде графика (фиг. 67), то графическим дифференцированием легко можно построить график $\frac{dS_2}{dS_1} = \psi(S_1)$ (фиг. 68). Максимальному значе-

нию $\frac{dS_2}{dS_1}$ будет соответствовать минимальный угол γ_{12} . Полученное минимальное значение $\gamma_{12 \min}$ не должно быть меньше некоторого заданного угла γ_{\min} , который обычно для указанного вида передач рекомендуется не менее $60-70^\circ$.

При проектировании профиля кулачка, удовлетворяющего условию, чтобы углы давления γ_{12} не были меньше заданного значения γ_{\min} , можно использовать условие, что $\left(\frac{dS_2}{dS_1}\right)_{\max}$ не должно быть больше $\operatorname{ctg} \gamma_{\min}$, т. е.

$$\left(\frac{dS_2}{dS_1}\right)_{\max} \leq \operatorname{ctg} \gamma_{\min}$$

или, так как $\frac{dS_2}{dt} = v_2$ и $\frac{dS_1}{dt} = v_1$,

$$\left(\frac{v_2}{v_1}\right)_{\max} \leq \operatorname{ctg} \gamma_{\min}.$$

Если заданы скорость v_1 и угол γ_{\min} , то легко определить максимальное допустимое значение скорости $v_2 \max$. Действительно:

$$v_2 \max = v_1 \operatorname{ctg} \gamma_{\min}. \quad (32)$$

Построив график $v_2 = f(t)$ с учётом условия (32), графическим интегрированием находим график $S_2 = f(t)$, который и может быть использован для построения профиля кулачка.

Переходим к рассмотрению кулачкового механизма того же типа, но с кулачком, имеющим вращательное движение. Начнём с того случая, когда передача движения осуществляется центроидами C'_0 и C''_0 относительного движения (фиг. 69). Из фиг. 69 следует, что угол давления γ не зависит от того, какое из звеньев будет ведущим. Обозначим радиус-вектор AP центроида C'_0 через ρ_1 . Пусть центроида C'_0 повернулась на бесконечно малый угол $d\varphi_1$. Отложим на центроиде C'_0 бесконечно малую дугу Pa и из точки a опустим перпендикуляр aa_1 на направление AP . Тогда угол Paa_1 с точностью до бесконечно малых второго порядка будет равен углу γ и, следовательно,

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{(Pa_1)}{(aa_1)}.$$

Так как с точностью до бесконечно малых высших порядков $Pa_1 = \frac{\partial \rho_1}{\partial \varphi_1} d\varphi_1$ и $aa_1 = \rho_1 d\varphi_1$, то можно написать:

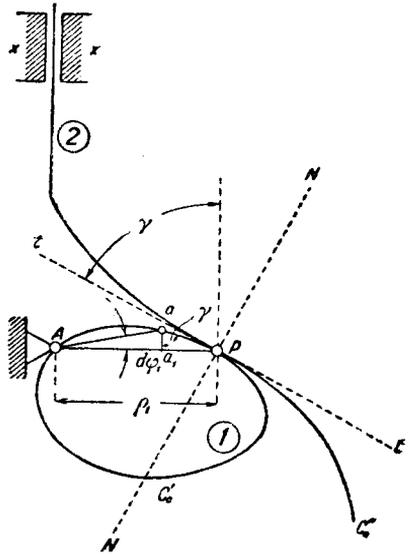
$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\partial \rho_1}{\rho_1}. \quad (33)$$

Величина ρ_1 равна:

$$\rho_1 = AP = \frac{v_2}{\omega_1} = \frac{\frac{dS_2}{dt}}{\frac{d\varphi_1}{dt}} = \frac{dS_2}{d\varphi_1},$$

откуда

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial \varphi_1} = \frac{d^2 S_2}{d\varphi_1^2}.$$



Фиг. 69.

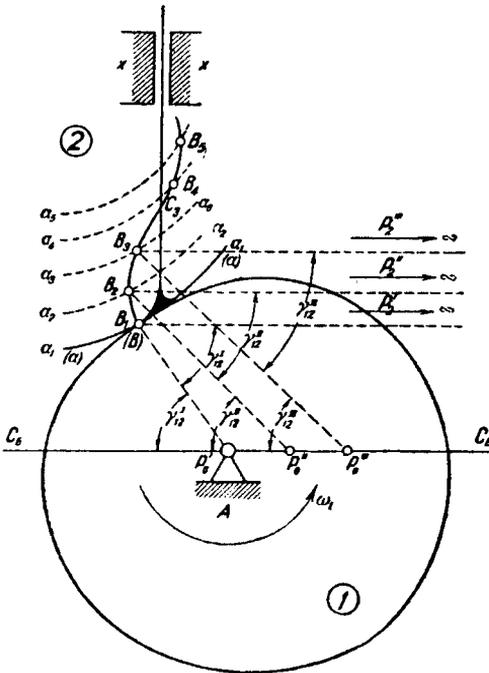
Подставляя полученные значения f_1 и $\frac{d\rho_1}{d\varphi_1}$ в уравнение (33), получим:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\frac{d^2 S_2}{d\varphi_1^2}}{\frac{dS_2}{d\varphi_1}}. \quad (34)$$

Из уравнения (34) следует, что угол γ не зависит от размеров центроид. Для того, чтобы механизм работал без заклинивания, необходимо, чтобы

$$\frac{\frac{d^2 S_2}{d\varphi_1^2}}{\frac{dS_2}{d\varphi_1}} \geq \operatorname{tg} \gamma_{\min}.$$

Из этого уравнения видно, что когда $\frac{dS_2}{d\varphi_1}$ принимает максимальное или минимальное значения, $\frac{d^2 S_2}{d\varphi_1^2}$ равно нулю и, следовательно, угол давления равен



Фиг. 70.

нулю. Таким образом, в общем случае, передача является невозможной в положениях, когда значения $\frac{d^2 S_2}{d\varphi_1^2}$ равны или близки к нулю. Так как при воспроизведении возвратно-поступательного движения почти всегда имеются подобные участки, то, очевидно, передача центроидами может быть осуществлена не за весь цикл движения системы. Поэтому обычно передача заданного движения осуществляется не центроидами, а посредством взаимногибаемых кривых.

Рассмотрим кулачковый механизм с ведомым звеном 2, имеющим в качестве огибаемой кривую $\alpha\alpha$ (фиг. 70). Для определения углов давления при ведущем кулачке находим бицентроиду в движении звеньев 1 и 2. Для этого через точку A проводим прямую ACB , перпендикулярную к направляющим $\alpha\alpha$. Так как мгновенный центр вращения звена 2 находится в бесконечности, то проведенная прямая будет соединять мгновенные центры вращения абсолютных движений звеньев 1 и 2. Точки P_0', P_0'', \dots бицентроиды будут лежать на этой прямой. Положение их определится из уравнения:

$$L_{AP_0} = \frac{v_2}{\omega_1},$$

где v_2 есть заданная скорость звена 2 в соответствующем положении, а ω_1 — заданная угловая скорость звена 1 в том же положении. Точки $P_0', P_0'', P_0''', \dots$ бицентроиды могут быть найдены аналитически или графически. Точки би-

центроиды будут располагаться вправо и влево от точки A , в зависимости от знака скорости v_2 . Линией зацепления C_3 будет геометрическое место точек B соприкосновения огибаемой α с профилем кулачка 1, которое может быть определено по заданному закону движения звеньев 1 и 2 способом, указанным выше. Соединим точки B_1, B_2, \dots линии зацепления с соответствующими точками P'_0, P''_0, \dots бицентроиды C_B и с мгновенными центрами вращения P'_2, P''_2, \dots звена 2. Так как звено 2 движется поступательно, то прямые $B_1P'_2, B_2P''_2, \dots$, соединяющие точки B_1, B_2, \dots с мгновенными центрами вращения этого звена, будут перпендикулярны к направляющей α . Углы $P'_2B_1P'_0, P''_2B_2P''_0, \dots$ будут углами давления $\gamma_{12}^I, \gamma_{12}^{II}, \gamma_{12}^{III}, \dots$. Легко видеть, что такие же углы составляют прямые $B_1P'_0, B_2P''_0, \dots$ с бицентроидой C_B . Для удовлетворительной работы механизма необходимо, чтобы все найденные углы давления были больше некоторого выбранного значения γ_{\min} .

Угол давления γ_{12} может быть определен и аналитически. Для этого при точке A (фиг. 71) строим повернутый план скоростей в масштабе заданной угловой скорости ω_1 . Из плана скоростей имеем:

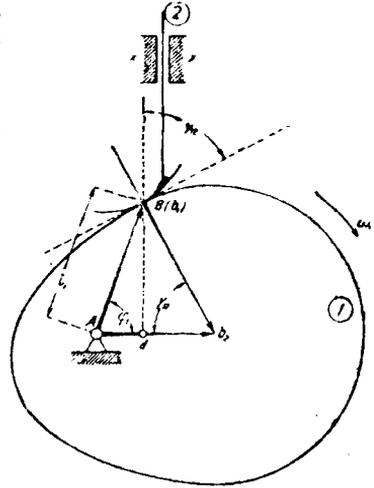
$$\operatorname{tg} \gamma_{12} = \frac{b_1 d}{db_2} = \frac{v_B \sin \varphi_1}{v_{B_2} - v_{B_1} \cos \varphi_1}.$$

Подставляя в это уравнение

$$v_{B_1} = \omega_1 l_1 \quad \text{и} \quad v_{B_2} = \frac{dS_2}{dt} = \omega_1 l_2 \frac{dS_2}{d\varphi_1},$$

получаем:

$$\operatorname{tg} \gamma_{12} = \frac{l_1 \sin \varphi_1}{\frac{dS_2}{d\varphi_1} - l_1 \cos \varphi_1}, \quad (35)$$



Фиг. 71.

откуда и определяем значения углов γ_{12} , так как профили кулачка и огибаемой известны, а производная $\frac{dS_2}{d\varphi_1}$ может быть легко определена (аналитически или графически) по заданному закону $S_2 = f(\varphi_1)$. Для удовлетворительной работы механизма необходимо, чтобы полученные углы γ_{12} были больше угла γ_{\min} , который для кулачков данного типа рекомендуется брать в пределах от 60 до 70°. Для проектирования профили кулачка, удовлетворяющего заданному γ_{\min} , можно воспользоваться уравнением (35). Из этого уравнения следует, что тангенс угла γ_{12} должен быть больше тангенса выбранного угла давления γ_{\min} , т. е.

$$\operatorname{tg} \gamma_{12} \geq \operatorname{tg} \gamma_{\min}. \quad (36)$$

Из уравнений (35) и (36) следует:

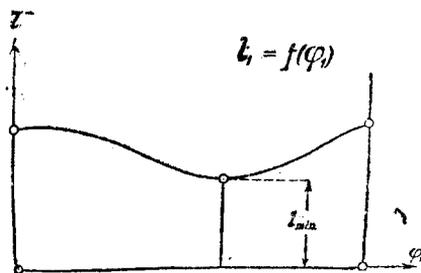
$$\frac{l_1 \sin \varphi_1}{\frac{dS_2}{d\varphi_1} - l_1 \cos \varphi_1} \geq \operatorname{tg} \gamma_{\min}. \quad (37)$$

В соотношении (37) величина $\frac{dS_2}{d\varphi_1}$ может быть получена графически или аналитически по заданной функции $S_2 = f(\varphi_1)$. Определяя из соотношения (37) величину l_1 , получаем:

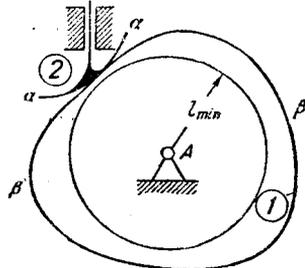
$$l_1 \geq \frac{dS_2}{d\varphi_1} \frac{\sin \gamma_{\min}}{\sin (\varphi_1 + \gamma_{\min})}.$$

Так как в правой части последнего соотношения все величины известны, то мы можем построить диаграмму $l_1 = f(\varphi_1)$ для заданного значения

γ_{\min} (фиг. 72). Из диаграммы находим наименьшее возможное значение l_{\min} радиуса-вектора l кулачка. Далее, из точки A проводим окружность радиуса l_{\min} (фиг. 73). Профиль кулачка ни на одном участке не должен находиться



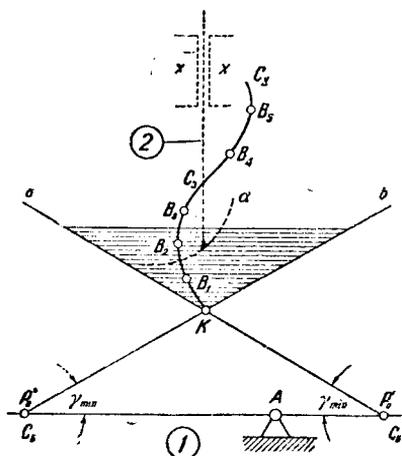
Фиг. 72.



Фиг. 73.

внутри проведённой окружности. Для того, чтобы огибающая $\beta\beta$ могла быть вписана в положение огибаемой $\alpha\alpha$, необходимо при проектировании избегать малых значений l_{\min} .

Ту же задачу можно решить графически. Для этого воспользуемся определением углов давления γ_{12} с помощью линии зацепления, центриды и бицентриды. Предполагаем заданными: кинематические законы движения звеньев 1 и 2, ось вращения A звена 1 и направление движения звена 2 (фиг. 74).



Фиг. 74.

Находим крайние точки P'_0 и P''_0 бицентриды, которые будут соответствовать максимальным значениям отношения $\frac{v_2}{\omega_1}$.

Для определения точек P'_0 и P''_0 бицентриды находим отношение скоростей $\frac{v_2}{\omega_1}$ звеньев 1 и 2, выбираем из них те, которые имеют наибольшую величину, и откладываем полученные отрезки AP'_0 и AP''_0 из точки A вправо и влево. Вместо соотношения $\left(\frac{v_2}{\omega_1}\right)_{\max}$ можно отложить величину $\left(\frac{dS_2}{d\varphi_1}\right)_{\max}$, так как

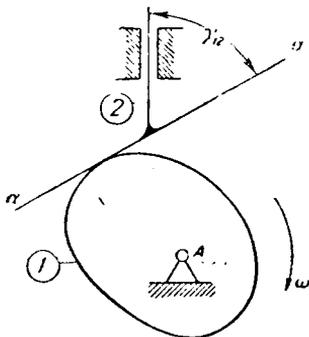
$$\frac{v_2}{\omega_1} = \frac{\frac{dS_2}{dt}}{\frac{d\varphi_1}{dt}} = \frac{dS_2}{d\varphi_1}$$

Величина $\frac{dS_2}{d\varphi_1}$ может быть легко определена аналитически или графически, так как закон движения $S_2 = f(\varphi_1)$ нам задан. При полученных точках P'_0 и P''_0 строим заданные углы давления γ_{\min} . Прямые P'_0a и P''_0b определяют область, в которой надо выбрать линию зацепления C_3 (на фиг. 74 часть этой области заштрихована). Величина минимального радиуса кулачка будет зависеть от положения выбранной линии зацепления. Наименьшим этот радиус будет в том случае, когда крайняя точка линии зацепления C_3 совпадает с точкой K пересечения прямых Pa и Pb . На фиг. 74 показана выбранная линия зацепления $B_1B_2B_3B_4B_5$. Так как вся линия зацепления находится внутри области, определяемой прямыми P'_0a и P''_0b , то ни в одном из положений звена 2 угол γ_{12} не будет меньше заданного угла γ_{\min} .

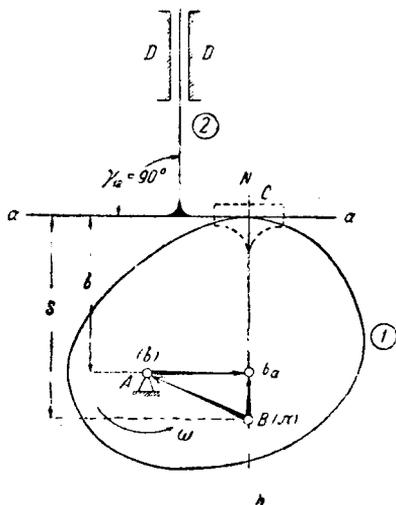
Если огибаемой звена 2 будет и яма $\alpha\alpha$ (фиг. 75), то угол γ_{12} будет постоянным и, следовательно, при проектировании необходимо только, чтобы

угол γ_{12} , образованный огибаемой aa с направлением движения звена 2, был больше заданного угла γ_{\min} . Если огибаемая прямая aa образует с направлением движения звена 2 угол $\gamma_{12} \neq 90^\circ$ (фиг. 76), то в этом случае мы получаем невыгоднейшие с точки зрения углов давления условия работы кулачкового механизма.

Для кулачковых механизмов данного вида должно также удовлетвориться условие, чтобы контур кулачка был всегда выпуклым. Для этого необходимо, чтобы значения величин b_1, b_2, b_3 , определяющих перемещение звена 2 (фиг. 76),



Фиг. 75.



Фиг. 76.

были в каждом положении большими второй производной от [этих величин по углу поворота φ_1 , взятой со знаком минус, т. е.

$$b_1 > -\frac{d^2 b_1}{d\varphi_1^2}, \quad b_2 > -\frac{d^2 b_2}{d\varphi_1^2}, \dots \quad (38)$$

Последнее вытекает из следующих очевидных соображений¹⁾. Пусть центр кривизны соприкасающегося участка профиля в рассматриваемом положении будет находиться в точке B (фиг. 76). Строим заменяющий механизм $ABCD$ (показан пунктиром) и при точке B (π) строим план ускорений. Отрезок (πb) в масштабе ω^2 представит собой ускорение a_B точки B , т. е. $a_B = \omega^2 (\pi b)$. Отрезок (πb_a) представит собой в том же масштабе ускорение a_T толкателя, т. е.

$$a_T = \omega^2 (\pi b_a) = \frac{d^2 b_1}{dt^2} = \omega^2 \frac{d^2 b_1}{d\varphi_1^2}, \quad (39)$$

где b_i — отрезок, принимающий значения b_1, b_2, b_3, \dots (фиг. 47). Из условия (39) получаем:

$$(\pi b_a) = \frac{d^2 b_i}{d\varphi_1^2}. \quad (40)$$

Для того, чтобы кулачок 1 имел профиль выпуклым, необходимо, чтобы центр кривизны профиля в каждом положении был расположен ниже линии aa . Тогда всегда будет удовлетворяться условие (фиг. 76)

$$\rho = b_i + \frac{d^2 b_i}{d\varphi_1^2} > 0, \quad (41)$$

¹⁾ Геронимус Я. Л.: Нахождение профиля кулачка по заданному движению толкателя, «Техника воздушного флота», № 3, 1933.

откуда получаем:

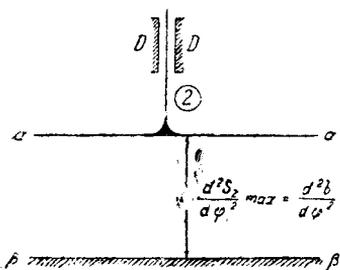
$$b_i > - \frac{d^2 b_i}{d\varphi_1^2} \quad (42)$$

Для нахождения положения центра вращения A кулачка необходимо по заданной диаграмме $s_2 = f(\varphi_1)$ (фиг. 47) построить диаграмму

$$\frac{d^2 S_2}{d\varphi_1} = \phi(\varphi_1),$$

затем по построенной диаграмме найти максимальное значение

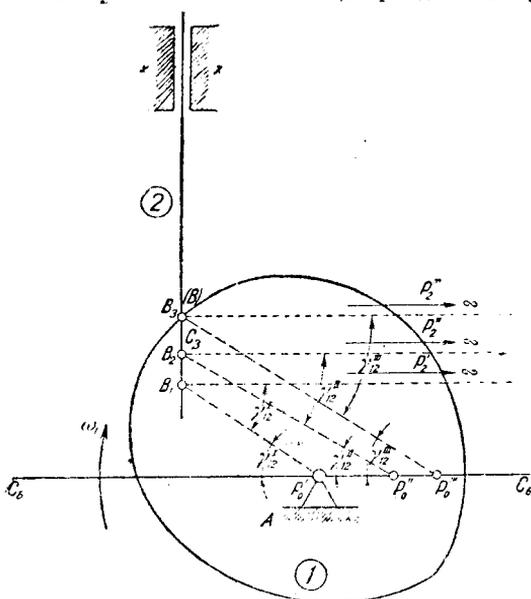
$$\max \frac{d^2 S_2}{d\varphi_1^2} = \max \frac{d^2 b_i}{d\varphi_1^2},$$



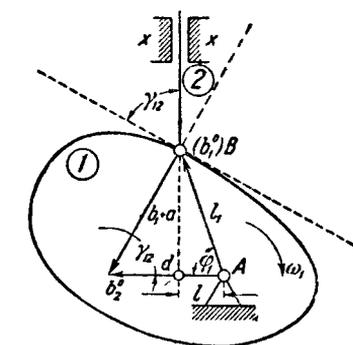
Фиг. 76а.

отложить его от соответствующего положения огибаемой прямой $\alpha\alpha$ вниз (фиг. 76а) и провести прямую $\beta\beta$, параллельную прямой $\alpha\alpha$. Центр вращения A кулачка может быть выбран в любой точке пространства, лежащего ниже прямой $\beta\beta$ (на фиг. 76а эта область заштрихована).

Если в качестве огибаемой будет выбрана точка B_2 (фиг. 77), то для определения углов давления $\gamma_{12}^I, \gamma_{12}^{II}, \dots$ следует соединить точки линии зацепления C_2 с соответствующими точками неподвижной центроиды и бицентроиды. Линией зацепления C_2 будет прямая $B_1 B_2 B_3$, представляющая собой геометрическое место точек соприкосновения звеньев 1 и 2. Бицентроидой C_B будет прямая, проведенная через



Фиг. 77.



Фиг. 78.

различных положений звена 2. Для удовлетворительной работы механизма необходимо, чтобы эти углы давления $\gamma_{12}^I, \gamma_{12}^{II}, \dots$ были больше некоторого заданного угла γ_{\min} . Угол давления γ_{12} может быть определен и аналитически. Для этого строим повернутый план скоростей (фиг. 78). Из плана скоростей

имеем:

$$\operatorname{tg} \gamma_{12} = \frac{(b_1^0 d)}{(db_2^0)} = \frac{v_{B_1} \sin \varphi_1}{v_{B_2} - v_{B_1} \cos \varphi_1} \quad (43)$$

(b_1^0 и b_2^0 суть концы векторов скоростей v_{B_1} и v_{B_2}). Подставляя в уравнение (43) значения скоростей:

$$v_{B_1} = \omega_1 l_1 \quad \text{и} \quad v_{B_2} = \frac{dS_2}{dt} = \omega_1 \frac{dS_2}{d\varphi_1},$$

получаем:

$$\operatorname{tg} \gamma_{12} = \frac{l_1 \sin \varphi_1}{\frac{dS_2}{d\varphi_1} - l_1 \cos \varphi_1}. \quad (44)$$

Величина $l_1 \sin \varphi_1 = b_1 + a$, где b_1 есть постоянное расстояние $b_1 = K_1 B_1 = \text{const}$. (фиг. 47), а a — перемещение звена 2, принимающее значения a_1, a_2, a_3, \dots . Величина $l_1 \cos \varphi_1$ постоянная и равна e . Подставляя её в уравнение (44), имеем:

$$\operatorname{tg} \gamma_{12} = \frac{b_1 + a}{\frac{dS_2}{d\varphi_1} - e}. \quad (45)$$

В общем случае величины $\frac{dS_2}{d\varphi_1}$ и e могут иметь как положительное, так и отрицательное значения.

Из уравнения (45) следует, что при проектировании кулачка можно задаваться расстояниями b_1 или e . Тогда при заданном угле γ_{\min} получаем:

$$b_1 \geq \left(\frac{dS_2}{d\varphi_1} - e \right) \operatorname{tg} \gamma_{\min} - a. \quad (46)$$

Пользуясь уравнением (46), строим график изменений $b_1 = f(\varphi_1)$. Наименьшее значение b_{\min} определит расчётную величину расстояния b_1 . Определив для выбранных значений e и γ_{\min} величину b_{\min} , можно найти и наименьшую величину радиуса-вектора кулачка l_{\min} . Имеем:

$$l_{\min} = \sqrt{(b_{\min})^2 + e^2}. \quad (47)$$

Для кулачкового механизма, изображённого на фиг. 51, величина e равна нулю, и уравнение (44) будет иметь следующий вид:

$$\operatorname{tg} \gamma_{12} = \frac{b_1 + a}{\frac{dS_2}{d\varphi_1}}. \quad (48)$$

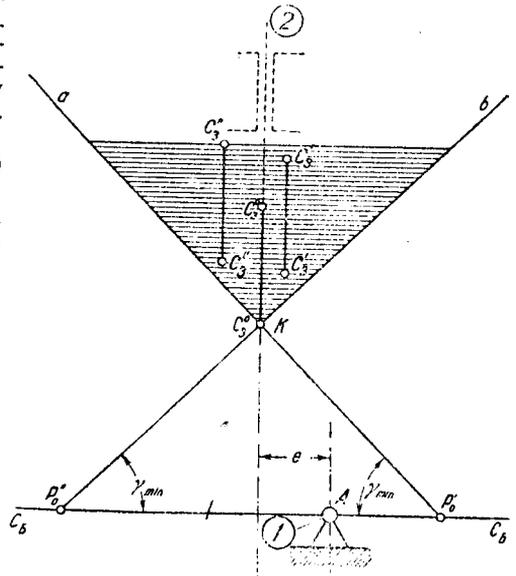
Соответственно уравнения (46) и (47) принимают вид:

$$b_1 \geq \frac{dS_2}{d\varphi_1} \operatorname{tg} \gamma_{\min} - a$$

и, следовательно,

$$l_{\min} = b_{\min}.$$

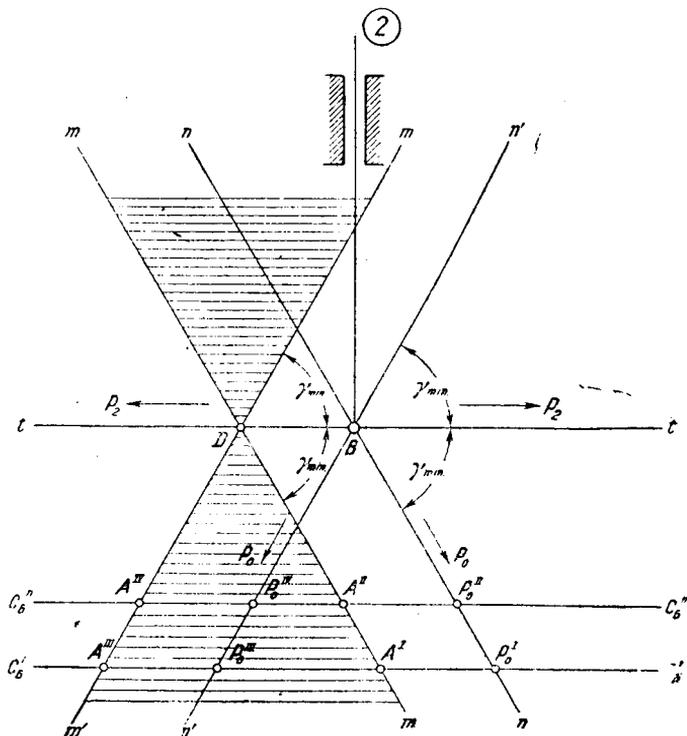
Та же задача может быть решена и графическим способом, аналогичным построению, показанному на фиг. 74. Через точку A (фиг. 79) проводим прямую $C_B C_B$, перпендикулярную к заданному направлению движения звена 2, и на этой прямой откладываем отрезки AP'_0 и AP''_0 . Величины этих отрезков



Фиг. 79.

найдутся из значений $\left(\frac{dS_2}{d\varphi_1}\right)_{\max}$, определяемых в свою очередь по заданной функции $S_2 = f(\varphi_1)$. При точках P'_0 и P''_0 строим заданные углы давления γ_{\min} . Линия зацепления C_3 должна быть выбрана в заштрихованной области aKb . Это могут быть линии C_3^0, C_3^I, C_3^{II} и т. д. Минимальный радиус кулачка и величина дезаксиала будут зависеть от выбора положения линии зацепления. Если вся линия зацепления выбрана внутри области aKb , то наименьшим радиус кулачка будет в том случае, когда крайняя точка линии зацепления C_3 совпадёт с точкой K (линия C_3^0).

Указанные выше построения дают возможность построить кулачковый механизм, у которого ни в одном из положений угол давления не будет меньше заданного угла γ_{\min} . Так как расчёт области aKb (фиг. 79) возможных линий зацеплений производился по максимальным значениям $\frac{dS_2}{d\varphi_1}$, то в некоторых промежуточных положениях звена 2 точки линии зацепления могут лежать и вне этой области и при этом иметь всё же углы давления, большие γ_{\min} . Таким образом, расположение всей линии зацепления внутри области aKb полностью гарантирует от наличия углов давления, меньших γ_{\min} , но не ре-



Фиг. 80.

шает полностью вопроса о том, будет ли построенный кулачок обладать наименьшими из всех возможных размерами.

Для нахождения кулачка с наименьшими габаритами можно использовать ранее рассмотренные геометрические построения. Пусть звено 2 (фиг. 80) находится в некотором промежуточном положении, для которого нам известны скорость v_B точки B звена 2 и угловая скорость ω_1 звена 1. Пусть, далее,

задан угол давления γ_{\min} . Определим, где должен в данном положении находиться центр A вращения кулачка 1, чтобы удовлетворялось минимального угла давления. Для этого проводим через точку B прямую tBt , перпендикулярную к направлению движения звена 2. Очевидно, мгновенный центр вращения P_2 звена 2 лежит в бесконечности на этой прямой. В точке B при этой прямой откладываем, вверх и вниз заданный угол γ_{\min} и проводим прямые Bn и Bn' . На этих прямых должны лежать мгновенный центр вращения P_0 в относительном движении звеньев. Нетрудно далее найти геометрическое место центров A вращения кулачка. В самом деле, расстояние AP_0 от центра вращения A до мгновенного центра вращения P_0 в общем случае определяется из условия:

$$L_{AP_0} = \frac{v_B}{\omega_1} = \frac{dS_B}{d\varphi_1}. \quad (49)$$

Кроме того, отрезок L_{AP_0} всегда перпендикулярен к направлению движения звена 2. Следовательно, если предположить, что мгновенный центр вращения в относительном движении совпадает с точкой P_0^I на прямой Bn , то для определения центра вращения A^I кулачка надо провести через точку P_0^I прямую $C'_B P_0^I C'_B$, параллельную прямой tBt , и отложить на ней отрезок $P_0^I A^I$, определяемый уравнением

$$L_{P_0^I A^I} = \frac{v_B}{\omega_1} = \frac{dS_B}{d\varphi_1},$$

аналогичным уравнению (49).

Если мгновенный центр вращения в относительном движении совпадает с точкой P_0^{II} , то для нахождения соответствующего положения A^{II} центра вращения кулачка следует отложить на прямой $C''_B P_0^{II} C''_B$, параллельной прямой tBt , отрезок $P_0^{II} A^{II} = P_0^I A^I$, так как

$$L_{P_0^{II} A^{II}} = \frac{v_B}{\omega_1} = \frac{dS_B}{d\varphi_1} = L_{P_0^I A^I}.$$

Таким образом, если мгновенный центр вращения P_0 перемещается по прямой nBn , то центр вращения A кулачка перемещается по параллельной прямой mDm , т. е. геометрическим местом центра вращения кулачка будет прямая mDm , положение которой определяется следующим простым построением: на прямой tBt откладывается отрезок BD , равный

$$L_{BD} = \frac{v_B}{\omega_1} = \frac{dS_B}{d\varphi_1}$$

и через полученную точку D проводится прямая mDm , образующая с прямой tBt заданный угол давления γ_{\min} .

Аналогично, если на прямой $n'Bn'$ выбрать ряд положений мгновенного центра вращения в относительном движении, например положения P_0^{III} , P_0^{IV} , то для определения соответствующих положений центров вращения кулачка следует отложить на прямых $C'_B P_0^{III} C'_B$ и $C''_B P_0^{IV} C''_B$ отрезки $P_0^{III} A^{III} = P_0^{IV} A^{IV} = P_0^I A^I = P_0^{II} A^{II}$. Тогда геометрическим местом центра вращения кулачка будет прямая $m'Dm'$, параллельная прямой $n'Bn'$.

Центр A вращения кулачка может быть выбран в любой точке области, заключенной между прямыми mm и $m'm'$ (на рис. 80 она заштрихована), так как при выборе точки A в этой области угол давления будет больше γ_{\min} .

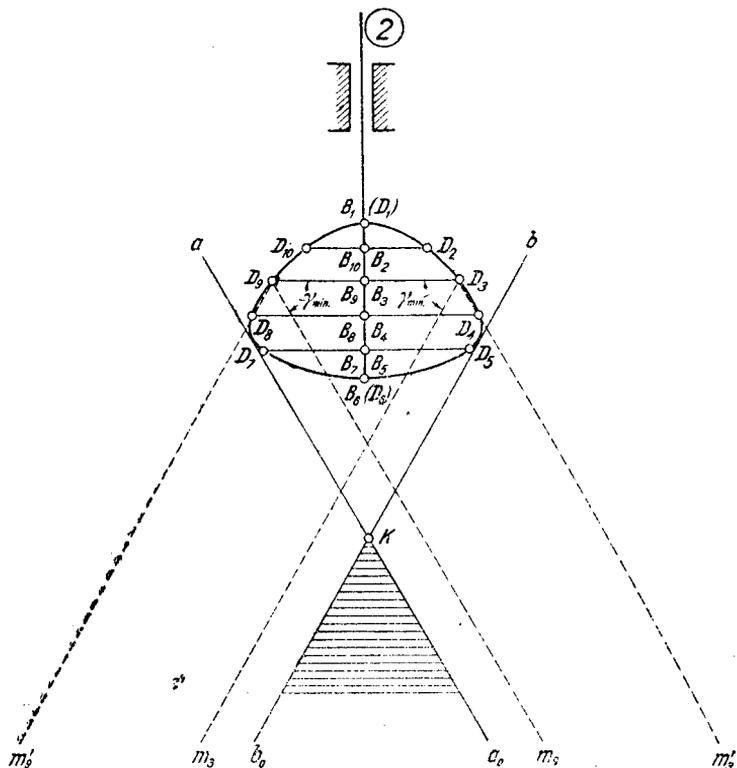
Если теперь в каждом положении звена 2 в точках B_1, B_2, B_3, \dots (фиг. 81) восставить перпендикуляры к направлению движения звена 2, отложить на них соответствующие отрезки

$$L_{B_1 D_1} = \frac{v_{B_1}}{\omega_1}, \quad L_{B_2 D_2} = \frac{v_{B_2}}{\omega_1}, \quad \dots$$

и провести через полученные точки D_1, D_2, D_3, \dots прямые $D_1 m_1$ и $D_1 m'_1$.

D_2m_2 и $D_2m'_2$, ... под углами γ_{\min} к отрезкам B_1D_1 , B_2D_2 , B_3D_3 , ..., то каждая из пар проведённых прямых будет геометрическим местом возможных центров A вращения кулачка в соответствующем положении звена 2. Кроме того, центр вращения A можно выбрать в любой точке области, заключённой между проведёнными прямыми.

Найдя для каждого положения звена 2 соответствующую область возможных положений центра A вращения кулачка, мы определим те их участки,



Фиг. 81.

которые являются общими для всех положений звена 2. Очевидно, что таких областей в общем случае будет две: одна, расположенная ниже прямых B_1D_1 , B_2D_2 , ..., и другая, расположенная выше этих прямых. На фиг. 81 показана нижняя область (заштрихованная), ограниченная прямыми b_0K и Ka_0 . Эту область можно определить также следующим путём: соединить все найденные точки D_1, D_2, D_3, \dots плавной кривой и провести к этой кривой касательные aa_0 и bb_0 , параллельные прямым Dm . Тогда касательные aa_0 и bb_0 ограничат область b_0Ka_0 (эта область на фиг. 81 заштрихована), в которой может быть выбран центр A вращения кулачка. Кулачок будет иметь минимальные размеры, если центр вращения кулачка совпадёт с точкой K .

§ 14. Динамический синтез кулачковых механизмов второго вида.

Переходим к динамическому синтезу кулачковых механизмов второго вида.

Если кулачок движется поступательно и передача движения осуществляется центроидами, то углы давления γ можно определить по формулам (34) и (35). Если передача движения осуществляется взаимноогibaемыми кривыми (фиг. 82), то для определения углов давления γ_{12} следует соединить точки

линии зацепления C_3 с соответствующими точками неподвижной centroиды C_H и бицентроиды C_B . Так как звено I движется поступательно, то точки P_0^I , P_0^{II} , ... бицентроиды C_B будут лежать на прямой, проходящей через точку A и перпендикулярной к направлению движения кулачка I . Положение точек бицентроид найдётся из уравнения:

$$L_{AP_0} = \frac{v_1}{\omega_2}.$$

Для построения линии зацепления C_3 следует соединить точки последовательного касания взаимноогнбимых кривых $\alpha\alpha$ и $\beta\beta$. Пусть это будет кривая $B_1B_2B_3 \dots$. Неподвижной centroидой звена 2 будет точка A . Соединив точку B_1 с точками A и P_0^I , определим угол давления γ_{12}^I , т. е. угол давления в первом положении звена 2. Соединив далее точку B_2 с точками A и P_0^{II} , определим угол давления γ_{12}^{II} во втором положении звена, и т. д.

Те же самые углы могут быть определены, если через точку касания B провести направление касательной tt и направление абсолютной скорости v_2 точки B звена 2 (фиг. 82).

Угол давления γ_{12} может быть определён и аналитически. Рассмотрим для примера механизм, изображённый на фиг. 83, и построим для него план скоростей (фиг. 84). Из плана скоростей получаем:

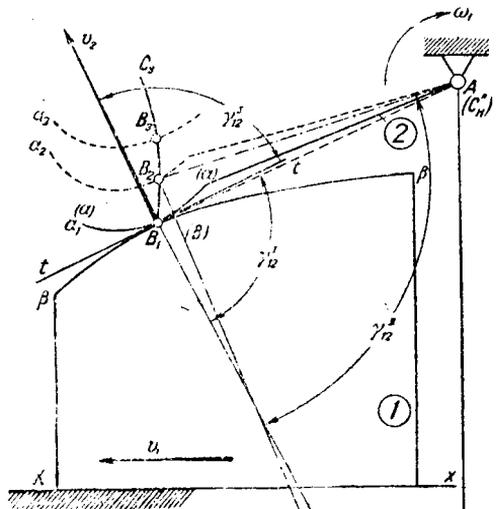
$$\operatorname{tg} \gamma_{12} = \frac{(b_1 d)}{(db_2)} = \frac{v_1 \sin(\varphi_0 + \varphi_2)}{v_1 \cos(\varphi_0 + \varphi_2) \pm \omega_2 l_2}.$$

Знак плюс или минус перед членом $\omega_2 l_2$ зависит от направления скорости v_2 . Подставляя значение скорости $\omega_2 = \frac{dv_2}{dt} = v_1 \frac{d\varphi_2}{dS_1}$, получаем:

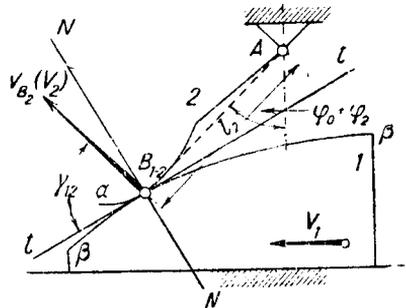
$$\operatorname{tg} \gamma_{12} = \frac{\sin(\varphi_0 + \varphi_2)}{\cos(\varphi_0 + \varphi_2) \pm \frac{d\varphi_2}{dS_1} l_2}. \quad (50)$$

Пользуясь уравнением (50), можно для каждого положения механизма аналитически определить угол давления γ_{12} . Величина $\frac{d\varphi_2}{dS_1}$ определяется дифференцированием функции $\varphi_2 = f(S_1)$.

Из уравнения (50) следует, что при проектировании профиля кулачка по заданному закону $\varphi_2 = f(S_1)$ можно задаваться величинами или φ_0 или l_2 .



Фиг. 82.



Фиг. 83.

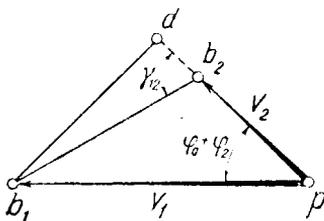
Если задаться углом φ_0 , то при заданном угле γ_{\min} получаем, что размер l_2 должен быть

$$l_2 \leq \frac{\cos(\varphi_0 + \varphi_2) \operatorname{tg} \gamma_{\min} - \sin(\varphi_0 + \varphi_2)}{\pm \frac{d\varphi_2}{dS_1} \operatorname{tg} \gamma_{\min}}$$

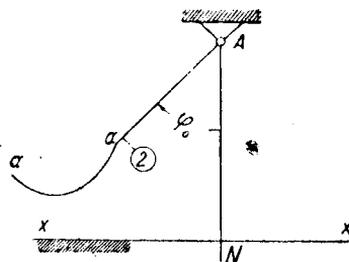
или

$$l_2 \leq \frac{\sin(\varphi_0 + \varphi_2 - \gamma_{\min})}{\pm \frac{d\varphi_2}{dS_1} \operatorname{tg} \gamma_{\min}} \quad (51)$$

Пользуясь условием (51), можно определить значения l_2 , т. е. расстояния от точки A до точки соприкосновения кривых $\alpha\alpha$ и $\beta\beta$ для всех положений механизма.



Фиг. 84.

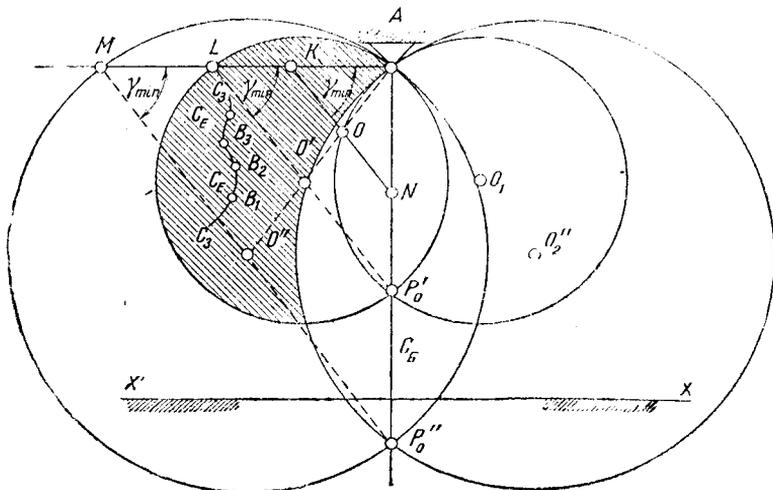


Фиг. 85.

ханизма. Для гибких $\alpha\alpha$ данного типа кулачков обычно рекомендуется угол $\gamma_{\min} = 45^\circ$.

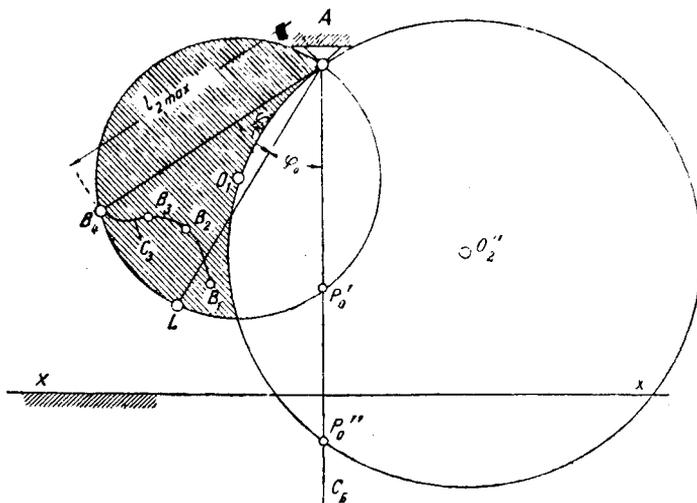
Эту же задачу можно решить графически, воспользовавшись определением углов давления с помощью линии зацепления, центроиды и бицентроиды. Пусть заданы: законы движения звеньев 1 и 2 кулачкового механизма, ось вращения A звена 2 (фиг. 85), начальный угол отклонения φ_0 звена 2 от вертикали AN , направление движения звена 1 и минимальный угол давления γ_{\min} . Наименьшим значениям углов давления γ_{12} будут соответствовать крайние положения точек бицентроиды C_B . По заданным законам движения кулачка и рычага 2 (фиг. 85) определяем наибольшее (AP_0'') и наименьшее (AP_0') расстояния от оси A до крайних точек P_0'' и P_0' бицентроиды C_B (фиг. 86) (на этой фигуре рассмотрен тот случай, когда законы прямого и обратного хода кулачка различны). Наибольшее и наименьшее расстояния до крайних точек бицентроиды будут соответствовать максимальным величинам отношения $v_1 : \omega_2$, где v_1 есть скорость кулачка 1, а ω_2 — угловая скорость ведомого звена 2. На полученных отрезках AP_0'' и AP_0' строим заданные углы γ_{\min} . Для этого через точку A проводим прямую AM , перпендикулярную к бицентроиде C_B . При некоторой точке K этой прямой строим угол $\angle AKN$, равный γ_{\min} . Через точки L и M проводим прямые, параллельные прямой KN . Делим далее отрезок KN пополам ($KO = ON$) и проводим прямую AO до пересечения в точках O' и O'' с прямыми LP_0' и MP_0'' . Точки O' и O'' будут центрами окружностей, вмещающих в себя заданный угол γ_{\min} . Проведём эти окружности и выполним симметричное построение справа от бицентроиды C_B . Тогда, если линия зацепления C_3 будет выбрана в заштрихованной области, угол давления γ будет во всех положениях звена 2 больше заданного угла γ_{\min} . Для того, чтобы определить максимально возможный размер $l_{2 \max}$ звена 2, поступаем следующим образом. Откладываем от бицентроиды C_B начальный угол φ_0 (фиг. 87). К углу φ_0 прибавляем полный угол отклонения φ_2

звена 2. Так как вся линия зацепления C_3 должна находиться внутри заштрихованной области, то отрезок AB_4 и определит максимально возможную величину размера $l_2 \max$.



Фиг. 86.

Если огибаемая звена 2 представляет собой прямую, то анализ углов давления и построения профили кулачка будут аналогичными. Исключением

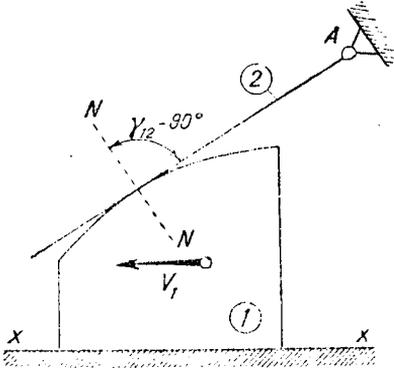


Фиг. 87.

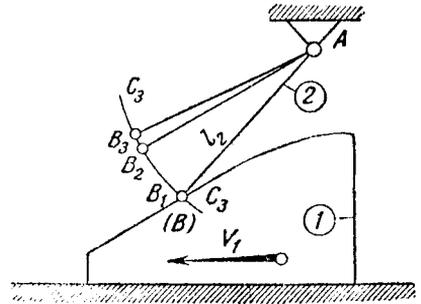
является тот случай, когда огибаемая проходит через точку A вращения звена 2 (фиг. 88). В этом случае угол давления γ_{12} будет постоянным и равным 90° .

Если огибаемая звена 2 представляет собой точку B (фиг. 89), то линией зацепления C_3 будет траектория точки B звена 2. Исследование и проектирование профиля кулачка 1 выполняются совершенно так же, как и в ранее рассмотренном случае.

Переходим к рассмотрению кулачковых механизмов того же вида, но с вращающимся кулачком. Начнём с того случая, когда передача движения



Фиг. 88.



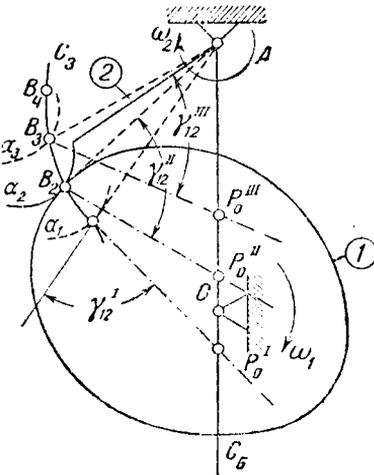
Фиг. 89.

осуществляется центроидами (фиг. 56). В этом случае для определения углов давления γ можно воспользоваться ранее выведенным уравнением (3). Имеем:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\frac{d^2 \varphi_2}{d\varphi_1^2}}{\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \left(1 + \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \right)}, \quad (52)$$

так как $l = \text{const.}$

Как было показано выше, угол давления γ не зависит от того, какое из звеньев принято за ведущее. Значения производной $\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}$ определяются графическим дифференцированием зависимости $\varphi_2 = f(\varphi_1)$, заданной в виде кривой. Для определения $\frac{d^2 \varphi_2}{d\varphi_1^2}$ следует построить кривую $\frac{d^2 \varphi_2}{d\varphi_1^2} = \psi(\varphi_1)$ и опять произвести графическое дифференцирование. Из уравнения (52) следует, что при $\frac{d^2 \varphi_2}{d\varphi_1^2} = 0$ угол $\gamma = 0$, и пере-



Фиг. 90.

дача работать не будет. Поэтому при выполнении передачи центроидами приходится их снабжать зубцами или какими-либо другими дополнительными устройствами.

Если передача движения осуществляется взаимноогнбаемыми кривыми, то для определения углов давления должны быть заданы линия зацепления, неподвижная центроида ведомого звена и бицентроида.

Пусть кулачок 1 (фиг. 90) вращается около оси O с угловой скоростью ω_1 , а ведомое звено 2 качается с угловой скоростью ω_2 около оси A . Для определения углов давления γ при ведущем кулачке находим бицентроиду C_B в относительном движении звеньев 1 и 2. Для этого соединяем центры мгновенного вращения A и O звеньев 1 и 2 прямой. Точки $P_0^I, P_0^{II}, P_0^{III}, \dots$, принадлежащие бицентроиде, определяем при помощи уравнения:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{OP_0}{AP_0} = \frac{OP_0}{OA - OP_0},$$

где ω_1 и ω_2 суть известные нам угловые скорости звеньев 1 и 2.

Линией зацепления C_3 будет линия $B_1B_2B_3 \dots$, представляющая собой точки последовательного соприкосновения звеньев 1 и 2. Точки зацепления B_1, B_2, \dots определяются построением положений механизма. Соединив точки B_1, B_2, \dots с соответствующими точками P_0^I, P_0^{II}, \dots прямыми, определяем углы давления $\gamma_{12}^I, \gamma_{12}^{II}, \dots$. Для удовлетворительной работы механизма необходимо, чтобы полученные углы были не меньше некоторого заданного угла γ_{\min} . В том случае, когда соответствующий угол, образуемой между точками линии зацепления с мгновенными центрами вращения A и P_0 , будет больше угла в 90° , углом давления будет угол, добавочный до 180° (например, угол γ_{12}^I на фиг. 90).

Углы давления γ_{12} могут быть также определены аналитически с помощью уравнения (6). Действительно, для рассматриваемого типа механизма (фиг. 91) имеем:

$$\operatorname{tg} \gamma_{12} = \frac{l \sin (\varphi_0 + \varphi_2)}{l_2 \left(\pm \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} + 1 \right) - l \cos (\varphi_0 + \varphi_2)}$$

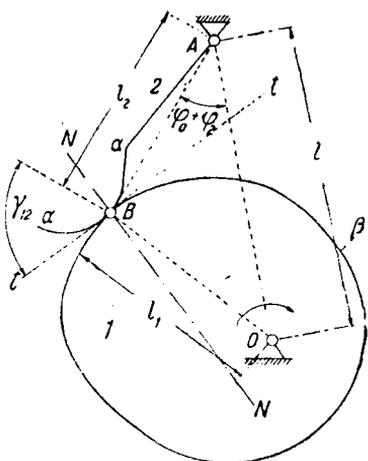
Из этого уравнения следует, что при проектировании такого вида кулачков могут быть заданы произвольные значения только двух каких-либо величин из трёх: l, l_2 и φ_0 . Удобнее всего задать значение величин l и φ_0 . Тогда при заданном угле γ_{\min} определится расчётная величина l_2 , которая должна удовлетворять условию:

$$l_2 \leq \frac{l \sin (\varphi_0 + \varphi_2 + \gamma_{\min})}{\left(\pm \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} + 1 \right) \sin \gamma_{\min}} \quad (53)$$

Пользуясь условием (53), можно определить значения l_2 для всех положений механизма.

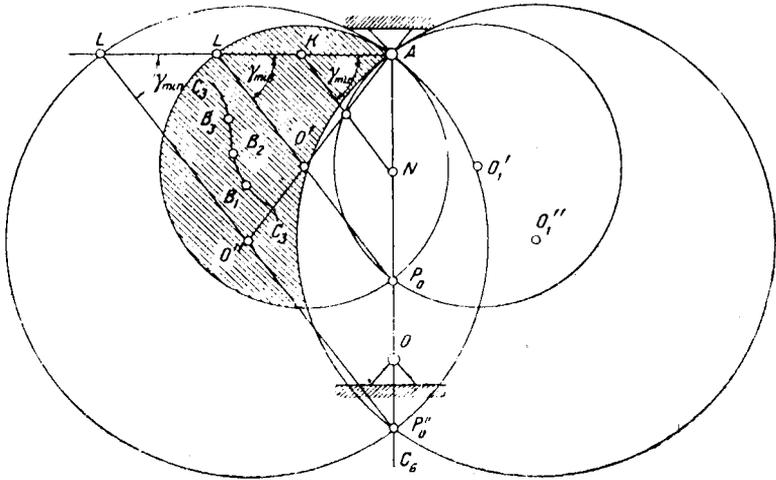
Величины l_2 можно определить и графически, пользуясь таким же способом, как и в рассматриваемом раньше случае кулачкового механизма второго вида с поступательно движущимся звеном. Пусть заданы: кинематические законы движения звеньев 1 и 2, оси O и A звеньев 1 и 2 (фиг. 92), начальный угол отклонения φ_0 звена 2 от прямой OA и минимальный угол давления γ_{\min} . Построение ведём аналогично случаю, рассмотренному на фиг. 86. Наименьшие значения угла давления будут соответствовать крайним положениям P_0^I и P_0^{II} мгновенных центров вращения P_0 на бицентроиде C_B . Крайние положения точек P_0 будут соответствовать наибольшим значениям отношения угловых скоростей $\frac{\omega_2}{\omega_1}$. По заданным угловым скоростям ω_1 и ω_2 находим отношения этих скоростей, выбираем те из них, которые имеют наибольшую величину, и откладываем полученные отрезки вверх и вниз от точки O . Точка P_0^I будет соответствовать максимальному значению отношения $\left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)_{\max}$ с противоположными знаками угловых скоростей, а точка P_0^{II} — максимальному значению $\left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)_{\max}$ с одинаковыми знаками угловых скоростей. На полученных отрезках AP_0^I и AP_0^{II} строим заданные углы γ_{\min} .

Если линия зацепления C_3 будет выбрана внутри заштрихованной площади, то во всех положениях механизма углы давления будут больше заданного угла давления γ_{\min} . Предельный размер $l_{2 \max}$ звена 2 (фиг. 91) определится при помощи такого же построения, как и на фиг. 87.



Фиг. 91.

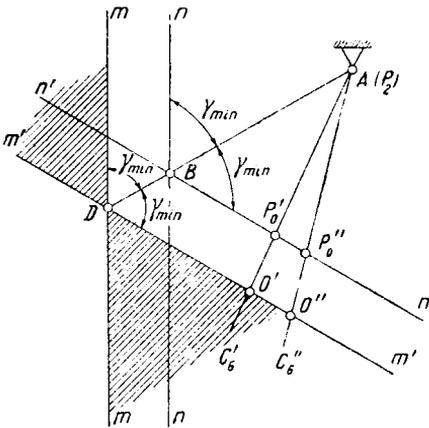
Если огибаемая звена 2 представляет собой прямую, то нахождение предельного размера l_2 этого звена производят либо аналитически по формуле (53), либо графически при помощи построения, показанного на фиг. 92.



Фиг. 92.

Исключение составляет тот случай, когда прямая проходит через точку A вращения звена 2. В этом случае угол давления γ равен 90° и, следовательно, механизм будет работать с наимыгоднейшим углом давления.

Если в качестве огибаемой звена 2 выбрана точка B , то отыскание предельного размера l_2 звена AB производят либо аналитически опять по формуле (53), либо графически при помощи построения, изображённого на фиг. 92. В этом случае линией зацепления C_3 вследствие постоянства размера l_2 будет дуга окружности, описанная из точки A радиусом AB .



Фиг. 93.

Переходим теперь к определению области возможного расположения центра вращения кулачка 1, если заданы: угловые скорости ω_1 и ω_2 звеньев 1 и 2, положение рычага AB , его длина и минимальный угол давления γ_{\min} (Фиг. 93). Для этого определим сначала геометрические места мгновенных центров вращения при заданном максимальном угле давления γ_{\min} . При точке B отрезка AB строим два угла, равных каждый γ_{\min} . Прямые nn' и $n'n'$ будут геометрическими

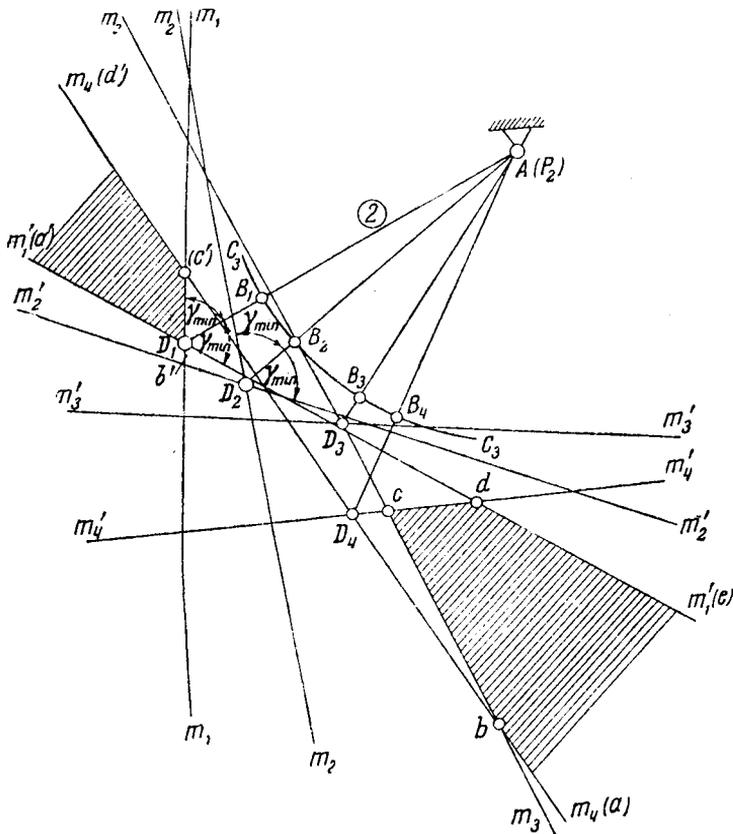
местами мгновенных центров вращения. Пусть, например, мгновенный центр вращения находится в точке P'_0 . Тогда, если угловые скорости ω_1 и ω_2 имеют разные знаки, точка O' — центр кулачка — будет находиться на продолжении прямой AP'_0 на расстоянии P'_0O' , равном

$$P'_0O' = P'_0A \frac{\omega_1}{\omega_2},$$

т. е. точка P'_0 будет делить отрезок $O'A$ внутренним образом на части, обратно пропорциональные угловым скоростям. При совпадении знаков угловых скоростей ω_1 и ω_2 точка P'_0 будет делить отрезок $O'A$ в том же отношении внешним образом. Если мгновенный центр будет находиться в точке P''_0 , то центр вращения кулачка будет находиться соответственно в точке O'' и т. д. Геометрическим местом центров вращения кулачка будет, очевидно, прямая $m'm'$, параллельная прямой $n'n'$ и проходящая через точку D . Положение точки D на продолжении прямой AB определится из уравнения:

$$BD = AB \frac{\omega_1}{\omega_2}.$$

Если, далее, через точку D провести прямую mm , параллельную прямой mn , то она будет вторым геометрическим местом центров вращения кулачка. Очевидно, область, заключённая между прямыми mm и $m'm'$, будет областью возможного расположения центров вращения кулачка, удовлетворяющего ус-



Фиг. 94.

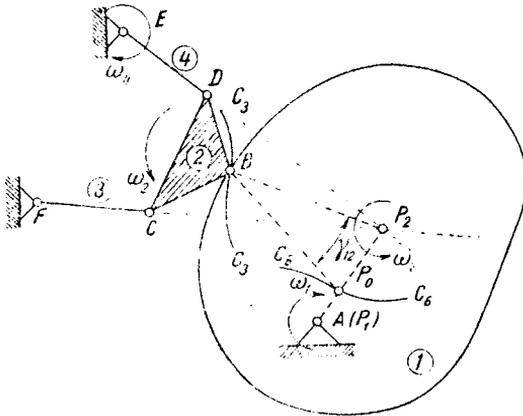
ловию наличия угла давления, не меньшего, чем заданный угол γ_{\min} (на фиг. 93 эта область заштрихована).

На фиг. 94 показано нахождение области возможного расположения центра вращения кулачка, когда задано несколько положений звена 2. Построив для каждого положения звена 2 соответствующую область возможных

положений центра O вращения кулачка, определяем те участки различных областей, которые являются общими для всех заданных положений звена 2. В общем случае таких областей, очевидно, будет две. На фиг. 94 этими областями будут заштрихованные области $abcde$ и $a'b'c'd'$.

§ 15. Динамический синтез кулачковых механизмов третьего вида.

Углы давления в кулачковых механизмах третьего вида могут быть определены при помощи общих приёмов. Пусть, например, требуется определить угол давления γ_{12} механизма, показанного на фиг. 95. Точка касания B будет принадлежать линии зацепления C_3 . Мгновенным центром вращения звена 2 будет точка P_2 . По заданной угловой скорости ω_4 звена 4 определяем мгновенную угловую скорость ω_2 звена 2. По известным скоростям ω_1 и ω_2 находим положение мгновенного центра вращения P_0 в относительном движении системы 2 относительно системы 1. Мгновенный центр вращения P_0 будет делить прямую AP_2 на части, обратно пропорциональные угловым скоростям, и будет принадлежать бицентроиде C_3 . Очевидно, угол P_2BP_0 будет углом давления γ_{12} . Аналогичными построениями можно последовательно определить все значения



Фиг. 95.

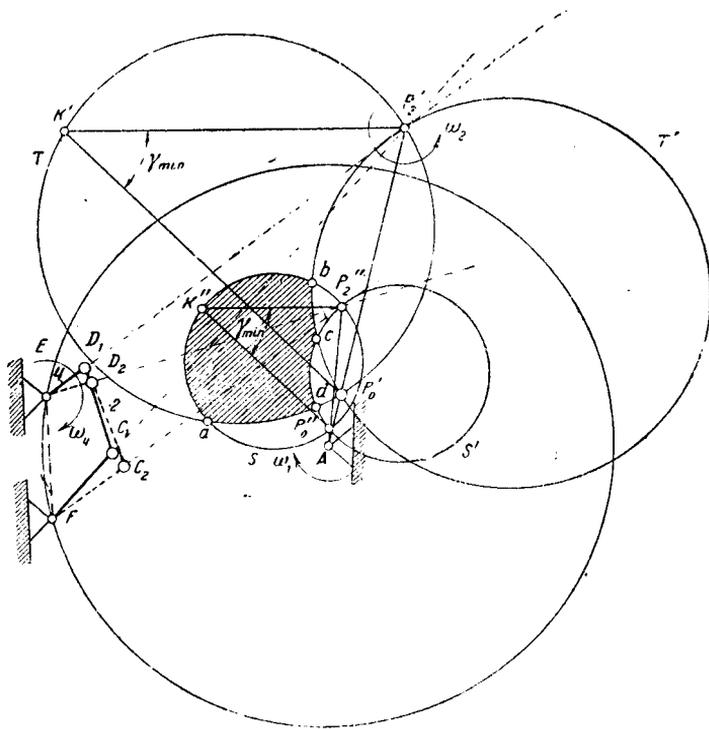
угла давления γ_{12} . Как было показано не меньше некоторого заданного значения γ_{\min} .

Для построения кулачкового механизма, у которого углы давления были бы больше заданного угла γ_{\min} , можно поступить следующим образом. Для ряда последовательных положений четырехзвенника находим мгновенные центры вращения P_1^2, P_2^2, \dots звена 2 (фиг. 96). Далее, для этих же положений находим точки P_0', P_0'', \dots бицентроиды. На отрезках $P_2^2P_0', P_2^2P_0'', \dots$ строим симметрично расположенные окружности T и T', S и S', \dots , вмещающие заданный угол γ_{\min} . Эти окружности определяют область $abcd$ (на фиг. 96 она заштрихована), в которой может быть выбрана линия зацепления C_3 . Траектория точки соприкосновения B может быть выбрана только внутри соответствующей области $abcd$ (фиг. 97, заштрихованная область). Таким путём могут быть выбраны размеры звена 2, удовлетворяющие поставленному условию.

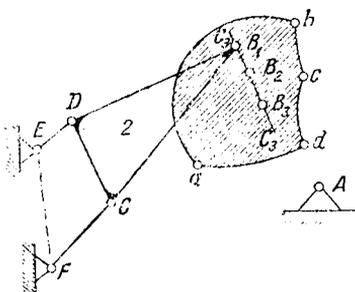
Нахождение области возможных положений центров вращения кулачка при заданных размерах механизма $EGCF$ (фиг. 98), размерах звена GCB , угловых скоростях ω_1 и ω_2 и минимальном угле давления γ_{\min} производится при помощи такого же построения, как и в случае кулачков второго вида. Находим мгновенный центр вращения P_2 звена 2. Соединяем точки P_2 и B прямой, и на этой прямой откладываем отрезок

$$BD = P_2B \frac{\omega_1}{\omega_2}.$$

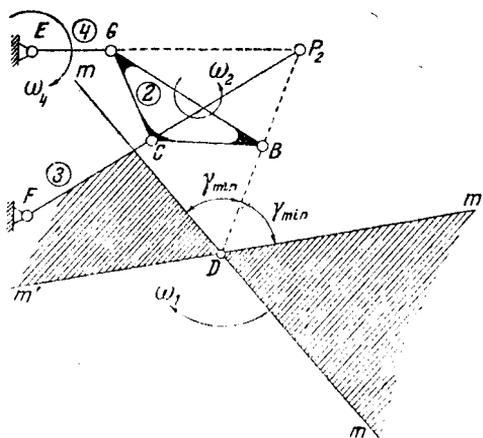
Точка D будет лежать между точками P_2 и B в случае совпадения знаков угловых скоростей ω_1 и ω_2 и вне отрезка P_2B , если знаки этих угловых скоростей различны. В точке D при прямой P_2D откладываем углы γ_{\min} и проводим прямые mt и $m'm'$, которые будут геометрическими местами возможных центров вращения кулачка 1. Область возможных центров вращения



Фиг. 96.



Фиг. 97.



Фиг. 98.

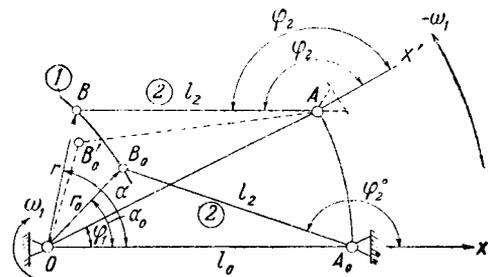
будет заключаться между этими прямыми (на фиг. 98 эта область заштрихована). Если подобные же построения сделать для ряда положений звена 2, то проведённые прямые выделяют некоторые области возможных положений центра вращения кулачка 1. Метод определения этой области совершенно аналогичен методу, применённому к кулачкам второго вида (фиг. 94).

§ 16. Аналитический синтез кулачковых механизмов.

Общий путь аналитического синтеза кулачковых механизмов указан в § 6. Построение профиля кулачка сводится к нахождению уравнения огибаемой кривой по заданному уравнению семейства огибаемых. Имея уравнение семейства огибаемых, нетрудно построить профиль кулачка.

Построение профиля кулачка по уравнению огибаемой применяется в технике редко вследствие сложности уравнений огибаемых и громоздкости необходимых для построения вычислений. Поэтому аналитические приёмы синтеза целесообразно применять только для некоторых простейших видов кулачковых механизмов.

Рассмотрим некоторые из этих механизмов. Пусть требуется построить профиль кулачка кулачкового механизма второго вида, у которого ведомое звено 2 вращается около оси A_0 (фиг. 99), а кулачок 1 вращается около оси O . Пусть заданы: длина l_2 звена 2, расстояние l_0 между точками O и A_0 , начальный угол φ_2^0 звена 2 относительно оси Ox и зависимость между углами поворота φ_1 и φ_2 звеньев, т. е. уравнение вида $\varphi_2 = f(\varphi_1)$. Огибаемой звена 2



Фиг. 99.

пусть будет точка B . Сообщаем звеньям 1 и 2 общую угловую скорость ω_1 . Тогда звено 1 будет неподвижным, а звено 2 будет вращаться с угловой скоростью Ω , равной

$$\Omega = \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_1.$$

Рассмотрим какое-либо положение звена 2, когда точка A_0 перенесла в положение A , а точка B_0 — в положение B . Из треугольника OB_0A имеем:

$$r = \sqrt{l_0^2 + l_2^2 + 2l_0l_2 \cos \varphi_2}. \quad (54)$$

Проектируя радиус-вектор r кулачка на перпендикуляр к оси Ox , получаем:

$$r \sin \alpha = l_2 \sin (\varphi_2 + \varphi_1) + l_0 \sin \varphi_1.$$

откуда

$$\sin \alpha = \frac{l_2 \sin (\varphi_2 + \varphi_1) + l_0 \sin \varphi_1}{r}$$

или, принимая во внимание уравнение (54),

$$\sin \alpha = \frac{l_2 \sin (\varphi_2 + \varphi_1) + l_0 \sin \varphi_1}{\sqrt{l_0^2 + l_2^2 + 2l_0l_2 \cos \varphi_2}}$$

откуда

$$\alpha = \arcsin \frac{l_2 \sin (\varphi_2 + \varphi_1) + l_0 \sin \varphi_1}{\sqrt{l_0^2 + l_2^2 + 2l_0l_2 \cos \varphi_2}}. \quad (55)$$

Так как по условию угол φ_2 задан в функции угла φ_1 , т. е. задано уравнение:

$$\varphi_2 = f(\varphi_1). \quad (56)$$

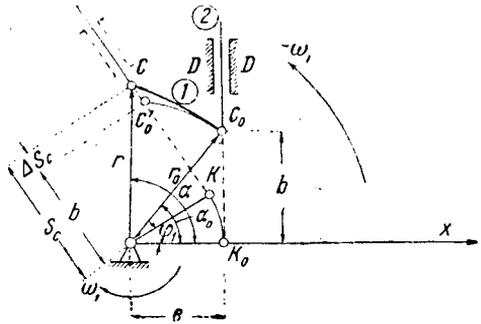
то, задавая различные числовыми значениями угла φ_1 , мы получим из уравнения (56) соответствующие значения угла φ_2 . Подставляя эти значения для φ_2 в уравнение (54), мы определим величины радиус-векторов r кулачка. Углы α , образованные этими векторами с осью Ox , определятся из урав-

нения (55). По полученным значениям r и α строим по точкам теоретический профиль кулачка.

Перейдём к рассмотрению кулачковых механизмов первого вида. Пусть требуется построить профиль кулачка 1, передающего движение звену 2,двигающемуся поступательно в направляющих DD (фиг. 100). Пусть заданы: дезаксиал e , начальное положение точки C , принятой за огибаемую, и зависимость между перемещениями S_C и φ_1 звена 2 и кулачка 1, т. е. уравнение $S_C = f(\varphi_1)$.

Так же, как и в ранее рассмотренном случае, сообщим звеньям 1 и 2 общую угловую скорость $-\omega_1$ и рассмотрим какое-либо положение звена 2, когда точка C_0 перешла в положение C . Из треугольника ACK имеем:

$$r = \sqrt{e^2 + S_C^2}. \quad (57)$$



Фиг. 100.

Проектуя радиус-вектор r кулачка на перпендикуляр к оси Ox , получаем:

$$r \sin \alpha = S_C \cos \varphi_1 + e \sin \varphi_1,$$

откуда

$$\sin \alpha = \frac{S_C \cos \varphi_1 + e \sin \varphi_1}{r},$$

и, принимая во внимание равенство (57),

$$\sin \alpha = \frac{S_C \cos \varphi_1 + e \sin \varphi_1}{\sqrt{e^2 + S_C^2}}.$$

откуда

$$\alpha = \arcsin \frac{S_C \cos \varphi_1 + e \sin \varphi_1}{\sqrt{e^2 + S_C^2}}. \quad (58)$$

Так как по условию перемещение S_C задано в функции угла φ_1 , т. е. задано уравнение:

$$S_C = f(\varphi_1), \quad (59)$$

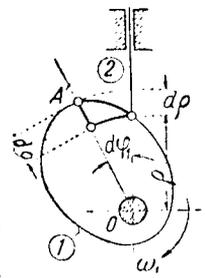
то, задаваясь различными числовыми значениями угла φ_1 , получим из уравнения (59) соответствующие значения перемещений S_C . Полученные значения для S_C подставляем в уравнение (57) и определяем величины радиусов-векторов r кулачка. Углы α , образованные этими векторами с осью Ox , определяются из уравнения (58). По полученным значениям r и α строим по точкам профиль кулачка. Если направление движения звена 2 проходит через точку A , то в уравнениях (57) и (58) надо принять величину дезаксиала e равной нулю. Тогда получаем следующие уравнения для определения радиуса-вектора r кулачка и угла α :

$$r = S_C \quad (60)$$

и

$$\alpha = 90^\circ + \varphi_1. \quad (61)$$

В некоторых случаях кулачковые механизмы строятся по заданным законам скоростей движения его звеньев. Пусть, например, требуется построить профиль кулачка первого вида, у которого направление движения звена 2 проходит через ось кулачка (фиг. 101). Пусть кулачок вращается с заданной постоянной угловой скоростью ω_1 . Из фиг. 101 следует, что скорость v_2 звена 2 будет равна:



Фиг. 101.

$$v_2 = \frac{dS_C}{dt}, \quad (62)$$

где ρ есть переменный радиус-вектор кулачка. Угловая скорость ω_1 кулачка равна:

$$\omega_1 = \frac{d\varphi_1}{dt}, \quad (63)$$

где φ_1 есть угол поворота кулачка. Разделив уравнение (62) на уравнение (63), получаем:

$$\frac{v_2}{\omega_1} = \frac{d\rho}{d\varphi_1},$$

откуда

$$d\rho = \frac{v_2}{\omega_1} d\varphi_1. \quad (64)$$

Так как угловая скорость ω_1 нами принята постоянной, то скорость v_2 можно представить как функцию угла поворота φ_1 кулачка в виде

$$v_2 = f(\varphi_1).$$

Подставляя в уравнение (64), получим:

$$d\rho = \frac{f(\varphi_1) d\varphi_1}{\omega_1},$$

откуда

$$\int_{\rho_0}^{\rho} d\rho = \frac{1}{\omega_1} \int_0^{\varphi} f(\varphi_1) d\varphi_1,$$

или

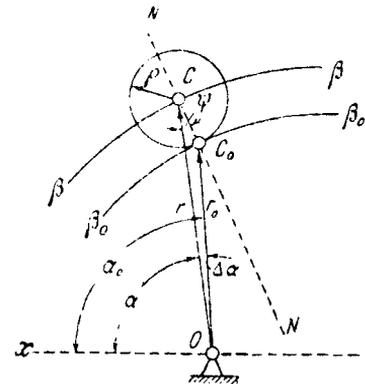
$$\rho - \rho_0 = \frac{1}{\omega_1} \int_0^{\varphi} f(\varphi_1) d\varphi_1, \quad (65)$$

где ρ_0 есть начальный радиус-вектор кулачка.

Если функция $v_2 = f(\varphi_1)$ задана и заданы начальные положения звеньев, то нетрудно аналитически или графически найти значения интеграла в правой части уравнения (65) при различных значениях угла поворота кулачка. Определив приращения $\rho - \rho_0$ радиуса-вектора, откладываем их на соответствующих радиусах, проведённых через центр вращения кулачка. Соединив полученные точки плавной кривой, определим профиль кулачка.

В рассмотренных примерах были указаны аналитические методы построения теоретических профилей кулачков. Как известно, практические профили кулачков получаются после проведения огибающей к положениям ролика, центр которого совпадает с той точкой штанги или рычага, которая принята в качестве огибаемой. Рассмотрим, как может быть аналитически построен практический профиль кулачка¹⁾.

Пусть методами, изложенными выше, построен теоретический профиль $\beta\beta$ кулачка (фиг. 101а). Требуется построить практический профиль $\beta_0\beta_0$ кулачка, если задан радиус ρ ролика. Для этого во всех точках кривой $\beta\beta$ должны быть проведены нормали к этой кривой и на этих нормалях необходимо отложить радиус ρ ролика. Проведём



Фиг. 101а.

нормаль MN в точке C профиля и отложим на ней радиус ρ ролика. Точка C_0 будет точкой, принадлежащей практическому профилю $\beta_0\beta_0$. Положение точки C_0 может быть найдено следующим образом.

¹⁾ Геронимус Я. Л.: Нахождение профиля кулачка по заданному движению толкателя, Техника воздушного флота, № 3, 1933.

Обозначим переменный радиус-вектор OC , определяющий профиль $\beta\beta$ через r , а переменный угол, образованный этим радиусом-вектором с осью Ox , через α . Теоретический профиль $\beta\beta$ кулачка определится уравнением:

$$r = f(\alpha).$$

Обозначим переменный радиус-вектор OC_0 , определяющий профиль $\beta_0\beta_0$, через r_0 и угол $\Delta\alpha$ и найдём их значения через известные нам величины. Как известно, угол ψ , образованный нормалью NN с радиусом r , равен:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{dr}{r d\alpha}. \quad (65a)$$

Далее, из треугольника COC_0 имеем:

$$r_0 = r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \psi,$$

или, принимая во внимание уравнение (65a) и что

$$\cos \psi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi}} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\alpha}\right)^2}}$$

получаем:

$$r_0 = r^2 + \rho^2 - \frac{2r^2\rho}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\alpha}\right)^2}}. \quad (65b)$$

Угол $\Delta\alpha$ определится из условия:

$$\frac{\rho}{r} = \frac{\sin \Delta\alpha}{\sin(\psi + \Delta\alpha)},$$

откуда

$$\sin \Delta\alpha = \frac{\rho}{r} \sin(\psi + \Delta\alpha),$$

или, принимая во внимание уравнение (65a),

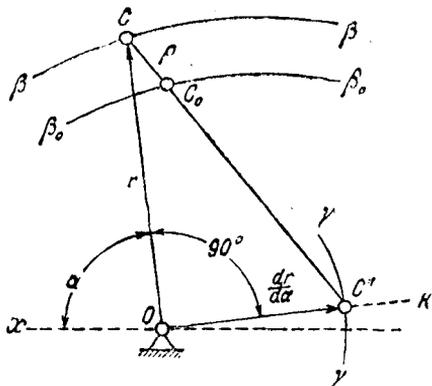
$$\operatorname{tg} \Delta\alpha = \frac{\rho \frac{dr}{d\alpha}}{r \left(\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\alpha}\right)^2} - \rho \right)} \quad (65c)$$

Таким образом, для построения по точкам практического профиля $\beta_0\beta_0$ кулачка вычисляем по заданному закону $r = f(\alpha)$ величины $\frac{dr}{d\alpha}$ и с помощью уравнений (65b) и (65c) определяем значения радиусов-векторов r_0 и углов $\alpha_0 = \alpha + \Delta\alpha$, образованных этими радиусами с осью Ox .

Та же задача может быть решена и графоаналитически. Для этого полученное значение $\frac{dr}{d\alpha}$ для рассматриваемой точки C теоретического профиля откладываем на луче OK , проведённом под углом в 90° к радиусу-вектору r . Соединив полученную точку C' с точкой C и отложив на этой прямой от точки C отрезок $CC_0 = \rho$, получим точку C_0 практического профиля $\beta_0\beta_0$ кулачка. Последнее следует из рассмотрения треугольника $CC'O$. Имеем:

$$\operatorname{tg} C'CO = \frac{OC'}{OC} = \frac{dr}{r} = \operatorname{tg} \psi,$$

т. е. прямая CC' есть нормаль к профилю $\beta\beta'$ кулачка. Указанный графоаналитический метод значительно упрощает технику построения практических профилей кулачков и может быть распространён и на кулачковые механизмы с качающимся рычагом, снабжённым роликом.



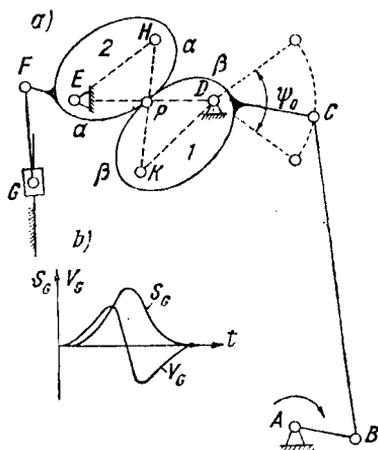
Фиг. 101б.

значения $\frac{dr}{d\alpha}$, после чего построение практического профиля выполняется аналогично случаю, указанному на фигуре 101а.

У. НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ КУЛАЧКОВЫХ И ЗУБЧАТЫХ МЕХАНИЗМОВ.

§ 17. Механизмы перекатывающихся рычагов.

Переходим к задачам синтеза некоторых частных случаев кулачковых механизмов. В первую очередь рассмотрим механизмы перекатывающихся рычагов. На фиг. 102,а показан один из таких механизмов. Кривошип AB



Фиг. 102.

переходит к задачам синтеза некоторых частных случаев кулачковых механизмов. В первую очередь рассмотрим механизмы перекатывающихся рычагов. На фиг. 102,а показан один из таких механизмов. Кривошип AB посредством шатуна BC передаёт движение рычагу DC , качающемуся около точки D . С рычагом DC жёстко связан кулачок 1, взаимодействующий на кулачок 2. Кулачок 2 жёстко связан с рычагом EF , качающимся около точки E . Рычаг EF входит в вращательную пару с шатуном FG , который перемещает ползун G . Задачей механизма является перемещение точки G по закону, показанному на фиг. 102,б. Звенья 1 и 2 называются перекатывающимися рычагами. В рассматриваемом механизме профили $\alpha\alpha'$ и $\beta\beta'$ рычагов представляют собой эллипсы и являются центрами в относительном движении звеньев 1 и 2. Поэтому передача движения между звеньями 1 и 2 может быть осуществлена также промежуточным звеном HK , представляющим собой шатун механизма шарнирного антипараллелограмма $DKHE$.

В дальнейшем мы будем рассматривать только вопрос о проектировании профилей перекатывающихся рычагов, оставляя в стороне вопрос о проектировании шарнирных цепей, связанных с рычагами. Проектирование этих шарнирных цепей может быть сделано общими приёмами, указанными в других главах настоящей работы.

Механизмы катающихся рычагов могут быть разделены на две группы. В первую группу можно отнести те механизмы, у которых оба рычага являются подвижными, во вторую группу — те механизмы, у которых один из рычагов неподвижен. Механизм первой группы показан на фиг. 102,а, механизм

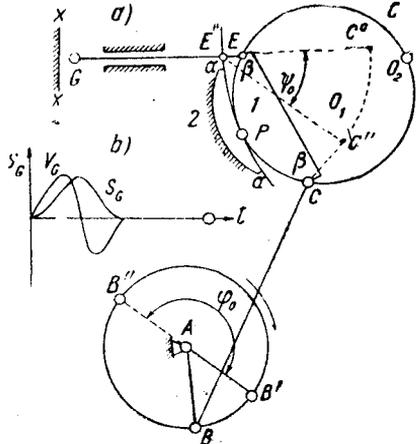
второй группы показан на фиг. 103, а. В этом механизме рычаг 2 неподвижен, а рычаг 1, представляющий собой окружность радиуса O_2P , приводится в движение двухповодковой группой ABC . В точке E к рычагу 1 присоединено звено EG ,двигающееся поступательно в направляющих.

В большинстве случаев профили катающихся рычагов представляют собой центрыды в относительном движении, т. е. перекатывание происходит без скольжения.

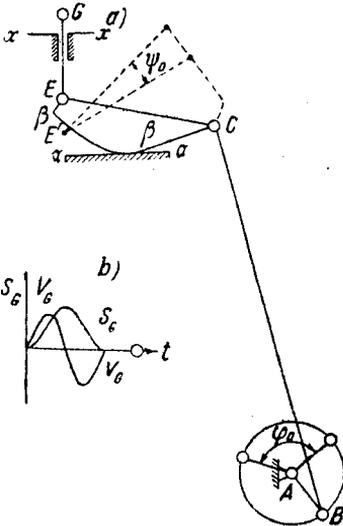
В некоторых случаях встречаются механизмы, у которых профили катающихся рычагов представляют собой взаимнооглабляемые кривые (фиг. 104, а).

Основной задачей почти всех механизмов с катающимися рычагами является сообщение какой-либо точке возвратно-поступательного движения по заданному закону. Так, на фиг. 102, а, 103, а, 104, а и 105, а в качестве точки, совершающей возвратно-поступательное движение, выбрана точка G . В механизме, показанном на фиг. 102, а, эта точка имеет непрерывное возвратно-поступательное движение по закону, заданному диаграммами скоростей и перемещений (фиг. 102, б).

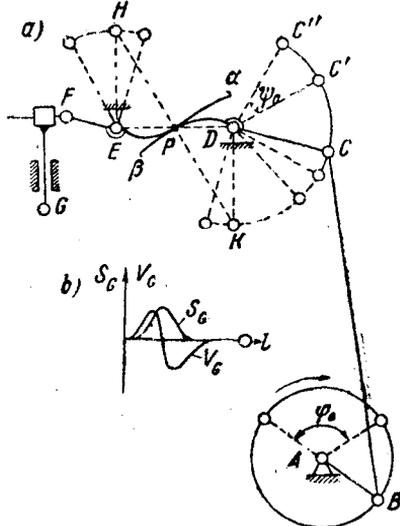
В механизмах, изображённых на фиг. 103, а, 104, а и 105, а, точка G имеет возвратно-поступательное движение с остановкой. Законы движения точки G даны диаграммами, изображёнными на фиг. 103, б, 104, б и 105, б. Остановка точки G



Фиг. 103.



Фиг. 104.



Фиг. 105.

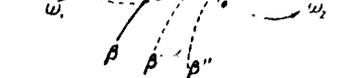
в механизме, показанном на фиг. 103, а, осуществляется следующим способом. При повороте кривошипа AB по часовой стрелке на угол в 180° , определяемый положениями B' и B'' точки B , рычаг 1 перекатывается по неподвижному рычагу 2 сначала в направлении, совпадающем с направлением вращения часовой стрелки, а потом в противоположном направлении. При этом точка E перемещается из положения E'' снова в это же положение; точка C — из положения C'' в то же самое положение, а точка G — из крайнего левого положе-

ния, в котором звено EG точкой G упирается в некоторый ограничитель хода xx , в своё начальное положение. В этом крайнем положении звена EG заканчивается перекатывание рычага 1 по рычагу 2, и рычаг 2 начинает вращаться около точки E'' , поворачиваясь на угол ϕ_0 вверх и вниз. При этом кривошип AB поворачивается на угол $\varphi_0 = 180^\circ$. Далее, движение повторяется. Таким образом осуществляется движение звена EG с остановками.

Аналогичные движения точки G воспроизводятся и механизмами, показанными на фиг. 104, а и 105, а. На фиг. 105, а перекатывающиеся рычаги с профилями Ea и $D\beta$ заменяют шарнирно-рычажный механизм $EHKD$ с равными по длине кривошипами EH и KD . Так как профили Ea и $D\beta$ суть центры в относительном движении, то точка P соприкосновения этих профилей лежит на прямой ED . В положении, когда рычаг DC занимает положение DC' , точка P совпадает с точкой D , и, следовательно, профили Ea и $D\beta$ соприкасаются в этой точке. Тогда угловая скорость рычага Ea становится равной нулю и точка G звена HG останавливается. Далее, происходит поворот рычага DC на угол ϕ_0 против часов и по часам. При этом профили Ea и $D\beta$ не перекатываются друг по другу, кривошип AB поворачивается на угол φ_0 , после чего движение повторяется. Аналогичное движение осуществляется в механизме, показанном на фиг. 104, а. Здесь неподвижности точки G при её упоре в ограничитель хода xx соответствует угол ϕ_0 поворота рычага EC и угол φ_0 поворота кривошипа AB . Для того, чтобы описанное движение всех указанных механизмов было возможным и происходило без какого-либо перерыва, необходимо, чтобы профили перекатывающихся рычагов находились в постоянном соприкосновении, что достигается силовым замыканием, осуществляемым в большинстве случаев с помощью пружин.

Построение профилей перекатывающихся рычагов может быть всегда сделано с помощью приёмов, разобранных нами выше. Обычно задаётся требуемый закон движения точки G . Далее может быть задан или профиль aa' одного из подвижных рычагов, как это имеет место, например, в механизме, показанном на фиг. 102, а или на фиг. 105, а, или может быть задан профиль неподвижного рычага, как на фиг. 103, а, или, наконец, профиль aa' огибаемой (фиг. 104, а).

Рассмотрим различные случаи, с которыми можно встретиться при проектировании профилей рычагов. Пусть, например, требуется построить профиль $B\beta$ рычага 2, сопряжённого с рычагом 1 (фиг. 106), если задан профиль Aa рычага 1, закон его движения в форме $\omega_1 = f(t)$ и начальное положение профиля. Если заданный профиль Aa рычага 1 представляет собой центриду в относительном движении, то построение сопряжённого профиля $B\beta$ рычага 2 ведётся следующим образом. Соединяем неподвижные точки A и B прямой и вращаем профиль Aa по заданному закону:



Фиг. 106.

Тогда точки P_0, P'_0, P''_0, \dots пересечения профиля Aa с прямой AB определяют мгновенные центры вращения в относительном движении перекатывающихся рычагов. Геометрическое место этих точек определит бицентриду. Законом движения профиля $B\beta$ сопряжённого рычага будет:

$$\varphi_1 = \psi(t) = \int_{t_0}^t \omega_1 dt = \int f(t) dt.$$

Тогда точки P_0, P'_0, P''_0, \dots пересечения профиля Aa с прямой AB определяют мгновенные центры вращения в относительном движении перекатывающихся рычагов. Геометрическое место этих точек определит бицентриду. Законом движения профиля $B\beta$ сопряжённого рычага будет:

$$\varphi_2 = \Phi(t) = \int_{t_0}^t \omega_2 dt, \quad (66)$$

где

$$\omega_2 = \frac{P_0A}{P_0B} \omega_1.$$

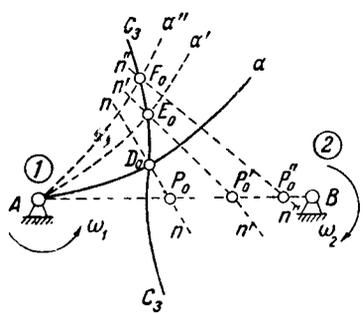
Находим, далее, точки рычага 2, последовательно совпадающие с точками P_0, P'_0, P''_0, \dots . Для этого проводим через точку B ряд лучей, образующих

между собой вычисленные по уравнению (66) углы $\varphi_2, \varphi_2'', \varphi_2''', \dots$, и из точки B делаем на этих лучах засечки радиусами BP_0', BP_0'', \dots . Тогда получим точки P_0, D, C, \dots , которые и образуют профиль рычага 2.

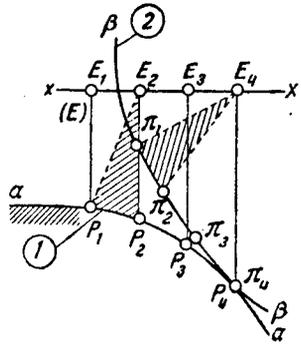
Если профиль рычага 1 будет представлять собой огибаемую кривую, то дополнительно должен быть задан закон движения рычага 2 или линия зацепления сопряжённых профилей. При задании закона движения рычага 2 построение профиля этого рычага сведётся к построению огибаемой кривой для ряда заданных положений профиля рычага 1, для чего можно воспользоваться методом обращения движения, изложенным в главе I. При задании линии зацепления C_3C_2 (фиг. 107) находим точки D_0, E_0, F_0, \dots пересечения профиля рычага 1 в положениях $A\alpha, A\alpha', A\alpha'', \dots$ с линией C_3C_2 . Для этого перемещаем профиль $A\alpha$ по закону, заданному уравнением:

$$\varphi_1 = \int_{t_1}^{t_2} \omega_1 dt.$$

В точках D_0, E_0, F_0, \dots проводим к профилю рычага нормали $nn, n'n', n''n'', \dots$. Точки P_0, P_0', P_0'', \dots пересечения проведённых нормалей с линией AB будут мгновенными центрами вращения. Зная положения мгновенных центров враще-



Фиг. 107.



Фиг. 108.

ния, легко согласно уравнению (66) определить угловую скорость ω_2 рычага 2, после чего построение профиля этого рычага сводится к ранее рассмотренному случаю.

Если один из рычагов, например, рычаг 1 (фиг. 108) будет неподвижен и является центроидой в абсолютном движении, то достаточно иметь заданным закон движения какой-либо точки E сопряжённого рычага 2. Пусть точка E должна двигаться по заданной прямой xx , занимая последовательно положения E_1, E_2, E_3 и E_4 . Требуется построить профиль $\beta\beta$ рычага 2. Для этого в точках E_1, E_2, E_3 и E_4 проводим к прямой xx перпендикуляры. Точки P_1, P_2, P_3 и P_4 пересечения этими перпендикулярами заданного профиля $\alpha\alpha$ рычага 1 будут мгновенными центрами вращения для соответствующих положений точки E . Теперь нетрудно, используя условие равенства дуг $\cup P_1P_2 = \cup \pi_1\pi_2$; $\cup P_2P_3 = \cup \pi_2\pi_3$; $\cup P_3P_4 = \cup \pi_3\pi_4$ и равенства отрезков $E_1P_1 = E_4\pi_1$; $E_2P_2 = E_4\pi_2$; $E_3P_3 = E_4\pi_3$, построить с помощью ранее изложенных приёмов профиль $\beta\beta$ рычага 2.

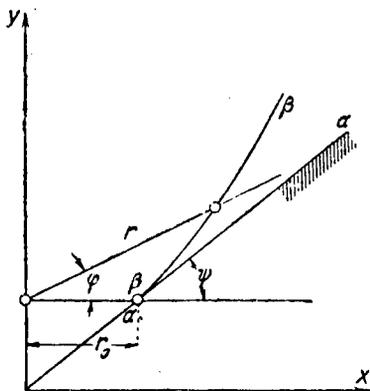
Если неподвижный рычаг $\alpha\alpha$ является огибаемой, то для построения профиля $\beta\beta$ подвижного рычага необходимо, зная закон движения подвижного рычага. Тогда построение этого профиля сведётся к построению огибающей по заданным положениям огибаемой.

В тех случаях, когда профили перекатывающихся рычагов являются центроидами в относительном движении и заданный профиль является прямой или какой-либо простейшей кривой, то сопряжённый профиль можно построить, используя вышеразобранные методы аналитического синтеза, если

составить его уравнение. Так, например, если профиль aa (фиг. 109) неподвижного рычага представляет собой прямую, то уравнение профиля $\beta\beta$ подвижного рычага будет:

$$r = r_0 e^{\psi \operatorname{ctg} \varphi},$$

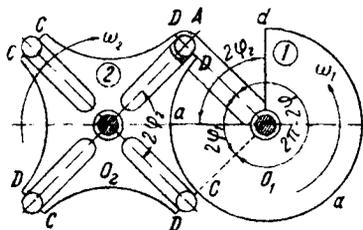
т. е. профиль $\beta\beta$ представляет собой логарифмическую спираль ¹⁾. Если в механизме перекатывающихся рычагов типа, изображённого на фиг. 105, один из профилей будет очерчен по логарифмической спирали, то и другой профиль также будет логарифмической спиралью и т. д.



Фиг. 109.

Как известно, механизм мальтийского креста предназначен для воспроизведения неравномерного вращательного движения с остановками. Различные соотношения между периодами движения и покоя достигаются путём подбора необходимого количества цевок и их расположения на ведущем звене. Механизмы мальтийских крестов могут быть разбиты на две группы. В первую группу должны быть отнесены механизмы правильных мальтийских крестов, а во вторую группу — механизмы неправильных мальтийских крестов.

Рассмотрение вопросов синтеза мальтийских крестов начнём с задач синтеза механизмов правильных мальтийских крестов. На фиг. 110 показана кинематическая схема механизма правильного мальтийского креста с внешним зацеплением. Ведущее звено 1 несёт на себе цевку A , входящую последовательно в симметрично расположенные прорезы ведомого звена 2. Для предупреждения самопроизвольного движения креста после выхода цевки из прореза ведущее звено 1 снабжено запирающей дугой aa , скользящей в периоде покоя креста по дуге CD ведомого креста 2.



Фиг. 110.

Рассмотрим вопрос о соотношении между временами движения и покоя креста при равномерном вращении ведущего звена и вопрос о связи этих времён с количеством прорезей креста и цевки ведущего звена. Если число прорезей креста равно z , то угол $2\varphi_2$ (фиг. 110) между двумя соседними прорезями, являющийся углом поворота креста за период его движения, будет равен:

$$2\varphi_2 = \frac{2\pi}{z}.$$

Угол $2\varphi_1$ поворота ведущего звена за тот же период движения будет равен:

$$2\varphi_1 = 2 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_2 \right) = \pi \left(1 - \frac{2}{z} \right).$$

¹⁾ Holzer H.: Wälzhebel, VDI, т. 52, № 51, 1908, стр. 2043—2051.

²⁾ См., например, Alt H.: Regelmässige und unregelmässige Malteserkreuzgetriebe, Maschinenbau, т. 9, № 6, 1930, стр. 202—205; Беккер И. Э.: Кинематика мальтийских крестов, Вестник металлопромышленности, № 10, 1938 стр. 74—88. Подробный перечень работ по механизмам мальтийских крестов см. в книге Артоболевский Н. И.: Теория механизмов и машин, Гостехиздат, 1940, стр. 733.

Угол, соответствующий периоду остановки креста, будет равен:

$$2\pi - 2\varphi_1 = 2\pi - \pi \left(1 - \frac{2}{z}\right) = \pi \left(1 + \frac{2}{z}\right).$$

Время t_d движения креста будет равно:

$$t_d = \frac{30}{\pi n_1} 2\varphi_1 = \frac{30}{n_1} \left(1 - \frac{2}{z}\right), \quad (67)$$

где n_1 — число оборотов ведущего звена I . Время t_n покоя креста будет равно:

$$t_n = \frac{30}{\pi n_1} (2\pi - 2\varphi_1) = \frac{30}{n_1} \left(1 + \frac{2}{z}\right). \quad (68)$$

Время T полного оборота звена I будет равно:

$$T = t_d + t_n,$$

откуда

$$\frac{t_d}{T} + \frac{t_n}{T} = 1. \quad (69)$$

Так как

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{60}{n_1},$$

то

$$\frac{t_d}{T} = \frac{1}{2} - \frac{1}{z} \quad (70)$$

и

$$\frac{t_n}{T} = \frac{1}{2} + \frac{1}{z}. \quad (71)$$

Из уравнений (70) и (71) следует, что величина отношения времени покоя к общему времени движения больше величины отношения времени движения к общему времени движения на величину

$$\frac{t_n}{T} - \frac{t_d}{T} = \frac{2}{z}. \quad (72)$$

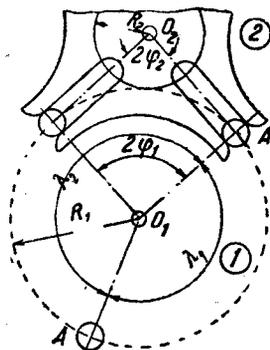
Из уравнений (70) и (71) далее следует, что число прорезей z не может быть меньше трёх. Число цевок может быть большим единицы, как, например, это имеет место в механизме, показанном на фиг. 111, где число цевок равно двум.

Рассмотрим теперь связь между числом прорезей и цевок. Обозначим число цевок через k . Тогда уравнение, связывающее отношение времени движения и покоя с общим временем движения, аналогичное уравнению (69), в общем виде должно быть написано так:

$$\sum_{i=1}^{i=k} \frac{t_{di}}{T} + \sum_{i=1}^{i=k} \frac{t_{ni}}{T} = 1. \quad (73)$$

Но периоды движения в правильных крестах равны между собой, т. е.

$$t_{d1} = t_{d2} = t_{d3} = \dots = t_d.$$



Фиг. 111.

Поэтому сумма времён движения будет равна:

$$\sum_{i=1}^{i=k} t_{дi} = kt_{д},$$

и уравнение (73) перепишется так:

$$k \frac{t_{п}}{T} + \sum_{i=1}^{i=k} \frac{t_{дi}}{T} = 1. \quad (74)$$

Но согласно уравнению (70)

$$K \frac{t_{п}}{T} = \frac{k}{2} - \frac{k}{z}, \quad (75)$$

следовательно,

$$\sum_{i=1}^{i=k} \frac{t_{дi}}{T} = 1 - \frac{k}{2} + \frac{k}{z}. \quad (76)$$

Так как сумма отношений времён покоя креста к полному времени движения ведущего звена должна быть меньше единицы, т. е.

$$1 - \frac{k}{2} + \frac{k}{z} < 1,$$

то

$$k < \frac{2}{1 - \frac{2}{z}}. \quad (77)$$

Из неравенства (77) следует, что с увеличением числа z прорезей число k цевок уменьшается. В самом деле, при минимальном числе прорезей z креста, равном трём, получаем, что

$$k < \frac{2}{1 - \frac{2}{3}},$$

т. е. $k < 6$. Следовательно, число цевок может быть равным

$$k = 1, 2, 3, 4 \text{ и } 5.$$

При $z=4$ получаем $k < 4$, т. е. число цевок может быть равным

$$k = 1, 2, 3.$$

При $z=5$ получаем $k < 3$, (3), т. е. число цевок может быть равным

$$k = 1, 2, 3.$$

При числе прорезей, большем 5, получаем, что число цевок может равняться только двум, так как при увеличении числа z в неравенстве (77) величина, стоящая в правой части неравенства, стремится к двум. Так, например, при $z=10$ имеем $k < 2,5$, т. е. число цевок может быть равным $k=1$ или 2.

С помощью уравнений (70), (71), (75) и (76) и неравенства (77) может быть всегда сделан расчёт времени движения и покоя и выбор необходимого количества прорезей и цевок.

Пусть, например, требуется определить основные параметры механизма мальтийского креста, если ставится условие, чтобы этим крестом осуществлялось три периода покоя и три периода движения, причём периоды покоя должны быть по возможности продолжительнее. Из уравнения (71) следует, что для выполнения последнего условия необходимо выбрать число z прорезей наименьшим. Выбираем его равным $z=3$. Из неравенства (77) следует, что при $z=3$ число k цевок может быть выбрано в пределах от 1 до 5, т. е.

число $k=3$ может быть для этого случая использовано. Из уравнения (70) получаем отношение времени движения t_d к общему времени T :

$$\frac{t_d}{T} = \frac{1}{2} - \frac{1}{z} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Сумма всех отношений времён движения определится из уравнения (75):

$$k \frac{t_d}{T} = \frac{k}{2} - \frac{k}{z} = \frac{1}{2}.$$

Сумма всех отношений времён покоя определится из уравнения (76):

$$\sum_{i=1}^k \frac{t_{ni}}{T} = \sum \frac{t_{ni}}{T} = 1 - \frac{k}{2} + \frac{k}{z} = 1 - \frac{3}{2} + \frac{3}{3} = \frac{1}{2}.$$

Если все три периода покоя будут одинаковыми, то отношение одного периода покоя к общему времени движения ведущего звена будет равно:

$$\frac{t_n}{T} = \frac{\sum t_{ni}}{3} = \frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{6}.$$

Для определения углов, координирующих положение цевок, можно воспользоваться условием, что отношение угла λ , заключённого между двумя радиусами, соединяющими центры двух соседних цевок с центром вращения ведущего звена, к полному углу поворота ведущего звена равно:

$$\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{t_d + t_n}{T}. \quad (78)$$

В уравнении (78) t_d есть постоянный для каждого рассматриваемого механизма период движения, а t_n — период покоя, который может быть различным для различных углов λ . Так, для механизма, показанного на фиг. 111, имеем:

$$\frac{\lambda_1}{2\pi} = \frac{t_d + t_{n1}}{T},$$

$$\frac{\lambda_2}{2\pi} = \frac{t_d + t_{n2}}{T}.$$

В рассмотренном выше случае период покоя был нами принят постоянным. Следовательно, углы λ будут одинаковы для всех трёх цевок. Поэтому

$$\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{t_d + t_n}{T} = \frac{\frac{1}{6} + \frac{1}{6}}{1} = \frac{1}{3},$$

откуда

$$\lambda = \frac{2\pi}{3},$$

т. е. угол между двумя соседними радиусами равен 120° .

Для того, чтобы более ясно представить себе зависимость между величинами z , k , $\frac{t_d}{T}$ и $\frac{t_n}{T}$, приводим таблицу¹⁾ соответственных значений этих величин при одинаковых периодах покоя.

1) А. И. Н.: Regelmässige und unregelmässige Malteserkreuzgetriebe, Maschinenbau, т. 9, № 6, 1930, стр. 204.

Таблица 1. Зависимость между величинами z , k , $\frac{t_{\pi}}{T}$ и $\frac{t_{II}}{T}$.

z	$2\varphi_2$	$\frac{t_{\pi}}{T}$	$\frac{t_{II}}{T}$ при количестве цевок, равном:			
			$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
3	120°	0,1667	0,8333	0,3333	0,1667	0,0833
4	96°	0,2500	0,7500	0,2500	0,0833	—
5	72°	0,3000	0,7000	0,2000	0,0333	—
6	60°	0,3333	0,6667	0,1667	—	—
7	$51^{\circ}26'$	0,3571	0,6429	0,1429	—	—
8	45°	0,3750	0,6250	0,1250	—	—
9	40°	0,3889	0,6111	0,1111	—	—
10	36°	0,4000	0,6000	0,1000	—	—
12	30°	0,4167	0,5833	0,0833	—	—

Из таблицы видно, что некоторые значения отношения $\frac{t_{II}}{T}$ могут иметь место при различном числе z цевок. В самом деле, для

$$\frac{t_{II}}{T} = 0,0833 \approx \frac{1}{12}$$

имеем следующие три возможных случая:

- 1) $z=3$, $\frac{t_{\pi}}{T}=0,1667$, $k=4$, $\frac{t_{II}}{T}=\frac{1}{2}$,
- 2) $z=4$, $\frac{t_{\pi}}{T}=0,2500$, $k=3$, $\frac{t_{II}}{T}=\frac{1}{3}$,
- 3) $z=12$, $\frac{t_{\pi}}{T}=0,4167$, $k=2$, $\frac{t_{II}}{T}=\frac{1}{5}$.

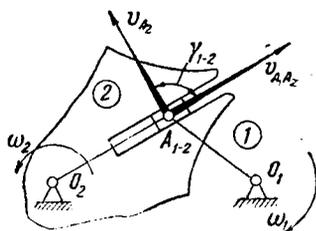
Соотношения между размерами звеньев могут быть определены из уравнений, которые легко получаются из фиг. 111:

$$R_1 + R_2 = (O_1O_2) = l,$$

$$R_1 = l \sin \varphi_2 = l \sin \frac{\pi}{z},$$

$$R_2 = l \left(1 - \sin \frac{\pi}{z} \right).$$

Переходя к рассмотрению вопросов динамического синтеза, надо указать, что углы давления в механизмах мальтийских крестов являются постоянными и равны 90° . Последнее легко может быть показано, если произвести замену высшей пары низшими парами (фиг. 112). Тогда полученный механизм будет кулисным механизмом, у которого угол γ_{12} между абсолютной скоростью v_{A_1} точки A_2 ведомого звена 2 и относительной скоростью $v_{A_2A_1}$ точки A_2 относительно точки A_1 будет всегда постоянным и равным 90° . Таким образом, в этих механизмах мы имеем наилучшие условия работы с точки зрения возможности заклинивания механизма и его коэффициента полезного действия. Для обеспечения плавной работы этих механизмов необходимо,



Фиг. 112.

чтобы в момент входа цевки A в паз (фиг. 113) скорость v_A точки A цевки была направлена по оси паза, т. е. чтобы угол β между осью паза и радиусом R_1 равнялся 90° .

Рассмотрим механизм правильного мальтийского креста с внутренним зацеплением (фиг. 114). Этим механизмом осуществляется передача вращения с остановками с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 звеньев 1 и 2, совпадающими по знаку.

Угол поворота $2\varphi_2$ креста за период его движения равен

$$2\varphi_2 = \frac{2\pi}{z},$$

где z есть число прорезей.

Угол $2\varphi_1$ поворота ведущего звена за тот же период движения креста равен:

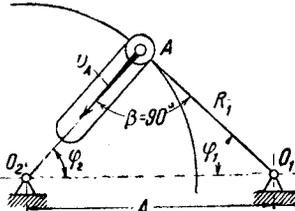
$$2\varphi_1 = 2 \left(\frac{\pi}{2} + \varphi_2 \right) = \pi \left(1 + \frac{2}{z} \right).$$

Угол, соответствующий периоду остановки креста, равен:

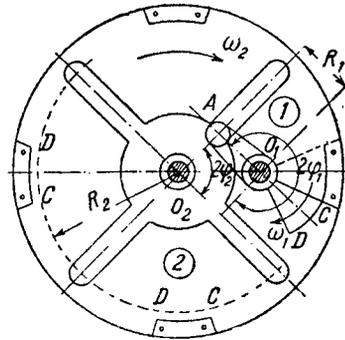
$$2\pi - 2\varphi_1 = 2\pi - \pi \left(1 + \frac{2}{z} \right) = \pi \left(1 - \frac{2}{z} \right).$$

Таким образом, при одном и том же числе z прорезей угол, соответствующий периоду движения креста с внешним зацеплением, равняется углу, соответствующему периоду остановки креста с внутренним зацеплением, и наоборот.

В соответствии с этим изменяет своё значение и отношение вре-



Фиг. 113.



Фиг. 114.

мен движения и остановки к общему времени движения ведущего звена. Имеем:

$$t_{\text{I}} = \frac{30}{\pi n_1} 2\varphi_1 = \frac{30}{n_1} \left(1 + \frac{2}{z} \right) \quad (79)$$

и

$$t_{\text{II}} = \frac{30}{\pi n_1} (2\pi - 2\varphi_1) = \frac{30}{n_1} \left(1 - \frac{2}{z} \right) \quad (80)$$

и, далее,

$$\frac{t_{\text{I}}}{T} = \frac{1}{2} + \frac{1}{z} \quad (81)$$

$$\frac{t_{\text{II}}}{T} = \frac{1}{2} - \frac{1}{z} \quad (82)$$

Из уравнений (81) и (82) следует, что величина отношения времени движения креста к общему времени движения больше величины отношения времени покоя к общему времени движения на величину

$$\frac{t_d}{T} - \frac{t_r}{T} = \frac{z}{z} \quad (83)$$

Соотношения между размерами звеньев могут быть определены из следующих уравнений:

$$R_2 - R_1 = (O_1O_2) = l.$$

$$R_1 = l \sin \varphi_2 = l \sin \frac{\pi}{z}.$$

$$R_2 = l \left(1 + \sin \frac{\pi}{z} \right).$$

Углы давления γ_{12} в этом механизме равны 90° и постоянны по величине.

Рассмотрим, далее, механизмы неправильных мальтийских крестов. В этих механизмах в отличие от механизмов правильного мальтийского креста

периоды движения креста могут быть не равны между собой. Последнее достигается тем, что прорези креста располагаются несимметрично (фиг. 115).

Для того, чтобы движение механизма было возможно, необходимо, чтобы число прорезей было кратно числу цевок. Следовательно, если обозначить по-прежнему число прорезей через z , число цевок — через k , то зависимость между ними может быть представлена так:

$$ak = z, \quad (84)$$

где a есть некоторое целое число.

Величина

$$a = \frac{z}{k} \quad (85)$$

будет равна числу оборотов цевочного колеса за полный оборот креста. Если обозначить углы, образуемые осями прорезей с линией O_1O_2 в моменты начала зацепления, через φ_{2i} , где индекс i

принимает значения $i = 1, 2, 3, \dots, k$, то сумма этих углов будет равна:

$$\sum_{i=1}^{i=k} 2\varphi_{2i} = \frac{2\pi}{a}, \quad (86)$$

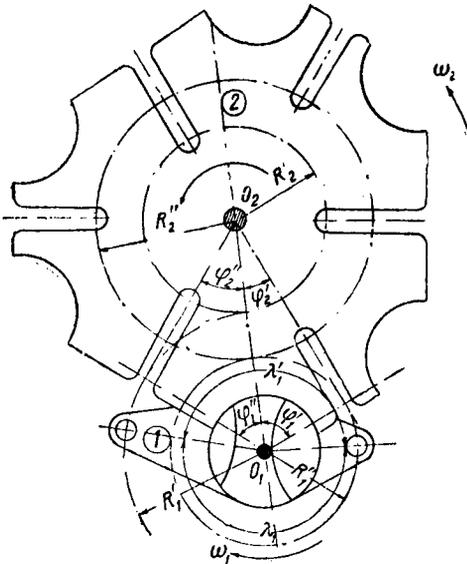
или, принимая во внимание равенство (85),

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{i=k} 2\varphi_{2i} = \frac{2\pi}{z}. \quad (87)$$

Угол поворота φ_{1i} ведущего звена равен:

$$\varphi_{1i} = \frac{\pi}{2} - \varphi_{2i}, \quad (88)$$

где $i = 1, 2, 3, \dots, k$.



Фиг. 115.

Время движения $t_{дi}$ креста за период нахождения в зацеплении i -й цевки равно

$$t_{дi} = \frac{30}{\pi n_1} 2\varphi_{1i},$$

где n_1 есть число оборотов ведущего звена I .

Сумма всех времён движения креста будет равна:

$$\sum_{i=1}^{i=k} t_{дi} = \frac{30}{\pi n_1} \sum_{i=1}^{i=k} 2\varphi_{1i}. \quad (89)$$

Подставляя в уравнение (89) значение угла φ_{1i} из уравнения (88), получим:

$$\sum_{i=1}^{i=k} t_{дi} = \frac{30}{\pi n_1} \sum_{i=1}^{i=k} (\pi - 2\varphi_{2i}). \quad (90)$$

Подставляя в последнее уравнение значение угла $2\varphi_{2i}$ из уравнения (87), получим:

$$\sum_{i=1}^{i=k} t_{дi} = \frac{30}{n_1} \left(k - \frac{2k}{z} \right) = \frac{30}{n_1} k \left(1 - \frac{2}{z} \right). \quad (91)$$

Согласно уравнению (73) имеем:

$$\sum_{i=1}^{i=k} \frac{t_{дi}}{T} + \sum_{i=1}^{i=k} \frac{t_{нi}}{T} = 1. \quad (92)$$

Из уравнения (91) следует:

$$\sum_{i=1}^{i=k} \frac{t_{дi}}{T} = k \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{z} \right). \quad (93)$$

Подставляя в уравнение (92), получим:

$$\sum_{i=1}^{i=k} \frac{t_{нi}}{T} = 1 - \sum_{i=1}^{i=k} \frac{t_{дi}}{T} = 1 - \frac{k}{2} + \frac{k}{z}. \quad (94)$$

Из последнего уравнения и условия, что сумма отношений времён покоя креста к полному времени движения ведущего звена должна быть меньше единицы, следует, что всегда должно удовлетворяться неравенство:

$$k < \frac{2}{1 - \frac{2}{z}}. \quad (95)$$

Сравнивая неравенства (77) и (95), мы обнаруживаем их полное совпадение. Но если для правильных мальтийских механизмов достаточно при выборе числа прорезей и цевок удовлетворить неравенству (77), то для неправильных мальтийских механизмов необходимо дополнительно к неравенству (95) удовлетворить уравнению (85):

$$a = \frac{z}{k}.$$

Из анализа условий (95) и (85) следует, что если число прорезей равняется трём, то число цевок может равняться только трём и крест не будет иметь никакой симметрии. Если число прорезей будет равно четырём, то число цевок может равняться только двум и, следовательно, крест будет иметь оси симметрии, так как противоположно расположенные прорези должны быть одинаковыми. Если число прорезей будет равно пяти, то из условий (95)

и (85) получаем, что число цевок может быть выбрано равным только единице. Но при одной цевке мы не можем построить механизма неправильного мальтийского креста. Следовательно, неправильный мальтийский крест с числом прорезей, равным пяти, построен быть не может.

Из условий (95) и (85) далее следует, что неправильные кресты с нечётным числом прорезей, большим трёх, вообще не могут быть построены. В неправильных мальтийских крестах с чётным числом прорезей число цевок может равняться только двум.

Соотношения между размерами звеньев могут быть определены из следующих уравнений:

$$\left. \begin{aligned} R'_1 + R'_2 &= (O_1 O_2) = l, \\ R''_1 + R''_2 &= (O_1 O_2) = l, \\ R'_1 &= l \sin \varphi'_2, \\ R'_2 &= l \sin \varphi''_2. \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

Пример 7. Требуется определить основные параметры механизма неправильного мальтийского креста с шестью прорезями (фиг. 115), у которого заданы: один период движения в виде отношения $\frac{t_{x1}}{T} = \frac{3}{8}$ и один период покоя в виде отношения $\frac{t_{n1}}{T} = \frac{1}{8}$.

Из условий (95) и (85) следует, что число цевок у этого механизма может равняться только двум.

Из уравнения (93) следует:

$$\sum_{i=1}^{i=k} \frac{t_{xi}}{T} = \frac{t_{x1}}{T} + \frac{t_{x2}}{T} = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) = \frac{2}{3}.$$

Далее, из уравнения (94) следует:

$$\sum_{i=1}^{i=k} \frac{t_{ni}}{T} = \frac{t_{n1}}{T} + \frac{t_{n2}}{T} = 1 - \frac{2}{2} + \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Так как согласно заданию $\frac{t_{x1}}{T} = \frac{3}{8}$, то

$$\frac{t_{x2}}{T} = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{t_{xi}}{T} - \frac{t_{x1}}{T} = \frac{2}{3} - \frac{3}{8} = \frac{7}{24}.$$

Далее, так как согласно заданию $\frac{t_{n1}}{T} = \frac{1}{8}$, то

$$\frac{t_{n2}}{T} = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{t_{ni}}{T} - \frac{t_{n1}}{T} = \frac{1}{3} - \frac{1}{8} = \frac{5}{24}.$$

Определим теперь углы φ'_1 , φ''_1 , φ'_2 и φ''_2 . Из уравнения (87) имеем:

$$\sum_{i=1}^{i=k} 2\varphi_{2i} = 2\varphi'_2 + 2\varphi''_2 = \frac{2\pi k}{z} = \frac{2}{3}\pi,$$

откуда

$$\varphi'_2 + \varphi''_2 = \frac{\pi}{3} = 60^\circ.$$

Следовательно,

$$\varphi_1 + \varphi_1'' = \pi - \frac{\pi}{3} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

Так как

$$\frac{t_{n1}}{T} = \frac{2\varphi_1'}{2\pi} = \frac{\varphi_1'}{\pi},$$

то, подставляя вместо φ_1' его значение из уравнения (88), получаем:

$$\frac{t_{n1}}{T} = \frac{\varphi_1'}{\pi} = \frac{1}{2} - \frac{\varphi_2'}{\pi},$$

откуда

$$\varphi_2' = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{t_{n1}}{T} \right).$$

Но согласно заданию

$$\frac{t_{n1}}{T} = \frac{3}{8},$$

следовательно,

$$\varphi_2' = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{8} \right) = \frac{\pi}{8} = 22,5^\circ,$$

поэтому угол φ_2'' будет равен:

$$\varphi_2'' = 60^\circ - 22,5^\circ = 37,5^\circ,$$

а углы φ_1' и φ_1'' будут равны:

$$\varphi_1' = 90^\circ - 22,5^\circ = 67,5^\circ,$$

$$\varphi_1'' = 90^\circ - 37,5^\circ = 52,5^\circ.$$

Далее, так как

$$\frac{t_{n1}}{T} = \frac{\lambda_1' - (\varphi_1' + \varphi_1'')}{2\pi},$$

$$\frac{t_{n2}}{T} = \frac{\lambda_1'' - (\varphi_1' + \varphi_1'')}{2\pi},$$

то

$$\lambda_1' = 2\pi \frac{t_{n1}}{T} + \varphi_1' + \varphi_1'' = \frac{2\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} + \frac{7}{24}\pi = \frac{22}{24}\pi = 165^\circ$$

$$\lambda_1'' = 360^\circ - \lambda_1' = 360^\circ - 165^\circ = 195^\circ.$$

Остальные размеры механизма определяются по формулам (96).

§ 19. Зубчатые механизмы с остановками.

Рассмотренные в § 18 механизмы мальтийских крестов воспроизводили движение с остановками, причём при равномерном движении ведущего звена ведомое звено (крест) вращалось неравномерно. Для воспроизведения равномерного движения ведомого звена применяются зубчатые механизмы с эвольвентными профилями зубцов. Простейшим из них будет зубчатый механизм, показанный на фиг. 416. Этот механизм представляет собой два колеса 1 и 2. Колесо 1 является ведущим. При повороте колеса 1 на угол δ колесо 2 находится в движении. При повороте колеса 1 на угол $2\pi - \delta$ колесо 2 будет неподвижно. При одном обороте колеса 1 колесо 2 повернётся на угол

$$\varphi_2 = \frac{2\pi}{z},$$

где z есть число зубцов многозубчатого колеса. При эвольвентном профиле зацепления время покоя t_n колеса 2 будет равно:

$$t_n = \frac{2\pi - \delta}{\omega_1} = \frac{30}{n_1} \left[2 - \frac{(b)}{\pi R_1 \cos \alpha} \right],$$

где n_1 есть число оборотов первого колеса, (ab) — длина линии зацепления, R_1 — радиус первого колеса, α — угол зацепления (обычно равный 20°).
 Время движения t_d будет равно:

$$t_d = \frac{\delta}{\omega_1} = \frac{30}{n_1 \pi R_1 \cos \alpha} (ab)$$

Если полный период времени оборота ведущего звена 1 обозначить через T , то будем иметь:

$$\frac{t_n}{T} + \frac{t_d}{T} = 1.$$

Отношения периодов движения и покоя к полному периоду будут равны:

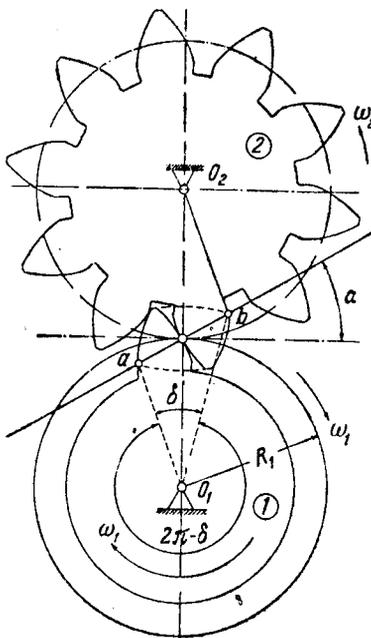
$$\frac{t_n}{T} = 1 - \frac{(ab)}{2\pi R_1 \cos \alpha}$$

и

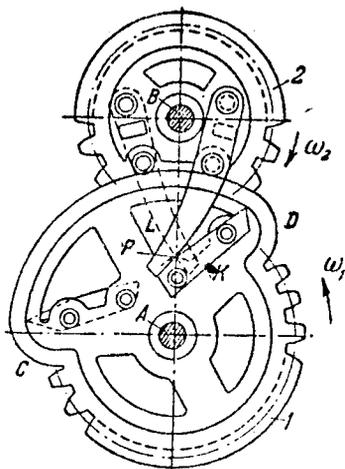
$$\frac{t_d}{T} = \frac{(ab)}{2\pi R_1 \cos \alpha}.$$

Механизм этот работает ударно, так как в момент вхождения в зацепление колесо 2 неподвижно. Для того, чтобы уменьшить удары, рекомендуется

колесо 2 приводить в движение постепенно. Для этого колеса снабжаются дополнительными перекатывающимися рычагами, представляющими собой или центры или взаимноогнбаемые кривые. Механизм этого вида показан на фиг. 117. Рычаги K и L представляют



Фиг. 116.



Фиг. 117.

собой участки центров в относительном движении. Угловая скорость колеса 2 равна:

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{PA}{PB},$$

где P есть мгновенный центр вращения в относительном движении колёс 1 и 2 . Из написанного уравнения следует, что для того, чтобы угловая скорость ω_2 возрастала постепенно, необходимо, чтобы точка P зацепления перемещалась от точки A к точке B . Удар будет отсутствовать, если точка P

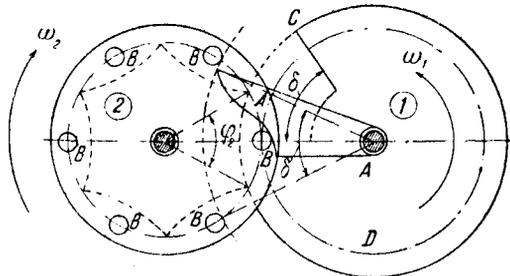
и начальный момент движения будет совпадать с точкой *A*. Для того, чтобы обеспечить отсутствие самопроизвольного движения колеса 2 на колесо 1, имеется запирающая дуга *CD*, которая в момент остановки скользят по соответствующей дуге колеса 2. Таким образом, обеспечивается полная неподвижность колеса 2.

На фиг. 116 и 117 профили зубцов колёс были очерчены по эвольвентам. В зубчатых механизмах с остановками широко также применяются профили зубцов, очерченные по циклоидальным кривым. В частности, используется один частный случай циклоидального зацепления, а именно, так называемое цевочное зацепление. Как известно, профили зубцов цевочного зацепления могут быть построены следующим образом. Пусть заданы центры C_1 и C_2 (фиг. 118). За первую вспомогательную окружность H_1 выбираем центроиду C_1 . Тогда точка этой центроиды, совпадающая с точкой P_0 , опишет при качении по центроиде C_2 эпициклоиду $P_0\mathcal{E}$ (показаны пунктиром). Второй вспомогательной окружностью пусть будет точка, совпадающая с точкой P_0 . Для того, чтобы обеспечить передачу движения, вместо выбранной точки скрепляют с центроидой C_2 ролики F радиуса r , а профили зубцов уменьшают на величину радиуса r ролика, т. е. проводят эквидистанты $\mathcal{E}'\mathcal{E}'$

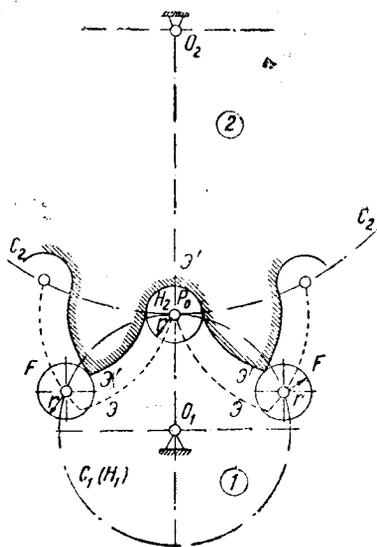
В случае внутреннего зацепления профили зубцов будут представлять собой эквидистанты гипоциклоиды. При реечном зацеплении профили зубцов будут эквидистантами циклоиды. На фиг. 119 показан зубчатый цевочный механизм с остановками с внешним зацеплением, у которого ведущим является звено 1, снабжённое зубцом *A*, действующим на цевки *B*. При одном обороте поворачивается на угол

$$\varphi_2 = \frac{2\pi}{z},$$

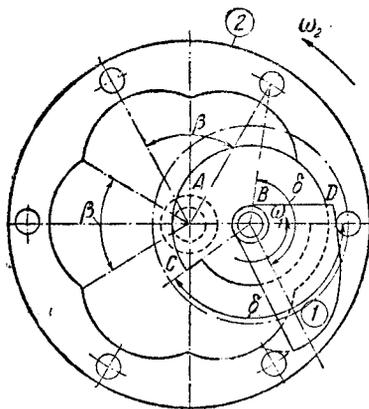
где z есть число цевок. Проектирование зубца *A* ведётся по общим правилам проекти-



Фиг. 119.



Фиг. 118.



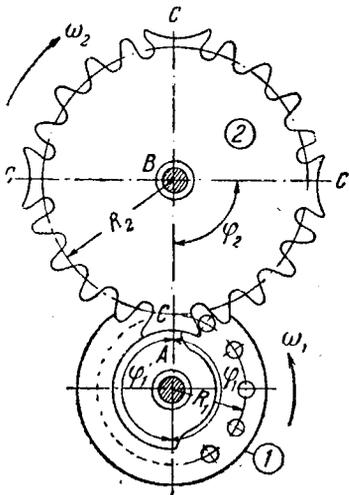
Фиг. 120.

рования цевочных колёс с учётом, чтобы в конце и начале зацепления скорость колеса 2 равнялась нулю.

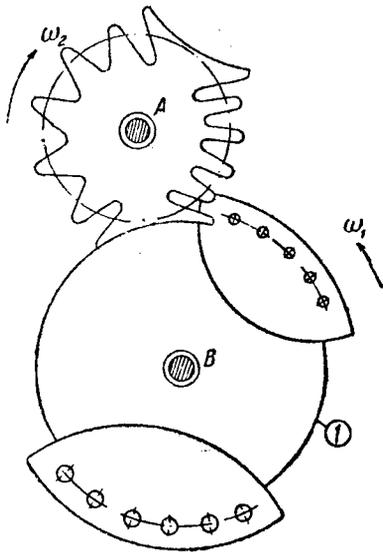
На фиг. 120 показан другой зубчатый цевочный механизм с остановками, у которого зацепление не внешнее, а внутреннее. Для предупреждения самопроизвольного движения звена 2 и, следовательно, размыкания кинематической

цепи звено 1 снабжено запирающей дугой CD , скользящей по соответствующим дугам колеса 2.

На фиг. 121 показан сложный зубчатый цевочный механизм с остановками, являющийся представителем так называемых звездчатых механизмов. Звездчатые механизмы позволяют воспроизвести движение с различными периодами остановки и движения, а также с различными передаточными отношениями угловых скоростей в различные периоды движения, но постоянными внутри каждого периода. Звездчатый механизм, изображенный на фиг. 121, имеет четыре равных периода движения и четыре равных периода покоя, с одним и тем же передаточным отношением во все периоды движения.



Фиг. 121.



Фиг. 122.

На фиг. 122 показан звездчатый механизм с различными периодами покоя и движения, а также с различными передаточными отношениями в периоды движения.

Рассмотрим, как определяются основные параметры звездчатых механизмов¹⁾. Обозначим радиусы начальных окружностей через R_1 и R_2 (рис. 121). угол поворота звена 2 на участке между двумя соседними зубцами — прерывателями C — через φ_2 , угол поворота ведущего (цевочного) колеса, соответствующего углу φ_2 , — через φ_1 , время движения ведомого звена 2 — через t_d и время покоя ведомого звена 2 — через t_n . Тогда будем иметь:

$$\frac{t_d}{T} + \frac{t_n}{T} = 1,$$

где T есть время одного полного оброта ведущего звена 1. Далее имеем:

$$\frac{t_d}{T} = \frac{\varphi_1}{2\pi} \quad (97)$$

$$\frac{t_n}{T} = 1 - \frac{\varphi_1}{2\pi}. \quad (98)$$

Обозначим через ε отношение углов поворота φ_1 и φ_2 звеньев 1 и 2:

$$\varepsilon = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}. \quad (99)$$

¹⁾ Alt H.: Malteserkreuzgetriebe, Werkstattstechnik, т. 10, 1916, стр. 229; Вокс А.: Sternradgetriebe, VDI, т. 73, № 12, 1929, стр. 397—401; Ноекск К.: Sternradgetriebe, VDI, т. 74, № 9, 1930, стр. 265—271.

Из уравнения (97) имеем:

$$\varphi_1 = 2\pi \frac{t_d}{T}$$

Угол φ_2 равен

$$\varphi_2 = \frac{2\pi}{n}$$

где n есть число зубцов прерывателей C . Подставляя полученные выражения для углов φ_1 и φ_2 в уравнение (99), получим:

$$\varepsilon = n \frac{t_d}{T}$$

откуда

$$\frac{\varepsilon}{n} = \frac{t_d}{T}$$

Так как

$$t_d < T, \text{ то } \varepsilon < n,$$

т. е. отношение углов поворота должно быть всегда меньше числа зубцов прерывателей.

Величина отношения ε , вообще говоря, не равна передаточному отношению $i_{12} = \frac{R_2}{R_1}$ *). Связь между этими величинами выражается следующим уравнением:

$$\varepsilon = -i_{12} \left(\frac{n}{2} - 1 \right) + n \frac{4 + 3i_{12}}{\pi} \arcsin \frac{i_{12}}{2(1 + i_{12})}$$

Ниже приводится таблица значений i_{12} для различных ε и чисел n зубцов прерывателей¹⁾.

Таблица 2. Значения передаточного отношения $i_{12} = \frac{R_2}{R_1}$ для различных значений ε и n .

ε	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
5	—	—	—	—	—	4,4165
4	—	—	—	—	3,5329	3,4423
3	—	—	—	2,6480	2,5633	2,4800
2	—	—	1,7642	1,6902	1,6185	1,5489
1	—	0,8814	0,8276	0,7773	0,7307	0,6874
$\frac{5}{6} = 0,8333$	0,7777	0,7260	0,6782	0,6342	0,5938	0,5567
$\frac{4}{5} = 0,8000$	0,7455	0,6951	0,6487	0,6060	0,5670	—
$\frac{3}{4} = 0,7500$	0,6975	0,6491	0,6047	0,5641	0,5271	—
$\frac{2}{3} = 0,6667$	0,6176	0,5729	0,5322	0,4952	0,4617	—
$\frac{5}{8} = 0,6250$	0,5779	0,5350	0,4962	0,4511	0,4295	—
$\frac{3}{6} = 0,6000$	0,5540	0,5124	0,4748	0,4405	0,4104	—
$\frac{1}{2} = 0,5000$	0,4592	0,4226	0,3901	0,3611	0,3353	—
$\frac{2}{5} = 0,4000$	0,3650	0,3343	0,3073	0,2836	—	—
$\frac{3}{8} = 0,3750$	0,3416	0,3124	0,2869	0,2645	—	—
$\frac{1}{3} = 0,3333$	0,3028	0,2762	0,2532	0,2332	—	—
$\frac{1}{4} = 0,2500$	0,2256	0,2048	0,18706	0,17177	—	—
$\frac{1}{5} = 0,2000$	0,17970	0,16264	0,14821	0,13588	—	—
$\frac{1}{6} = 0,16667$	0,14930	0,13483	0,12268	0,11237	—	—
$\frac{1}{7} = 0,14286$	0,12767	0,11512	0,10464	0,09579	—	—
$\frac{1}{8} = 0,12500$	0,11152	0,10043	0,09121	0,08343	—	—

*) Aster O.: Polytechnisches Zentralblatt, 1862, стр. 353, и 1864, стр. 496.

1) Bock A.: Stirnradgetriebe, VDI, 1929, № 12, стр. 399.

Задаваясь величиной ϵ , находят по таблице величину i_{12} , после чего легко определяют величины R_1 и R_2 , используя дополнительно условие

$$R_1 + R_2 = l,$$

где l есть расстояние между точками O_1 и O_2 (фиг. 121).

Величины углов α_1^0 и α_2^0 (фиг. 123), координирующих положения осей крайних цевок и положения начальных точек циклоидального зацепления, определяются из уравнений¹⁾:

$$\alpha_1^0 = 2 \arcsin \frac{i_{12}}{2(1+i_{12})},$$

$$\alpha_2^0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha_1'}{2} \left(1 + \operatorname{cosec} \frac{\alpha_1'}{2} \right).$$

Кроме звездчатых механизмов с внешним зацеплением могут быть построены и звездчатые механизмы с внутренним и реечным зацеплениями.

На фиг. 124 показан звездчатый механизм с внутренним зацеплением с шестью периодами покоя ведомого звена, у которого $\varphi_1 = 240^\circ$, $\varphi_2 = 60^\circ$; $\alpha_1^0 = 95^\circ$; $\alpha_2^0 = 21^\circ 97'$ и $i_{12} \approx \frac{148}{48}$.

На фиг. 125 показан звездчатый механизм с внутренним зацеплением с одним периодом покоя, у которого $\varphi_1 = 240^\circ$, $\varphi_2 = 360^\circ$; $\alpha_{10} = 60^\circ$, $\alpha_2^0 = 60^\circ$ и $i_{12} = 0.5$.

На фиг. 126 показан звездчатый механизм с внутренним зацеплением с двумя периодами покоя, у которого

$$\varphi_1 = 60^\circ, \varphi_2 = 180^\circ; \alpha_1^0 = 18,317; \alpha_2^0 = 41^\circ 6' 18$$

и

$$i_{12} \approx \frac{7}{29}.$$

На фиг. 127 изображён звездчатый механизм с реечным зацеплением с двумя цевками, у которого

$$\varphi_1 = 180^\circ \text{ и } \alpha_1^0 = 60^\circ.$$

На фиг. 128 изображён звездчатый механизм с реечным зацеплением, у которого звено 2 является ведущим. У этого механизма

$$\varphi_2 = 180^\circ \text{ и } \alpha_2^0 = 32^\circ 70'.$$

На фиг. 129 показан звездчатый механизм с реечным зацеплением и одной цевкой, у которого

$$\varphi_1 = 120^\circ \text{ и } \alpha_1^0 = 60^\circ.$$

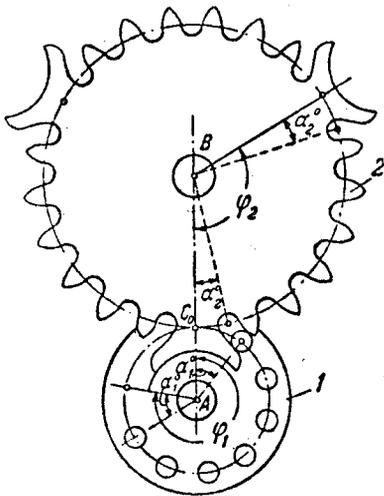
Проектирование всех этих механизмов выполняется теми же методами, как и для случая внешнего зацепления.

§ 20. Механизмы храповых колёс.

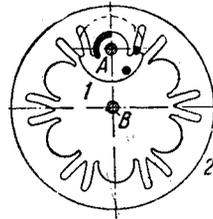
В большинстве случаев механизмы храповых колёс представляют собой зубчатые механизмы, воспроизводящие вращательное или поступательное прерывное движение зубчатого звена в одном каком-либо направлении.

На фиг. 130 показана схема механизма шарнирного четырёхзвенника $ABCD$, соединённого с храповым колесом 5 посредством собачки 4, сидящей на звене 3. Вращением звена 1 коромысло 3 приводится в колебательное движение. При ходе коромысла справа налево собачка 4 упирается в соответствующий зубец храпового колеса 5, поворачивая его на некоторый угол. Для предупреждения обратного самопроизвольного вращения колеса 5 установлена

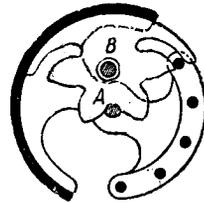
¹⁾ Ноескен К.: Sternradgetriebe, VDI, т. 74, № 9, 1930, стр. 266.



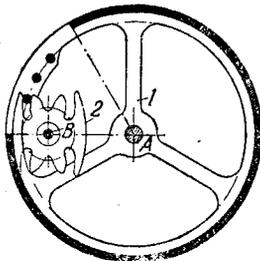
Фиг. 123.



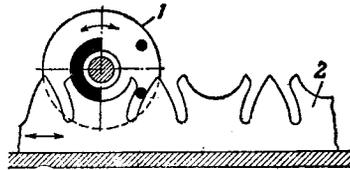
Фиг. 124.



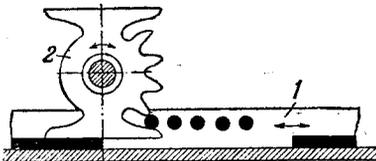
Фиг. 125.



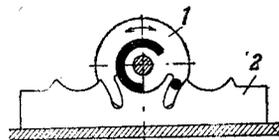
Фиг. 126.



Фиг. 127.



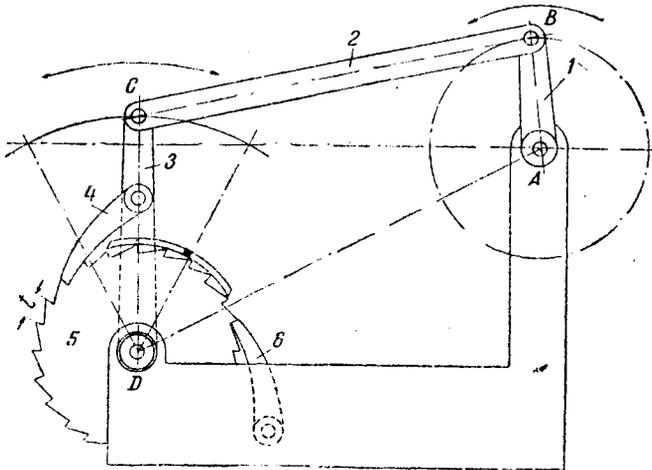
Фиг. 128.



Фиг. 129.

стопорная собачка 6. Профиль зубца храпового колеса обычно выбирается прямолинейным, точно так же как и профиль сопряжённой части собачки.

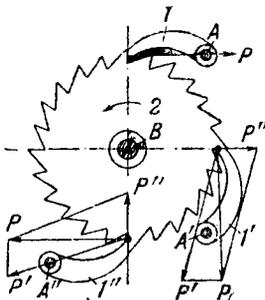
Рассмотрим зацепление собачки с храповым колесом при прямолинейных профилях сопряжённых элементов. Если ось A (фиг. 131) собачки I распо-



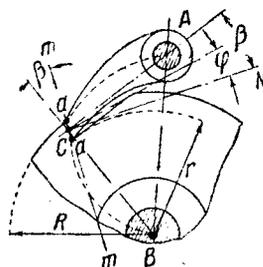
Фиг. 130.

жена на нормали к профилю в средней точке зубца, то усилие P от зубца на собачку будет проходить через опору A . Если ось A будет занимать положение A' , силу P можно будет разложить на составляющие P' и P'' , причём составляющая P'' будет стремиться откинуть собачку I' и вывести её из зацепления. Если ось A будет занимать положение A'' , то составляющая P'' будет стремиться притянуть собачку I'' к центру храпового колеса и, следовательно, надёжность зацепления будет большей. Таким образом, для надёжности зацепления необходимо, чтобы нормаль к сопрягающимся профилям, проведённая через среднюю точку, пересекала линию, соединяющую центры A и B вращения колеса 2 и собачки I между этими центрами.

Так как на поверхности соприкосновения элементов храпового зацепления возникает сила трения, то в общем случае необходимо, чтобы угол β между



Фиг. 131.

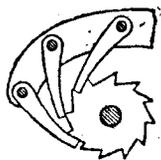


Фиг. 132.

нормалью CN (фиг. 132), проведённой через точку C , и прямой CA был больше угла трения φ . Тогда легко будет определить положение прямой mt , некоторый участок aa' которой и образует профиль зубца и собачки. Для этого строим на отрезке AB , как на диаметре, полуокружность и выбираем на ней точку C , которая должна быть средней точкой соприкасающихся профилей. Соединив точку C с точкой B , проводим прямую mt под углом β , большим угла трения φ . Отложив от точки C отрезки Ca вверх и вниз, по-

лучим радиусы R и r храпового колеса. Тангенс угла трения φ обычно выбирается равным $0,3^*$).

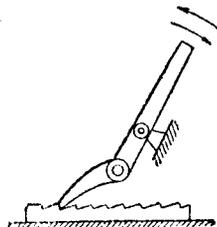
В механизме, показанном на фиг. 130, храповое колесо может быть повернуто на целое число шагов t . Если необходимо повернуть колесо на часть шага, то должно быть установлено несколько собачек различной длины. Так, например, на фиг. 133 показан механизм с тремя собачками, длины которых разнятся на одну треть шага. На фиг. 134 все три собачки расположены на



Фиг. 133.



Фиг. 134.

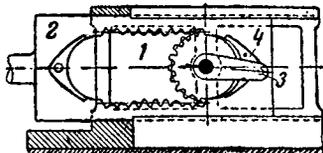


Фиг. 135.

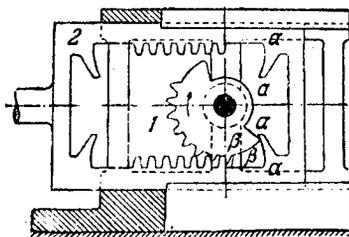
одной оси. При трёх собачках храповое колесо будет вращаться так же, как колесо с одной собачкой, но с числом зубцов в три раза большим. Храповые механизмы позволяют также воспроизвести прерывное поступательное движение. Пример такого механизма показан на фиг. 135.

§ 21. Зубчатые механизмы для реверсирования движения.

Рассмотрим зубчатые механизмы для преобразования непрерывного вращательного движения в реверсивное поступательное или вращательное. Ведущее зубчатое звено может обладать зубцами на части или на всей окружности. В первом случае движение ведомого звена при равномерном вращении ведущего будет также постоянным, но в моменты изменения направления движения ведомого звена будет иметь место удар. Примером механизма такого типа является механизм, показанный на фиг. 136. Ведущее звено 1 имеет зубцы, расположенные на дуге, несколько меньшей полуокружности. Ведомое звено 2 движется поступательно вправо и влево. Для того, чтобы в моменты изменения направления движения звена 2 не происходило размыкания звеньев, с ше-



Фиг. 136.



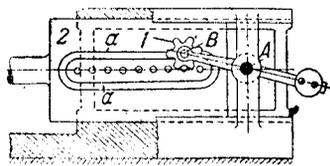
Фиг. 137.

стерней 1 связан рычаг, несущий ролик 3, который перекатывается по вспомогательной кривой 4, принадлежащей звену 2. Построение профилей зубцов и направляющей 4 ведётся по общим правилам, изложенным выше. Для того, чтобы при перемене направления движения звена 2 зубцы вышли из зацепления, головки крайних зубцов звена 2 несколько срезаны. Вместо направляющей кривой может быть запроектировано два дополнительных сопряжённых профиля $\alpha\alpha$ и $\beta\beta$, как это показано на фиг. 137.

Для большей плавности движения ведомого звена при перемене направления движения в рассматриваемых механизмах применяются следующие конструкции, в которых ведомое звено, подходя к крайним своим положениям, движется замедленно, а выходя из этих положений, движется ускоренно. Это дости-

*) Richter — v. Voss: Bauelemente der Feinmechanik, VDI, 1938.

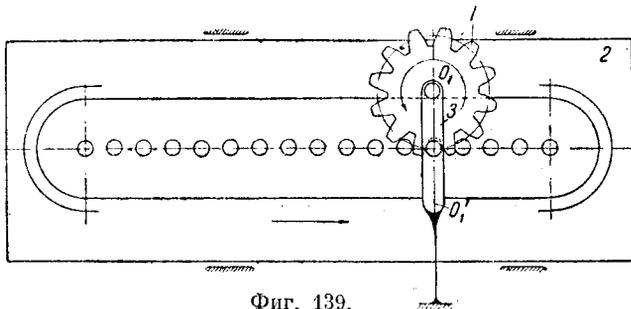
Гается тем, что ведущее звено имеет зубцы, расположенные по всей окружности колеса, и ось колеса движется по некоторой направляющей, имеющей прямолинейные и радиальные участки.



Фиг. 138.

Примером механизма такого типа может служить механизм с цевочным зацеплением, показанный на фиг. 138. Ведущее звено 1 сцепляется с цевками, принадлежащими звену 2. Благодаря тому, что зубчатое звено 1 сидит на рычаге, который вращается около оси A , а ось B самого колеса может скользить в направляющем пазу aa , зубчатое звено 1 сцепляется с цевками то по одну, то по другую

сторону, в зависимости от того, в какую сторону происходит движение звена 2. В крайних положениях колесо 1 как бы обтекает крайнюю цевку, благо-

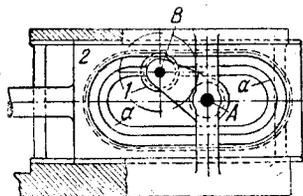


Фиг. 139.

даря чему сглаживаются удары в моменты изменения направления движения. Направляющий паз aa является эквидистантной кривой к осям цевок и состоит поэтому из прямолинейных и дуговых участков.

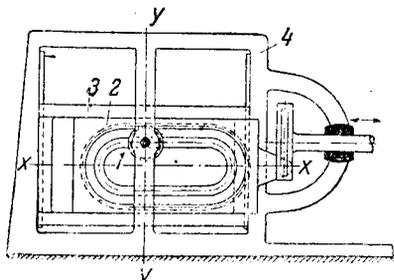
На фиг. 139 показан аналогичный механизм с цевочным зацеплением, но у которого ось O_1 зубчатого колеса закреплена не на качающемся рычаге, а скользит в кулисе 3.

Вместо цевочного зацепления может быть применено и обычное эвольвентное зацепление. На фиг. 140 показан механизм, у которого мы имеем как бы внутреннее зацепление. Этим механизмом может быть достигнута достаточная плавность движения в крайних положениях ведомого звена.

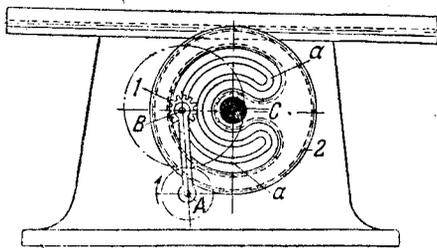


Фиг. 140.

На фиг. 141 показан механизм, у которого ось зубчатого колеса 1 жестко соединена со стойкой. Ведомое звено 2 может двигаться поступательно вдоль оси xx относительно звена 3, которое в свою



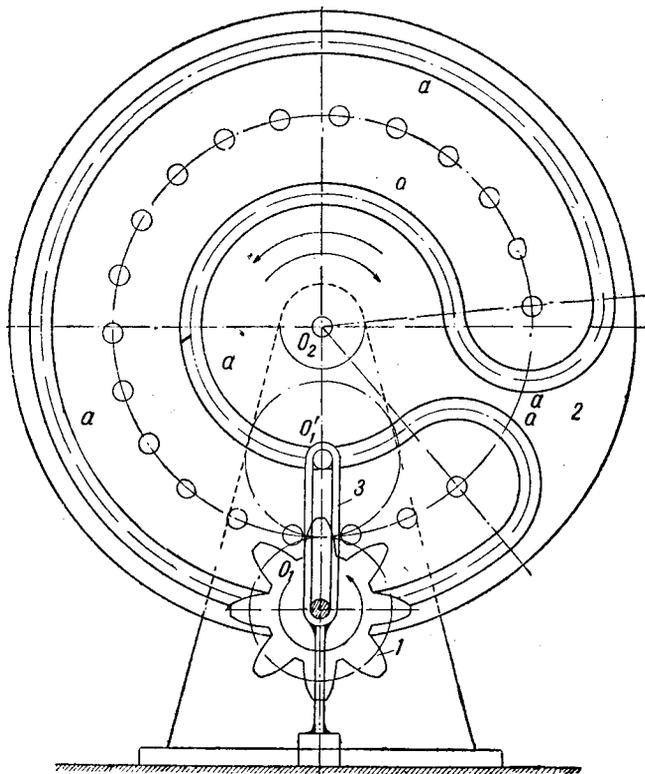
Фиг. 141.



Фиг. 142.

очередь может двигаться поступательно вдоль оси yy относительно звена 4. Наступательные перемещения вдоль осей xx и yy взаимно перпендикулярны.

На фиг. 142 показан механизм для воспроизведения реверсивного вращательного движения. Ведущее зубчатое звено 1 сидит на рычаге, который может вращаться около оси A . Ось B колеса 1 движется в направляющем пазу aa . При вращении звена 1 ведомое звено 2 будет вращаться около оси C попеременно в противоположных направлениях. Так как число зубцов на внутренней кривой меньше, чем на внешнем колесе, то этим механизмом может быть воспроизведено вращение ведомого колеса 2 с различными передаточными отношениями в период прямого и обратного хода, т. е. с различным временем качания звена 2.



Фиг. 143.

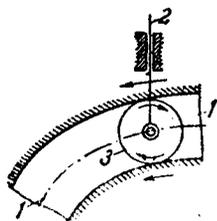
На фиг. 143 показан механизм с цевочным зацеплением, у которого ось O_1 колеса 1 движется в кулисе 3. Движение колеса 2 происходит так же, как в предыдущем механизме.

Все рассмотренные механизмы работают обычно на малых скоростях вследствие необходимости воспроизведения реверсивного движения и наличия значительных ускорений в моменты перемены направления движения. Синтез каждого из рассмотренных механизмов может быть сделан методами, изложенными выше, так как отдельные их элементы представляют собою кулачковые механизмы или зубчатые механизмы тех видов, которые были уже рассмотрены.

§ 22. Особые случаи кулачковых механизмов.

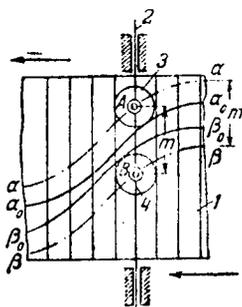
Рассмотрим в этом параграфе некоторые особые случаи кулачковых механизмов. В первую очередь остановимся на кулачковых механизмах, в которых кинематическое замыкание осуществляется не силовым образом (пружиной, грузом, силами трения и т. п.), а с помощью подбора нужной формы очертания кулачков. Простейшим способом достижения такого замыкания служит

устройство внутреннего паза 1 (фиг. 144), стороны которого представляют собой огибающие положений ролика 3. Вместо внутреннего паза можно установить на ведомом звене 2 (фиг. 145) два ролика 3 и 4, которые соприкасаются с кривыми $\alpha_0\alpha_0$ и $\beta_0\beta_0$, представляющими собой эквидистантные кривые к геометрическим местам $\alpha\alpha$ и $\beta\beta$ центров A и B роликов 3 и 4*). Отрезок m между точками A и B теоретических профилей $\alpha\alpha$ и $\beta\beta$ кулачков, проведённый параллельно направлению движения звена 2, постояен по величине.

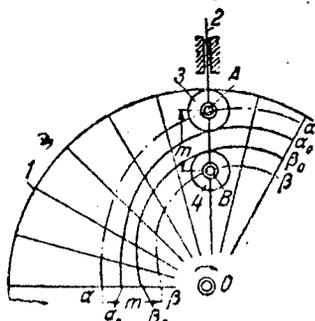


Фиг. 144.

На фиг. 145 кулачок 1 имеет поступательное движение или же может вращаться около оси, параллельной направлению движения звена 2 (цилиндрический пространственный кулачок). На фиг. 146 показан кулачковый механизм с двумя роликами 3 и 4 на ведомом звене 2. Ведущее звено 1 вращается около оси O . Так же, как и в ранее рассмотренном типе кулачкового механизма, расстояние m между точками A и B теоретических профилей, отложенное по направлению движения ведомого звена 2, постоянно.



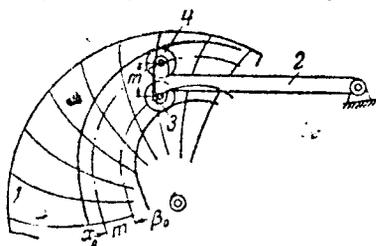
Фиг. 145.



Фиг. 146.

На фиг. 147 представлен кулачковый механизм с качающимся рычагом с двумя роликами для замыкания.

Замыкание может быть также осуществлено в кулачковых механизмах с такими кулачками, для профилей которых сумма противоположных радиусов-векторов всегда постоянна. Схема такого кулачкового механизма для прямолинейно двигающегося ведомого звена показана на фиг. 148. У кулачка 1 суммы противоположных радиусов-векторов равны, т. е. $(Aa) + (Ab) = (Af) + (Ag) = (Ad) + (Ac) = \dots = m$. При вращении по часовой стрелке кулачок участком $cfdbh$ профиля будет воздействовать на точку C звена 2, перемещая его вверх. При опускании звена 2 кулачок будет воздействовать на точку H участка профиля $hgeac$. Таким образом, звено 2 может быть выполнено в виде рамки, обеспечивающей постоянное соприкосновение кулачка с ведомым звеном без наличия пружины, прижимающей ведомое звено к кулачку.



Фиг. 147.

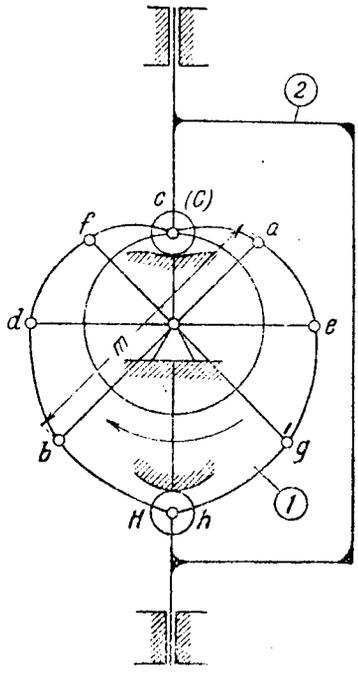
Проектирование таких кулачков не представляет никаких затруднений. Для этого задаёмся по общим правилам начальным радиусом кулачка r_{\min} и максимальным подъёмом h_{\max} звена 2 (фиг. 149). Строим диаграмму $S_C = f(\varphi)$. Для этого в положении $\varphi = 180^\circ$ откладываем отрезок

$$(ab) = r_{\min} + h_{\max}$$

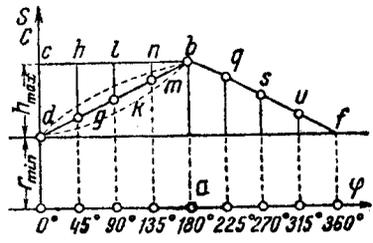
*) Jahr W. und Knechtel P.: Grundzüge der Getriebelehre, т. 2, Leipzig, 1938, стр. 143-146 и 206-213.

и проводим прямую bc , параллельную оси абсцисс. Кривая $S_C = f(\varphi)$ на участке $\varphi = 0 - 180^\circ$ может быть построена по различным законам, но так, чтобы конечные точки этой кривой совпадали с точками d и b и вся кривая находилась в пределах прямоугольника $dcbe$. На фиг. 149 показаны пунктиром различные варианты этих кривых. Пусть нами выбрана кривая, вычерченная сплошной линией. Тогда кривая на участке $\varphi = 180 - 360^\circ$ может быть получена, если в положении $\varphi = 225^\circ$ отложить от оси dj отрезок $(pq) = (hg)$, в положении $\varphi = 270^\circ$ — отрезок $(rs) = (kl)$ и т. д. Соединяя точки b, q, s и f плавной кривой, получим кривую перемещений ведомого звена на участке $\varphi = 180 - 360^\circ$.

В частном случае участки db и bf кривой $S_C = f(\varphi)$ могут быть прямолинейны. В этом случае получается кулачок, который носит название сердцевидного кулачка. Недостатком этого типа кулачковых механизмов является наличие ударов в точках изменения направления скорости ведомого звена.

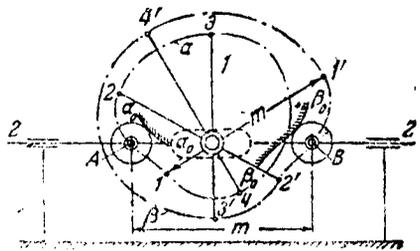


Фиг. 148.

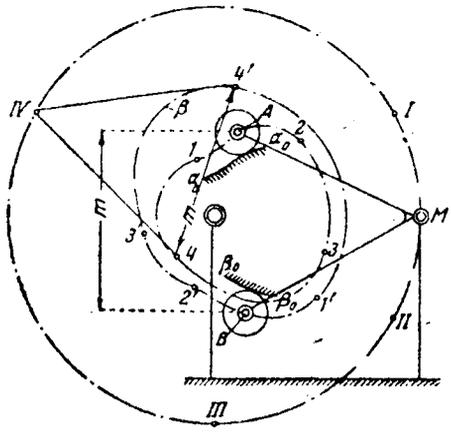


Фиг. 149.

В механизме, показанном на фиг. 148, замыкание осуществляется одним профилем кулачка. Замыкание может быть также осуществлено с помощью кулачка, имеющего два профиля (фиг. 150). В этом случае постоянными должны быть суммы противоположных радиусов-векторов, принадлежащих различным профилям. На фиг. 150 показан тот случай кулачкового механизма, когда ведомое звено движется поступательно, а на фиг. 151 тот случай, когда ведомое звено представляет собой качающийся рычаг. Постоянным в этих



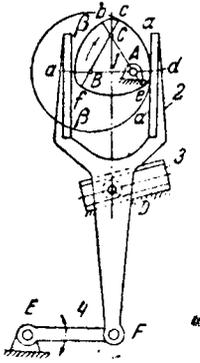
Фиг. 150.



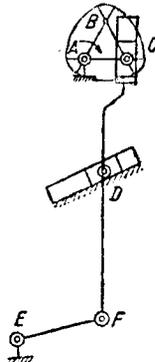
Фиг. 151.

кулачках должно быть расстояние m между точками A и B теоретических профилей, полученных в обратном движении рычага.

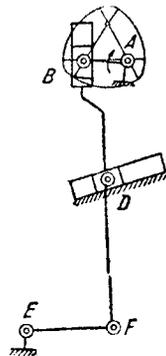
На фиг. 152 показан кулачковый механизм с кулачком 1, имеющим постоянной суммой противоположных радиусов-векторов. Кулачок соприкасается со звеном 2, имеющим две параллельные плоскости $\alpha\alpha$ и $\beta\beta$. В точке D поставлен ролик,двигающийся в направляющем пазе 3. Звено 2 входит в кинематическую



Фиг. 152.



Фиг. 153.

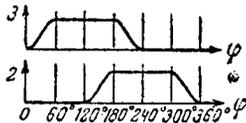


Фиг. 154.

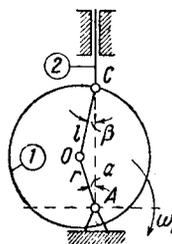
пару со звеном 4, которое качается около оси E . Профиль кулачка строится следующим образом. Точка A равностороннего треугольника ABC совпадает с осью вращения кулачка. Участки ab и de кулачка описаны по дугам радиусами из точки A . Участок bc описан по дуге радиусом из точки C . Участок cd описан по дуге радиусом из точки B . Участок ef описан по дуге радиусом из точки C и, наконец, участок fa описан по дуге радиусом из точки B . Тогда сумма противоположных радиусов-векторов будет всегда постоянной. Далее, так как участки ab и de описаны по дугам радиусами из точки A , то при соприкосновении этих дуг с плоскостями $\alpha\alpha$ и $\beta\beta$ звено 2 будет находиться в покое и, следовательно, рычаг 4 будет дважды за один оборот кулачка находиться в покое. На фиг. 153 и 154 показаны положения звеньев механизма в моменты покоя звена 4. Как видно из этих рисунков, структурная кинематическая схема данного кулачкового механизма может быть сведена к кулисному механизму с трёхпроводной группой. Неподвижности звена 4 соответствуют те положения механизма, когда радиус ведущего кривошипа перпендикулярен к оси кулисы.

На фиг. 155 показана схема кулачкового механизма с постоянной суммой противоположных радиусов-векторов, который воспроизводит поступательное движение двух звеньев 2 и 3 таким образом, что на диаграммах $S = f(\varphi)$ получается сдвиг фаз на угол в 120° . Диаграммы $S = f(\varphi)$ показаны на фиг. 156.

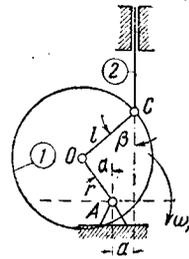
На фиг. 155 показана схема кулачкового механизма с постоянной суммой противоположных радиусов-векторов, который воспроизводит поступательное движение двух звеньев 2 и 3 таким образом, что на диаграммах $S = f(\varphi)$ получается сдвиг фаз на угол в 120° . Диаграммы $S = f(\varphi)$ показаны на фиг. 156.



Фиг. 156.



Фиг. 157.



Фиг. 158.

Рассмотрим ещё кулачковые механизмы, у которых профили кулачков очерчены одной окружностью. Такие кулачки носят название эксцентрик

На фиг. 157 показан механизм, у которого кулачок 1 является эксцентриком. Если центром эксцентрика будет точка O , то заменяющий механизм AOC будет представлять собой обычный кривошипно-шатунный механизм с постоянными длинами кривошипа r и шатуна l . Перемещения S_C звена 2 могут быть аналитически получены по формулам для аксиального кривошипно-шатунного механизма. Имеем:

$$S_C = (r + l) - r \cos \alpha - l \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \alpha},$$

где $r = AO$ и $l = OC$. Скорость и ускорения звена 2 определяются по формулам для аксиального кривошипно-шатунного механизма. Имеем:

$$v_C = \omega_1 r (\sin \alpha + \cos \alpha \operatorname{tg} \beta),$$

где

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{r \sin \alpha}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \alpha}},$$

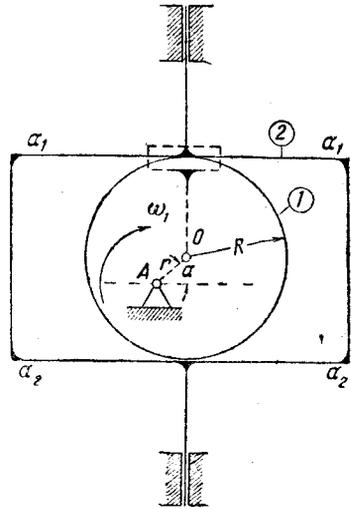
и, далее,

$$a_C = \omega_1^2 r \left(\cos \alpha + \frac{r \cos^2 \alpha}{l \cos^3 \beta} - \sin \alpha \operatorname{tg} \beta \right).$$

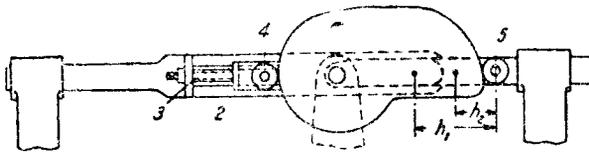
Для механизма, у которого направление движения звена 2 не проходит через точку A (фиг. 158), формулы для скоростей и ускорений будут такими же, по формула для перемещения S_C звена 2 будет иной, именно,

$$S_C = \sqrt{(r + l)^2 - a^2} - r \cos \alpha - l + \frac{r^2}{2l} \sin^2 \alpha + \frac{2ra}{l \sin \alpha} + \frac{a^2}{2l},$$

где a есть дезаксиал кривошипно-шатунного механизма. Если эксцентрик включить между двумя направляющими $a_1 a_1$ и $a_2 a_2$, то мы получим механизм, показанный на фиг. 159. Кулачок 1, вращаясь около оси A , воздействует на огибаемые, принадлежащие звену 2, которые представляют собой две параллельные прямые $a_1 a_1$ и $a_2 a_2$, жёстко связанные между собой. Жёсткая связь между прямыми $a_1 a_1$ и $a_2 a_2$ возможна потому, что диаметр эксцентрика 1 постоянен. Заменяющий механизм будет механизмом прямолинейно двигающейся



Фиг. 159.



Фиг. 160.

кулисы, для которой формулы перемещений, скоростей и ускорений звена 2 напишутся так:

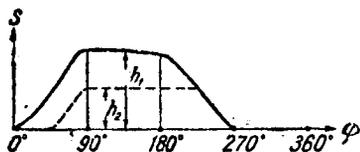
$$\begin{aligned} S_2 &= r \sin \alpha, \\ v_2 &= \omega_1 r \cos \alpha, \\ a_2 &= -\omega_1^2 r \sin \alpha, \end{aligned}$$

где ω есть угловая скорость эксцентрика.

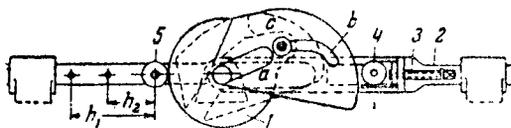
Рассмотрим ещё некоторые кулачковые механизмы с регулируемым перемещением ведомого звена¹⁾. На фиг. 160 показан кулачковый механизм с поступательно двигающейся штангой 2. Со звеном 2 связан установочный

¹⁾ Jahr W. und Knechtel P.: Grundzüge der Getriebelehre, Leipzig, 1938, стр. 208—210.

винт 3, который может перемещать ролик 4. Ролик 5 служит для обратного хода звена 2. В положении ролика 4, показанном на фиг. 160, звено 2 будет иметь максимальное перемещение, равное h_1 . При установке ролика 4 в крайнее левое положение максимальное перемещение звена 2 будет равно h_2 . Законы перемещений $S=f(\varphi)$ для обоих случаев показаны на фиг. 161. Кулачковые механизмы данного типа работают с ударами в моменты вхождения в соприкосновение с роликами 4 и 5. Из рассмотрения фиг. 161 следует, что время перемещения звена 2 на величину h_2 меньше времени, необходимого для перемещения на величину h_1 . Для того, чтобы времена при различных величинах перемещений h_1 и h_2 были одинаковыми, необходимо кроме установочного винта иметь для одного из роликов второе установочное устройство, показанное на фиг. 162 и представляющее собой прорез a , который охваты-

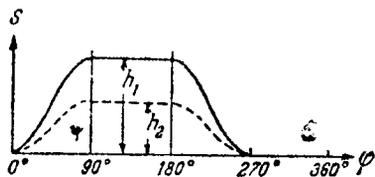


Фиг. 161.

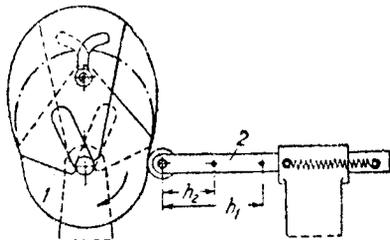


Фиг. 162.

вает ось кулачка 1, и прорез b , в котором имеется специальный установочный винт с. Сам кулачок состоит из двух частей. Первая часть представляет собой цилиндрическую часть с радиусом, равным минимальному радиусу-вектору кулачка. Вторая часть является подвижной и может быть установлена различно. На фиг. 162 показана установка кулачка, производящая перемещение звена 2 на величину h_1 . Пунктиром показана вторая установка кулачка, при которой перемещение звена будет равно h_2 . Диа-



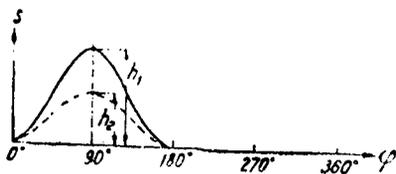
Фиг. 163.



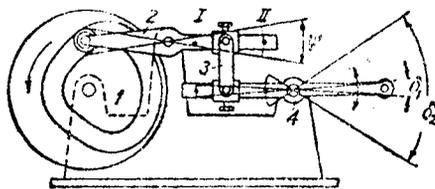
Фиг. 164

граммы $S=f(\varphi)$ перемещений звена 2 показаны на фиг. 163. Как следует из этих диаграмм, времена, соответствующие перемещениям на величины h_1 и h_2 , одинаковы.

На фиг. 164 показан другой тип кулачка, состоящий из трёх частей. Этим кулачковым механизмом также можно воспроизвести различные перемещения звена 2 за одинаковые промежутки времени. На фиг. 164 показана



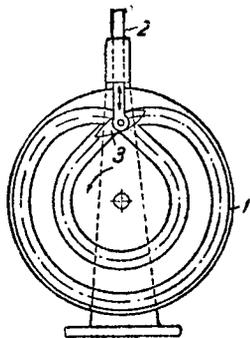
Фиг. 165.



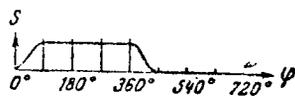
Фиг. 166

установка частей кулачка, позволяющая воспроизвести перемещение звена 2 на величину h_1 . Пунктиром показана вторая установка, при которой перемещение звена 2 будет равно h_2 . Диаграммы $S=f(\varphi)$ перемещений звена 2 показаны на фиг. 165.

В случае необходимости регулировки угла качания вращающегося рычага 4 (фиг. 166) может быть применено устройство, состоящее из звена 3, входящего во вращательные кинематические пары со звеньями 2 и 4. При максимальном угле ϕ поворота звена 2 углы поворота звена 4 могут варьироваться в широких пределах, в зависимости от положения звена 3. Как видно из фигуры, звено 3 может быть установлено в различных положениях специальными нажимными винтами. При установке в положении I полный угол поворота звена 4 будет равен δ_1 . При установке в положении II полный угол поворота звена 4 будет равен δ_2 .



Фиг. 167.



Фиг. 168.

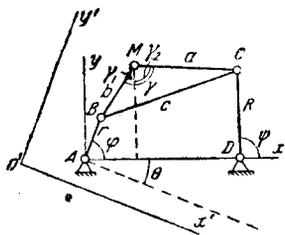
В заключение можно ещё указать на кулачковый механизм, у которого паз кулачка представляет кривую, пересекающую саму себя (фиг. 167). Для такого кулачка период движения звена 2 будет соответствовать двум оборотам звена 1. Для возможности работы такого механизма вместо ролика устанавливается деталь 3, профиль которой состоит из двух дуг окружностей. Диаграмма $S = f(\phi)$ перемещений звена 2 показана на фиг. 168.

Синтез всех рассмотренных видов кулачковых механизмов может быть сделан изложенными выше методами.

VI. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ШАТУННЫХ КРИВЫХ ПРИ СИНТЕЗЕ МЕХАНИЗМОВ.

§ 23. Уравнение шатунной кривой (уравнение Робертса)¹⁾.

Шатунной кривой называется траектория какой-либо точки шатуна четырёхзвенника. Её уравнение должно указать число точек пересечения кривой с прямой линией или окружностью. Это число определяет границы возможного приложения четырёхзвенника для описания точкой его шатуна прямой или окружности по заданным точкам этих линий. При задании точек на прямой мы, таким образом, можем построить новый четырёхзвенник или приспособить уже существующий для получения направляющего механизма, имеющего применение в различных областях машиностроения. При задании точек на круге мы аналогичным образом придём к механизму с остановками, могущему заменить обычно применяемый для этой цели кулачковый механизм.



Фиг. 169.

Уравнение шатунной кривой, например траектории точки *M* шарнирного четырёхзвенника *ABCD* (фиг. 169), может быть получено следующим образом. Пользуясь обозначениями чертежа, напишем:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi + b \sin \gamma_1, & y &= r \sin \varphi + b \cos \gamma_1, \\ k - x &= R \cos \psi + a \sin \gamma_2, & y &= R \sin \psi + a \cos \gamma_2. \end{aligned}$$

Кроме того, имеем:

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma.$$

Исключая из уравнений углы φ и ψ , раскрывая скобки и приводя подобные члены, получим:

$$\begin{aligned} 2b(x \sin \gamma_1 + y \cos \gamma_1) &= x^2 + y^2 + b^2 - r^2, \\ 2a[(k - x) \sin \gamma_2 + y \cos \gamma_2] &= (k - x)^2 + y^2 + a^2 - R^2. \end{aligned}$$

Подставляя во второе уравнение $\gamma_2 = \gamma - \gamma_1$ и решая полученное уравнение совместно с первым относительно $\sin \gamma_1$ и $\cos \gamma_1$, найдём:

$$W \sin \gamma_1 = V, \quad W \cos \gamma_1 = U,$$

где

$$\begin{aligned} U &= a [(x - k) \cos \gamma + y \sin \gamma] (x^2 + y^2 + b^2 - r^2) - bx [(x - k)^2 + y^2 + a^2 - R^2]; \\ V &= a [(x - k) \sin \gamma - y \cos \gamma] (x^2 + y^2 + b^2 - r^2) + by [(x - k)^2 + y^2 + a^2 - R^2]; \\ W &= 2ab \sin \gamma [x(x - k) + y^2 - ky \operatorname{ctg} \gamma]. \end{aligned}$$

Возвышая в квадрат и складывая, получим окончательно:

$$U^2 + V^2 = W^2. \tag{100}$$

Это и будет уравнение Робертса, если подставить в него указанные выше значения *U*, *V*, *W*.

¹⁾ Roberts S.: On three-bar motion in plane space, 1876.

Так как это уравнение шестой степени, то изображаемая им кривая может пересекаться с прямой не более чем в шести точках. Действительных точек пересечения может быть шесть, четыре, две или ни одной, причём точки касания, если они имеются, считаются за две каждая.

Этот результат показывает, что если мы хотим спроектировать механизм, одна из точек которого описывала бы приближённо прямую на некотором участке, то мы можем задать на прямой не более шести точек, через которые должна пройти шатунная кривая.

В предельном случае мы можем потребовать, чтобы эти шесть точек были бесконечно близки, т. е. чтобы кривая имела с прямой касание пятого порядка. Практически это будет означать, что на некотором участке кривая будет неотличима от прямой. Разыскание таких приближённо направляющих механизмов есть одна из важнейших задач синтеза механизмов.

Другой задачей синтеза является разыскание приближённо круговых механизмов, т. е. таких, шатунные кривые которых на некотором участке мало отличаются от дуг окружности. Посмотрим, сколько точек можно задать на окружности для решения этой задачи, иначе говоря, сколько точек пересечения с окружностью может иметь шатунная кривая. С этой целью представим левую часть уравнения Робертса в таком виде:

$$U^2 + V^2 = a^2(x^2 + y^2 + b^2 - r^2)^2[(x - k)^2 + y^2] + \\ + b^2(x^2 + y^2)[(x - k)^2 + y^2 + a^2 - R^2]^2 + 2ab(x^2 + y^2 + b^2 - r^2) \times \\ \times [(x - k)^2 + y^2 + a^2 - R^2] \cdot [k(x \cos \gamma - y \sin \gamma) - (x^2 + y^2) \cos \gamma].$$

Если обозначить $(x^2 + y^2) = z$, то уравнение примет вид:

$$a^2(z + b^2 - r^2)^2(z - 2kx + k^2) + b^2z(z - 2kx + k^2 + a^2 - R^2)^2 + \\ + 2ab(z + b^2 - r^2)(z - 2kx + k^2 + a^2 - R^2)(kx \cos \gamma - ky \sin \gamma - z \cos \gamma) = \\ = 2ab \sin \gamma \cdot (z - kx - ky \operatorname{ctg} \gamma).$$

Уравнение окружности будет:

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy + m^2 = 0,$$

или при нашем обозначении

$$z = 2px + 2qy - m^2.$$

Подставляя это значение z в уравнение Робертса, получим уравнение третьей степени относительно x и y : совместно с уравнением окружности оно даёт $3 \cdot 2 = 6$ решений. Таким образом, шатунная кривая пересекается с окружностью не более чем в шести действительных точках. Это означает, что мы можем задать на окружности не более шести точек, через которые может пройти шатунная кривая.

В предельном случае мы можем потребовать, чтобы точки были бесконечно близки. Тогда мы получим касание кривой со своим кругом кривизны, которое на основании сказанного не может быть выше пятого порядка.

Входящие в уравнение Робертса шесть параметров: a, b, k, r, R, γ , вполне определяют форму и размеры шатунной кривой; если говорить только о форме, то будет достаточно только пяти параметров: четырёх отношений

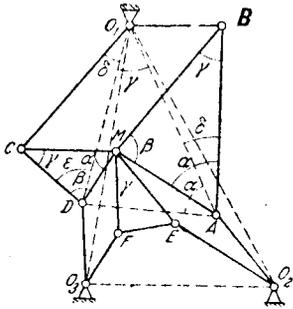
$$\frac{a}{R}, \frac{b}{R}, \frac{k}{R}, \frac{r}{R}$$

и угла γ . Если же принять во внимание и положение шатунной кривой на плоскости, то необходимо ввести ещё параметры, определяющие положение взятых осей координат, а именно координаты опоры A относительно новых осей $O'x'y'$ и угол θ , образуемый прямой AD с новой осью $O'x'$. Таким образом, если поставлена задача об отыскании такого шарнирного четырёхзвенника, шатунная кривая которого проходила бы через заданные на плоскости точки, то решение этой задачи сведётся к нахождению девяти параметров (шесть указанных выше и трёх параметров, определяющих положение). Это означает, что можно задать максимум девять точек шатунной кривой, учитывая, однако, приведённое ранее условие, что никакие семь и восемь точек из этих девяти не должны лежать ни на прямой, ни на окружности: случаи задания всех девяти точек на прямой или окружности исключаются, так как это условие удовлетворяется простым поступательным или вращательным движением.

§ 24. Теорема Робертса 1).

Робертс, а затем независимо от него Чебышев показали, что одна и та же шатунная кривая может быть образована посредством трёх различных шарнирных четырёхзвеньев.

Возьмём произвольный треугольник ABM , углы которого обозначим через α, β, γ , и повернём его вокруг вершины A на угол δ , изменяя при этом его стороны в одном и том же отношении (фиг. 170). Пусть после такого преобразования получим треугольник AO_1D , который будет подобен первоначальному, т. е. $\angle O_1AD = \alpha, \angle ADO_1 = \beta, \angle AO_1D = \gamma$ и



Фиг. 170.

$$\frac{AO_1}{AB} = \frac{AD}{AM} = \frac{O_1D}{BM}.$$

Из этого следует также подобие треугольников ABO_1 и AMD , так что при произвольном положении точки O_1 можно получить положение точки D , произведя указанную операцию не над треугольником ABM , а над треугольником ABO_1 , поворачивая его на угол α и изменяя его стороны в отношении $\frac{AM}{AB}$.

Произведём теперь такую же операцию с треугольником AO_1D , или, что всё равно, с треугольником AMD , взяв за центр поворота точку D . В результате получим точку C , а углы поворота будут равны соответственно ϵ и β . Из подобия треугольников O_1CD и ABO_1 следует равенство углов $O_1\beta$ и O_1BM , каждый из которых равен $180^\circ - \delta - \epsilon - \gamma$; при точке же M получатся углы $\alpha, \beta, 180^\circ - \delta - \epsilon$ и BMC ; следовательно,

$$\angle BMC = 180^\circ + \delta + \epsilon - (\alpha + \beta) = \gamma + \delta + \epsilon.$$

Из этого следует, что

$$\angle O_1BM + \angle BMC = 180^\circ \quad \text{и} \quad \angle O_1CM + \angle CMB = 180^\circ,$$

что указывает на то, что фигура O_1BMC есть параллелограмм.

Выполняя этот параллелограмм в виде шарнирного механизма с неподвижной точкой O_1 и построив на его сторонах подобные треугольники ABM и CDM , мы получим возможность производить указанное преобразование вращения с подобным изменением, так как треугольник AO_1D будет всегда иметь углы α, β, γ . Полученный механизм имеет две степени свободы, а потому точку A можно вести по любой кривой; точка D будет при этом описывать кривую, подобную траектории A , но с поворотом вокруг O_1 на угол γ . Если, в частности, траекторией точки A будет окружность с центром O_2 , то и траекторией точки D будет окружность, центр O_3 которой получится поворотом O_1O_2 на угол γ и построением треугольника O_1DO_3 , подобного треугольнику O_1AO_2 , или, что всё равно, треугольника $O_1O_2O_3$, подобного треугольнику O_1AD . Ведение точки A по окружности можно осуществить при помощи кривошипа O_2A , вследствие чего мы получим механизм уже с одной степенью свободы; соединяя же D с O_3 вторым кривошипом, мы введём одну пассивную связь. Оба кривошипа O_2A и O_3D будут поворачиваться на один и тот же угол λ от линии центров O_1O_2 и O_2O_3 , а потому образуют между собой постоянный угол γ .

Присоединяя параллелограммы $AMEO_2$ и $DMFO_3$, мы найдём, что звенья EM и FM образуют между собой такой же угол γ , т. е. могут быть соединены жёстко. Вводя эту вторую пассивную связь, получим третий треугольник EMF , подобный первым двум ABM и CDM .

Полученный механизм с двумя пассивными связями можно рассматривать как соединение шарниром в точке M трёх шарнирных четырёхзвеньев O_1BAO_2, O_2EFO_3 и O_3DCO_1 ; точка M является точкой всех трёх шатунов.

1) Roberts S.: On three-bar motion in plane space, 1875; также Чебышев П. А.: О простейших сочленениях, 1878.

а потому её траектория является шатушной кривой трёх шарнирных четырёхзвённых, чем и доказывается теорема Роберта.

Если найден один из механизмов, например O_1BAO_2 , то, строя параллелограмм O_2AME и треугольники EMF и $O_2O_1O_3$, подобные треугольнику ABM , получим второй механизм O_3BFO_3 ; строя же параллелограмм O_1BMC и треугольник MCD , подобный треугольнику ABM , найдём третий механизм O_1CDO_3 .

Значение теоремы Роберта для синтеза заключается в том, что из трёх механизмов, дающих одну и ту же кривую, мы можем выбрать наиболее подходящий по условиям конструирования и монтажа.

Если точка M лежит на оси одного из шатунов, то все три центра O_1, O_2, O_3 лежат на одной прямой (фиг. 171), а подобие треугольничков обращается в пропорциональность отрезков:

$$\frac{O_1O_2}{O_2O_3} = \frac{A_2B_2}{MB_2} = \frac{MA_3}{B_3A_3} = \frac{A_1M}{B_1M}$$

В этом случае точка M окажется также на оси других шатунов.

§ 25. Построение шатушных кривых.

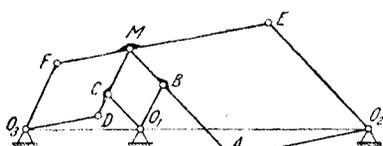
Пользуемся уравнением Роберта для построения шатушной кривой целесообразно вследствие его сложности и высокой степени. Обыкновенно строят эту кривую при помощи засечек радиусами a и b из соответственных положений точек B и C , если точка M не лежит на оси шатуна, в последнем случае соединяют B с C и откладывают на BC величину BM .

Однако, засечки дают большую неточность, если точки M расположены вблизи оси шатуна, а проведение прямых BC затемняет чертёж. С большей точностью и не затемняя чертежа можно получить шатушные кривые для любого числа точек шатуна посредством шаблона; для этого переводят на кальку шатуны со всеми точками, траектории которых требуется построить (фиг. 172); передвигая кальку так, чтобы B

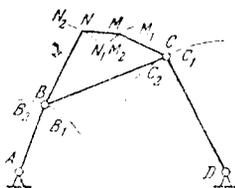
и C оставались постоянно на своих окружностях, выкалываем в каждом положении все нанесённые точки. Этим способом кривые получаются быстро и точно; он особенно предпочтителен, когда надо построить несколько шатушных кривых для одного и того же шатуна и даже для разных шатунов при тех же звеньях AB и CD , что бывает полезно для сравнения кривых.

Для уточнения вида шатушной кривой, в особенности при больших расстояниях между её точками, следует проводить касательные, что делается очень просто при помощи мгновенного центра вращения; последний получается в точке пересечения P направлений вращающихся звеньев (фиг. 173). Соединяя точку M шатуна с мгновенным центром, получим нормаль MP к её траектории, а проводя перпендикуляр к нормали, получим касательную.

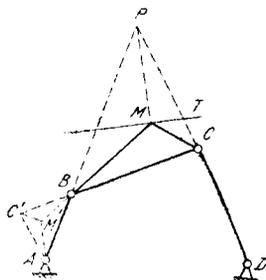
Это построение окажется невыполнимым непосредственно, если мгновенный центр вращения P , который в дальнейшем для сокращения речи будем называть *полосом*, находится за пределами чертежа, что часто имеет место. В этом случае можно поступить так. Проводим через A прямую, параллельную CD , до пересечения её с осью шатуна в точке C' , а из C' — прямую, параллельную CM , до пересечения с BM в M' , тогда прямая AM' даёт



Фиг. 171.



Фиг. 172.



Фиг. 173.

После преобразований это уравнение приводится к такому виду:

$$\frac{(y_C - y_B)x + (x_B - x_C)y - x_B y_C + x_C y_B}{x^2 + y^2} = \frac{(y_D - y_A)x + (x_A - x_D)y - x_A y_D + x_D y_A}{x^2 + y^2} \quad (101)$$

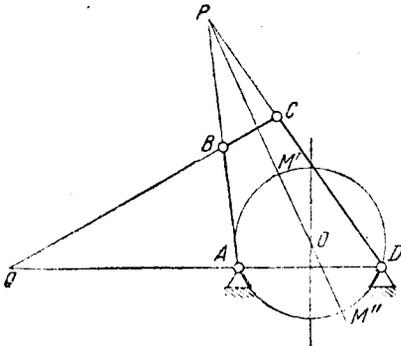
Это есть уравнение третьей степени, а потому кривая будет третьего порядка. Кроме того, она обладает той особенностью, что с любой окружностью пересекается не более чем в четырёх точках; между тем, вообще говоря, кривая третьего порядка может иметь до шести действительных точек пересечения с кругом. Эта особенность рассматриваемой кривой доказывается тем же путём, каким мы доказали существование шести действительных точек пересечения шатушной кривой с окружностью.

Кривая проходит через точки A, B, C, D, P, Q . Точки B и C не являются двойными точками в геометрическом смысле этого слова, но они принадлежат кривой в кинематическом отношении, так как каждая из них соответствует двум разным положениям механизма. Точка A будет реальной двойной точкой шатушной кривой при $MB = AB$ и $MC + CD > AD > MC - CD$; при обращении одного из последних неравенств в равенство получается точка возврата; при перемене знака неравенства точка M физически не сможет пройти через точку A , а в математическом отношении точка A является «изолированной» точкой шатушной кривой с минимыми касательными. Аналогичные отношения получаются и для точки D . Полное P есть точка возврата и как таковая может считаться особым видом двойной точки.

Если одновременно $MB = AB$ и $MC = CD$, то шатушная кривая имеет три двойных точки в трёх вершинах A, B, C треугольника центров.

Из равенства углов BMC и AMD следует, что при постановке механизма на шатун точка M , лежащая на кривой двойных точек, будет также находиться в двойной точке своей траектории, если её считать принадлежащей шатуну AD . Из доказательства же равенства этих углов видно, что и углы AMB и DMC также равны; поэтому при постановке механизма на звено AB или CD точка M , считаемая принадлежащей шатуну CD или соответственно AB , будет находиться также в двойной точке своей траектории. Итак, при любом неподвижном звене шарнирного четырёхзвенника геометрическое место двойных точек для данного положения изображается одной и той же кривой ¹⁾.

В двойной точке кривая имеет, вообще говоря, две касательные. Но если для двух положений механизма, соответствующих этой двойной точке, оба полуса окажутся на одной прямой с точкой, то обе касательные сольются в одну; тогда эта точка будет точкой касания двух ветвей кривой, иначе говоря, мы будем иметь самоприкасающуюся шатушную кривую. Но касание кривых представляет слияние двух точек их пересечения; поэтому одна ветвь кривой в этом случае будет иметь не одну, а две общие точки с другой ветвью, а это означает, что в точке самоприкасания надо считать слившимися две двойные точки. Так как двойные точки лежат на круге, проходящем через центры A и D , то в нашем случае шатушная кривая будет иметь с этим кругом две слившиеся точки, т. е. будет касаться его. Поэтому для на-



Фиг. 177.

хождения точки самоприкосновения построим ещё геометрическое место тех точек шатушной плоскости, траектории которых касаются круга, проходящего через центры A и D . С этой целью на перпендикуляре, восставленном из середины AD , возьмём произвольную точку O и примем её за центр круга, про-

¹⁾ Это свойство указывается здесь впервые.

ходящего через A и D (фиг. 177); затем соединим O с P и найдём на этой прямой две диаметрально противоположные точки M' и M'' круга, которые и будут точками искомого геометрического места. Возьм ряд центров O и повторяя указанные построения, получим и самое геометрическое место. Это будет кривая третьего порядка, проходящая через полюс P и центры A и D . Пересечение её с геометрическим местом двойных точек даёт точки самоприкосновения. Таких действительных точек может быть не более четырёх.

§ 27. Кривизна шатуновых кривых

Шатуновая кривая в каждой своей точке имеет определённый круг кривизны, имея три бесконечно близкие общие точки с кривой, может заменить её для двух последовательных бесконечно малых перемещений шатуновой плоскости. В этом и заключается значение исследования кривизны, так как для этих перемещений взятый шарнирный четырёхзвённый может быть заменён другим, неподвижными центрами которого будут центры кривизны траекторий двух произвольных точек шатуновой плоскости. Практически такая замена даёт совпадение движений в течение некоторого конечного перемещения и может оказаться целесообразной в двух отношениях: при выборе величин радиусов для конструктивно выполнимых звеньев и при желании получить наибольшую возможную продолжительность совпадения, что соответствует более высокому порядку соприкосновения кривой с её кругом кривизны.

Найдём прежде всего бесконечно малое перемещение полюса P шатуна, соответствующее двум последовательным перемещениям плоскости шатуна (одно перемещение оставляет полюс P на месте). Пусть он переместится из P в P' (фиг. 178). Опуская из P перпендикуляры на AP' и DP' , найдём:

$$\Delta P = PP' = \frac{AP \cdot \Delta \varphi_A}{\sin(\alpha' + \gamma)} = \frac{DP \cdot \Delta \varphi_D}{\sin \alpha'};$$

с другой стороны,

$$\frac{\Delta \varphi_A}{\Delta \varphi_D} = \frac{DQ}{AQ} = \frac{DP \sin(\alpha + \gamma)}{AP \sin \alpha},$$

откуда

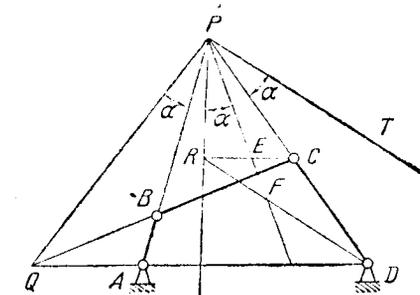
$$\frac{AP \cdot \Delta \varphi_A}{\sin(\alpha + \gamma)} = \frac{DP \cdot \Delta \varphi_D}{\sin \alpha}.$$

Сравнивая это соотношение с предыдущим, находим:

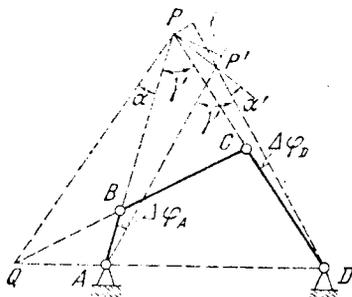
$$\alpha' = \alpha.$$

т. е. направление бесконечно малого перемещения полюса составляет со звеном a такой же угол, как и направление полюсной прямой PQ с противоположным звеном c , при отсчёте этого угла в обратную сторону. В пределе мы получаем касательную к центроидам, о которой говорилось в § 25.

Возьмём теперь в плоскости шатуна точку E , для которой центром кривизны пусть будет точка F (фиг. 179). Тогда четырёхзвённый $ABCD$ можно заменить четырёхзвённым $BECD$, причём полюс P останется на прежнем месте, а полюс Q заменится полюсом R . На основании только что доказанного нормаль PE образует с полюсной прямой PR такой же угол α , что позволяет построить эту прямую PR , если точка E задана. Но в таком случае определяется также и сама точка R как точка пересечения PR с CE ,



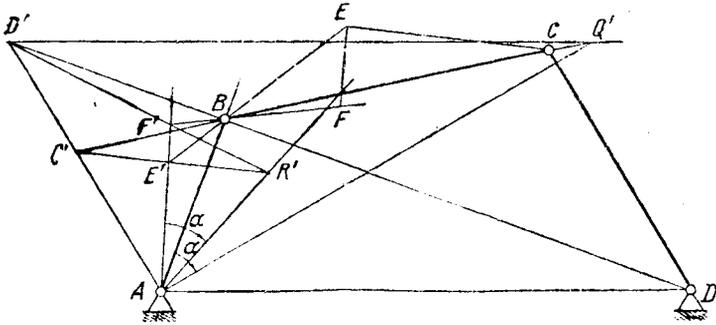
Фиг. 179.



Фиг. 178.

а потому определяется и точка F , как точка пересечения PE с RD . Таким образом, для каждой заданной точки плоскости шатуна её центр кривизны получается простым построением.

Приведённое построение невыполнимо, если точка P или Q или обе вместе выходят за пределы чертежа. В этих случаях рекомендуется посту-



Фиг. 180.

пать так: Построив прямую AE' , как указано в § 25 (фиг. 180), строим ещё точку D' как точку пересечения DB с $AC' \parallel CD$, а затем точку Q' как точку пересечения CR с $D'Q' \parallel AD$; прямая AQ' будет параллельна PQ . Поэтому, строя $\angle E'AR = BAQ'$, получим прямую $AR' \parallel PR$; в пересечении её с $C'E'$ найдём точку R' ; в пересечении $R'D'$ с AE' найдём точку H' , а в пересечении $H'B$ с нормалью в E найдём искомый центр кривизны F .

Между точками шатушной плоскости в данном положении и точками неподвижной плоскости как центрами кривизны траекторий этих точек существует взаимно однозначное соответствие, т. е. каждой точке плоскости шатуна соответствует единственная точка неподвижной плоскости, и наоборот: каждой точке неподвижной плоскости — единственная точка плоскости шатуна. Присмотримся ближе к этому соответствию. Перемещение полюса можно выразить следующим образом:

$$\Delta P = \frac{AP}{\cos \alpha} \cdot \Delta \varphi_A = \frac{AP}{\sin \alpha} \cdot \frac{\Delta \varphi_A}{\Delta \varphi_{ш}} \cdot \Delta \varphi_{ш} = \frac{AP}{\sin \alpha} \cdot \frac{BP}{AB} \cdot \Delta \varphi_{ш}.$$

Так как для одного и того же поворота шатуна на угол $\Delta \varphi_{ш}$ перемещение ΔP должно быть одинаково для всех четырёхзвенников, то

$$\frac{FP \cdot EP}{EF \sin \alpha PE} = \frac{AP \cdot BP}{AB \sin \alpha} = \text{const.}$$

Обозначив это постоянное через d , радиус кривизны EF через ρ , расстояние EP — через r и угол APE — через φ , напомним предыдущее соотношение в таком виде:

$$(r + \rho) r = d \rho \sin \varphi. \quad (102)$$

Отсюда можно сделать следующие выводы:

Во-первых, уравнение (102) даёт математическое выражение рассматриваемого соответствия. Если обозначить расстояние PF через r' , то найдём:

$$r' r = d (r' - r) \sin \varphi,$$

откуда

$$r' = \frac{dr \sin \varphi}{d \sin \varphi - r}; \quad (103)$$

умножая числитель и знаменатель дроби на r и заменяя $r \sin \varphi = y$ и $r^2 = x^2 + y^2$, найдём:

$$r' = \frac{dy}{dy - (x^2 + y^2)};$$

умножая, далее, обе части на $\cos \varphi$ и на $\sin \varphi$ и произведя опять замену $r \sin \varphi = y$ и $r \cos \varphi = x$, получим:

$$x' = \frac{dxy}{dy - (x^2 + y^2)}, \quad y' = \frac{dy^2}{dy - (x^2 + y^2)}. \quad (104)$$

Таким образом, по координатам x, y точки E находим координаты x', y' точки F . Наоборот, выражая r через r' , получим:

$$r = \frac{dr' \sin \varphi}{r' + d \sin \varphi}. \quad (105)$$

Аналогичным преобразованием найдём:

$$x = \frac{dx'y'}{dy' + (x'^2 + y'^2)}, \quad y = \frac{dy'^2}{dy' + (x'^2 + y'^2)}. \quad (106)$$

Если точки E лежат на прямой, т. е. координаты x, y удовлетворяют уравнению

$$Ax + By + C = 0,$$

то для координат точки F получим зависимость:

$$Adx'y' + Bdy'^2 + Cdy' + C(x'^2 + y'^2) = 0,$$

т. е. точки F лежат на коническом сечении, касающемся в полюсе оси x . Аналогично для прямой

$$A'x' + B'y' + C' = 0$$

получим в шатунной плоскости коническое сечение:

$$A'dxy + B'dy^2 + C'dy - C'(x^2 + y^2) = 0,$$

также касающееся в полюсе оси x .

Такое соответствие называется квадратичным.

Значение полученного результата для синтеза механизмов заключается в том, что мы можем в шатунной и неподвижной плоскости произвольно задать по прямой и. потребовать, чтобы центры шарниров шатуна лежали на первой прямой, а центры неподвижных шарниров — на второй. Тогда получаем вполне определённые две точки на каждой прямой. В частности, для точек, лежащих на оси шатуна, центры кривизны расположатся на коническом сечении, проходящем через неподвижные центры, а потому и будут все лежать вне линии центров.

Взаимная однозначность соответствия точек шатунной плоскости и центров кривизны их траекторий имеет место для всех точек плоскости, не лежащих на оси x , т. е. на касательной к центроидам, причём на каждом луче, выходящем из полюса, с приближением точки к полюсу центр кривизны её траектории приближается к полюсу; в пределе обе точки совпадают, что соответствует нулевому значению радиуса кривизны для точки, проходящей в данное мгновение через полюс. Для оси же x мы имеем $\varphi = 0$ или 180° , а потому (102) даёт

$$(r + \rho)r = 0,$$

что приводит либо к $r = 0$ при произвольном ρ , либо к $\rho = -r$ при произвольном r , т. е. тоже к произвольному ρ . Таким образом, для всех точек касательной к центроидам полюс является центром кривизны, а для полюса радиус кривизны может оказаться и не равным нулю.

Во-вторых, мы можем найти на каждом луче точку, для которой круг кривизны обращается в прямую. Для этого представим (102) в таком виде:

$$\left(\frac{r}{\rho} + 1 \right) r = d \sin \varphi,$$

и положим $\rho = \infty$: тогда получим:

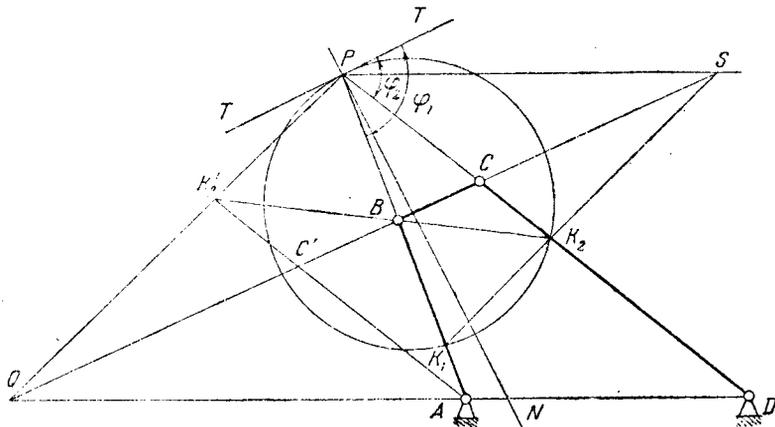
$$r = d \sin \varphi. \quad (107)$$

Это есть полярное уравнение круга.

Таким образом, геометрическое место точек шатунной плоскости, для которых круг кривизны обращается в прямую, есть круг, касательный к центроидам.

Круг этот называется *кругом перегиба*, так как указанное свойство характерно для точек перегиба. Но на нём лежат и отдельные точки, не являющиеся точками перегиба; такими точками будут полюс как точка возврата, а также точки, траектории которых имеют прикосновение более высокого порядка с касательной.

Для построения круга перегиба найдём точки пересечения его с лучами PA и PD (фиг. 181). С этой целью проводим $PS \parallel AD$ до пересечения с BC



Фиг. 181.

в точке S , а затем проводим $SK_2 K_1 \parallel PQ$; точки K_1 и K_2 и будут искомые. В самом деле, из подобия треугольников ABQ и BPS имеем:

$$\frac{PB}{BA} = \frac{BS}{BQ},$$

а из подобия треугольников PBQ и BSK_1 получим:

$$\frac{BS}{BQ} = \frac{BK_1}{PB}.$$

Соединяя обе пропорции, найдём:

$$\frac{PB}{BA} = \frac{BK_1}{PB} = \frac{PB + BK_1}{BA + PB} = \frac{PK_1}{PA},$$

откуда

$$PB \cdot PA = AB \cdot PK_1;$$

сравнивая это равенство с уравнением (102), видим, что $PK_1 = d \sin \varphi_1$, т. е. точка K_1 лежит на круге перегиба. Аналогично докажем, что и точка K_2 лежит на этом круге. Таким образом, для круга имеем три точки: K_1, K_2, P , что его вполне определяет; проверкой служит то, что центр его должен оказаться на нормали PN .

Если точка S выйдет за пределы чертежа, то находим точку K'_2 пересечения PQ с $AK'_2 \parallel CO$ и продолжаем $K'_2 B$ до пересечения с CD в точке K_2 , которая и будет точкой круга перегиба. В самом деле, по параллельности AK'_2 и PD имеем:

$$\frac{AC'}{AK'_2} = \frac{CD}{PD} \quad \text{и} \quad \frac{AC'}{AK'_2} = \frac{PC}{PK_2},$$

следовательно, $PC \cdot PD = CD \cdot PK_2$, т. е. точка K_2 удовлетворяет (102). Проведя $K_2 K_1 \parallel PQ$, найдём и точку K_1 .

Если точка Q выходит за пределы чертежа, то заменяем точки A и B точками E и F , как указано выше, и находим точку R пересечения CE и DF ; эта точка заменит Q . Для соединения её с полюсом, если последний также выходит за пределы чертежа, принимаем её за точку шатуна и проводим через неё нормаль к её траектории, как было указано раньше для этого случая.

В-третьих, при постоянном $\varphi \neq 90^\circ$ уравнение (102), написанное в виде

$$r^2 + \varphi r - \varphi d \sin \varphi = 0.$$

представляет полярное уравнение геометрического места точек, траектории которых имеют в данном положении механизма один и тот же радиус кривизны φ . Величина $d \sin \varphi$ в этом уравнении есть хорда круга перегиба на каком-либо луче под углом φ к оси x ; обозначая её через h , решим уравнение относительно r :

$$r = -\frac{\varphi}{2} \pm \sqrt{\frac{\varphi}{2} \left(\frac{\varphi}{2} + 2h \right)}.$$

На основании этой формулы производим построение кривой. Строим круг радиуса d , касательный в полюсе оси x (фиг. 182), а из полюса, как из центра, проводим круг радиусом $\frac{\varphi}{2}$, взяв на каком-либо луче из полюса точку R этого круга, лежащую вне круга перегиба, и проведя из неё касательную к кругу радиуса d , найдём, что длина этой касательной равна $\sqrt{\frac{\varphi}{2} \left(\frac{\varphi}{2} + 2h \right)}$.

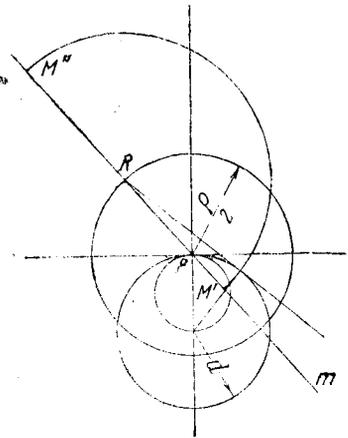
Поэтому, откладывая RM' и RM'' , равные этой касательной, получим точки M' и M'' искомой кривой. Кривая имеет в полюсе точку самонакосновения и получает различный вид в зависимости от отношения $\frac{\varphi}{d}$, а именно, при $\varphi < 4d$ она состоит из двух отдельных ветвей, касающихся в полюсе, при $\varphi = 4d$ получается двойная точка на оси y , при $\varphi > 4d$ образуются три отдельные ветви. Все три случая показаны на фиг. 183, *a*, *b*, *c*.

В декартовых координатах уравнение кривой примет вид:

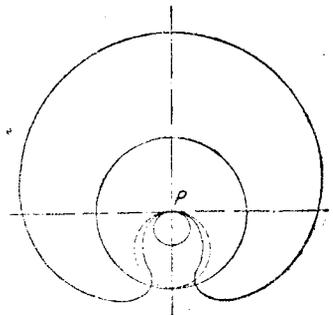
$$(x^2 + y^2)^3 = \varphi^2 (x^2 + y^2 - dy)^2, \quad (108)$$

из которого видно, что кривая шестого порядка и с каким-либо кругом перекасаётся не более, чем в шести действительных точках.

Отметим в заключение соотношение кривизны для обращённого движения, т. е. для механизма, поставленного на звено BC с шатуном AD . Так как точки B и C станут центрами кругов, описываемых точками A и D , а полюс останется на прежнем месте, то точки прежней шатуновой плоскости станут центрами кривизны для тех точек новой шатуновой плоскости, которые были прежде центрами кривизны. Точки прежнего круга перегиба будут теми точками, через которые будет проходить прямая, связанная с шатуном AD , в

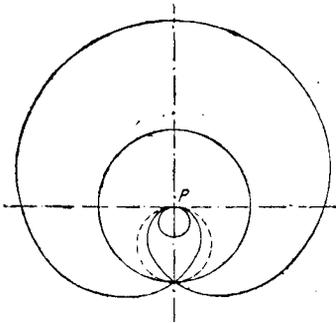


Фиг. 182.

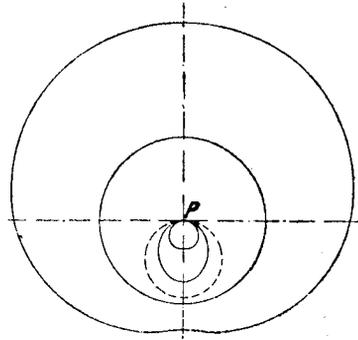


Фиг. 183а.

двух последовательных бесконечно близких положениях; это будет, вообще говоря, точки возврата огибающих различные положения подвижной прямой, отчего этот круг получил название круга возврата. Точки же перегиба будут



Фиг. 183б.



Фиг. 183с.

лежать на другом круге, равном прежнему кругу перегиба, но расположенном по другую сторону касательной PT . Это будет круг возврата первоначального движения. Кривая точек, имеющих траектории заданной кривизны, расположится также симметрично прежней кривой.

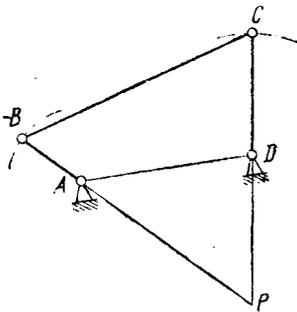
Уравнению

$$r'r = d(r' - r) \sin \varphi$$

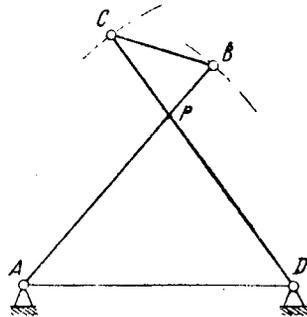
можно придать следующий вид:

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} = \frac{1}{d \sin \varphi};$$

это соотношение известно под названием теоремы Савари. Если им хотят воспользоваться для вычислений или построений абсолютных величин, то надо помнить, что оно получено в предположении расположения движущейся точки и центра кривизны её траектории по одну сторону полюса и притом



Фиг. 184.



Фиг. 185.

центра кривизны дальше от полюса, чем точки. Если обе точки расположены по одну сторону полюсов, но центр кривизны ближе к нему (фиг. 184), то надо писать:

$$r'r = d(r - r') \sin \varphi,$$

откуда

$$\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} = \frac{1}{d \sin \varphi},$$

т. е. хорде круга перегиба $d \sin \varphi$ надо приписать обратный знак, а теорему Савари можно формулировать, как и выше.

Если, наконец, точка и центр находятся по разные стороны от полюса (фиг. 185), то $\rho = r + r' + \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \frac{1}{d \sin \varphi}$.

Во всех случаях надо помнить, что точка K круга перегиба на данном луче всегда лежит с той же стороны движущейся точки, что и центр кривизны её траектории.

§ 28. Касание третьего порядка ¹⁾.

Найдём теперь точки шатунной плоскости, в которых траектория имеет соприкосновение третьего порядка со своим кругом кривизны, т. е. имеет с этим кругом четыре бесконечно близкие общие точки. В этих точках траектория ещё теснее подходит к своему кругу кривизны, а потому практически имеет форму круговой дуги на расстоянии ещё большем, чем в обыкновенных точках с касанием второго порядка. Для нахождения таких точек отнесём плоскость шатуна к осям $\xi O' \zeta$, а неподвижную плоскость — к осям xOy ; движение плоскости шатуна может быть характеризовано уравнениями:

$$x_0 = f_1(\varphi), \quad y_0 = f_2(\varphi),$$

где x_0 и y_0 — координаты подвижного начала относительно неподвижных осей, а φ — угол между осями Ox и $O'\zeta$. Движение какой либо точки в плоскости шатуна с координатами ξ и η будет определено уравнениями:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi, \\ y &= y_0 + \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi. \end{aligned}$$

Дифференцируя эти уравнения по φ , найдём:

$$\begin{aligned} x' &= x'_0 - \xi \sin \varphi - \eta \cos \varphi = x'_0 - y + y_0; \\ y' &= y'_0 + \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi = y'_0 + x - x_0; \\ x'' &= x''_0 - \xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi = x''_0 - x + x_0; \\ y'' &= y''_0 - \xi \sin \varphi - \eta \cos \varphi = y''_0 - y + y_0; \\ x''' &= x'''_0 + \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi = x'''_0 + y - y_0; \\ y''' &= y'''_0 - \xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi = y'''_0 - x + x_0. \end{aligned}$$

Напишем теперь уравнение круга:

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = \rho^2;$$

условие касания этого круга с траекторией точки (ξ, η) будет такое:

$$x'(x - x_C) + y'(y - y_C) = 0; \quad (109)$$

чтобы этот круг был кругом кривизны, необходимо ещё условие:

$$x''(x - x_C) + y''(y - y_C) + x'^2 + y'^2 = 0. \quad (110)$$

Если же мы хотим, чтобы касание было третьего порядка, то должно быть ещё:

$$x'''(x - x_C) + y'''(y - y_C) + 3(x'x'' + y'y'') = 0. \quad (111)$$

Исключая из этих трёх уравнений $(x - x_C)$ и $(y - y_C)$, получим уравнение третьей степени относительно ξ, η ; это и будет уравнением геометриче-

¹⁾ Котельников А. П.: Точки Бурместера, их свойства и построение, Математический сборник, 1927.

ского места точек интанушной плоскости, в которых получится касание третьего порядка. Чтобы упростить вычисление, выберем оба начала координат в полюсе, а оси Ox и $O'\xi$ направим по касательной к центроидам. Тогда для данного положения будет:

$$x = \xi, \quad y = \eta; \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 0; \quad x'_0 = 0, \quad y'_0 = 0; \quad x''_0 = 0, \quad y''_0 = d;$$

последние два равенства следуют из того, что ускорение полюса направлено по диаметру круга перегиба и равно $\omega^2 d$; затем получим:

$$x' = x'_0 - y; \quad y' = y'_0 + x; \quad x'' = x''_0 - x; \quad y'' = y''_0 - y; \quad x''' = x'''_0 + y; \\ y''' = y'''_0 + x.$$

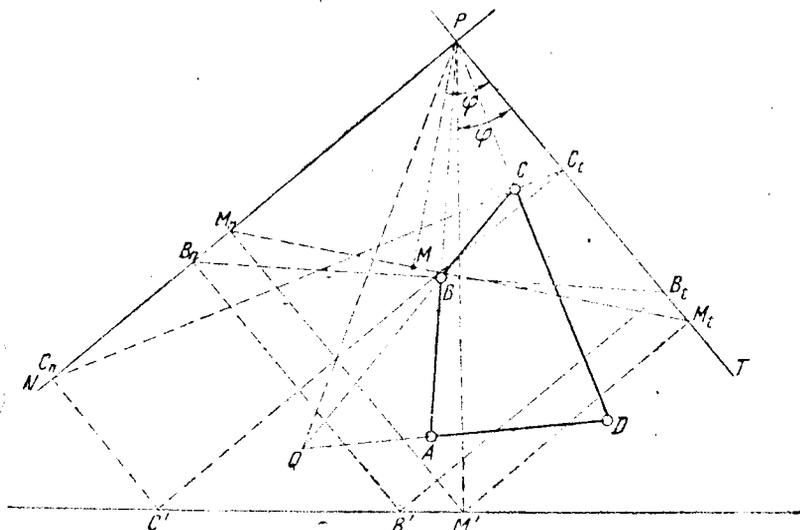
Подставляя эти значения в уравнения касания, получим:

$$-\eta(x - x_C) + \xi(y - y_C) = 0; \\ -\xi(x - x_C) + (d - \tau)(y - y_C) + \xi^2 + \eta^2 = 0; \\ (x'''_0 + \tau)(x - x_C) + (y'''_0 - \xi)(y - y_C) + 3d\xi = 0.$$

Исключая $(x - x_C)$ и $(y - y_C)$, получим:

$$(\xi^2 + \tau^2)(x'''_0 \xi + y'''_0 \tau + 3d\xi) - 3d^2 \xi \tau = 0. \quad (112)$$

Это уравнение третьей степени и есть уравнение искомого геометрического места, называемого кривой Бурместера. Для построения этой кривой



Фиг. 186.

найдем одно её свойство. Нанедем уравнение в полярных координатах, подставляя

$$\xi^2 + \tau^2 = r^2; \quad \xi = r \cos \varphi; \quad \tau = r \sin \varphi;$$

по сокращении на r^2 получим:

$$r(x'''_0 + 3d + y'''_0 \operatorname{tg} \varphi) = 3d^2 \sin \varphi. \quad (112')$$

Проведём в какой-либо точке M кривой прямую, перпендикулярную радиусу-вектору этой точки (фиг. 186). Найдём точки пересечения этой прямой с осями координат и восставим в этих точках перпендикуляры к осям; полярные координаты точки M' пересечения этих перпендикуляров назовём

r' и φ' и определим их; из подобия треугольников PM_t и $P'M_t$ имеем:

$$\frac{PM'}{PM_t} = \frac{PM_t}{MM_t} = \frac{1}{\sin \varphi};$$

так как

$$PM' = r', \quad PM = r, \quad PM_t = \frac{r}{\cos \varphi},$$

то

$$r' = \frac{r}{\sin \varphi \cos \varphi}, \quad \varphi' = \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

Исключая r и φ , получим:

$$r' = \frac{3d^2}{(x_0''' + 3d) \sin \varphi' + y_0''' \cos \varphi'}. \quad (113)$$

Это есть уравнение прямой линии, представляющей геометрическое место точек M' . Эту прямую легко построить по двум точкам B и C , которые принадлежат кривой как точки, круги кривизны траекторий которых совпадают с самими траекториями. Таким образом получается следующее построение.

В точках B и C проводим $B_n B_t \perp PB$ и $C_n C_t \perp PC$, затем в точках B_n и B_t проводим $B_n B' \parallel PT$ и $B_t B' \parallel PN$, а в точках C_n и C_t — прямые $C_n C' \parallel PT$ и $C_t C' \parallel PN$; таким образом получаем точки B' и C' и прямую $B'C'$. Для построения какой-либо точки кривой берём на прямой $B'C'$ произвольную точку M' , опускаем перпендикуляры $M'M_n$ и $M'M_t$, соединим M_n с M_t и из P опускаем $PM \perp M_n M_t$; точка M по доказанному принадлежит кривой.

Кривая имеет двойную точку в полюсе и пересекает круг перегиба ещё в точке S , траектория которой имеет касание третьего порядка с прямой. Эта точка — единственная, так как уравнение круга перегиба

$$r = d \sin \varphi$$

совместно с уравнением кривой Бурместера даёт кроме решения $r = 0$, $\varphi = 0$ (полюс) ещё одно решение:

$$\operatorname{tg} \varphi = - \frac{x_0'''}{y_0'''} \quad (114)$$

Точка S называется точкой Болла по имени английского учёного Ball.

В силу взаимно однозначного соответствия между точками шатунной и неподвижной плоскости для каждой точки кривой Бурместера найдём центр кривизны; все эти центры образуют на неподвижной плоскости кривую, которая будет кривой Бурместера для обращённого механизма со стойкой BC и шатуном AD . Уравнение этой кривой получим из (112') подстановкой формулы преобразования (105), в результате чего будем иметь:

$$r' (x_0''' + 3d + y_0''' \operatorname{tg} \varphi) = 3d (r' + d \sin \varphi),$$

или

$$r' (x_0''' + y_0''' \operatorname{tg} \varphi) = 3d^2 \sin \varphi, \quad (115)$$

т. е. уравнение такого же вида, что и (112'). Кривая может быть, следовательно, построена при помощи направляющей прямой, уравнение которой получим из (115) подстановкой:

$$r' = r'' \sin \varphi \cos \varphi \quad \text{и} \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - \varphi',$$

что приведёт к следующему:

$$r'' = \frac{3d^2}{x_0''' \sin \varphi' + y_0''' \cos \varphi'}.$$

В декартовых координатах будем иметь:

$$y_0''' x + x_0''' y = 3d^2.$$

Из этого уравнения видно, что прямая образует с нормалью PN такой же угол, какой луч PS , идущий в точке Болла, образует с касательной

PT. Таким образом, точка Болла может быть построена и без кривой Бурместера, как точка пересечения круга перегиба с этим лучом, после того как построена направляющая прямая кривой Бурместера. Кроме того, найдя точки пересечения этой прямой с осями, получим и величины x_0''' и y_0''' :

$$x_0''' = \frac{3d^2}{b}; \quad y_0''' = \frac{3d^2}{a}, \quad (116)$$

где a и b суть отрезки, отсекаемые направляющей прямой на осях.

Величины x_0''' и y_0''' могут быть найдены также из (113), если обозначить отрезки, отсекаемые этой прямой на осях, через a' и b' ; тогда

$$a' = \frac{3d^2}{y_0'''}, \quad b' = \frac{3d^2}{x_0''' + 3d},$$

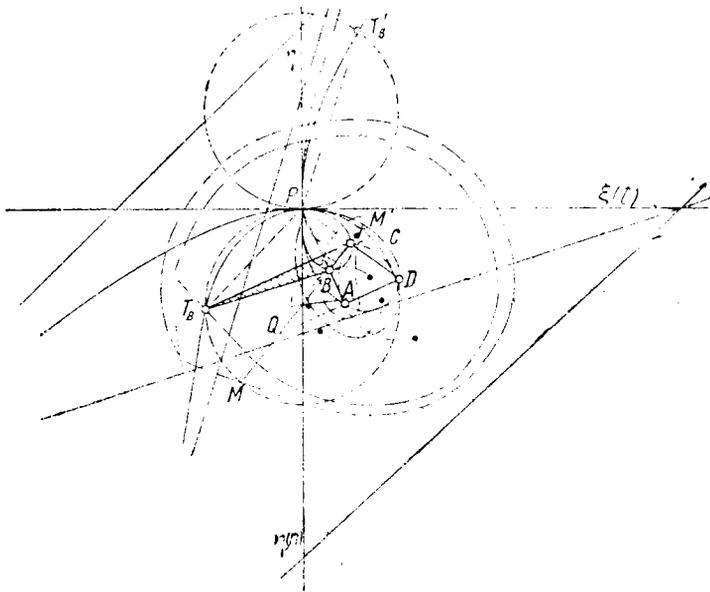
откуда

$$x_0''' = \frac{3d^2}{b'} - 3d, \quad y_0''' = \frac{3d^2}{a'}. \quad (116')$$

Из сравнения (116) и (116') видим, что

$$a = a',$$

а между b и b' существует соотношение: $\frac{1}{b'} - \frac{1}{b} = \frac{1}{d}$, что соответствует (113) при $\varphi = 90^\circ$. Итак, направляющие прямые обеих кривых Бурместера пересекаются на касательной PT , а точки пересечения их с нормалью PN находятся в квадратичном соответствии шатуновой и неподвижной плоскости.



Фиг. 187.

Эта зависимость может служить проверкой точности построения или для построения второй направляющей прямой, если одна построена.

Точка пересечения неподвижной кривой Бурместера с кругом возврата будет точкой Болла для обращенного движения. Она находится также на луче, образующем с нормалью PN такой же угол, какой направляющая прямая на шатуновой плоскости с касательной PT . Для первоначального движения эта точка является той точкой неподвижной плоскости, через которую подвижная прямая проходит в четырех последовательных бесконечно близких положениях. Она есть точка возврата второго рода для огибающих этих прямых.

Для уточнения вида обеих кривых Бурместера полезно отметить следующее. Во-первых, диаметры кругов кривизны их в полюсе равны отрезкам их направляющих прямых на осях. Во-вторых, кривые имеют каждая по одной асимптоте, параллельной лучу, идущему к точке Болла обращенного движения; проведя через полюс луч, перпендикулярный к направляющей прямой, и откладывая в обратную сторону этого луча радиус-вектор кривой Бурместера, получим одну точку асимптоты.

На фиг. 187 показаны обе кривые Бурместера, обе точки Болла и траектории некоторых точек шатунной плоскости.

В точках пересечения кривой Бурместера с кривой точек одинаковой кривизны получим точки, в которых круг кривизны заданного радиуса имеет с траекторией прикосновение третьего порядка. Кроме полюса, который является двойной точкой для каждой кривой, имеются ещё не более шести действительных точек пересечения.

§ 29. Касание четвертого порядка.

Для получения касания четвертого порядка траектории со своим кругом кривизны продифференцируем (111), в результате чего получим:

$$x^{IV} (x - x_C) + y^{IV} (y - y_C) + 4(x'x'' + y'y'') + 3(x''^2 + y''^2) = 0, \quad (117)$$

где

$$\begin{aligned} x^{IV} &= x_0^{IV} + \xi \cos \varphi - \tau \sin \varphi = x_0^{IV} + x - x_0, \\ y^{IV} &= y_0^{IV} + \xi \sin \varphi + \tau \cos \varphi = y_0^{IV} + y - y_0. \end{aligned}$$

При указанном выше выборе осей получим:

$$x^{IV} = x_0^{IV} + \xi, \quad y^{IV} = y_0^{IV} + \tau;$$

после подстановки производных в (117) и исключения $(x - x_C)$ и $(y - y_C)$ из (109), (110) и (117), найдём:

$$(\xi^2 + \tau^2)(x_0^{IV}\xi + y_0^{IV}\tau - d\tau) + (\xi^2 + \tau^2 - d\tau)(4y_0^{IV}\xi - 4x_0^{IV}\tau - 6d\tau + 3d^2) = 0. \quad (118)$$

В пересечении этой кривой третьего порядка с кривой Бурместера найдутся точки, обладающие требуемым свойством. Они называются точками Бурместера. Вместо построения двух кривых третьего порядка можно поступить следующим образом. Исключим из этих уравнений $(\xi^2 + \tau^2)$, после чего получим уравнение:

$$3d\xi(x_0^{IV}\xi + y_0^{IV}\tau - d\tau) - (x_0^{IV}\xi + y_0^{IV}\tau)(4y_0^{IV}\xi - 4x_0^{IV}\tau - 6d\tau + 3d^2) = 0. \quad (119)$$

Это есть уравнение конического сечения, проходящего через полюс, а потому в полюсе мы имеем две точки пересечения его с кривой Бурместера; следовательно, из $2 \cdot 3 = 6$ точек пересечения остаются лишь 4. Двумя из них являются точки *B* и *C*, для которых круг кривизны совпадает с траекторией; остальные две могут быть или обе действительные или обе мнимые. Таким образом, во всяком положении шарнирного четырёхзвенника или существуют на шатуне кроме двух точек Бурместера, совпадающих с центрами шарниров, ещё две точки Бурместера, или их не существует вовсе.

Для построения указанного конического сечения мы уже имеем три точки: *B*, *C* и полюс *P*; но этого ещё недостаточно. Для нахождения дополнительных данных заметим по виду уравнения конического сечения, что оно проходит через четыре точки пересечения прямых:

$$\xi = 0, \quad x_0^{IV}\xi + y_0^{IV}\tau - d\tau = 0,$$

с прямыми:

$$x_0^{IV}\xi + y_0^{IV}\tau = 0; \quad 4y_0^{IV}\xi - 4x_0^{IV}\tau - 6d\tau + 3d^2 = 0.$$

Одна из этих точек есть начало координат (полюс), что уже было указано; другая получится подстановкой $\xi=0$ в последнее уравнение, что даёт:

$$\eta = \frac{3d^2}{4x_0'''+6d} = \frac{bd}{2(2d+b)}$$

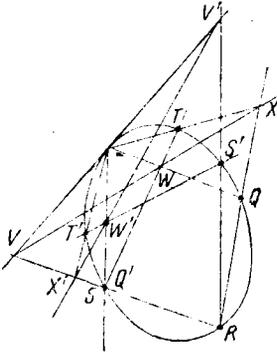
Кроме того, в начале координат коническое сечение касается прямой:

$$x_0''' \xi + y_0''' \eta = 0,$$

т. е. луча, идущего к точке Болла, что следует из его уравнения.

Таким образом будут известны четыре точки конического сечения и касательная в одной точке; этих данных достаточно для его построения.

Приводим это построение. Пусть даны точки P, Q, R, S , через которые должно проходить искомого коническое сечение, и касательная к нему в точке P (фиг. 188). Находим точку V пересечения касательной с хордой RS , не проходящей через P , и будем искать точку конического сечения на луче, проходящем через V . Пусть какой-либо луч из V пересекает хорду PQ в W , а хорду QR — в X ; тогда точка T пересечения PX и SW будет точкой конического сечения. Так мы можем построить любое число точек от P через Q к R . Для построения остальной части конического сечения надо иметь центр лучей на касательной по другую сторону P . С этой целью примем одну из найденных точек кривой за новую точку S' вместо прежней S , которую обозначим через Q' (можно было бы за S' взять Q , но в таком случае точка V' вышла бы за пределы чертежа). Проводя из V' произвольный луч, находим точки W' и X' , а по



Фиг. 188.

ним и точку T'' конического сечения.

Коническое сечение может вырождаться в пару прямых; это случится, если его уравнению можно будет придать вид:

$$(a_1\xi + b_1\eta + c_1)(a_2\xi + b_2\eta + c_2) = 0.$$

Раскрывая скобки и сравнивая коэффициенты этого уравнения с коэффициентами уравнения конического сечения в общем виде (тоже после раскрытия скобок), получим:

$$\begin{aligned} a_1a_2 &= 3dx_0'''+4x_0'''y_0'''; \\ a_1b_2 + a_2b_1 &= 3dy_0'''+3d^2+4y_0'''''+4x_0'''''+6dx_0'''; \\ b_1b_2 &= -4x_0'''''+6dy_0'''; \\ a_1c_2 + a_2c_1 &= 3d^2x_0'''; \\ b_1c_2 + b_2c_1 &= 3d^2y_0'''; \quad c_1c_2 = 0. \end{aligned}$$

Не уменьшая общности решения, можно положить $c_1=1$; последнее уравнение даёт $c_2=0$; остальные будут иметь вид:

$$\begin{aligned} a_1a_2 &= 3dx_0'''+4x_0''''y_0'''; \\ a_1b_2 + a_2b_1 &= 3dy_0'''+3d^2+4y_0'''''+4x_0'''''+6dx_0'''; \\ b_1b_2 &= y_0'''''+(-4x_0'''''+6d); \\ a_2 &= 3d^2x_0'''; \\ b_2 &= 3d^2y_0'''. \end{aligned}$$

Если $y_0'''' \neq 0$, то

$$b_1 = \frac{-4x_0'''''+6d}{3d^2}; \quad a_1 = \frac{3dx_0'''+4x_0''''y_0'''''}{3d^2x_0'''''};$$

из второго уравнения получаем:

$$x_0''' y_0^{IV} - y_0''' x_0^{IV} - d x_0''' = 0. \quad (120)$$

Если же $y_0''' = 0$, то, как видно из состава уравнения, коническое сечение также распадается на пару прямых. Рассмотрим каждый случай отдельно.

Если $y_0''' \neq 0$, то найденное выше условие распадаения может быть написано так:

$$x_0^{IV} - (y_0^{IV} - d) \frac{x_0'''}{y_0'''} = 0;$$

но

$$-\frac{x_0'''}{y_0'''} = \operatorname{tg} \varphi_B,$$

где φ_B — угол луча, идущего от начала координат к точке Болла, поэтому

$$x_0^{IV} + (y_0^{IV} - d) \operatorname{tg} \varphi_B = 0,$$

а из уравнения луча имеем:

$$\tau_i = \xi \operatorname{tg} \varphi_B.$$

Подставляя это выражение в уравнение кривой третьего порядка, определяющей точки Бурместера, получим:

$$(\xi^2 + \tau_i^2 - d \tau_i) (4y_0''' \xi - 4x_0''' \tau_i - 6d \tau_i + 3d^2) = 0.$$

Но $\xi^2 + \tau_i^2 - d \tau_i = 0$ есть уравнение круга перегиба; поэтому точка круга перегиба на рассматриваемом луче лежит также на этой кривой. Иначе говоря, при условии (120) точка Болла является одной из точек Бурместера.

На основании определения обеих точек касательная к шатунной кривой в этой точке будет иметь касание четвертого порядка. Такая точка называется точкой Чебышева¹⁾.

Прямые, на которые распадается коническое сечение, суть следующие:

$$(3d x_0^{IV} + 4x_0''' y_0''') \xi + x_0''' + (4x_0''' + 6d) \tau_i + 3d^2 x_0''' = 0$$

и

$$x_0''' \xi + y_0''' \tau_i = 0. \quad (121)$$

Вторая прямая есть упомянутый выше луч, на котором лежит точка Чебышева, а так как в качестве точки Болла она единственная, то остальные три точки Бурместера лежат на первой прямой. Из этого следует, что помимо центров шарниров B и C и точки Чебышева есть ещё одна точка Бурместера, лежащая на оси шатуна.

Во втором случае, т. е. при $y_0''' = 0$, уравнение кривой Бурместера примет вид:

$$\xi [(\xi^2 + \tau_i^2) (x_0''' + 3d) - 3d^2 \tau_i] = 0.$$

т. е. кривая распадается на ось τ_i :

$$\xi = 0$$

и на круг:

$$(x_0''' + 3d) (\xi^2 + \tau_i^2) - 3d^2 \tau_i = 0, \quad (122)$$

проходящий через начало координат, касающийся оси τ_i и имеющий диаметр

$$\frac{3d^2}{x_0''' + 3d} = b'.$$

¹⁾ Чебышев П. М.: О простейших параллелограммах, доставляющих прямолинейное движение с точностью до величин четвертой степени. 1879.

Коническое же сечение распадается на ось τ и прямую:

$$3dx_0^{IV}\xi + (3dy_0^{IV} + 4x_0'''' + 6dx_0'''' - 3d^2)\tau - 3d^2x_0'''' = 0. \quad (123)$$

Для определения точек Бурместера нельзя применить уравнение кривой Бурместера, так как ось τ входит как в уравнение этой кривой, так и в уравнение конического сечения. Подставляя же $\xi = 0$ в уравнение второй кривой третьего порядка, получим:

$$\tau^3 (y_0^{IV} - d) + \tau (\tau - d) (-4x_0''''\tau - 6d\tau + 3d^2) = 0. \quad (123')$$

Исключая полюс, где $\tau = 0$, получим квадратное уравнение относительно τ , дающее две точки Бурместера. Итак, на оси η находятся две точки Бурместера; другие две точки Бурместера лежат на другой прямой, представляющей, очевидно, ось шатуна, так как этими точками будут точки B и C . Следовательно, указанный выше круг проходит через точки B и C .

§ 30. Касание пятого порядка.

Точки Бурместера, в которых получается касание пятого порядка, должны удовлетворять ещё условию:

$$x^V (x - x_C) + y^V (y - y_C) + 5(x'x^{IV} + y'y^{IV}) + 10(x''x''' + y''y''') = 0, \quad (124)$$

где

$$x^V = x_0^V \quad ; \quad \sin \varphi - \tau \cos \varphi = x_0^V - y_0 - x_0^V - \tau,$$

$$y^V = y_0^V + \xi \cos \varphi - \tau \sin \varphi = y_0^V + x - x_0 = y_0^V + \xi.$$

Таким образом, наше условие примет вид:

$$(x_0^V - \tau)(x - x_C) + (y_0^V + \xi)(y - y_C) + 5[-\tau(x_0^{IV} + \xi) + \xi(y_0^{IV} + \tau)] + \\ + 10[-\xi(x_0''' + \tau) + (d - \tau)(y_0''' - \xi)] = 0.$$

Но исключив $(x - x_C)$ и $(y - y_C)$ получим:

$$(\xi^2 + \tau^2)(x_0^V \xi + y_0^V \tau + \phi) - d\tau\phi = 0, \quad (125)$$

где

$$\phi = -5x_0^{IV}\tau + 5y_0^{IV}\xi - 10x_0''''\xi + 10y_0''''d - 10y_0''''\tau - 10d\xi.$$

Соединяя это уравнение с уравнением кривой Бурместера и исключая из них $(\xi^2 + \tau^2)$, найдём уравнение конического сечения:

$$3d\xi(x_0^V\xi + y_0^V\tau) + (x_0''''\xi + y_0''''\tau)\phi = 0. \quad (126)$$

Если одна или несколько точек Бурместера будут лежать на этом коническом сечении, то они будут иметь касание пятого порядка. Но мы видели, что точки Бурместера лежат на другом коническом сечении. Из уравнений обоих конических сечений видно, что оба они в полюсе касаются одной и той же прямой и проходят через точки B и C , следовательно, имеют четыре общие точки. Если они будут иметь ещё пятую общую точку, то должны совпасть, а потому в этом случае не только точки B и C будут, как описывающие круговые траектории, точками Бурместера пятого порядка, но и остальные две точки будут таковыми же. Условие совпадения обоих конических сечений можно выразить тем, что за пятую общую точку выберем точку на оси τ , т. е. полагая в обоих уравнениях $\xi = 0$ и $\tau_1 = \tau_2$. Последнее равенство даёт:

$$\frac{2y_0}{x_0^{IV} + 2y_0''''} = \frac{3d}{2(x_0'''' + 3d)},$$

откуда

$$8x_0''''y_0'''' + 6dy_0'''' - 3dx_0^{IV} = 0, \quad (127)$$

Так как входящие в это уравнение величины зависят от положения, т. е. от одного параметра, то этот параметр отсюда может быть определён, т. е. для каждого шарнирного четырёхзвенника существует такое положение, в котором существует пара точек Бурместера пятого порядка, не считая точек B и C . Эти точки впрочем могут оказаться мнимыми.

Если, кроме того, удовлетворяется требование, чтобы точка Болла была точкой Бурместера, которое тоже даёт возможность определить положение механизма, то мы будем иметь точку Чебышева пятого порядка, в которой касательная имеет максимум общих совпадающих точек с траекторией — именно шесть. Положения механизма, удовлетворяющие каждому из указанных условий, вообще говоря, не совпадают. Поэтому точка Чебышева пятого порядка существует только при некоторых соотношениях длин звеньев.

Отметим здесь один особый случай точки Бурместера, именно, случай её совпадения с полюсом¹⁾. Мы видели, что для точек на касательной к центрам полюс является общим центром кривизны всех траекторий.

Если поставить условие, чтобы среди этих точек находилась хотя бы одна точка Бурместера, то, написав условие касания третьего порядка в виде:

$$x_0''' \xi - x_0'' x_C - x_C \tau + y_0'' \eta - y_0' y_C + y_C \zeta + 3d\zeta = 0,$$

имея в виду, что $\xi \neq 0$, $\tau = 0$, $x_C = 0$, $y_C = 0$, получим:

$$x_0''' + 3d = 0. \quad (128)$$

Но в этом случае кривая Бурместера, как видно из её уравнения, распадается на ось ξ и круг:

$$\tau = 0, \quad y_0''' (\xi^2 + \tau^2) - 3d^2 \xi = 0. \quad (129)$$

Так как коническое сечение, определяющее точки Бурместера, проходит через полюс, то на оси ξ имеется ещё только одна точка Бурместера, абсцисса которой равна:

$$\xi = - \frac{3dx_0'''}{3dx_0^{IV} - 4x_0'' y_0'''} = - \frac{3d^2}{x_0^{IV} + 4y_0'''}.$$

Остальные три точки Бурместера лежат на указанном выше круге.

Требование, чтобы точка Бурместера на оси ξ была пятого порядка, удовлетворяется при

$$3dx_0^{IV} + 15dy_0^{IV} + 10x_0^{IV} y_0'''' + 40y_0''''^2 + 20d^2 = 0. \quad (130)$$

Посмотрим, наконец, может ли быть точка Бурместера в полюсе. В этом случае надо положить $\xi = 0$, $\tau = 0$. Условие касания второго порядка даёт $y_C = 0$, но x_C остаётся неопределённым, т. е. любой круг с центром на касательной PT имеет касание второго порядка с траекторией точки, проходящей в данное мгновение через полюс.

Формально, следовательно, любой такой круг может считаться кругом кривизны, хотя в действительности, вообще говоря, круг кривизны обращается в точку вследствие наличия здесь точки возврата. Только при некотором условии радиус кривизны будет отличным от нуля. Именно, условие касания третьего порядка (111) даёт:

$$x_0''' = 0,$$

причём x_C опять-таки остаётся неопределённым: итак, при $x_0''' = 0$ любой круг с центром на касательной имеет касание третьего порядка с траекторией точки, проходящей в данное мгновение через полюс.

Условие $x_0''' = 0$ имеет простой геометрический смысл. Точки A и D , как лежащие на неподвижной кривой Бурместера, должны удовлетворять уравне-

¹⁾ Котельников А. П.: Точки Бурместера, их свойства и построение, Матем. сборник, 1927, стр. 262—263.

нию (115), т. е.

$$PA(x_0'''' + y_0'''' \operatorname{tg} \beta) = 3d^2 \sin \beta;$$

$$PD(x_0'''' + y_0'''' \operatorname{tg} \alpha) = 3d^2 \sin \alpha.$$

При $x_0'''' = 0$ получим:

$$PA \cdot y_0'''' = 3d^2 \cos \beta,$$

$$PD \cdot y_0'''' = 3d^2 \cos \alpha,$$

откуда

$$PA \cdot \cos \alpha = PD \cdot \cos \beta.$$

Но это означает, что $PQ \perp AD$. Итак, условием касания третьего порядка является перпендикулярность прямой PQ линии центров.

При этом условии получаем между прочим

$$y_0'''' = \frac{3d^2 \cos \alpha}{PD} = \frac{3d^2 \cos \beta}{PA}.$$

При выполнении $x_0'''' = 0$ условие касания четвертого порядка примет вид

$$x_0'''' x_0'' - 3d^2 = 0,$$

откуда

$$x_0'' = \frac{3d^2}{x_0''}.$$

Итак, среди кругов, имеющих касание третьего порядка, существует один, имеющий касание четвертого порядка. Это-то мы и будем считать кругом кривизны для точки Бурместера, находящейся в полюсе.

Заметим ещё, что условие $x_0'''' = 0$ ведёт к распадению неподвижной кривой Бурместера; в самом деле, при $x_0'''' = 0$ из (115) получаем:

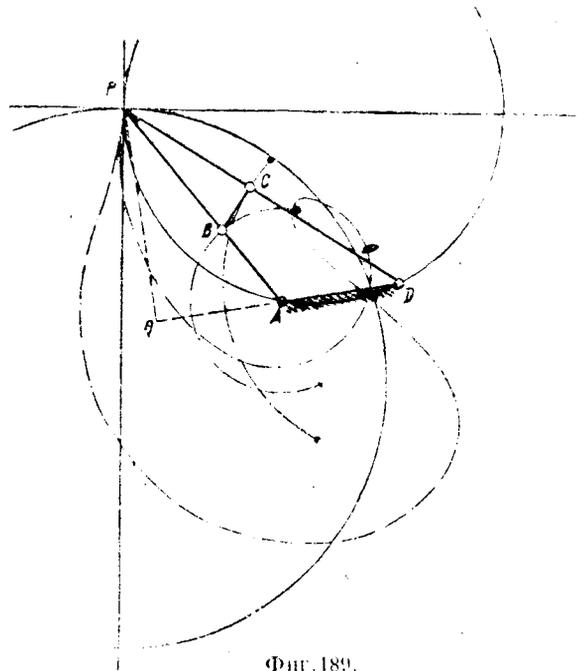
$$y_0'''' r' \operatorname{tg} \varphi = 3d^2 \sin \varphi,$$

откуда

$$\sin \varphi = 0,$$

$$y_0'''' r' = 3d^2 \cos \varphi;$$

первое уравнение есть уравнение оси x , второе — круга (129). Имен в виду найденное выше выражение для y_0'''' , заметим, что этот круг проходит через точки A и D ; кроме того, он проходит через полюс и касается нормали PN . Итак, при условии $x_0'''' = 0$ неподвижная кривая Бурместера распадается на



Фиг. 189.

прямую PT и круг, описанный вокруг треугольника APD .

На фиг. 189 изображён такой случай: траектория имеет одну обычную двойную точку, а в полюсе — точку возврата второго рода, представляющую слившиеся две двойные точки.

Для получения касания пятого порядка напишем это условие для нашего случая так:

$$-x_0^V x_C + 10dy_0''' = 0,$$

откуда

$$x_C = \frac{10dy_0'''}{x_0^V}.$$

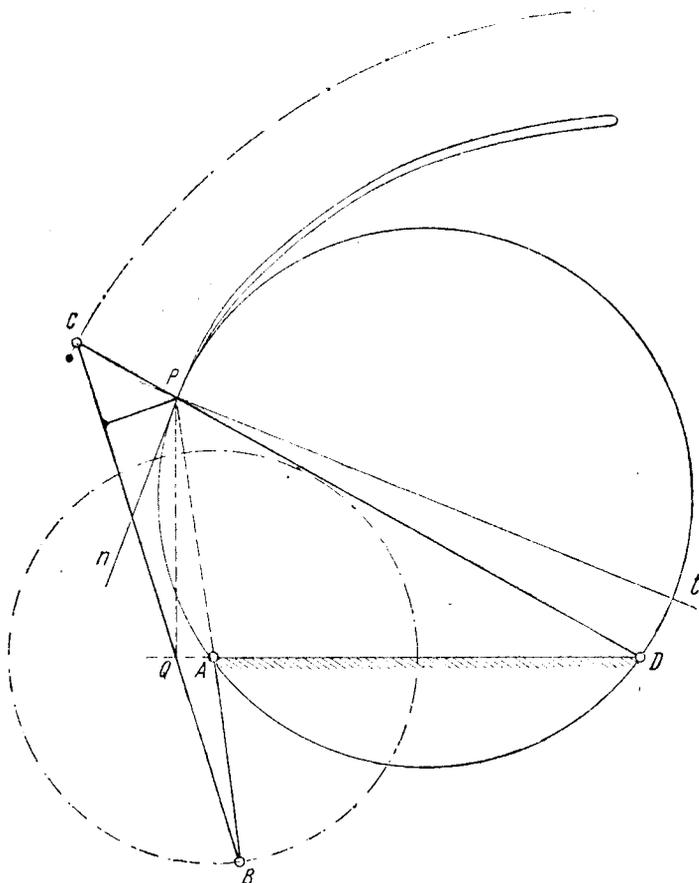
Эта абсцисса должна совпадать с полученным выше выражением для x_C , а потому условие касания выразится так:

$$\frac{10dy_0'''}{x_0^V} = \frac{3d^2}{x_0^{IV}},$$

или

$$3dx_0^V = 10y_0''' x_0^{IV}.$$

Так как в этом случае все три двойные точки находятся в полюсе, а с другой стороны, все они должны лежать на круге, описанном вокруг треуголь-



Фиг. 190.

ника APD , то этот круг и будет кругом кривизны. Чтобы получить этот случай, можно выбрать произвольно точки A , D и P (как и в предыдущем примере), что определит точку Q (фиг. 190), а затем из Q провести луч под углом $\gamma = \alpha + \beta \pm 90^\circ$ к QP ; этот луч определит точки B и C .

§ 31. Синтез направляющих механизмов.

Целью таких механизмов, как известно, является ведение одной или нескольких точек точно или приближённо по прямой линии. Изложенная теория шатунных кривых показывает, что шарнирный четырёхзвеник может быть лишь приближённым направляющим механизмом. На основании этой теории могут быть решены следующие задачи.

Задача первая может быть сформулирована так: известны длины всех звеньев шарнирного четырёхзвеника; требуется в шатунной плоскости его найти такую точку, которая вблизи заданного положения механизма двигалась бы приближённо прямолинейно.

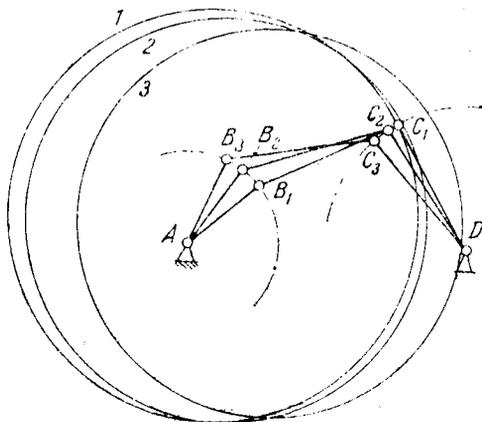
Решение этой задачи в первом приближении даётся построением круга перегиба: любая точка этого круга может быть принята за искомую точку. Однако, взяв наугад точку круга перегиба, мы рискуем получить кривую, практически совпадающую с прямой только на весьма коротком расстоянии.

Большее приближение даёт точка Болла. Из фиг. 187 видно, что для взятого механизма в начерченном положении не только точка Болла, но и близкая к ней точка на оси шатуна даёт хорошее приближение к прямой. Точка круга перегиба на другом конце шатуна, наоборот, даёт плохое приближение ввиду близости её к полюсу.

Точки, хотя и не лежащие на самом круге перегиба, но близко от него, в особенности — около точки Болла, также могут дать хорошее приближение. Основываясь на этом, И. И. Мерцалов¹⁾ указал следующий способ нахождения таких точек, не требующий построения точки Болла.

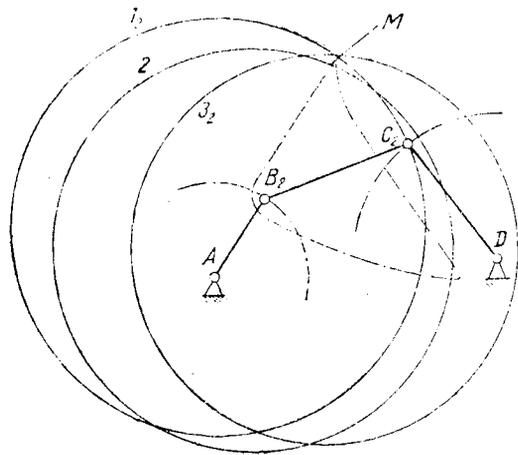
Строим механизм ещё в двух положениях, близких к заданному, и находим для каждого положения круг перегиба (фиг. 191а). Скопируем теперь на кальку эти два новых положения вместе с их кругами перегиба и наложим на заданное положение (фиг. 191б). Тогда можно прямо на-глаз указать точку, близкую ко всем трём кругам перегиба; такой точкой оказалась у нас точка M . Траектория её действительно близка к прямой на довольно большом протяжении.

Вторая задача может быть сформулирована так: известны длины звеньев шарнирного четырёхзвеника; требуется определить то положение механизма, в котором имелась бы точка, описывающая вблизи этого положения прямую возможно более точно.



Фиг. 191а.

даёт точка Болла. Из фиг. 187 видно, что для взятого механизма в начерченном положении не только точка Болла, но и близкая к ней точка на оси шатуна даёт хорошее приближение к прямой.



Фиг. 191б.

¹⁾ Мерцалов И. И.; Кинематика механизмов, стр. 357.

Решение этой задачи сводится к нахождению такого положения механизма, в котором точка Болла оказалась бы вместе с тем и точкой Бурместера, т. е. к нахождению точки Чебышева. Это можно было бы сделать путём проб, т. е. для ряда положений механизма находить круг перегиба и пару прямых (121) и среди них найти такое положение, в котором первая прямая совпала бы с прямой BC ; тогда вторая прямая определит на круге перегиба точку Чебышева. Однако, такой путь требует ряда кропотливых построений для каждого положения. Практически проще вычислить для каждого положения величины x_0^{IV} и y_0^{IV} из (118) или (119), подставляя координаты точек B и C ; подставляя затем найденные значения x_0^{IV} и y_0^{IV} в левую часть (120), найдём некоторую функцию угла поворота одного из звеньев, например AB ; построив диаграмму этой функции, найдём в пересечении её с осью абсцисс величину угла, определяющего искомое положение механизма.

Надо сказать впрочем, что и этот путь хотя и менее громоздок в построениях, так как не требует построения кривой Бурместера и конического сечения, а только круга перегиба, но приводит к утомительным вычислениям. Если требуется большее приближение, чем даётся в первой задаче, то обращаясь к следующей третьей задаче.

Определить размеры шарнирного четырёхзвенника, одна из точек шатуна которого давала бы наилучшее приближение к прямой, и найти эту точку.

В основу решения этой задачи можно положить требование существования точки Чебышева. Мы видели в предыдущей задаче, что размерами механизма можно задаться произвольно. Однако, более целесообразно задаться лишь центрами A и D , т. е. размером AD , полюсом P и осями координат, т. е. положением касательной, и нормали к центроидам. Прямые PA и PD определяют положение звеньев AB и CD , а касательная PT — положение прямой PQ , а следовательно, и точки Q . Остаётся провести через Q луч, определяющий на PA точку B , а на PD — точку C . Так как оси координат и точки A и D остаются постоянными, то луч из P к точке Болла вполне определён. Проводя из Q ряд лучей, можно добиться, что один из них совпадёт с первой прямой (121); тогда круг перегиба определит точку Чебышева.

Если мы хотим получить точку Чебышева пятого порядка, то должны одновременно удовлетворяться условия (120) и (121), а это ведёт к некоторым соотношениям длин звеньев, при которых можно найти положение механизма и соответствующую ему точку Чебышева. Положением можно задаться, равно как и каким-либо соотношением между длинами звеньев; останется найти добавочное соотношение между этими длинами, при котором может существовать точка Чебышева пятого порядка, и определить эту точку. Кроме того, имея в виду, что характер движения зависит только от относительных размеров механизма, можем считать, что один абсолютный размер известен; за такой размер примем расстояние центров AD .

Пример 8. Спроектировать четырёхзвенный направляющий механизм, у которого противоположные звенья AB и CD равны (фиг. 192).

Пусть этот четырёхзвенник находится в его среднем положении. Вследствие параллельности $BC \parallel AD$ точка Q находится в бесконечности, а потому $PQ \parallel AD$. Но вследствие симметрии фигуры касательная PT , образуя угол DPT , равный углу APQ , также будет параллельна AD , т. е. сливается с PQ , а нормаль PN будет осью симметрии. Для построения круга перегиба надо провести через P прямую, параллельную AD , до пересечения с BC ; в нашем случае это будет бесконечно удалённая точка прямых PT и BC , а потому любая прямая, параллельная PT , могла бы определить точки K_1 и K_2 на PA и PD , т. е. построение даёт неопределённый ответ. Для раскрытия неопределённости возьмём соотношение

$$PB \cdot PA = AB \cdot PK_1,$$

верное для всех положений, как вытекающее из (102); оно даёт единственно значение PK_1 , следовательно, вполне определит точку K_1 ; вследствие симметрии $PK_2 = PK_1$. Написав последнее соотношение в виде

$$\frac{PB}{BA} = \frac{PK_1}{PA},$$

Величина y_0^{IV} определится из (123), которое должно представлять уравнение прямой BC , т. е. иметь вид $\tau = \text{const.} = PS$; следовательно,

$$x_0^{IV} = 0, \quad PS(3dy_0^{IV} + 4x_0'''' + 6dx_0''' - 3d^2) = 3d^2x_0''', \quad (123'')$$

откуда определяем y_0^{IV} .

Точкой Волла будет в данном случае точка W , диаметрально противоположная полюсу.

Точки Бурместера на оси τ при взятых на чертеже размерах оказались мнимыми.

Точка Болла даёт уже хорошее приближение к прямой. Для лучшего приближения надо поставить условие, чтобы она совпала с одной из точек Бурместера. Это случится при $\tau = d$, в таком случае (118') даёт $y_0^{IV} = d$. Подставляя это значение в (123''), получим:

$$PS(4x_0''' + 6d) = 3d^2. \quad (123''')$$

Это соотношение позволяет определить PS , т. е. положение точек B и C , при заданном угле BAD . Обозначим этот угол через φ , высоту полюса PF — через H , а искомую величину PS — через h . Тогда

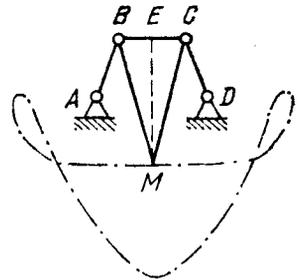
$$d = \frac{PK_1}{\sin \varphi} = \frac{Hh}{(H-h)\sin^2 \varphi}; \quad x_0''' = \frac{3Hh^2}{(H-h)^2 \sin^2 \varphi}.$$

Уравнение (123''') примет вид:

$$2(H+h)\sin^2 \varphi = H,$$

откуда

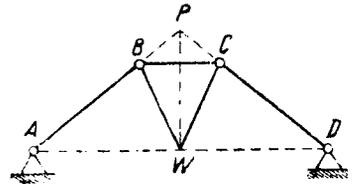
$$\sin^2 \varphi = \frac{H}{2(H+h)}.$$



Фиг. 193.

Замечательно, что вследствие $y_0''' = 0$ и $x_0 = 0$ удовлетворяется (127), т. е. мы имеем в этом случае точку Чебышева пятого порядка.

На фиг. 193 показан механизм, построенный согласно этому требованию, с траекторией точки M ; он известен под именем «прямилла Робертса» при соотношениях $\frac{AB}{AD} = 0,584$; $\frac{BC}{AD} = 0,593$. $ME:AD = 1,112$.



Фиг. 194.

Поставим ещё требование, чтобы точка Чебышева описывала прямую, проходящую через точки A и D ; тогда должно быть $d = H \sin \varphi$, что приводит к уравнению: $\sin^2 \varphi = \frac{h}{H-h}$. Сравнивая это выражение с предыдущим, найдём:

$$H^2 - 3Hh - 2h^2 = 0,$$

откуда

$$H = \frac{3 + \sqrt{17}}{2} h,$$

следовательно,

$$\sin \varphi = \sqrt{\frac{2}{1 + \sqrt{17}}} = \sqrt{\frac{2(\sqrt{17} - 1)}{16}} = \frac{1}{4} \sqrt{2(\sqrt{17} - 1)};$$

производя вычисления, получим: $\varphi = 38^\circ 40'$.

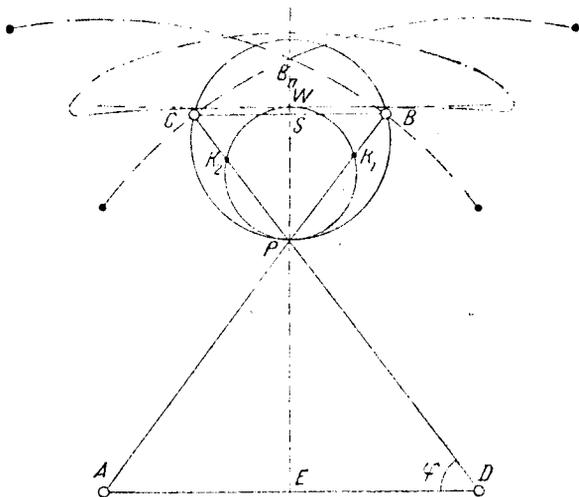
На фиг. 194 показан этот механизм.

Пример 9. Спроектировать четырёхзвенный направляющий механизм, у которого звенья AB и CD равны и перекрещиваются (фиг. 195). Для этого механизма, так же как и для ранее рассмотренного, имеем:

$$y_0''' = 0,$$

$$PB_n = \frac{3d^2}{x_0''' + 3d},$$

т. е. кривая Бурместера распадается на нормаль и круг. Точка Болла нахо-



Фиг. 195.

дится в точке W и даёт хорошее приближение к прямой. Производя вычисления, аналогичные предыдущим, найдём, что уравнение (123') примет вид:

$$2(H - h) \sin^2 \varphi = H,$$

откуда

$$\sin^2 \varphi = \frac{H}{2(H - h)}.$$

Здесь мы также имеем точку Чебышева пятого порядка.

Мы можем ещё потребовать, чтобы точкой Чебышева оказалась середина BC , что ведёт к соотношению $h = d$, откуда

$$\sin^2 \varphi = \frac{H}{H + h}.$$

Сравнивая это выражение с предыдущим, найдём:

$$2(H - h) = H + h,$$

откуда

$$H = 3h.$$

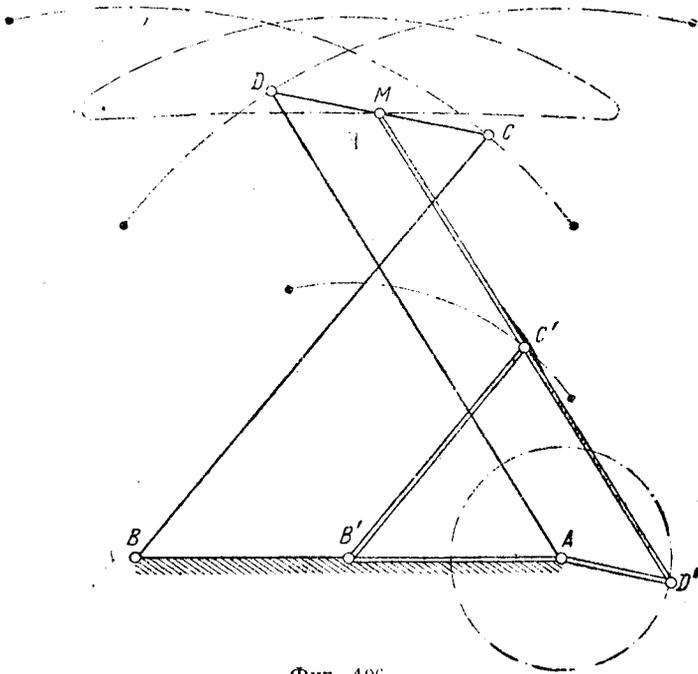
Следовательно,

$$\sin \varphi = \sqrt{\frac{3}{4}},$$

т. е. $\varphi = 60^\circ$ и

$$AB:AD:BC = 4:3:1.$$

Преобразуя этот механизм по теореме Робертса-Чебышёва, получим четырёхзвенник $AB'C'D'$ с соотношениями $AB' : AD' : B'C' = 1 : 3 : 4$; точка M его

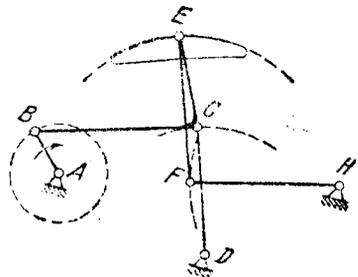


Фиг. 196.

шатунa описывает ту же траекторию, что и середина шатунa предыдущего механизма. Оба эти механизма найдены акад. П. Л. Чебышёвым и носят его имя (фиг. 196).

§ 32. Синтез механизмов с остановками¹⁾.

Предположим, что мы имеем шарнирный четырёхзвенник, от которого надо сделать привод к качающемуся рычагу или ползуну, ходящему в неподвижных направляющих, таким образом, чтобы ведомое звено имело остановку в течение некоторого времени, когда данный механизм проходит заданное положение. Передачу от данного механизма к ведомому звену можно осуществить при помощи второго шатунa, соединяющего шатун взятого четырёхзвенника с ведомым звеном. Задача, таким образом, приводится к нахождению точки присоединения этого шатунa к данному и к ведомому. Пусть рассматриваемый механизм занимает положение $ABCD$ (фиг. 197). Взяв какую-либо точку E его шатунa и найдя для неё центр кривизны F , мы решим задачу, приняв EF за искомый шатун: в течение некоторого времени точка будет двигаться почти по дуге круга радиуса EF , а потому точка F , а с нею и коромысло HF будет почти неподвижно. Можно взять наугад несколько точек E , построить их траектории и центры



Фиг. 197.

¹⁾ Alt H.: Koppelgetriebe als Rastgetriebe, VDI, 1932; Alt H.: Zur Geometrie der Koppelrastgetriebe, Ing.-Archiv, 1932.

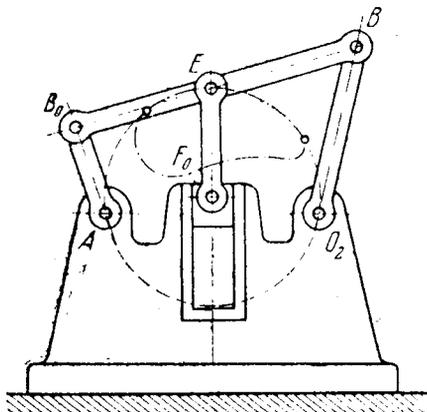
кривизны и выбрать ту точку, для которой круг кривизны будет достаточно хорошо заменить траекторию.

Для большего приближения можно построить кривую Бурместера или даже точки Бурместера, если они окажутся.

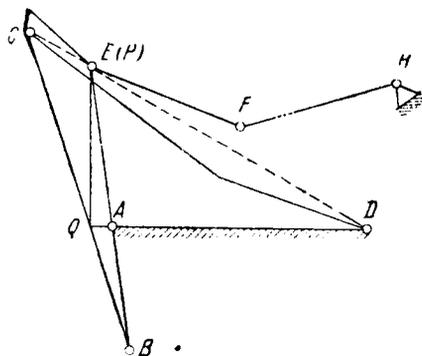
При этих построениях длина второго шатуна уже вполне определится. Она может оказаться, однако, практически невыполнимой или вследствие своей большой или, наоборот, малой величины. Чтобы не рисковать возможностью неудачи, мы можем задаться этой длиной, что приводит к построению геометрического места точек с заданной кривизной их траекторий. Если взять точки пересечения её с кривой Бурместера, то мы будем иметь касание третьего порядка, т. е. более продолжительную остановку.

Можно идти и со стороны коромысла, задавая на нём точку F произвольно или на кривой Бурместера на неподвижной плоскости, или на кривой центров кругов кривизны заданного радиуса. Можно, наконец, построить обе кривые Бурместера и выбрать на них соответственные точки, наиболее подходящие для конструктивного выполнения передачи, например, задаваясь длиной HF ; в пересечении дуги этого радиуса из центра H с кривой Бурместера получим точку F , а по ней — и точку E .

Аналогично может быть построен механизм с остановкой ползуна. Пусть требуется получить движение ползуна F в неподвижных вертикальных направлениях с остановкой в данном месте (фиг. 198); эта остановка должна произойти во время прохода кривошипа AB через положение AB_0 . Для получения точки E принимаем за F_0 центр



Фиг. 198.



Фиг. 199.

кривизны траектории точки E в заданном положении механизма и указанным в § 26 построением находим точку E . Задача получилась вполне определённая.

Во всех рассмотренных случаях получается касание не выше четвёртого порядка (последнее только для точек Бурместера). Для получения касания пятого порядка размеры ведущего механизма должны удовлетворять ещё некоторому соотношению, вытекающему из (127), если положение кривошипа AB задано. Воспользуемся указанием в конце § 30 и построим такой механизм, в котором остановка происходила бы при прохождении точки через полюс; в согласии с данными там указаниями, находим размеры четырёхзвенника.

Помещая в P шарнир E , а в центре круга — шарнир F , получим остановку коромысла PF вместе с шатуном EF (фиг. 199).

§ 33. Случай бесконечно удалённого полюса¹⁾.

Все наши предыдущие построения и выводы предполагали, что полюс находится на конечном расстоянии. Посмотрим, как надо их видоизменить при удалении его в бесконечность, т. е. при параллельности AB и CD . Прежде всего заметим, что прямая PQ также будет параллельна AB и CD (фиг. 200). Касательная к центроидам, которая, очевидно, в этом случае будет их асимптотой.

¹⁾ Котельников А. П.: Цит. соч., стр. 342—345.

той, пройдёт от CD на таком же расстоянии h , на каком PQ проходит от AR , но с другой стороны (эти расстояния будут пределами равных дуг, описанных из полюса). Нормаль к центрам удалится в бесконечность.

Для построения центра кривизны траектории, какой-либо точки E шатуна проводим $Em \parallel AB$, а на расстоянии h — прямую $PR \parallel AB$. Соединим E с C , находим на PR точку R ; соединя R с D , находим на Em искомый центр F .

Круг перегиба обратится в касательную PT .

Этим построением можно воспользоваться для нахождения формул преобразования, которые заменят (104). Выберем PT осью x , а начало координат возьмём пока в произвольной точке O этой прямой. Тогда прежде всего совершенно ясно, что

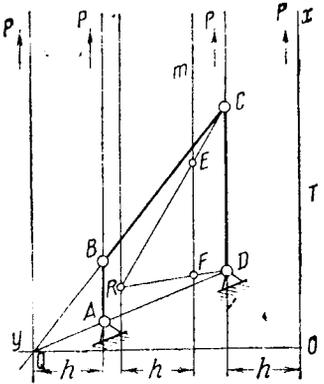
$$y_C = y; \quad (104')$$

из подобия же треугольников REF и RCD следует:

$$\frac{x - x_C}{CD} = \frac{h}{y}$$

откуда

$$x_C = x - \frac{CD \cdot h}{y}. \quad (104'')$$



Фиг. 200.

В этом квадратичном преобразовании прямой всегда соответствует гиперболою, одна из асимптот которой есть касательная PT .

Для получения уравнения геометрического места точек, имеющего заданную кривизну $\frac{1}{\rho}$ их траекторий, напомним очевидное равенство:

$$x - x_C = \rho;$$

имея в виду (104''), получим:

$$CD \cdot h = \rho y,$$

откуда

$$y = \text{const.}$$

т. е. искомое геометрическое место представляет прямую, параллельную касательной PT . Иначе говоря, для всех точек прямой, параллельной касательной к центрам, радиусы кривизны одинаковы.

Для определения кривой Бурместера заметим, что при бесконечно удалённом полюсе бесконечно малое перемещение первого порядка окажется для шатуна поступательным и перпендикулярным к касательной PT ; поэтому уравнения движения

$$x = x_0 + \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi, \quad y = y_0 + \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi$$

нельзя дифференцировать ни по φ , ни по x_0 , а только по y_0 .

Обозначим:

$$\frac{d\varphi}{dy_0} = \varphi', \quad \frac{dx}{dy_0} = x'_0$$

и соответственно следующие производные; получим:

$$x' = x'_0 - (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) \varphi'; \quad y' = y'_0 + (\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi) \varphi';$$

$$x'' = x''_0 + (-\xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi) \varphi'^2 - (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) \varphi'';$$

$$y'' = y''_0 - (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) \varphi'^2 + (\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi) \varphi'';$$

$$x''' = x'''_0 + (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) \varphi'^3 + 3(-\xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi) \varphi' \varphi'' + \\ + (-\xi \sin \varphi - \eta \cos \varphi) \varphi''';$$

$$y''' = y'''_0 + (-\xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi) \varphi'^3 + 3(\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) \varphi' \varphi'' + \\ + (\xi \sin \varphi - \eta \cos \varphi) \varphi'''.$$

Предполагая попережнему, что в данный момент подвижные оси совпадают с неподвижными, и принимая во внимание характер движения, получим:

$$x' = 0, \quad y' = 1, \quad x = \xi, \quad y = \eta, \quad \varphi' = 0, \quad x_0' = 0;$$

следовательно,

$$x'' = x_0'' - \varphi'' \tau_1; \quad y'' = \varphi'' \xi;$$

$$x''' = x_0''' - \varphi''' \tau_1; \quad y''' = \varphi''' \xi.$$

Теперь уравнения (109), (110) и (111) напишутся так:

$$y - y_C = 0, \quad (109')$$

$$(x_0'' - \varphi'' \tau_1) (x - x_C) + \varphi'' \xi (y - y_C) + 1 = 0, \quad (110')$$

$$(x_0''' - \varphi''' \tau_1) (x - x_C) + \varphi''' \xi (y - y_C) + 3\varphi'' \xi = 0. \quad (111')$$

Первое уравнение очевидно из предыдущих соображений; в силу этого второе уравнение примет вид:

$$(x_0'' - \varphi'' \tau_1) (x - x_C) + 1 = 0;$$

сравнивая его с (104'), найдём:

$$x_0'' = 0, \quad \varphi'' = \frac{1}{CD \cdot h}.$$

Вследствие этого уравнение (111') примет вид:

$$x_0''' - \varphi''' \tau_1 + 3\varphi'' \xi \tau_1 = 0.$$

Это есть уравнение гиперболы, для которой ось x служит асимптотой. Второй асимптотой будет прямая:

$$3\varphi'' \xi - \varphi''' = 0.$$

Выбирая её за ось y , найдём $\varphi''' = 0$, а уравнение гиперболы будет:

$$\xi \tau_1 = - \frac{x_0'''}{3\varphi'' \xi}. \quad (112')$$

Пользуясь подстановками (104') и (104''), найдём:

$$x_C y_C = - \frac{x_0''' + 3\varphi'''}{3\varphi'' \xi}. \quad (115')$$

Это есть тоже уравнение гиперболы с теми же асимптотами. Найдём ещё координаты точки Q . Ордината её равна $y_A + h$, как было найдено выше. Абсцисса получится из уравнений прямых AD и BC :

$$\frac{x - x_A}{x_D - x_A} = \frac{y - y_A}{y_D - y_A},$$

$$\frac{x - x_B}{x_C - x_B} = \frac{y - y_B}{y_C - y_B},$$

так как

$$y_B = y_A, \quad y_D = y_C,$$

то

$$\frac{x - x_A}{x_D - x_A} = \frac{x - x_B}{x_C - x_B},$$

откуда

$$x = \frac{x_A x_C - x_B x_D}{CD - AB}.$$

Но между абсциссами, входящими в числитель, существует некоторое соотношение вследствие того, что точки A и D лежат на одной гиперболе, а точки B и C — на другой; поэтому

$$x_A y_A = x_D y_D;$$

$$x_C y_C = x_B y_B;$$

перемножая эти равенства и сокращая на $y_A = y_B$ и $y_D = y_C$, найдём:

$$x_A x_C = x_B x_D,$$

следовательно, $x=0$, т. е. точка Q находится на второй асимптоте. Итак, обе кривые Бурместера обращаются в равноугольные гиперболы, одна из асимптот которых есть касательная PT , а вторая проходит через точку Q .

Построить эту гиперболу нетрудно по известным её двум точкам B и C и асимптоте PT . Для этого проводим через B прямую, параллельную и перпендикулярную PT (фиг. 201), и повторяем то же для точки C ; точки M' и M'' пересечения этих прямых соединяем и на $M'M''$ находим начало координат O . Если теперь из O провести произвольный луч, то он даст на тех же прямых точки N', N'' и R', R'' ; по точкам N' и N'' находим точку N гиперболы, а по точкам R' и R'' — точку R той же гиперболы.

Точка Болла, вообще говоря, находится в бесконечности. Но если гипербола распадается на оси координат, то такой точкой может быть любая точка касательной PT ; условием распада будет:

$$\varphi'' x_0''' = 0, \text{ т. е. } x_0''' = 0.$$

Так как на гиперболе должны лежать точки B и C , а на оси x они лежать не могут, как имеющие конечные радиусы кривизны, то обе они должны лежать на оси y , откуда следует, что $BC \perp AB$. Чтобы это было возможно, между сторонами четырёхугольника должно существовать соотношение:

$$AD^2 = BC^2 + (CD - AB)^2.$$

Найдём ещё точки Бурместера. Для этого составим ещё четвёртые производные:

$$\begin{aligned} x^{IV} &= x_0^{IV} + 3(-\xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi) \varphi''^2 - (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) \varphi^{IV} = \\ &= x_0^{IV} - 3\varphi''^2 \xi - \varphi^{IV} \eta; \end{aligned}$$

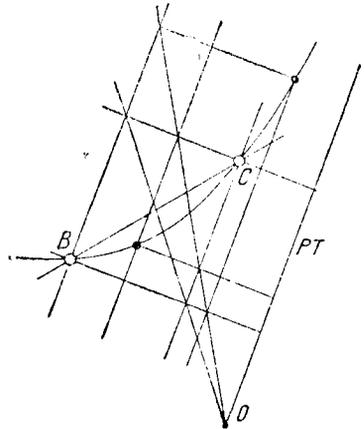
$$\begin{aligned} y^{IV} &= y_0^{IV} - 3(\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) \varphi''^2 + (\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi) \varphi^{IV} = \\ &= -3\varphi''^2 \xi + \varphi^{IV} \xi. \end{aligned}$$

Уравнение (117) примет вид:

$$(x_0^{IV} - 3\varphi''^2 \xi - \varphi^{IV} \eta)(x - x_C) + 4\varphi''' \xi + 3[(x_0'' - \varphi'' \eta)^2 + \varphi''^2 \xi^2] = 0,$$

или, подставляя значение $(x - x_C)$ и выбирая те же оси:

$$x_0^{IV} - 3\varphi''^2 \xi - \varphi^{IV} \eta + 3\varphi''^3 (\xi^2 + \eta^2) \eta = 0. \quad (119')$$

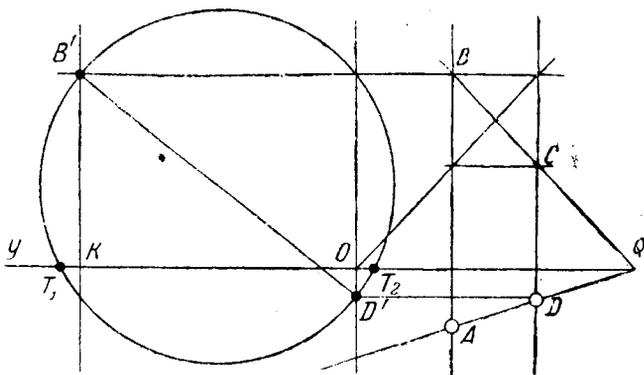


Фиг. 201.

Это 4-е уравнение кривой третьего порядка, которая в пересечении с гиперболой (112') даёт точки Бурместера. Исключая из этих уравнений ξ , получим для определения η уравнение четвёртой степени, определяющее четыре точки Бурместера, две из которых, именно B и C , известны. Остальные две определяются, следовательно, из квадратного уравнения и могут быть построены.

Приводим это построение без доказательства.

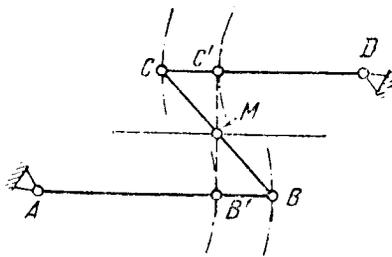
Строим прежде всего, как указано выше, асимптоты гиперболы, проходящей через точки B и C (фиг. 202), и определяем ординаты этих точек. Затем на оси ординат откладываем от начала O в обратную сторону отрезок, равный $OK = OQ$, т. е. сумме ординат точек B и C . Далее спосим точку B



Фиг. 202.

на перпендикуляр через K в точку B' и точку D — на ось x в точку D' . Окружность, построенная на $B'D'$, как на диаметре, пересекает ось y в точках T_1 и T_2 , дающих ординаты искомых точек Бурместера. Абсциссы же получаются, если учесть, что эти точки должны лежать на известной уже гиперболе.

Пример 10. Построить направляющий механизм типа «параллелограмма Уатта» (фиг. 203) с тем условием, чтобы середина серьги описывала траекторию, возможно лучше приближающуюся к прямой в данном положении.



Фиг. 203.

Точки A и D можно выбрать произвольно. Задаёмся углом φ и произвольной величиной звеньев $AB = CD$. Середина BC — точка M — лежит на прямой, параллельной AB и CD в равных расстояниях от них; нетрудно сообразить, что эта прямая есть касательная PT , а потому точка M находится в точке перегиба своей траектории (фиг. 204). Если мы хотим иметь точку Боула, то BC должно быть перпендикулярно AB , а осью y будет эта же прямая BC ; гипербола распадается на оси

координат. В этом случае $AB = CD = \frac{1}{2} AD \cos \varphi$, а $BC = AD \sin \varphi$.

Для определения точек Бурместера обозначим:

$$AB = CD = l,$$

$$AD \sin \varphi = 2h;$$

тогда

$$\varphi'' = \frac{1}{lh};$$

для точки B имеем:

$$\xi_B = l - h \operatorname{ctg} \varphi,$$

$$\tau_B = -h;$$

для точки C :

$$\xi_C = -l + h \operatorname{ctg} \varphi,$$

$$\tau_C = h;$$

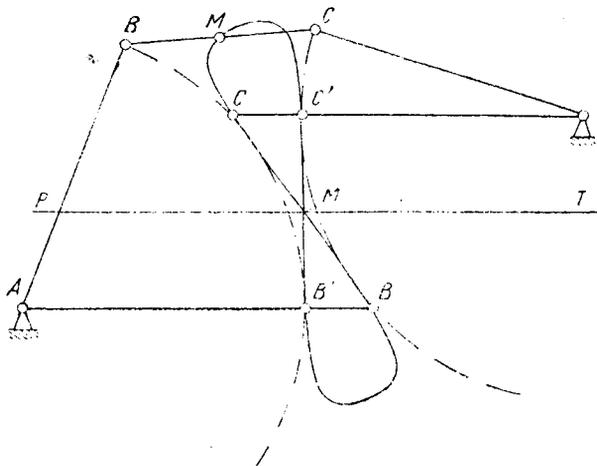
поэтому

$$\xi_B \tau_B = \xi_C \tau_C = -lh + h^2 \operatorname{ctg} \varphi = -\frac{0}{3\varphi'^2},$$

откуда

$$x_0'' = 3\varphi'^2 h (l - h \operatorname{ctg} \varphi) = \frac{3l^2}{h} (l - h \operatorname{ctg} \varphi).$$

В случае $x_0''' = 0$ получаем $l = h \operatorname{ctg} \varphi$, т. е. известный уже результат. Подставляя координаты точек B и C в (119'), найдём x_0^{IV} и y_0^{IV} , а решая (119')



Фиг. 204.

совместно с (112'), найдём, как указано, точки Вурместера. Последние определяются впрочем, как указано, построением.

Для точки Чебышева имеем $\eta = 0$, вследствие чего (119') даёт:

$$\xi_4 = \frac{x_0^{\text{IV}}}{3\varphi'^2};$$

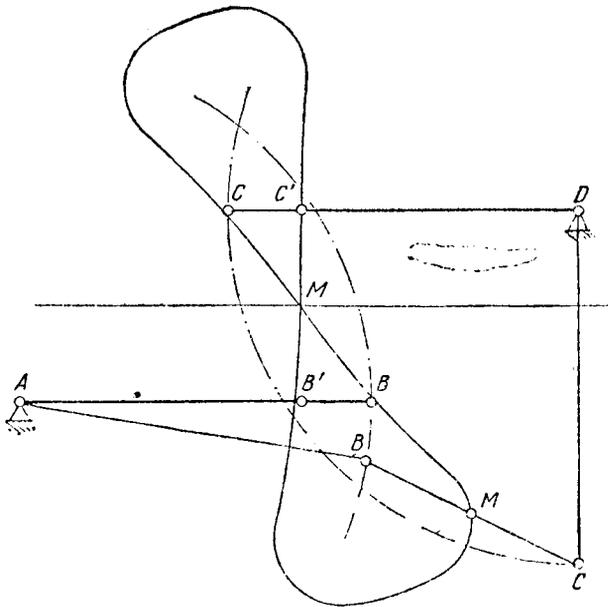
Но из того же уравнения для точек B и C имеем:

$$\xi_B = \xi_C = 0;$$

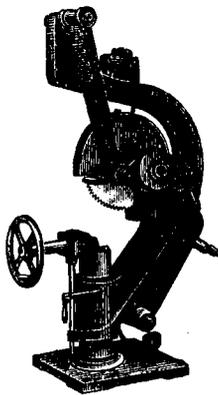
$$\tau_B' = -h,$$

$$\tau_C = +h;$$

следовательно, $x_0^{\text{IV}} = 0$, а потому $\xi_4 = 0$, т. е. точка Чебышева находится в середине BC . Её траектории показана на фиг. 205. Механизм Уатта применяется теперь на его родине для круглой пилы (фиг. 206).



Фиг. 205.



Фиг. 206.

§ 34. Классификация шатунных кривых.

Всё изложенное относится к траекториям любого шарнирного четырёхзвенника. При некоторых же частных соотношениях длин звеньев имеют место особенности, зависящие от этих соотношений. Мы разделим все шарнирные четырёхзвенники на три группы: а) удовлетворяющие неравенству Грасгофа:

$$a + d < b + c;$$

б) удовлетворяющие обратному неравенству:

$$a + d > b + c;$$

с) удовлетворяющие равенству:

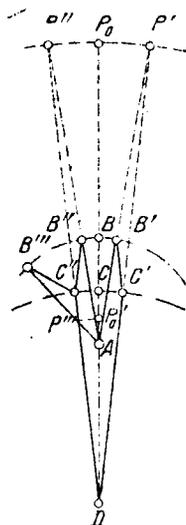
$$a + d = b + c.$$

В группе а), как известно, могут быть кривошипно-коромысловые, двукривошипные и двукоромысловые механизмы, в зависимости от того, какое звено будет стойкой: соседнее с наименьшим, само наименьшее или противоположное наименьшему. Общее свойство шатунных кривых механизмов этой группы заключается в том, что каждая такая кривая состоит из двух отдельных ветвей, описываемых в отдельности двумя разными механизмами, хотя и имеющими одни и те же длины звеньев. Точки пересечения ветвей между собой считаются в математике за двойные точки, так как обе ветви выражаются одним неразпадающимся уравнением. По кинематически каждую ветвь надо считать за особую траекторию, так как непрерывный переход из одного положения в другое, соответствующее той же двойной точке, невозможен. Общее число двойных точек остаётся равным трём, включая и эти точки пересечения. В частности, для кривошипно-коромыслового и двукривошипного механизмов одному положению ведущего звена соответствуют два положения ведомого, дающие по одной точке для каждой ветви; для двукоромыслового механизма каждая ветвь описывается механизмами, не имеющими общего звена.

В группе б), как известно, имеются только двукоромысловые механизмы, какое бы звено ни было стойкой. В связи с этим стоит и свойство шатунных кривых быть описываемыми тем же одним движением: от любой точки кривой до любой другой её точки можно притти непрерывным движением одного механизма. На протяжении этой главы не раз были даны примеры таких кривых.

Особенностью механизмов группы с) является, как известно, существование таких положений, когда все четыре центра вращательных пар лежат на одной прямой. В этом положении любая точка шатунной плоскости проходит двойную точку своей траектории, а любая точка ося шатуна — точку самоприкосновения своей траектории; эти двойные точки отличаются от других тем, что им соответствует лишь одно положение механизма, но из этого положения для механизма возможен двойной выход. Они являются четвёртыми двойными точками траекторий, не лежащими на круге, описанном вокруг треугольника центров.

Вследствие двойного выхода механизма из этого положения получается два полюса и соответственно два круга перегиба; это определяет две нормали и два радиуса кривизны для траектории, что и должно иметь место для двойной точки. Пусть положение механизма, бесконечно близкое к данному, будет $AB'C'D$ (фиг. 207); полюсом для него служит точка P' . При переходе через данное положение механизм может занять либо положение $AB''C''D$, симметричное с $AB'C'D$, либо $AB'''C'''D$. В первом случае получим полюс P'' , симметричный с P' , а потому и центроида этого полюса будет симметрична относительно AD , которая поэтому будет нормалью к центроидам; круг перегиба будет иметь центр на AD , а хорда его будет диаметром. Если же взять положение $AB'''C'''D$, то полюсом для него будет точка P''' , которая



Фиг. 207.

не получится непрерывным движением из P' ; но для этого положения можно найти справа симметричное положение, получающееся непрерывным движением: поэтому здесь получается вторая ветвь centroиды, также симметричная относительно AD .

Предельные положения полюсов P_0 и P'_0 , т. е. точки пересечения обеих ветвей centroиды с AD , и подлежат определению. Если механизм при переходе через данное положение займёт положение, несимметричное с прежним, то полюс на P_0 перескочит в P'_0 , а скорости всех точек шатуна мгновенно изменятся по величине и направлению, за исключением точек его оси, для которых скорость изменится лишь по величине.

Для определения полюсов обозначим расстояние PA через x и положим:

$$AD = k, \quad AB = r_1, \quad BC = l, \quad CD = r_2,$$

причём

$$k + r_1 = l + r_2.$$

По основному свойству кривизны имеем:

$$\begin{aligned} PA \cdot PB &= r_1 d; \\ PC \cdot CD &= r_2 d, \end{aligned}$$

или при наших обозначениях:

$$\begin{aligned} x(x - r_1) &= r_1 d; \\ (x - r_2 + k)(x + k) &= r_2 d. \end{aligned}$$

Деля первое уравнение на второе, получим:

$$(r_2 - r_1)x^2 - 2kr_1x + k r_1(r_2 - k) = 0.$$

откуда

$$x = \frac{kr_1 \pm \sqrt{k r_1 r_2}}{r_2 - r_1}.$$

Это выражение может быть построено следующим образом (фиг. 208). Проводим через точки A и C произвольную окружность, а через точки B и D — другую произвольную окружность; общая хорда этих окружностей GH пересекает AD в точке O . Проведя из O касательную OT к одной из окружностей, откладываем

$$OP_0 = OP'_0 = OT$$

и получаем искомые полюсы. В самом деле, по известной теореме о секущих имеем:

$$OA \cdot OC = OH \cdot OG = OD \cdot OB = OT^2;$$

обозначив

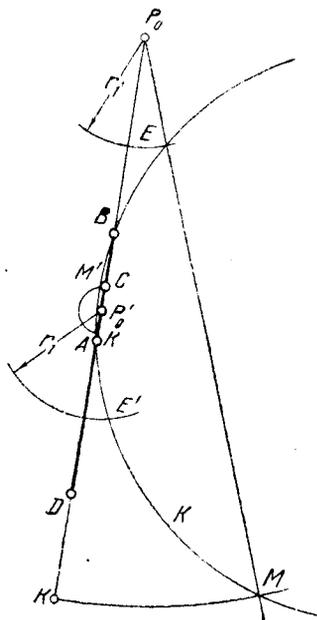
$$OA = y,$$

получим:

$$y(y - r_1 + l) = (y + k)(y - r_1),$$

откуда

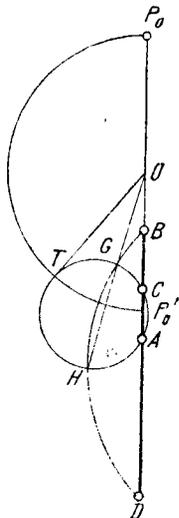
$$y = \frac{kr_1}{l} = \frac{kr_1}{r_2 - r_1}.$$



Фиг. 209.

Кроме того, из той же фиг. 208 имеем:

$$OP_0^2 = OT^2 = y(y - r_1 + l) = \frac{kl r_1 r_2}{(k - l)^2}.$$



Фиг. 208.

Но

$$P_0A = OA + OP_0 = \frac{kr_1}{r_2 - r_1} + \frac{\sqrt{klr_1r_2}}{k - l}$$

и

$$P'_0A = OA - OP'_0 = \frac{kr_1}{r_2 - r_1} - \frac{\sqrt{klr_1r_2}}{k - l};$$

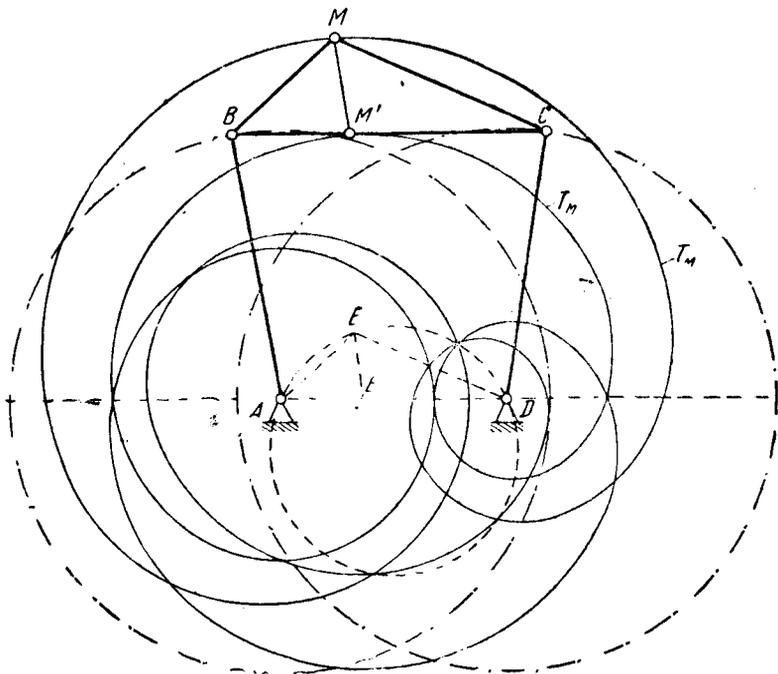
таким образом, наше построение даёт оба корня квадратного уравнения, выределяющего $x = PA$.

Для определения диаметра круга перегиба имеем:

$$d = \frac{PA \cdot PB}{AB}.$$

Через точки A и B проводим произвольную окружность k (фиг. 209), однако, такого радиуса, чтобы она пересекала окружности радиуса $r_1 = AB$ из центров P_0 и P'_0 ; обозначив эти точки пересечения через E и E' , проводим P_0E и P'_0E' до пересечения с окружностью k в точках M и M' . Тогда $P_0K = P_0M$ и $P'_0K' = P'_0M'$ будут диаметрами кругов перегиба для найденных полюсов.

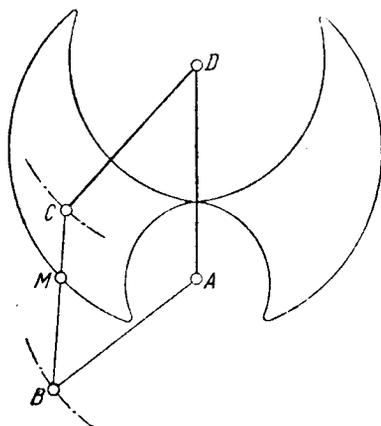
На фиг. 210 показаны траектории двух точек; одна из них имеет четыре двойных точки — три лежат на круге центров, четвертая — особая;



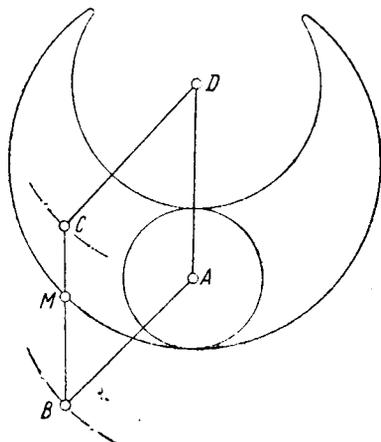
Фиг. 210.

вторая траектория имеет две двойные точки на линии центров и одну точку самоприкосновения на той же линии; так как точка самоприкосновения есть слияние двух двойных точек, то и в этом случае надо считать четыре двойных точки.

Среди механизмов этой группы, называемых иногда «предельными» механизмами, имеются ещё особые частные случаи механизмов с попарно равными звеньями. В случае равных противоположных звеньев получаются шарнирные параллелограммы и антипараллелограммы. Шатунные кривые параллелограмма представляют круги, а так как для обоих механизмов уравнение шатунной кривой одно и то же, то это уравнение распадается на



Фиг. 214а.



Фиг. 214б.

уравнение круга и второе, которое будет уравнением четвёртой степени. Итак, шатунные кривые антипараллелограмма суть кривые четвёртого порядка.

На фиг. 211 дан пример такой кривой в виде восьмёрки. Восьмёрка имеет одну двойную точку; круговая траектория параллелограмма пересекает эту восьмёрку в четырёх точках. Итого получается пять двойных точек, три из которых, в том числе двойная точка восьмёрки, лежат на круге центров.

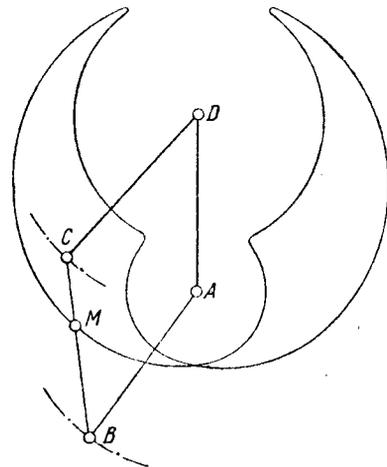
В случае равных смежных сторон получается шарнирный ромбоид, который может вырождаться в двувенный механизм с круговыми траекториями. Таким образом, и здесь уравнение шатунной кривой распадается на уравнение круга и уравнение кривой четвёртого порядка.

На фиг. 212 показана такая кривая.

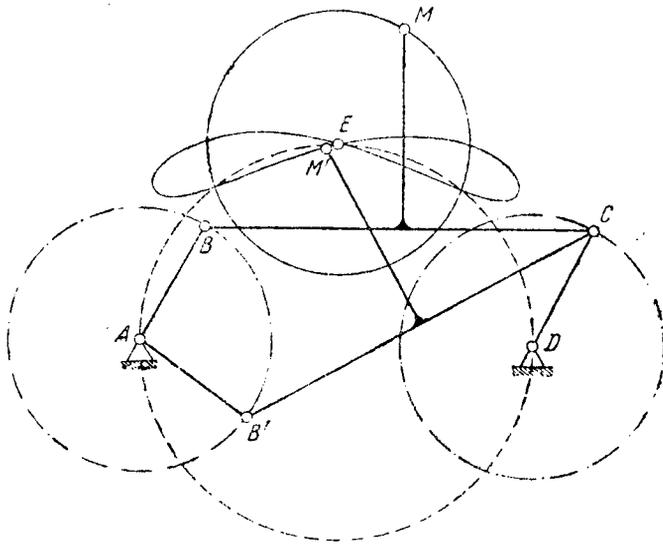
Наконец, при равенстве всех четырёх звеньев мы получим шарнирный ромб (фиг. 213), для которого шатунная кривая распадается на три круга: один является траекторией ромба как параллелограмма, а два других — как траектории выродившегося ромбоида.

В случае пересечения этих кругов попарно мы имеем максимум двойных точек — шесть.

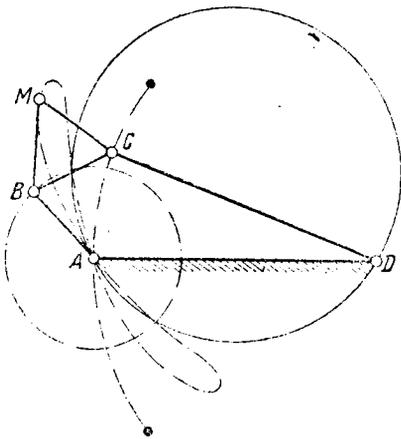
В заключение заметим, что значение анализа предельных механизмов заключается в том, что при самом незначительном изменении хотя бы одного размера движенье механизма, а вместе с этим и его шатунные кривые получают резкие изменения, как для примера указано на фиг. 214а—214с. Эти незначительные изменения в действительности могут произойти вследствие зазоров в шарнирах и деформации звеньев; поэтому надо избегать соотношений между длинами звеньев, близких к соотношениям предельных механизмов.



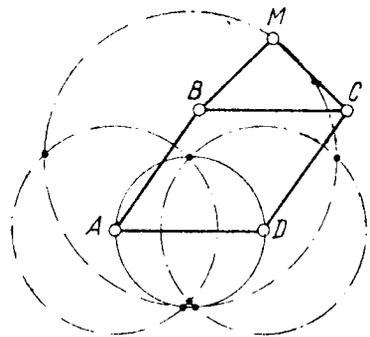
Фиг. 214с.



Фиг. 211.

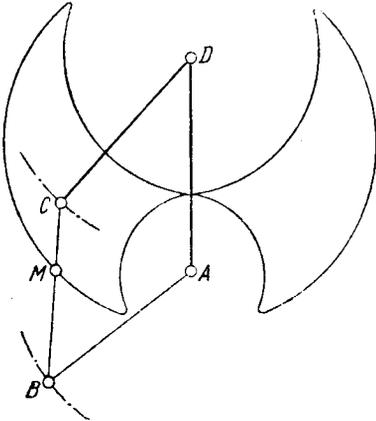


Фиг. 212.

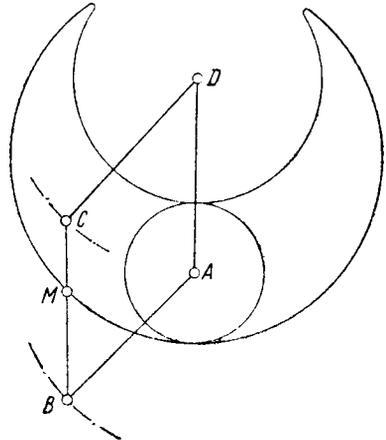


Фиг. 213.

Среди механизмов этой группы, называемых иногда «предельными» механизмами, имеются ещё особые частные случаи механизмов с попарно равными звеньями. В случае равных противоположных звеньев получаются шарнирные параллелограммы и антипараллелограммы. Шатунные кривые параллелограмма представляют круги, а так как для обоих механизмов уравнение шатунной кривой одно и то же, то это уравнение распадается на



Фиг. 214а.



Фиг. 214б.

уравнение круга и второе, которое будет уравнением четвёртой степени. Итак, шатунные кривые антипараллелограмма суть кривые четвёртого порядка.

На фиг. 211 дан пример такой кривой в виде восьмёрки. Восьмёрка имеет одну двойную точку; круговая траектория параллелограмма пересекает эту восьмёрку в четырёх точках. Итого получается пять двойных точек, три из которых, в том числе двойная точка восьмёрки, лежат на круге центров.

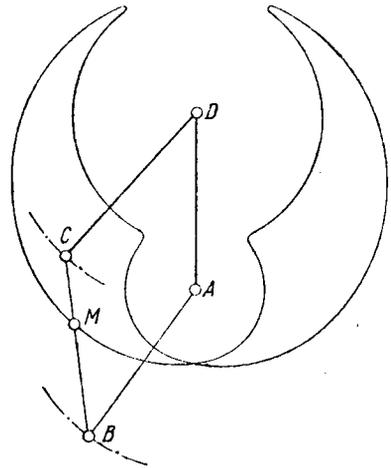
В случае равных смежных сторон получается шарнирный ромбод, который может выродиться в двузвенный механизм с круговыми траекториями. Таким образом, и здесь уравнение шатунной кривой распадается на уравнение круга и уравнение кривой четвёртого порядка.

На фиг. 212 показана такая кривая.

Наконец, при равенстве всех четырёх звеньев мы получим шарнирный ромб (фиг. 213), для которого шатунная кривая распадается на три круга: один является траекторией ромба как параллелограмма, а два других — как траектории выродившегося ромбоида.

В случае пересечения этих кругов попарно мы имеем максимум двойных точек — шесть.

В заключение заметим, что значение анализа предельных механизмов заключается в том, что при самом незначительном изменении хотя бы одного размера движения механизма, а вместе с этим и его шатунные кривые получают резкие изменения, как для примера указано на фиг. 214а—214с. Эти незначительные изменения в действительности могут произойти вследствие зазоров в шарнирах и деформации звеньев; поэтому надо избегать соотношений между длинами звеньев, близких к соотношениям предельных механизмов.



Фиг. 214с.

§ 35. Синтез кривошипно-шатунного механизма.

Уравнение шатунной кривой в этом случае может быть получено так ¹⁾. При обозначениях чертежа (фиг. 215) имеем:

$$x = r \cos \varphi + b \sin \gamma_1; \quad y = r \sin \varphi + b \cos \gamma_1;$$

исключая φ , получим:

$$(x - b \sin \gamma_1)^2 + (y - b \cos \gamma_1)^2 = r^2,$$

или

$$2bx \sin \gamma_1 + 2by \cos \gamma_1 = x^2 + y^2 + b^2 - r^2.$$

С другой стороны,

$$e - x = a \sin (\gamma - \gamma_1),$$

или

$$a \cos \gamma \sin \gamma_1 - a \sin \gamma \cos \gamma_1 = x - e;$$

исключая теперь γ_1 , получим:

$$U^2 + V^2 = W^2, \tag{101'}$$

где

$$U = a(x^2 + y^2 + b^2 - r^2) \sin \gamma + 2by(x - e);$$

$$V = a(x^2 + y^2 + b^2 - r^2) \cos \gamma + 2bx(e - x);$$

$$W = 2ab(x \sin \gamma + y \cos \gamma).$$

Так как уравнение четвёртой степени, то с прямой кривая может иметь не более четырёх общих точек или касание не выше третьего порядка.

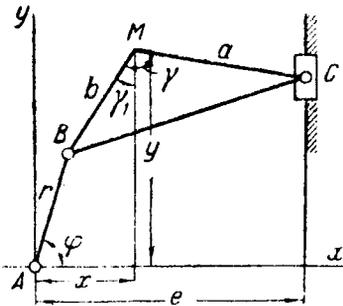
Составив выражение $U^2 + V^2$, найдём:

$$U^2 + V^2 = a^2(x^2 + y^2 + b^2 - r^2)^2 + 4b^2(x - e)^2(x^2 + y^2) + 4ab(x - e)(y \sin \gamma - x \cos \gamma)(x^2 + y^2 + b^2 - r^2).$$

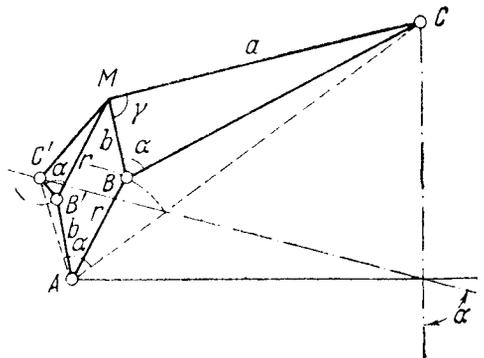
Подставляя сюда из уравнения круга

$$x^2 + y^2 = 2px + 2qy - m^2,$$

придадим уравнению (101') вид уравнения третьей степени, откуда следует, что кривая, как и в случае четырёхшарнирного механизма, имеет с кругом не более шести общих точек или касание не выше пятого порядка.



Фиг. 215.



Фиг. 216.

Возьмём какой-нибудь кривошипно-шатунный механизм ABC с точкой M на шатуне (фиг. 216), пристроим к нему шарнирный параллелограмм $ABMB'$ и на звене $B'M$ построим треугольник $B'C'M$, подобный треугольнику BMC . Тогда по свойству параллелограмма с подобными звеньями, указанному при доказательстве теоремы Роберта, будем иметь движение точки C' , подобное движению C с поворотом на угол α , т. е. по прямой, наклонённой

¹⁾ Kraft P.: Sammlung von Problemen der analytischen Mechanik, 1884, стр. 10—17, где выведено уравнение траектории для центрального кривошипно-шатунного механизма.

к линии движения точки C под этим углом. Иначе говоря, мы будем иметь второй кривошипно-шатунный механизм $AB'C'$, точка M шатуна которого описывает ту же траекторию, что и точка N шатуна BC . Так как два других центра вращения удалены в бесконечность, то третьего механизма, дающего ту же кривую, не существует.

Построение шатунной кривой производится теми же методами, что и для шарнирного механизма, и потому не требует пояснений.

Предположим теперь, что точка M находится в данном положении механизма в двойной точке своей траектории (фиг. 217). Два положения шатунного треугольника обозначены через BMC и $B'MC'$. Из чертежа следует, что AM есть биссектриса угла BMB' и MD — биссектриса угла CMC' и $MD \perp CC'$, $\angle AMD = \angle BMC = \angle B'MC' = \gamma$; поэтому $\angle MAx = 180^\circ - \gamma = \text{const}$. Это означает, что двойные точки шатунной кривой лежат на прямой, проходящей через центр A .

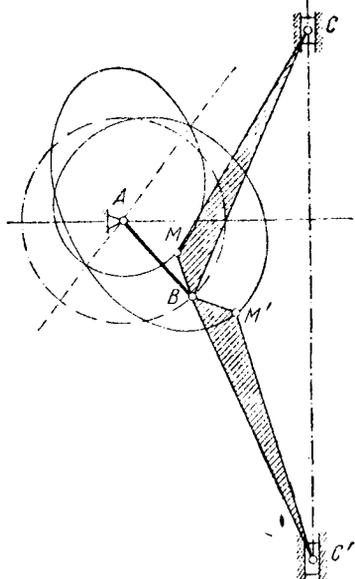
Так как прямая может пересекать шатунную кривую не более чем в четырёх точках, то на этой прямой может лежать не более двух двойных точек.

Аналитически двойные точки определяются из уравнений:

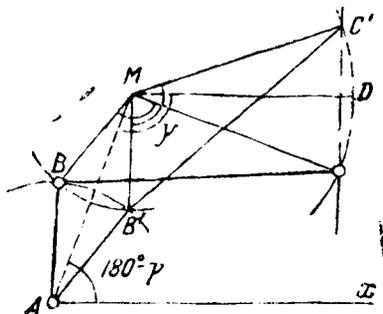
$$U = 0, \quad V = 0, \quad W = 0$$

Последнее уравнение и есть уравнение той прямой, на которой лежат обе обыкновенные двойные точки.

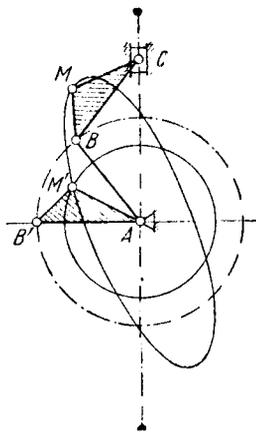
Третья двойная точка получается только в случае предельного механизма при $l = r + e$ (фиг. 218). Четвёртая двойная точка появится в единственном случае распадающейся кривой при $e = 0, l = r$ (фиг. 219); каждая траектория распадается на круг и кривую второго порядка, которая может быть только эллипсом вследствие невозможности действительных бесконечно удалённых точек.



Фиг. 218.



Фиг. 217.

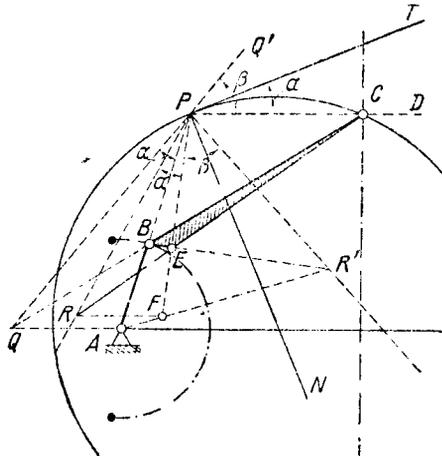


Фиг. 219.

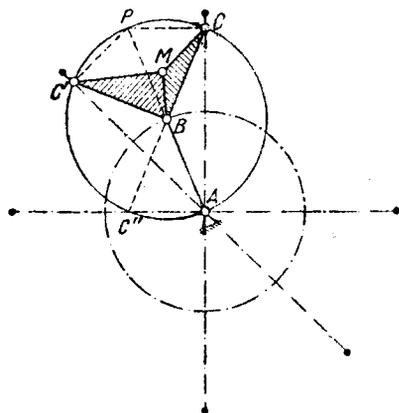
Построение центра кривизны траектории какой-либо точки шатунной плоскости производится тем же путём, что и для шарнирного механизма.

Строим полюс P и точку Q (фиг. 220), проводим прямую PQ и касательную PT к центроидам, затем под тем же углом α к PE проводим прямую PR и находим точку R пересечения этой прямой с CE ; проведя $RF \parallel Ax$, найдём в пересечении с PE искомым центр кривизны F . Впрочем можно опираться на AB , построив угол EPR' , равный углу $Q'PD = \beta$, найдя точку R' пересечения PR' с BE и точку F пересечения AR' с PE .

Для построения круга перегиба имеем полюс P и точку C , как движущуюся по прямой; зная, что центр его лежит на нормали PN , легко построить этот круг. Точка C является точкой Болла и точкой Чебышева и в



Фиг. 220.



Фиг. 221.

качестве таковой — единственная точка; следовательно, не существует точки, траектория которой имеет касание третьего порядка с прямой.

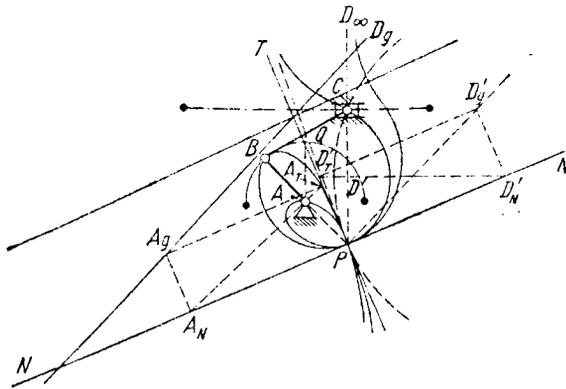
Особый случай даёт центральный равнозвенный механизм ($e=0, l=r$). Здесь мы имеем $PB=PA$ (фиг. 221), а потому круг перегиба проходит через центр A , следовательно, его центром служит точка B , а радиус равен AB . Таким образом, во всех положениях механизма круг перегиба имеет постоянный центр и радиус, а из этого следует, что каждая точка этого круга находится в точке перегиба своей траектории во всё время движения; по это возможно лишь в случае

прямолинейных траекторий.

Итак, все точки круга радиуса AB с центром в B описывают прямые линии, проходящие через центр A .

Взяв какую-нибудь точку C' этого круга и устроив направляющие по прямой AC' , мы получим другой кривошипно-шатунный механизм ABC' , точка M шатуна которого опишет тот же эллипс, что и в механизме ABC . Следовательно, существует бесчисленное множество (∞^1) центральных равнозвенных механизмов, дающих одно и то же семейство эллипсов.

Кривая Бурместера на шатуновой плоскости определяется так же, как и для шарнирного механизма по точкам B и C (фиг. 222). Для кривой Бурместера на неподвижной плоскости имеем одну точку A , для которой можно по общему правилу построить точку A_g направляющей прямой. Другая



Фиг. 222.

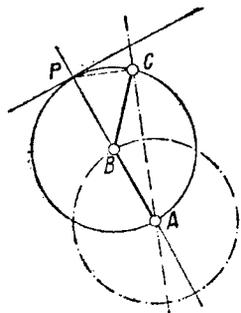
точка D удалилась в бесконечность по направлению PC , а потому соответствующая ей точка направляющей прямой тоже удалась в бесконечность. Чтобы найти направление её удаления, вообразим временно, что точка D находится в D' , и построим точку D'_g ; перемещая точку D' по PC , убедимся, что D'_g будет перемещаться по прямой PD'_g ; следовательно, это и будет направление, в котором удаляется точка D'_g направляющей прямой. Проведя $AD_g \parallel PD'_g$, получим искомую направляющую прямую, по которой уже обычным способом построим кривую Бурместера.

Можно воспользоваться также тем, что обе направляющие прямые пересекаются на касательной PT ; но лучше это свойство оставить для проверки.

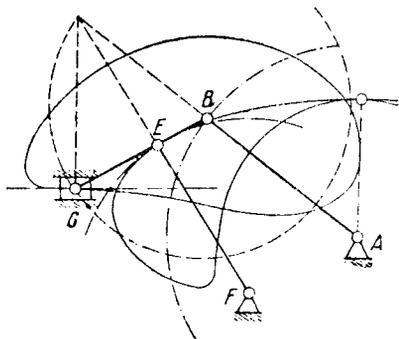
В случае центрального равнозвонного механизма кривая Бурместера распадается на нормаль PA и круг перегиба (фиг. 223). Нормаль есть геометрическое место вершин всех эллипсов, так как именно в вершинах круги кривизны имеют касание третьего порядка с эллипсом. Точек Бурместера, кроме B и C , не существует, так как эллипс не может иметь с кругом касание порядка выше третьего.

Свойствами кривошипно-шатунного механизма можно воспользоваться для построения направляющего механизма. Пусть задан механизм ABC (фиг. 224).

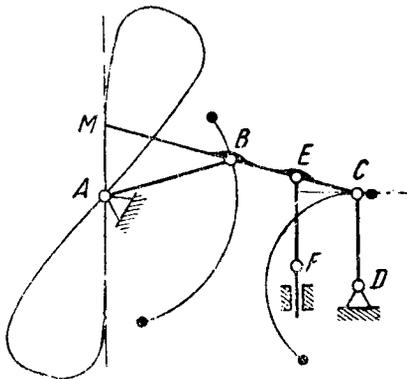
Возьмём на его шатуне точку E и построим центр кривизны её траектории — точку F . Если в этой точке устроить неподвижный шарнир, а в точке E также сделать шарнир и между ними установить стержень, то в пределах совпадения дуги траектории точки E с дугой её круга кривизны механизм не потеряет своей подвижности. Но в таком случае неподвижные направляю-



Фиг. 223.



Фиг. 224.



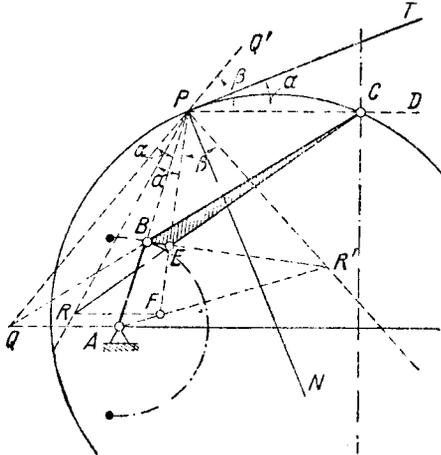
Фиг. 225.

щие в точке C можно снять, в результате чего мы получим четырёхшарнирный механизм $ABEF$ с точкой C на его шатуне, которая вблизи данного положения будет описывать траекторию, весьма близко подходящую к прямой. На чертеже показаны как часть траектории точки E первоначального механизма, так и траектория точки C преобразованного механизма. Для контроля построен круг перегиба второго механизма; оказалось, что он проходит через точку C , чем и объясняется хорошее приближение.

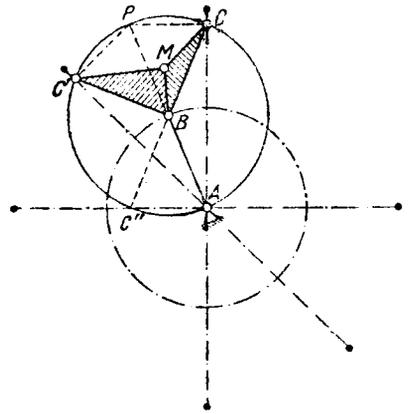
Если взять центральный равнозвонный механизм ABC (фиг. 225), то точка M на расстоянии $MB = BC$ будет описывать точно прямую, но для этого надо вести точку C в прямолинейных направляющих, что может представить конструктивные неудобства. В механизме Эванса для индикатора ведут точку C по дуге круга при помощи коромысла CD , вследствие чего точка M опишет кривую, однако весьма близко подходящую к прямой при небольших коле-

Строим полюс P и точку Q (фиг. 220), проводим прямую PQ и касательную PT к центроидам, затем под тем же углом α к PE проводим прямую PR и находим точку R пересечения этой прямой с CE ; проведем $RF \parallel Ax$, найдем в пересечении с PE искомый центр кривизны F . Впрочем можно опираться на AB , построив угол EPR' , равный углу $Q'PD = \beta$, найдя точку R' пересечения PR' с BE и точку F пересечения AR' с PE .

Для построения круга перегиба имеем полюс P и точку C , как движущуюся по прямой; зная, что центр его лежит на нормали PN , легко построить этот круг. Точка C является точкой Боула и точкой Чебышева и в



Фиг. 220.



Фиг. 221.

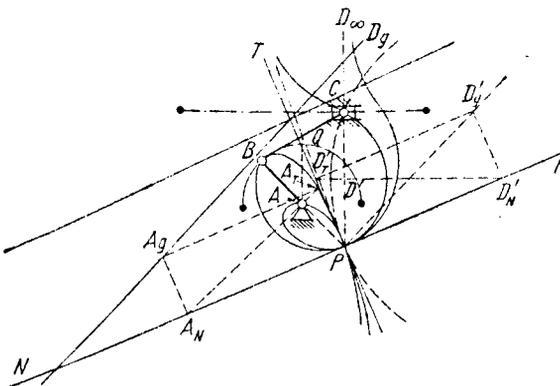
качестве таковой — единственная точка; следовательно, не существует точки, траектория которой имеет касание третьего порядка с прямой.

Особый случай даёт центральный равнозвенный механизм ($e=0, l=r$). Здесь мы имеем $PB=PA$ (фиг. 221), а потому круг перегиба проходит через центр A , следовательно, его центром служит точка B , а радиус равен AB . Таким образом, во всех положениях механизма круг перегиба имеет постоянный центр и радиус, а из этого следует, что каждая точка этого круга находится в точке перегиба своей траектории во всё время движения; но это

возможно лишь в случае прямолинейных траекторий.

Итак, все точки круга радиуса AB в центре в B описывают прямые линии, проходящие через центр A .

Взяв какую-нибудь точку C' этого круга и устроив направляющие по прямой AC' , мы получим другой кривошипно-шатунный механизм ABC' , точка M шатуна которого опишет тот же эллипс, что и в механизме ABC . Следовательно, существует бесчисленное множество (∞^1) центральных равнозвенных механизмов, дающих одно и то же семейство эллипсов.



Фиг. 222.

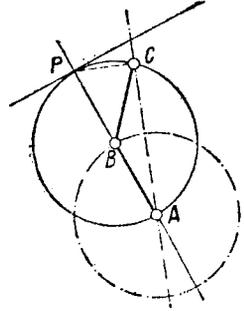
Кривая Бурместера на шатунной плоскости определяется так же, как и для шарнирного механизма по точкам B и C (фиг. 222). Для кривой Бурместера на неподвижной плоскости имеем одну точку A , для которой можно по общему правилу построить точку A_g направляющей прямой. Другая

точка D удалилась в бесконечность по направлению PC , а потому соответствующая ей точка направляющей прямой тоже удалась в бесконечность. Чтобы найти направление её удаления, вообразим временно, что точка D находится в D' , и построим точку D'_g ; перемещая точку D' по PC , убедимся, что D'_g будет перемещаться по прямой PD'_g ; следовательно, это и будет направление, в котором удаляется точка D направляющей прямой. Проведя $AD_g \parallel PD'_g$, получим искомую направляющую прямую, по которой уже обычным способом построим кривую Бурместера.

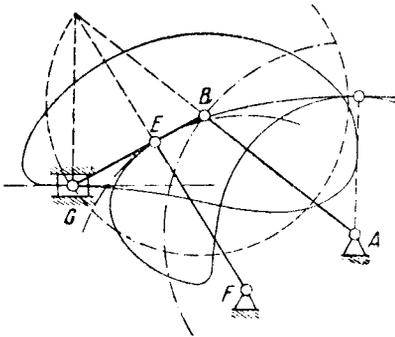
Можно воспользоваться также тем, что обе направляющие прямые пересекаются на касательной PT ; но лучше это свойство оставить для проверки.

В случае центрального равнозвенного механизма кривая Бурместера распадается на нормаль PA и круг перегиба (фиг. 223). Нормаль есть геометрическое место вершин всех эллипсов, так как именно в вершинах круги кривизны имеют касание третьего порядка с эллипсом. Точек Бурместера, кроме B и C , не существует, так как эллипс не может иметь с кругом касание порядка выше третьего.

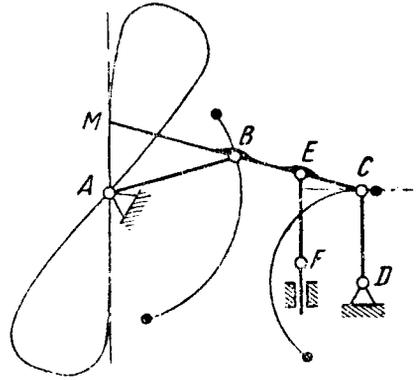
Свойствами криволинейно-шатунового механизма можно воспользоваться для построения направляющего механизма. Пусть задан механизм ABC (фиг. 224). Возьмём на его шатуне точку E и построим центр кривизны её траектории — точку F . Если в этой точке устроить неподвижный шарнир, а в точке E также сделать шарнир и между ними установить стержень, то в пределах совпадения дуги траектории точки E с дугой её круга кривизны механизм не потеряет своей подвижности. Но в таком случае неподвижные направляю-



Фиг. 223.



Фиг. 224.



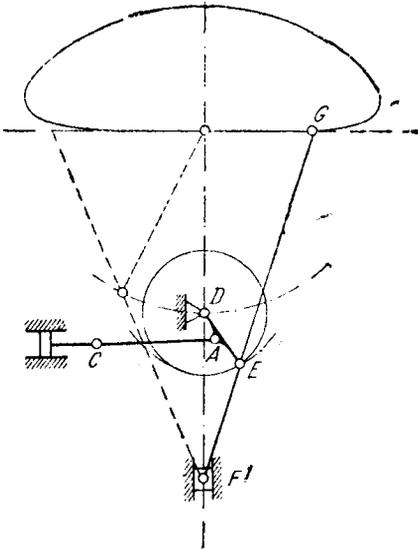
Фиг. 225.

щие в точке C можно связать, в результате чего мы получим четырёхшарнирный механизм $ABEF$ с точкой C на его шатуне, которая вблизи данного положения будет описывать траекторию, весьма близко подходящую к прямой. На чертеже показаны как часть траектории точки E первоначального механизма, так и траектория точки C преобразованного механизма. Для контроля построен круг перегиба второго механизма; оказалось, что он проходит через точку C , чем и объясняется хорошее приближение.

Если взять центральный равнозвенный механизм ABC (фиг. 225), то точка M на расстоянии $MB = BC$ будет описывать точно прямую, но для этого надо вести точку C в прямозвешных направляющих, что может представить конструктивные неудобства. В механизме Эванса для индикатора ведут точку C по дуге круга при помощи коромысла CD , вследствие чего точка M опишет кривую, однако весьма близко подходящую к прямой при небольших коле-

банях механизма, что в действительности и имеет место в индикаторе; механизм ведётся индикаторным поршнем, передающим движение шатуну вторым шатуном EF .

Другое решение этой задачи дано в индикаторе Фариборо, в основе которого лежит механизм DEF (фиг. 226). Здесь точка F ведётся вертикально при помощи направляющих, но вместо кривошипа AB взят кривошип DE . Так как в среднем положении точка E находится в вершине эллипса, то круг кривизны с центром D имеет касание третьего порядка с эллипсом, а потому траектория точки G практически не отличима от прямой. Механизм ведётся от индикаторного поршня посредством шатуна CA .



Фиг. 226.

§ 36. Синтез кулисного механизма.

Для получения уравнений шатунной кривой в этом случае выберем оси координат, как это показано на фиг. 227. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi + b \sin \gamma_1; \\ y &= r \sin \varphi + b \cos \gamma_1; \end{aligned}$$

исключая угол φ , получим:

$$2bx \sin \gamma_1 + 2by \cos \gamma_1 = x^2 + y^2 + b^2 - r^2,$$

но

$$\gamma_1 = 180^\circ - (\varphi + \alpha),$$

поэтому предыдущее уравнение может быть написано так:

$$2b(x \sin \alpha - y \cos \alpha) \cos \psi + 2b(x \cos \alpha + y \sin \alpha) \sin \psi = x^2 + y^2 + b^2 - r^2.$$

С другой стороны, $(k - x) \cos \psi + y \sin \psi = e + b \sin \alpha$.

Исключая угол ψ , получим:

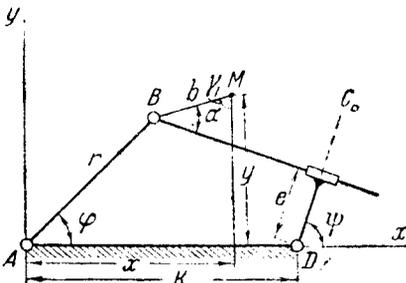
$$U^2 + V^2 = W^2, \tag{101''}$$

$$U = (k - x)(x^2 + y^2 + b^2 - r^2) + 2b(e + b \sin \alpha)(x \sin \alpha - y \cos \alpha);$$

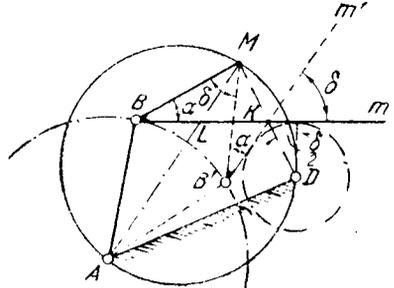
$$V = y(x^2 + y^2 + b^2 - r^2) - 2b(e + b \sin \alpha)(x \cos \alpha + y \sin \alpha);$$

$$W = 2b \cos \alpha [x(x - k) + y^2 - ky \operatorname{tg} \alpha].$$

Получилось уравнение шестой степени, обладающее свойствами уравнения Роберта, т. е. шатунная кривая может иметь как с прямой, так и с



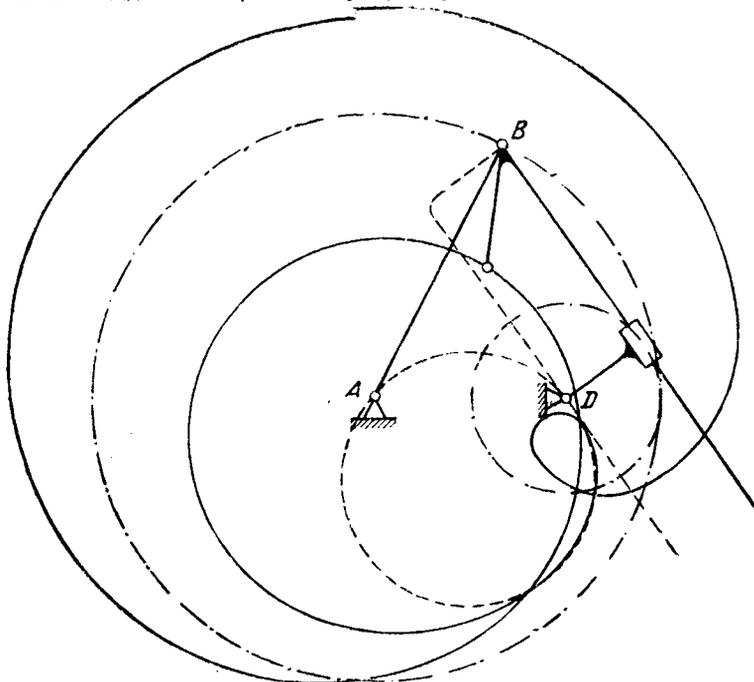
Фиг. 227.



Фиг. 228.

кругом не более шести общих точек или касание не выше пятого порядка.

Теорема Робертса к этому механизму не применима — не существует другого механизма, дающего ту же шатунную кривую.



Фиг. 229.

Если точка M проходит в данное мгновение через двойную точку своей траектории, то кроме положения механизма ABM (фиг. 228) существует ещё другое положение $AB'M'$, в котором точка M находится в том же месте. Касательные Bm и $B'm'$ к кругу смещения образуют угол $\angle BMB' = \delta$, прямая AM есть равноделящая угла BMB' , а прямая MD — равноделящая угла BKm' ; поэтому

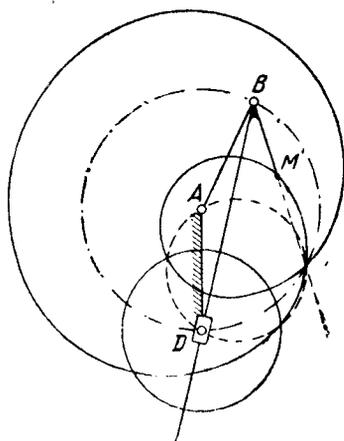
$$\angle MLK = \alpha + \frac{\delta}{2}; \quad \angle MKL = 90^\circ - \frac{\delta}{2},$$

следовательно;

$$\begin{aligned} \angle LMK &= \angle AMD = \\ &= 180^\circ - \left(\alpha + \frac{\delta}{2}\right) - \left(90^\circ - \frac{\delta}{2}\right) = \\ &= 90^\circ - \alpha = \text{const.} \end{aligned}$$

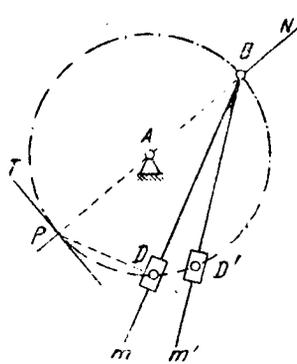
Таким образом, двойная точка траектории, если она существует, должна лежать на круге, проходящем через центры A и D и вмещающем угол $90^\circ - \alpha$. Уравнение $W=0$ есть уравнение этого круга.

Обыкновенных двойных точек, лежащих на этом круге, может быть не более трёх. Четвёртая двойная точка получается в предельном механизме при $r = k + e$ (фиг. 229). В случае $e=0$ и $r=k$ кривая распадается на окружность и кривую четвёртого порядка; включая их точки пересечения, получим пять двойных точек (фиг. 230).



Фиг. 230;

Механизм есть обращение кривошипно-шатунного, а потому построение центров кривизны, круга перегиба, кривой Бурместера и точек Бурместера целесообразно находить обращением механизма, т. е. постановкой его на кулису.

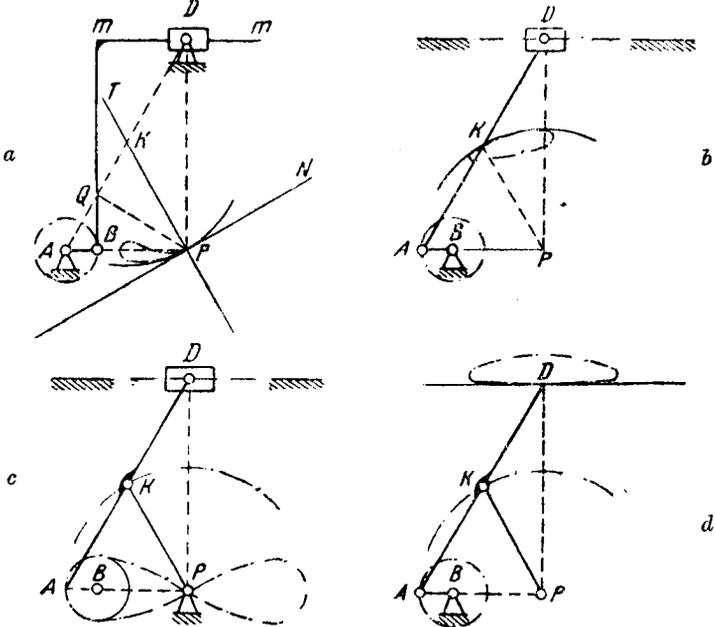


Фиг. 231.

В частности, для несмещённого равнозвенного механизма, т. е. при $e = 0, r = k$, получим круг возврата, совпадающий с кругом кривошипа (фиг. 231), а это означает, что не только прямая Bm проходит через постоянную точку D , но и любая прямая из B , например Bm' , также проходит через некоторую постоянную точку D' , особую для каждой прямой. Иначе говоря, существует бесчисленное множество (∞^1) несмещённых равнозвенных кулисных механизмов, дающих одно и то же семейство кривых четвёртого порядка, именно — улиток Паскаля.

Рассмотрим один интересный пример использования свойств кулисного механизма. Пусть расстояние центров AD равно восьмикратному радиусу кривошипа AB (фиг. 232,а); поставим механизм в такое положение, чтобы угол $BAD = 60^\circ$, а прямая m кулисы была параллельна AB . Тогда при полюсе P образуется прямой угол APD , точка Q пересечения оси кулисы (соответствующей оси шатуна BC при бесконечно удалённой точке C) есть осно-

вание перпендикуляра, опущенного из P на AD , а потому полюс является точкой Бурместера, а её центром кривизны будет точка K , середина AD . При обращении движения, т. е. при постановке механизма на кулису (фиг. 232,б),



Фиг. 232.

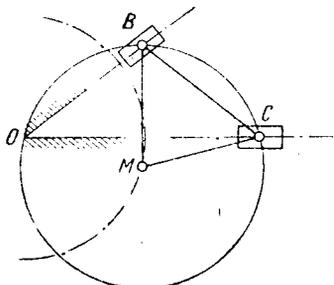
точка K опишет траекторию, центром кривизны которой будет P и которая будет иметь касание пятого порядка со своим кругом кривизны; точка D будет двигаться по прямой, а A по кругу с центром в B , т. е. мы будем иметь кривошипно-шатунный механизм. Если вести точку D по этой же прямой, а точку K — по её кругу кривизны, поставив кривошип PK (фиг. 232,с), то точка A опишет восьмёрку, имеющую касание пятого порядка со своим кругом кривизны

в данном положении. Наконец, если вести A по её кругу кривизны, поставив кривошип BA с центром вращения в B , а точку K по кругу с центром в P (фиг. 232, d), то точка D опишет траекторию, имеющую в данное мгновение касание пятого порядка со своей касательной. Этот последний механизм $BAKP$ с точкой D на оси шатуна на расстоянии $DK = AK = PK = 4BA$ известен как «лямбдообразный» механизм Чебышева.

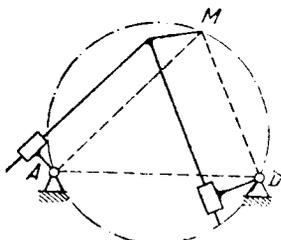
§ 37. Синтез механизмов с двумя поступательными парами.

Здесь могут быть следующие случаи:

Две поступательные пары принадлежат стойке (фиг. 233). Механизм эквивалентен центральному равнозвенному кривошипно-шатунному механизму. Шатунные кривые — эллипсы; точка, описывающая круговую траекторию, находится в центре круга, проходящего через точки B , C и точку пересечения O прямолнейных путей этих точек; последняя точка является центром круговой траектории.



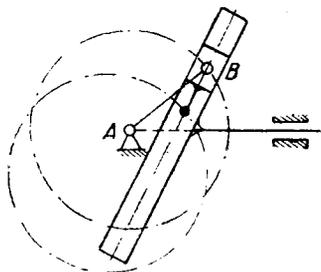
Фиг. 233.



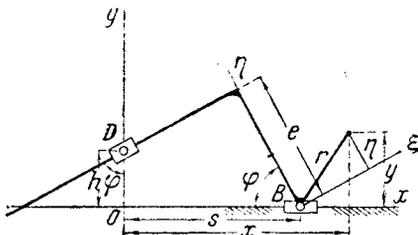
Фиг. 234.

Две поступательные пары принадлежат шатуну (фиг. 234). Обращение предыдущего механизма эквивалентно несмещённому равнозвенному кулисному механизму. Шатунные кривые — улитки Паскаля. Точка, описывающая круговую траекторию, находится в пересечении прямых, проходящих через неподвижные центры и параллельных направлениям соответственных пар; круговая траектория проходит через неподвижные центры.

Две поступательные пары принадлежат звену, прилегающему к стойке (фиг. 235). Шатун совершает круговое поступательное движение, т. е. все точки его описывают круги одинакового радиуса.



Фиг. 235.



Фиг. 236;

Поступательные пары чередуются с вращательными (фиг. 236). Механизм получается всегда одного типа, на какое бы звено ни был поставлен.

Движение шатуна может быть охарактеризовано тем, что одна его точка движется по прямой, а одна прямая проходит через постоянную точку. Принимая линию движения точки B за ось x , а ось y проводя через неподвижный центр D , получим:

$$x = s - \eta \cos \varphi + \zeta \sin \varphi; \quad y = \eta \sin \varphi + \zeta \cos \varphi; \quad s = \frac{e}{\cos \varphi} - h \operatorname{tg} \varphi.$$

Из первых двух уравнений определяем:

$$\begin{aligned}(\xi^2 + \tau^2) \sin \varphi &= \xi(x-s) + \tau y; \\(\xi^2 + \tau^2) \cos \varphi &= -\tau(x-s) + \xi y;\end{aligned}$$

обозначая $\xi^2 + \tau^2$ через r^2 , найдём из третьего уравнения

$$[-\tau(x-s) + \xi y]s = r^2 e - h\xi(x-s) - h\tau y.$$

Кроме того, из первых двух уравнений имеем:

$$(x-s)^2 + y^2 = r^2.$$

Исключая из этих двух уравнений s , находим:

$$U^2 + V^2 = W^2, \quad (101''')$$

где

$$U = r^2(e - \tau) - h\tau y - \xi xy + \tau y^2;$$

$$V = y(\xi y + \tau x - h\xi);$$

$$W = r(\xi y + \tau x - h\xi).$$

Таким образом, шатунная кривая оказалась кривой четвёртого порядка.

Если точка M проходит в данное мгновение через двойную точку своей траектории, то существуют два положения механизма MBm и $MB'm'$ (фиг. 237).

Прямая MD будет равноделящей

угла между прямыми Bm и $B'm'$, а перпендикуляр MA_∞ — равноделящей угла BMB' . Отсюда находим:

$$\angle MLK = \alpha + \frac{\delta}{2}; \quad \angle MKL = 90^\circ - \frac{\delta}{2},$$

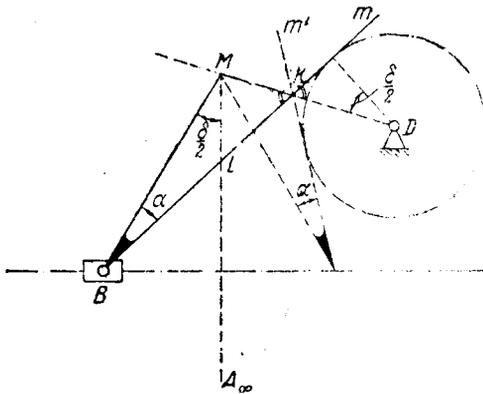
следовательно,

$$\angle LMK = 180^\circ - \left(\alpha + \frac{\delta}{2}\right) - \left(90^\circ - \frac{\delta}{2}\right) = 90^\circ + \alpha.$$

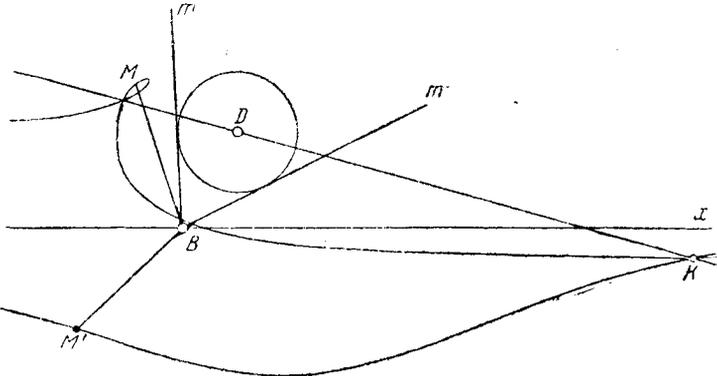
Итак, двойная точка, если она существует, должна лежать на прямой MD , образуемой углом α с линией движения точки B .

Уравнение $W = 0$ и есть уравнение этой прямой.

Шатунная кривая состоит из двух ветвей (фиг. 238), каждая из которых представляет траекторию точки особого механизма: ветвь с двойной точкой



Фиг. 237.

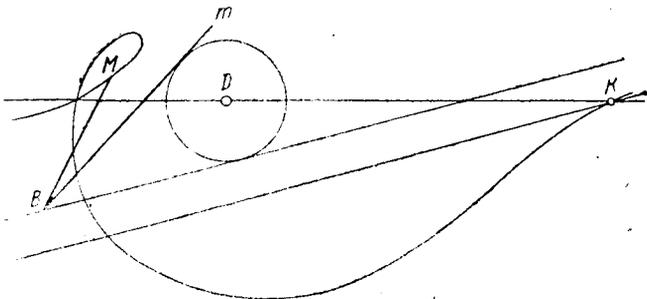


Фиг. 238.

есть траектория точки M звена MBm , точка B которого движется по прямой Bx , а прямая Bm касается круга с центром D ; другая ветвь есть траек-

тория точки M' звена $M'Bm'$, точка B которого движется по той же прямой Bx , а прямая Bm' касается того же круга, но с другой стороны. Обе ветви составляют одну кривую, выражаемую уравнением (101'''), а точка их пересечения есть вторая двойная точка, лежащая на той же прямой, что и первая.

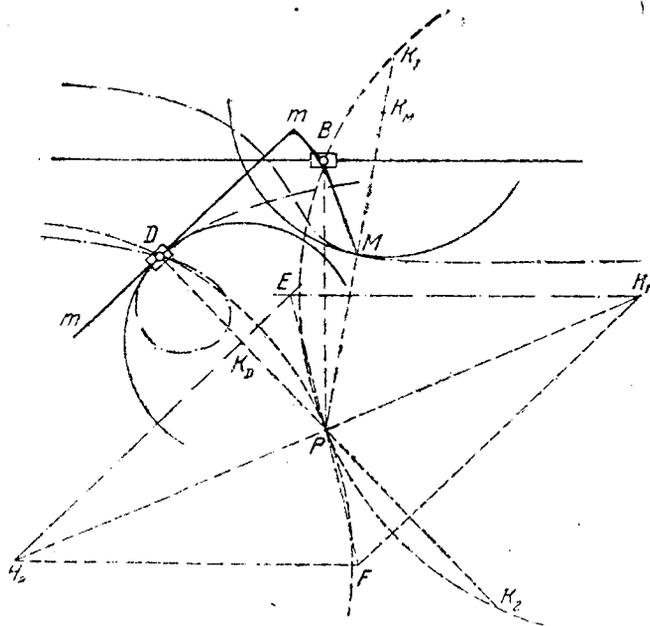
В случае $h = e$ шатунная кривая распадается на прямую, параллельную линии движения точки B , которая в этом случае касается круга, и на кри-



Фиг. 239.

вую третьего порядка. Из чертежа (фиг. 239) видно, что кроме двойной точки на кривой третьего порядка имеются ещё две точки пересечения этой кривой с прямой, которые надо считать также двойными точками. Третья точка пересечения кривой с прямой находится в бесконечности, так как асимптота кривой параллельна прямой.

Этот механизм является единственным четырёхзвенным механизмом, шатунные кривые которого не замкнуты (простираются в бесконечности) и который при частном соотношении $h = e$ даёт кривую третьего порядка.



Фиг. 240.

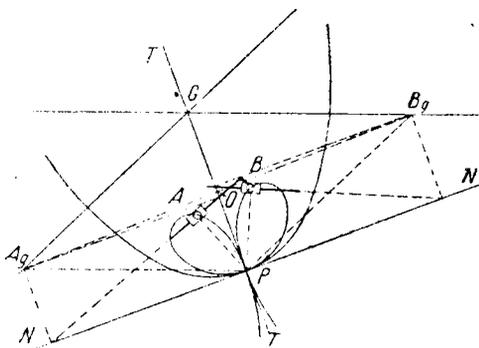
Круг перегиба можно построить, исходя из следующих соображений. Находим прежде всего полюс P в пересечении BP , перпендикуляра к траектории точки B , и DP , перпендикуляра к прямой mm (фиг. 240). Круг пере-

гиба должен проходить через точки B и P , а потому центр его должен лежать на перпендикуляре, восстановленном из середины BP . С другой стороны, круг возврата, равный кругу перегиба и касательный к нему в полюсе, проходит через D и P , а потому его центр должен лежать на перпендикуляре, восстановленном из середины DP . Так как центры обоих кругов должны лежать на прямой, проходящей через P и на равных расстояниях от P , то найди точку E пересечения средних перпендикуляров, соедини её с P и отложи $PF = PE$, получим диагональ параллелограмма EF , центром которого будет P ; проведя FH_1 и FH_2 , параллельные средним перпендикулярам, найдём остальные две вершины H_1 и H_2 параллелограмма, которые и будут искомыми центрами кругов перегиба и возврата.

Зная круг перегиба, найдём обычным путём центр кривизны траектории любой точки. На чертеже построены траектории точек M и точки прямой mt , совпадающей в данное мгновение с неподвижным центром D , и проведены в этих точках дуги соответствующих кругов кривизны.

Для получения касания третьего порядка надо построить кривую Бурместера. Это можно сделать тем же путём, что и для кривошипно-шатунного механизма.

На фиг. 241 сделано такое построение. Вд кривой Бурместера на шатунной плоскости имеем одну точку B , для которой находим точку B_g направляющей прямой. Другую точку (в бесконечности) получим, если обратим движение; тогда будем иметь опять кривошипно-шатунный механизм, в котором точка A будет двигаться по прямой. Найди точку A_g , определим направление PA_g , в котором вторая точка удалится в бесконечность. Проведи через B_g параллель PA_g , получим направляющую прямую. Вторая направляющая прямая строится аналогично, так как обратённое движение будет того же характера: эта направляющая прямая будет проходить через точку A_g и будет параллельна PB_g . Точка G их пересечения должна лежать на касательной PT ,



Фиг. 241.

что служит проверкой. Таким образом, точка G пересечения обеих направляющих прямых есть четвёртая вершина параллелограмма, три остальные вершины которого находятся в точках P , A_g и B_g . На этом основании построение можно упростить. Найди обычным путём точки A_g и B_g , определяем точку O пересечения A_gB_g с PT ; откладывая $OG = OP$, находим точку G , определяющую обе направляющие прямые¹⁾.

На чертеже показаны обе кривые Бурместера.

Рассмотрим ещё один частный случай, именно $e = 0$, $h \neq 0$, и определим траекторию точки M , лежащей на прямой BD (фиг. 242); в уравнение (101^{III}) надо подставить $\eta = 0$; получим:

$$U = -\xi xy, \quad V = \xi y(y - h), \quad W = \xi^2(y - h); \quad \text{I}$$

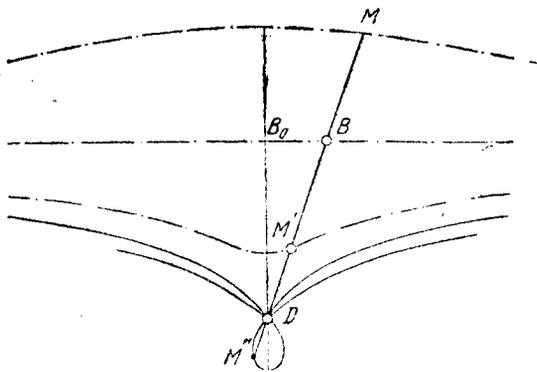
сокращая на ξ^2 , будем иметь:

$$x^2 y^2 + y^2 (y' - h)^2 = \xi^2 (y - h)^2. \quad (101^{IV})$$

Это есть уравнение конхоиды. Заметим, что с переменной ξ на $-\xi$ уравнение не изменяется; это означает, что уравнение охватывает траектории двух точек M и M' , находящихся по обе стороны точки B на одинаковом расстоянии. Траектория точки B является общей асимптотой обеих траекторий. При $\xi = h$ траектория M' имеет точку возврата в точке D , при $\xi > h$ получается двойная точка.

¹⁾ Это свойство и основанное на нём построение указываются здесь впервые.

Этот конхоидальный механизм может послужить для построения направляющего механизма. Вершины конхоид, описываемых точками кулисы Bm , лежат на прямой B_0D , а потому здесь имеет место касание третьего порядка. Заменяя в этих точках траектории их кругами кривизны, получим два типа направляющих механизмов — движением точки B по траектории, практически совпадающей с прямой на некотором участке (фиг. 243 и 244).



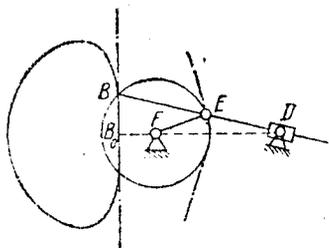
Фиг. 242.

Интересно отметить, что кривая Бурместера распадается на оси координат, т. е. на нормаль PN (геометрическое место вершин конхоид) и касательную PT . Коническое сечение, определяющее точки Бурместера, также распадается на ту же нормаль PN и прямую $\tau = -\frac{d}{2}$; отсюда

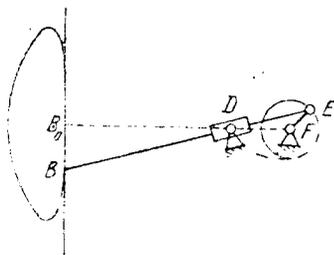
следует, что все точки PN являются точками Бурместера. Параметры данного положения таковы:

$$d = B_0D, \quad x_0''' = -3d, \quad y_0''' = 0, \quad x_0^{IV} = 0, \quad y_0^{IV} = d;$$

эти значения удовлетворяют уравнению (127), а потому все точки кулисы в



Фиг. 243.



Фиг. 244.

данном положении описывают траектории, имеющие касание пятого порядка со своими кругами кривизны.

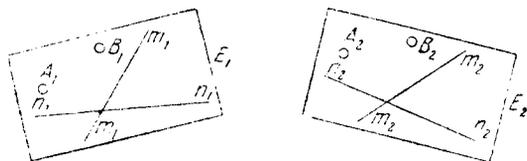
Этим и объясняется хорошее приближение к прямой в этом механизме.

VII. СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ МЕТОДОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕСТ.

В этой главе решается следующая общая задача: построить такой четырёхзвённый, шатун которого своим движением переводил бы подвижную плоскость через ряд заданных положений. В качестве такого механизма может быть взят шарнирный четырёхзвённый, и тогда задача сводится к отысканию таких точек подвижной плоскости, ряд положений которых лежит на одном круге. Для кривошипно-шатунного механизма придётся искать точки, ряд положений которых лежит на одной прямой. К этой задаче приводится другая, часто встречающаяся в машиностроении: построить четырёхзвённый, передающий движение таким образом, что заданным положениям одного звена соответствуют заданные же положения другого.

§ 38. Синтез четырёхзвенных механизмов по двум заданным положениям звеньев.

Пусть E_1 и E_2 — два положения подвижной плоскости, совершающей плоско-параллельное движение (фиг. 245); требуется построить четырёхзвенный механизм, переводящий плоскость из одного положения в другое. Каждое положение подвижной плоскости может быть геометрически определено одним из



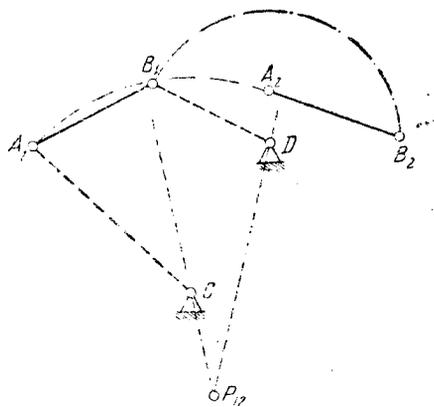
Фиг. 245.

трёх способов: либо заданием положения двух её точек, например A и B , либо заданием положения двух прямых, например mm и nn , либо заданием положения одной прямой и одной точки, например A и mm . Все три задания могут быть сведены к одному — одной точке и прямой, через неё проходящей; в самом деле, две

точки определяют единственную прямую, которую и примем за прямую, определяющую вместе с одной из точек положение плоскости; две прямые определяют единственную точку, которую и примем за точку, определяющую вместе с одной из прямых положение плоскости; наконец, при задании точки и прямой, через неё не проходящей, проведём через точку прямую, пересекающую заданную, и таким образом сведём этот случай к предыдущему.

Во всех случаях будем иметь три независимых параметра, определяющих положение плоскости. В аналитической геометрии и аналитической кинематике такими параметрами как раз и выбираются координаты одной точки, принимаемой за начало координат в подвижной плоскости, и угол, образуемый заданной прямой, принимаемой за подвижную ось абсцисс, с неподвижной осью абсцисс. В синтетических же исследованиях предпочтительнее пользоваться одним из трёх указанных способов задания.

Зададим два положения плоскости двумя положениями отрезка AB , т. е. двумя парами точек A_1B_1 и A_2B_2 (фиг. 246), при условии, конечно, что $A_2B_2 = A_1B_1$, и примем этот отрезок за длину шатуна четырёхзвенника; тогда центр C вращения звена CA должен лежать на перпендикуляре, восстановленном из середины A_1A_2 , а центр D вращения звена DB — на перпендикуляре, восстановленном из середины B_1B_2 . Взяв на каждом перпендикуляре по точке, мы и построим требуемый механизм $CABD$.



Фиг. 246.

Если на одном перпендикуляре взять бесконечно удалённую точку, то вместо шарнирного механизма получим кривошипно-шатунный механизм. Если взять бесконечно удалённые точки на обоих перпендикулярах, то получим механизм с двумя ползунами.

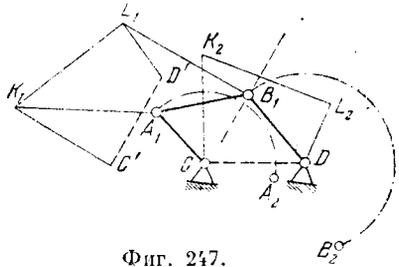
Если принять за центр вращения точку пересечения перпендикуляров, то оба звена CA и DB будут иметь общий центр вращения, а потому четырёхзвенный механизм обратится в жёсткий треугольник, вращающийся вокруг этого центра. Замечательно, что положение этого центра не зависит от выбора точек A и B ; таким образом существует только одно вращение, переводящее плоскость из одного положения в другое ¹⁾.

Центр этого вращения называется полюсом конечного перемещения и обозначается буквой P с двумя индексами, указывающими номера положений: в нашем случае, следовательно, это будет P_{12} .

¹⁾ Это положение было установлено ещё Шалем (Chasles) в 1830 г.

В виде дополнительного условия может быть поставлено требование, чтобы центры C и D лежали на заданной прямой; тогда они найдутся в пересечении указанных выше перпендикуляров с этой прямой. Остальные случаи дополнительных заданий будут указаны в следующей главе.

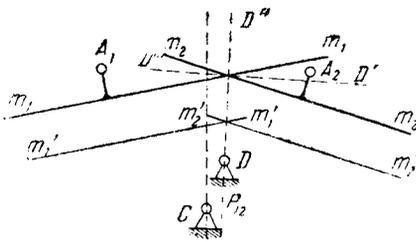
Вместо выбора точек A и B на подвижной плоскости можно взять центры вращения C и D на неподвижной плоскости. Тогда для нахождения соответствующих им точек A и B на подвижной плоскости обращаем движение, т. е. подвижную плоскость делаем неподвижной в одном каком-либо её положении, например в первом, и находим два положения прежней неподвижной плоскости относительно E_1 . С этой целью берём на E_1 две произвольные точки K и L в двух заданных положениях K_1L_1 и K_2L_2 (фиг. 247) и образуем жёсткий четырёхугольник K_2L_2DC ; затем на отрезке K_1L_1 строим четырёхугольник $K_1L_1D'C'$, равный K_2L_2DC). Искомая точка A_1 должна лежать на перпендикуляре, восстановленном из середины CC' , а точка B_1 — на перпендикуляре, восстановленном из середины DD' .



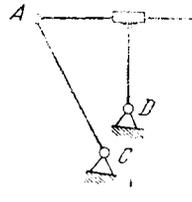
Фиг. 247.

Если два положения заданы точками K_1, K_2 и прямыми K_1m_1 и K_2m_2 , то берём на этих прямых соответственные точки L_1 и L_2 , откладывая $K_1L_1 = K_2L_2$, и затем поступаем, по предыдущему.

Для перевода плоскости из положения E_1 в положение E_2 может быть пригоден и кулисный механизм. Для получения его берём точку A_1 и прямую m_1m_1 и соответственно A_2 и m_2m_2 (фиг. 248); центр вращения криво-



Фиг. 248.



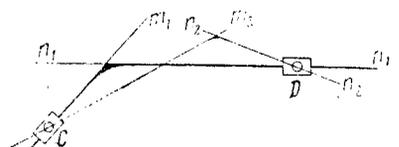
Фиг. 249.

шина надо взять на перпендикуляре, восстановленном из середины A_1A_2 , а центр вращения кулисы — на равноуделяющей угла между прямыми m_1m_1 и m_2m_2 ; при этом из двух равноуделящих надо взять ту, которая даёт точки D , расположенные относительно прямых m_1m_1 и m_2m_2 в соответствии с положением точек A_1 и A_2 относительно тех же прямых; так, для расположения на чертеже точка D находится по другую сторону прямой m_1m_1 , чем точка A_1 , и то же имеет место по отношению к прямой m_2m_2 и точке A_2 , но для точки D' это условие однородности не соблюдается; для точки D'' имеем одностороннее расположение с точками A_1 и A_2 , что не имеет места для точки D''' .

Взяв вместо прямых m_1m_1 и m_2m_2 параллельные им прямые $m'_1m'_1$ и $m'_2m'_2$, получим те же равноуделящие; это соответствует тому, что все параллельные прямые определяют на плоскости одну бесконечно удалённую точку. Точка пересечения перпендикуляра из середины A_1A_2 и соответственной равноуделяющей есть полюс P_{12} . На фиг. 249 показана схема требуемого кулисного механизма.

Взяв на равноуделяющей произвольную точку, а на перпендикуляре — бесконечно удалённую точку, получим механизм с двумя поступательными парами, чередующимися с вращательными.

Задавая на подвижной плоскости пару прямых mm и nn (фиг. 250), построим

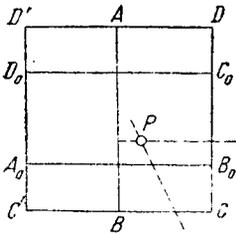


Фиг. 250.

*) Это можно сделать, сняв на кальку фигуру K_2L_2DC и наложив затем кальку так, чтобы K_2L_2 совпала с K_1L_1 .

механизм с двумя поступательными парами на шатуне (кулисе), причём за точки C и D взяты точки пересечения прямых m_1m_1 , m_2m_2 и n_1n_1 , n_2n_2 .

Полюс P_{12} находит практическое применение при устройстве раскладного стола, крышка которого в раскрытом виде имеет форму квадрата $CDD'C'$ (фиг. 251), а в сложенном — прямоугольника $A_0B_0C_0D_0$. Найдя для двух положений плоскости, определяемых точками $A_0B_0C_0D_0$ и $ABCD$, полюс P , поставим здесь шип, который и обеспечит требуемый поворот крышки для раскрытия стола.

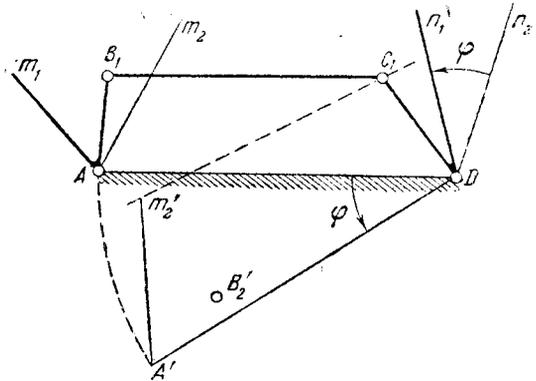


Фиг. 251.

Четырёхзвенный механизм, построенный для двух заданных положений, может быть применён для передачи вращения между параллельными осями при условии, чтобы двум заданным положениям одного звена соответствовали два заданных положения другого. Пусть, например, положения кривошипа заданы прямыми Am_1 и Am_2 (фиг. 252), а соответствующие им положения коромысла — прямыми Dn_1 и Dn_2 . Найдём относительные положения кривошипа по отношению к коромыслу в его первом положении, для чего повер-

нём фигуру n_2DAm_2 на угол φ , вследствие чего получим фигуру $n_1DA'm_2^*$. Таким образом, будем иметь два положения плоскости, определяемые точками A и A' и прямыми Am_1 и $A'm_2'$. Для точек A и A' уже имеется центр вращения D . Второй центр вращения получим, если возьмём

два положения B_1 и B_2' произвольной точки B и из середины B_1B_2' восставим перпендикуляр; любая точка C_1 этого перпендикуляра может быть принята за точку коромысла, а B_1C_1 будет тем шатуном, который обеспечит соответствие положений Am_1 и Am_2 положениям Dn_1 и Dn_2 .



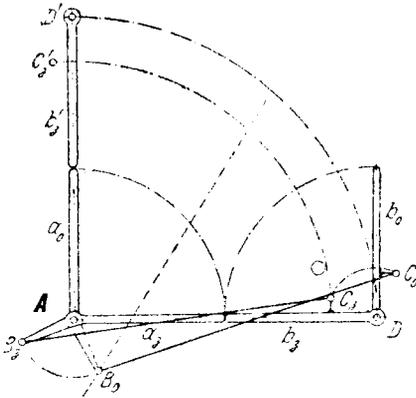
Фиг. 252.

Такой случай имеет место при устройстве трамвайной двустворчатой входной двери, обе створки которой должны открываться вместе и одновременно. Пусть дверные петли находятся в A и D (фиг. 253), створки закрытых дверей обозначены a_2 и b_2 , а те же створки при открытых дверях занимают положения a_0 и b_0 . Требуется соединить створки шатуном так, чтобы при повороте одной створки на 90° , другая также повернулась на 90° в противоположном направлении. Для определения мест постановки шарниров построим относительное положение створки b в открытом и закрытом состоянии относительно створки a_0 ; точка D перейдёт при этом в D' , а b_2 — в b_2' . Таким образом, будем иметь два положения створки b , именно — b_0 и b_2' относительно a_0 , принимаемой за неподвижную. Мы можем теперь для шарнира на створке a_0 выбрать произвольную точку, например C_0 , и в другом положении соответственно C_2' . Восставив из середины C_0C_2' перпендикуляр, возьмём на нём произвольную точку B_0 , которая и будет центром шарнира на створке a . Как B , так и C могут быть выбраны в местах, наиболее пригодных для устройства шарниров. При закрытых дверях мы получили механизм AB_0C_0D , при открытых — механизм $AB_2C_2'D$. Так как шатун при своём движении пересекает плоскость дверей, то механизм должен быть устроен над дверями; при этом шарнир C помещается перед дверью, а шарнир B — за дверью.

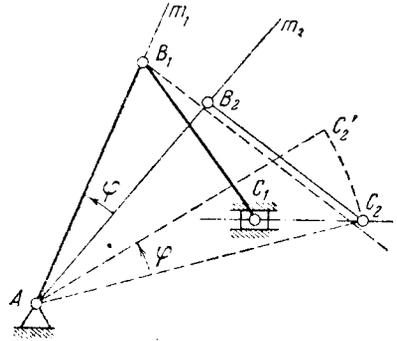
*) Это можно сделать при помощи вальки. см. предыдущее примечание.

Если точка B задана на прямой Am , т. е. заданы углы отклонения кривошипа от линии центров AD и радиус кривошипа, а точку C желательнее иметь на прямой Dn , то задача получает вполне определённое решение.

Если требуется преобразовать вращательное движение в поступательное при условии соответствия двух положений, то построим для этой цели кривошипно-шатунный механизм по заданным положениям кривошипа прямыми:



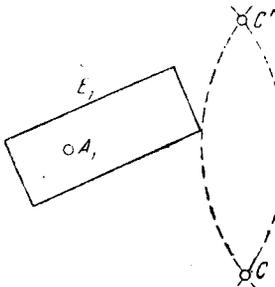
Фиг. 253.



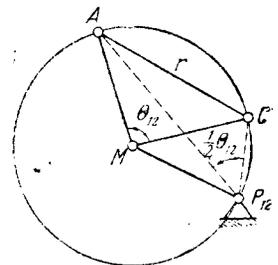
Фиг. 254.

Am_1 и Am_2 и соответствующим положениям ползуна C_1 и C_2 (фиг. 254). Поворачивая фигуру m_2AC_2 на угол φ , получим точку C_2' , а восстанавливая перпендикуляр из середины C_1C_2' , найдём в пересечении его с Am_1 искомую точку B_1 .

Поставим в нашей общей задаче ещё дополнительное требование: заданного радиуса вращения. Задаваясь попережнему точкой в подвижной плоскости, найдём для двух её положений A_1 и A_2 (фиг. 255) два возможных центра вращения C и C' в пересечениях дуг заданного радиуса r из центров A_1 и A_2 . Таким образом, между точками подвижной и неподвижной плоскости устанавливается соответствие: каждой точке подвижной плоскости соответствуют



Фиг. 255.



Фиг. 256.

две точки неподвижной. Обращением движения получаем обратное соответствие: каждой точке неподвижной плоскости соответствуют две точки подвижной.

Этому соответствию можно дать следующее кинематическое толкование. Пусть для точки A подвижной плоскости имеется центр C на неподвижной, так что $CA = r$ (фиг. 256). Пусть P_{12} есть полюс; тогда $\angle AP_{12}C = \frac{1}{2} \theta_{12}$.

Построим круг, проходящий через A , C и P_{12} ; его центр M вместе с точками A и C образует равнобедренный треугольник с основанием r и углом при вершине θ_{12} ; боковые стороны, равно как и расстояние $P_{12}M$, имеют величину

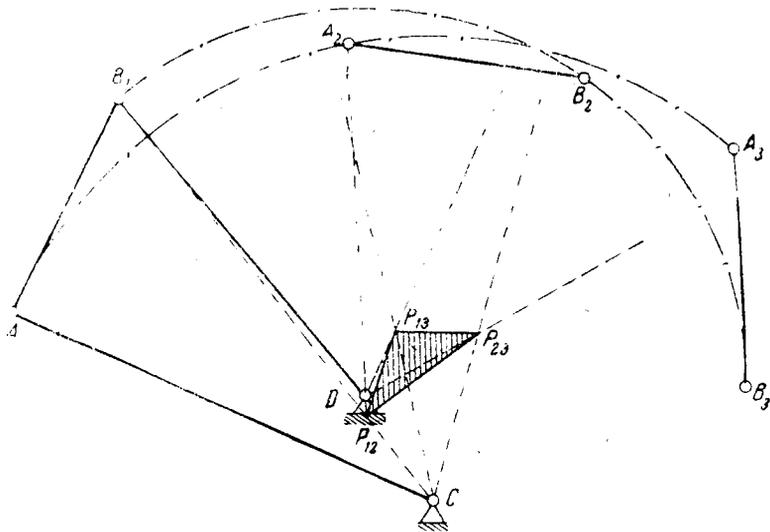
$\frac{r}{2 \sin \frac{1}{2} \theta_{12}}$. Поэтому можно построить кинематическую цепь, состоящую из

трёх звеньев: неподвижного, кривошипа $P_{12}M$ с центром вращения P_{12} и жёсткого треугольника MAC , соединённого с кривошипом шарниром в M . Эта цепь имеет две степени свободы, а потому точка A может занять любое положение в плоскости внутри круга с центром P_{12} и радиуса $\frac{r}{2 \sin \frac{1}{2} \theta_{12}}$

то точка C также займёт одно из двух возможных для неё положений. Таким образом, наша цепь устанавливает соответствие между точками A и C . При помощи этой цепи мы находим, что точкам прямой на подвижной плоскости соответствует кривая четвёртого порядка на неподвижной, именно — траектория точки C шатуна кривошипно-шатунного механизма $P_{12}MA$ с ползуном A , ходящим по заданной прямой. Таким образом, наше соответствие есть соответствие четвёртого порядка. Понятно, что то же имеет место и для обратного соответствия ¹⁾.

§ 39. Синтез четырёхзвённых механизмов по трём заданным положениям звеньев.

Зададим три положения плоскости отрезками A_1B_1 , A_2B_2 и A_3B_3 (фиг. 257). Эти отрезки можно принять за положения шатуна AB шарнирного четырёхзвённого; тогда центр C найдётся как центр круга, проходящего через точки A_1 , A_2 и A_3 , а центр D — как центр круга, проходящего через точки B_1 , B_2 и B_3 . Таким образом, для взятого шатуна получаем единственный че-



Фиг. 257.

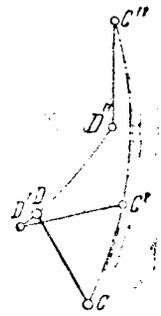
тырёхзвённого, который будет четырёхшарнирным, если ни точки A_1 , A_2 , A_3 , ни B_1 , B_2 , B_3 не лежат на одной прямой: если окажется, что одна тройка точек лежит на одной прямой, то получится кривошипно-шатунный механизм; если обе тройки лежат на прямых, то получится механизм с двумя ползунами. Полусов конечного перемещения здесь будет три: P_{12} , P_{13} , P_{23} .

Вместо точек A и B на подвижной плоскости можно задать центрами C и D на неподвижной. Тогда, обрачая движение, найдём три положения от-

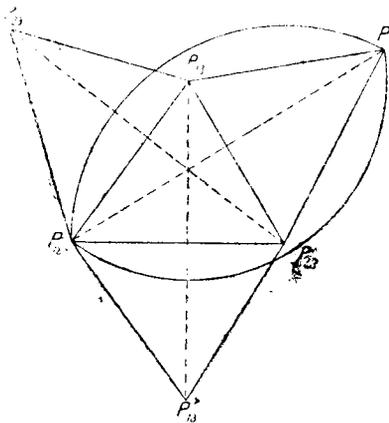
¹⁾ Черкудинов С. А.: Механизмы для вычерчивания геометрических мест метрического синтеза, связанные с параметром r , Труды Ленинградской акад., 1939.

резка CD относительно подвижной плоскости в каком-либо её положении, например E_1 *); если эти три положения будут CD , $C'D'$ и $C''D''$ (фиг. 258), то точка A найдётся как центр круга, проходящего через точки C , C' , C'' , а точка B — как центр круга, проходящего через точки D , D' , D'' .

Из этого видно, то между подвижной и неподвижной плоскостями устанавливается соответствие по точкам. Определим характер этого соответствия, для чего прежде всего выясним роль полюсов. Какой бы ни был характер движения подвижной плоскости, точка этой плоскости, совпадающая в первом её положении с полюсом P_{12} , совпадает с ним и во втором положении, потому что треугольник $A_1B_1P_{12}$ равен треугольнику $A_2B_2P_{12}$ и одинаково с ним расположен. При переходе же плоскости из второго положения в третье эта точка займёт новое положение, которое мы обозначим через P_{12}^3 (фиг. 259); так как переход из второго положения в третье может быть осуществлён поворотом вокруг P_{23} , то точка P_{12}^3 должна лежать на окружности, описанной из центра P_{23} радиусом $P_{23}P_{12}$. Но та же точка P_{12}^3 может быть получена при перемещении плоскости непосредственно из первого положения в третье, так как и в первом положении она совпадает с P_{12} ; следовательно, точка P_{12}^3 должна лежать на окружности, описанной из центра P_{13} радиусом $P_{13}P_{12}$. А это вместе с тем значит, что точка P_{12}^3 есть точка, симметричная P_{12} по отношению к прямой $P_{23}P_{13}$. Аналогично этому найдём, что точка P_{13}^2 , т. е. второе положение той точки плоскости, которая в первом и третьем положении совпадает с P_{13} , есть точка, симметричная с P_{13} относительно прямой $P_{23}P_{12}$; то же имеет место и относительно точки P_{23}^1 . Для каждой из этих точек соответствующий центр остаётся неопределённым, так как для его определения имеются лишь две точки круга. Так, для точки, совпадающей с P_{12} , найдём, что центр круга, проходящего через три положения этой точки, т. е. через P_{12} и P_{12}^3 , лежит на перпендикуляре, восстановленном из середины $P_{12}P_{12}^3$, а этим перпендикуляром будет прямая $P_{23}P_{13}$.



Фиг. 258.



Фиг. 259.

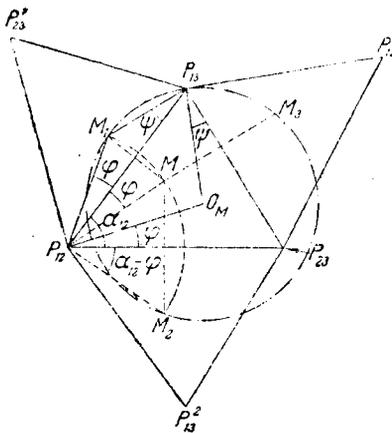
Соединяя полюсы на неподвижной плоскости, получим полюсный треугольник $P_{12}P_{23}P_{13}$; на подвижной плоскости в её трёх положениях получим полюсные треугольники: в первом положении — $P_{12}P_{23}P_{13}^1$, во втором — $P_{12}P_{23}P_{13}^2$, в третьем — $P_{12}^3P_{23}P_{13}$.

На основании вышесказанного, а также на основании взаимности соответствия устанавливается значение полюсного треугольника: вершинам полюсного треугольника соответствуют все точки противоположных сторон и, наоборот, — каждой точке стороны полюсного треугольника соответствует противоположная вершина.

Для точек же, не лежащих на сторонах полюсного треугольника (и на их продолжениях), соответствие будет взаимно однозначным, т. е. каждой точке подвижной плоскости будет соответствовать единственная точка на неподвижной в качестве центра круга, проходящего через три положения взятой точки. Центр этот можно построить для заданной точки на подвижной

*) См. примечание на стр. 167.

плоскости, не находя остальных двух положений этой точки, но пользуясь только полным треугольником. Пусть, в самом деле, получен полюсный треугольник $P_{12}P_{23}P_{13}$ (фиг. 260) на неподвижной плоскости; построив точку $P_{12}^1P_{23}^1$ будем иметь полюсный треугольник $P_{12}P_{23}^1P_{13}$ на подвижной плоскости в её первом положении. Возьмём в подвижной плоскости точку M , не лежащую на сторонах полюсного треугольника $P_{12}P_{23}^1P_{13}$. Эта точка во втором положении



Фиг. 260.

будет находиться в точке M_2 , лежащей на прямой $P_{12}M_2$, образующей с $P_{12}M_1$ угол $M_2P_{12}M_1$, равный углу $P_{23}P_{12}P_{23}^1$ как углу поворота θ_{12} всей плоскости вокруг P_{12} из первого положения во второе. Центр O_M круга, проходящего через M_1 и M_2 , лежит на равноделящей угла $M_2P_{12}M_1$, а $P_{13}P_{13}$ есть равноделящая угла $P_{23}P_{12}P_{23}^1$; следовательно, $\angle M_1P_{12}O_M = \angle P_{23}P_{12}P_{23}^1$; а после вычитания общего угла $O_MP_{12}P_{13}$ получим:

$$\angle M_1P_{12}P_{13} = \angle O_MP_{12}P_{23}.$$

Иначе говоря, прямая $P_{12}O_M$ образует с $P_{12}P_{23}$ такой же угол, что и прямая $P_{12}M_1$ с $P_{12}P_{13}$.

Аналогично при P_{13} получим равенство:

$$\angle M_1P_{13}P_{12} = \angle O_MP_{13}P_{23}.$$

Эти соотношения и позволяют построить центр O_M по точке M_1 .

Для построения M_2 опустим $M_1M \perp P_{12}P_{13}$ и построим точку M , симметричную с M_1 относительно $P_{12}P_{13}$; тогда

$$\begin{aligned} \angle MP_{12}P_{13} &= \angle M_1P_{12}P_{13} = \angle O_MP_{12}P_{23} = \varphi, \\ \angle O_MP_{12}M_2 &= \angle P_{13}P_{12}P_{23} = \alpha_{12}; \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} \angle M_1MP_{13} &= 90^\circ - \varphi; \quad \angle MP_{12}P_{23} = \alpha_{12} - \varphi; \\ \angle M_2P_{12}P_{23} &= \alpha_{12} - \varphi = \angle MP_{12}P_{23}; \end{aligned}$$

последнее равенство указывает, что точка M симметрична с M_2 относительно $P_{12}P_{23}$. Аналогично получаем, что она симметрична с M_3 относительно $P_{13}P_{23}$.

Таким образом, для построения точек M_2 и M_3 по точке M_1 надо построить точку M , симметричную с M_1 относительно $P_{12}P_{13}$, а затем точки M_2 и M_3 , симметричные с M относительно $P_{12}P_{23}$ и $P_{13}P_{23}$ соответственно.

Из этого видно, что вместо задания трёх положений можно взять три произвольные точки и принять их за полюсы P_{12} , P_{23} , P_{13} ; тогда каждой точке M_1 подвижной плоскости в её положении E_1 будет соответствовать центр O_M круга, проходящего через три положения этой точки, и наоборот, каждая точка O_M неподвижной плоскости может быть принята за центр круга, проходящего через три положения M_1 , M_2 , M_3 определённой точки подвижной плоскости, причём в обоих случаях определяются и все три эти положения.

Произведённое построение O_M по M_1 , или наоборот, позволяет сделать следующие выводы.

Точкам луча подвижной плоскости, проходящего через вершину полюсного треугольника, соответствуют точки луча неподвижной плоскости, проходящего через ту же вершину; так как, кроме того, самой вершине соответствуют все точки противоположной стороны, то в совокупности прямой, проходящей через вершину полюсного треугольника, соответствует коническое сечение, распадающееся на пару прямых, одна из которых будет прямой, проходящая через ту же вершину, а другой — противоположная сторона треугольника. То же имеет место и для точек неподвижной плоскости.

Будем удалять точку M_1 в бесконечность по прямой, проходящей через один из полюсов, например P_{12} (фиг. 261); тогда центр O_M будет двигаться на основании сказанного по прямой, проходящей через тот же полюс P_{12} и образующей с $P_{12}P_{23}$ угол φ , равный углу $M_1P_{12}P_{13}$. Но, с другой стороны, угол $P_{23}P_{12}O_M$ всё время должен быть равен углу $M_1P_{12}P_{13}$; при удалении M_1 в бесконечность последний угол будет равен φ . Откладывая этот угол от $P_{12}P_{23}$, найдём центр O_∞ в пересечении этого луча с $P_{12}O_M$. Вследствие равенства углов $P_{23}P_{12}O_\infty$ и $P_{23}P_{12}O_M$ получаем, что четыре точки P_{12} , P_{23} , P_{13} и O_∞ лежат на одном круге. Итак, бесконечно удалённым точкам подвижной плоскости соответствуют точки круга, описанного вокруг полюсного треугольника.

Это значит, что при построении кулисного механизма, переводящего плоскость через три заданных положения, мы должны взять центр вращения кулисы на этом круге.

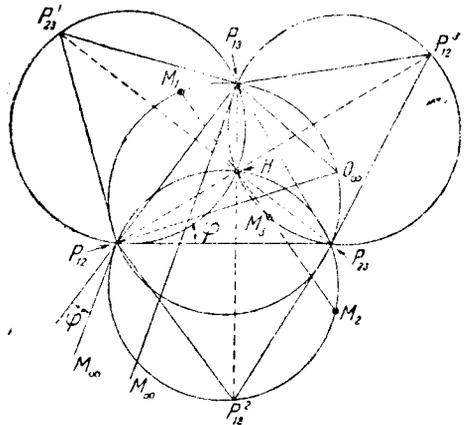
Наоборот, точкам круга, описанного вокруг полюсного треугольника $P_{12}P_{13}P_{23}$ на подвижной плоскости, соответствуют бесконечно удалённые центры на неподвижной. Это значит, что три положения каждой такой точки лежат на одной прямой. Итак, геометрическое место точек подвижной плоскости, тройки положений которых лежат на одной прямой, есть круг, описанный вокруг полюсного треугольника.

При построении кривошипно-шатунного механизма, переводящего плоскость через три заданных положения, мы должны взять центр шарнира, соединяющего шатун с ползуном, на этом круге.

Если мы возьмём на этом круге центры обоих шатунных шарниров, то получим механизм с двумя ползунами. Но мы знаем, что в этом механизме все точки некоторого круга описывают прямые и притом прямые, проходящие через одну и ту же точку. Этим кругом может быть только круг, описанный вокруг полюсного треугольника, так как только для точек этого круга тройки их положений лежат на одной прямой. Так как этот круг один и тот же во всех трёх положениях и так как он всегда проходит через точку пересечения всех прямолинейных траекторий, то все три круга, описанные вокруг полюсных треугольников $P_{12}P_{13}P_{23}^1$, $P_{12}P_{23}P_{13}^2$ и $P_{23}P_{12}P_{13}^3$, пересекаются в одной точке, которая является также точкой пересечения всех прямых, содержащих тройки положений точек этого круга. Эта точка может быть определена ещё иначе. Так как точка P_{23}^1 лежит на этом же круге, то она также движется по прямой, проходящей через ту же точку; но во втором и третьем положении эта точка займёт положение P_{23} , следовательно, прямая $P_{23}P_{23}^1$ проходит через ту же точку. Но прямая $P_{23}P_{23}^1 \perp P_{12}P_{13}$; то же имеет место и для прямых $P_{12}P_{12}^3$ и $P_{13}P_{13}^2$; поэтому общая точка пересечения всех прямых, содержащих тройки положений точек подвижной плоскости, совпадает с ортоцентром (точкой пересечения высот) полюсного треугольника на неподвижной плоскости.

На основании этого для построения двух остальных положений M_2 и M_3 точки M_1 достаточно эту точку M_1 соединить с ортоцентром H полюсного треугольника неподвижной плоскости и найти точки пересечения этой прямой с двумя другими положениями круга, описанного вокруг полюсного треугольника на подвижной плоскости.

Взяв на подвижной плоскости ряд точек на прямой, не проходящей ни через один полюс, мы найдём для них ряд центров на неподвижной плоскости, расположенных, однако, уже не на прямой, а на некоторой кривой, ко-



Фиг. 261.

торая, судя по двум приведённым выше частным случаям (пара прямых и круг), должна быть коническим сечением. Чтобы установить это, выразим аналитически найденное нами соответствие, например между точками M_3 и O_M .

Возьмём начало координат в полюсе P_{23} , а ось x направим по прямой $P_{23}P_{12}$ (фиг. 262). На основании указанной зависимости между углами получим:

$$\frac{y_M}{x_M} = \operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha); \quad \frac{y}{x} = -\operatorname{tg} \alpha;$$

$$\frac{y_M}{a_3 - x_M} = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \beta); \quad \frac{y}{a_3 - x} = -\operatorname{tg} \beta.$$

Исключая из первых двух уравнений угол α , а из последних — угол β , найдём:

$$\frac{\frac{y_M}{x_M} - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y_M y}{x_M x}} = \operatorname{tg} \alpha_1; \quad \frac{\frac{y_M}{a_3 - x_M} - \frac{y}{a_3 - x}}{1 + \frac{y_M y}{(a_3 - x_M)(a_3 - x)}} = \operatorname{tg} \alpha_2.$$

Решая эти уравнения относительно x_M, y_M и обозначая $\operatorname{tg} \alpha_1 = t_1, \operatorname{tg} \alpha_2 = t_2$, найдём:

$$\left. \begin{aligned} x_M &= \frac{a_3(x + t_1 y)(a_3 t_2 - t_2 x - y)}{(t_1 + t_2)(x^2 + y^2 - a_3 x - a_3 y \operatorname{ctg} \alpha_3)}, \\ y_M &= \frac{a_3(-t_1 x + y)(a_3 t_1 - t_1 x - y)}{(t_1 + t_2)(x^2 + y^2 - a_3 x - a_3 y \operatorname{ctg} \alpha_3)}. \end{aligned} \right\} \quad (131)$$

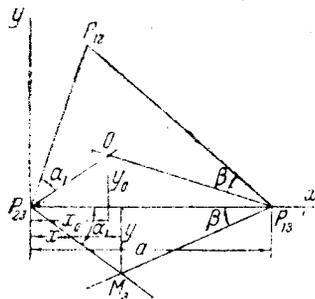
Из этих выражений видно, что прямой

$$Ax_M + By_M + C = 0$$

соответствует коническое сечение

$$a_3 [A(x + t_1 y) + B(t_1 x - y)](a_3 t_2 - t_2 x - y) + C(t_1 + t_2)(x^2 + y^2 - a_3 x - a_3 y \operatorname{ctg} \alpha_3) = 0.$$

То же имеет место и для обратного преобразования, т. е. прямой на подвижной плоскости будет соответствовать коническое сечение на неподвижной, так как в основные уравнения, дающие зависимость между x, y, x_M, y_M , эти величины входят одинаково. На этом основании соответствие называется квадратичным.



Фиг. 262.

Мы можем потребовать, чтобы длины вращающихся звеньев, соединённых шатунной плоскостью, имели заданную величину. Для этого надо поставить условием, чтобы расстояние $O_M M_3$ равнялось некоторой постоянной величине r , что аналитически можно выразить так:

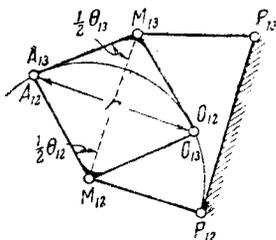
$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2. \quad (132)$$

Подставляя сюда выражения x_M и y_M через x и y , найдём уравнение геометрического места тех точек неподвижной плоскости, которые являются

центрами кругов заданного радиуса, проходящих через три положения соответствующих точек подвижной плоскости. Если неподвижные центры на двух кривых, построенных для двух заданных радиусов, мы получим требуемый шарнирный четырёхзвенник.

Выполняя указанную постановку, мы получим уравнение шестой степени, т. е. наше геометрическое место есть кривая шестого порядка; Альт называет её R_M -кривой. Соответствующие точки подвижной плоскости лежат на подобной же кривой шестого порядка, которую Альт называет R_1 -кривой (для первого положения).

Этим геометрическим местам можно дать кинематическое толкование. Построим для двух из трёх данных положений, например для 1 и 2, открытую кинематическую цепь $P_{12}M_{12}A_{12}O_{12}$ (фиг. 263), о которой было говорено выше, при $A_{12}O_{12} = r$; если теперь точку A_{12} вести по кривой R_1 , то точка O_{12} опишет кривую R_M . Но наши кривые должны относиться ко всем трём положениям. Поэтому построим аналогичную цепь для положений 1 и 3 в виде цепи $P_{13}M_{13}A_{13}O_{13}$, в которой $A_{13}O_{13} = r$, и соединим обе цепи так, чтобы $A_{12}O_{12}$ и $A_{13}O_{13}$ совпали. Тогда образуется шарнирный четырёхзвенник $P_{12}M_{12}M_{13}P_{13}$, точки шатуна которого A и O опишут требуемые места. Нетрудно найти положения этих точек на шатуне:



Фиг. 263.

следовательно:

$$\angle AM_{12}O = \theta_{12}, \quad \angle AM_{13}O = \theta_{13},$$

$$\angle AM_{12}M_{13} = \frac{1}{2}\theta_{12} = \angle P_{13}P_{12}P_{23},$$

$$\angle AM_{13}M_{12} = \frac{1}{2}\theta_{13} = \angle P_{12}P_{13}P_{23};$$

поэтому $\triangle AM_{12}M_{13} \sim \triangle P_{12}P_{13}P_{23}$, а так как $\triangle OM_{12}M_{13} = \triangle AM_{12}M_{13}$, то и $\triangle OM_{12}M_{13} \sim \triangle P_{12}P_{13}P_{23}$; высоты же этих треугольников равны каждая $\frac{r}{2}$.

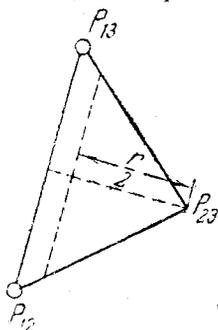
Итак, геометрическое место точек подвижной плоскости, тройки положений которых лежат на кругах заданного радиуса, а также геометрическое место центров этих кругов представляют шатунные кривые одного и того же шарнирного четырёхзвенника.

Для построения этого четырёхзвенника надо за основание его взять сторону полюсного треугольника $P_{12}P_{13}P_{23}$, затем на высоте его, опущенной на эту сторону, отложить от вершины половину заданного радиуса и провести параллель этой же стороне (фиг. 264); полученный треугольник будет шатунным треугольником, а вращающиеся звенья должны иметь радиусы, равные его боковым сторонам¹⁾.

Если бы мы при построении цепей исходили из полюсов P_{12} и P_{23} или P_{13} и P_{23} , то получили бы два других шарнирных четырёхзвенника, которые были бы дополнительными к первому согласно теореме Робертса-Чебышева.

Давая величине r различные значения, найдём, что её можно увеличивать до бесконечности, когда R_M -кривая обращается в круг, описанный вокруг полюсного треугольника, но уменьшать её можно лишь до известного предела.

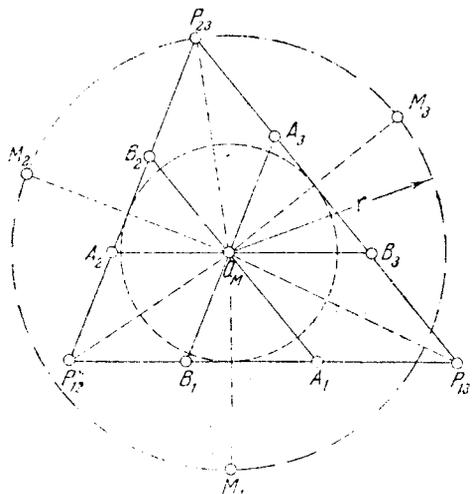
В самом деле, при уменьшении r кривая сокращается вместе с сокращением всех размеров четырёхзвенника, её образующего. Она обращается в точку, когда точки A_1 и B_1 (фиг. 265) лягут на $P_{12}P_{13}$; одновременно A_2 и B_2 лягут на $P_{23}P_{12}$, а A_3 и B_3 на $P_{23}P_{13}$. Так как фигуры $P_{23}B_2O_M A_3$, $P_{13}A_1O_M B_3$



Фиг. 264.

¹⁾ Черкудинов С. А.: цит. соч.; также Alt H.: Zur Synthese der ebenen Mechanismen, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 1921.

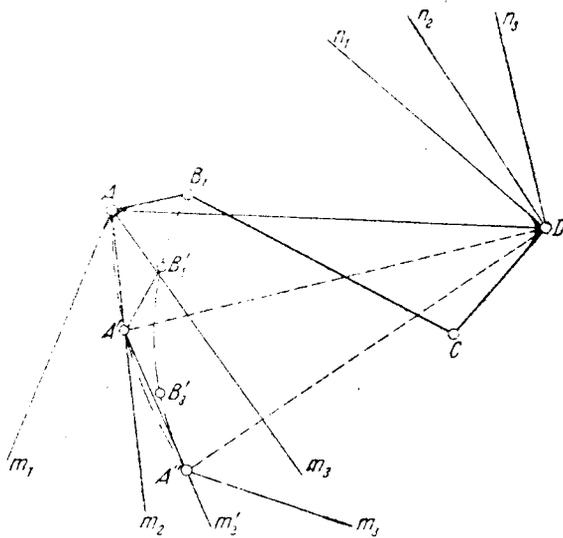
и $P_{12}A_2O_M B_1$ — ромбы, то в этом случае точка O_M лежит на равноделящих внутренних углов полюсного треугольника, т. е. является центром вписанного в него круга, а наименьший радиус равен удвоенному радиусу вписанного круга. Итак, существует наименьший круг, на котором лежит тройка положений точки подвижной плоскости; центр его совпадает с центром круга, вписанного в полюсный треугольник, а радиус его вдвое больше радиуса этого круга; соответствующая точка подвижной плоскости также находится в центре круга, вписанного в полюсный треугольник подвижной плоскости.



Фиг. 265.

вернём фигуру $n_2 D A m_2$ вокруг D до совпадения прямой $D n_2$ с $D n_1$, а фигуру $n_3 D A m_3$ — до совпадения $D n_3$ с $D n_1$. Таким образом, будем иметь три положения плоскости, определяемые точками A, A', A'' и прямыми $A m_1, A' m_2, A'' m_3$.

Для точек A, A', A'' уже имеется центр D . Второй центр можем получить, если возьмём в подвижной плоскости произвольную точку и для трёх её положений B_1, B_2, B_3 построим центр C круга, через них проходящего. Беря наугад такую точку, мы для соответствующего центра можем получить мало пригодное место. Поставим поэтому дополнительное условие, чтобы точка B_1 лежала на прямой $A m_1$, а точка C_1 — на прямой $D n_1$. Для выполнения этого требования возьмём на прямой $A m_1$ произвольную точку M_1 , найдём другие её положения M_2 и M_3 относительно $D n_1$ (фиг. 267) и посредством перпендикуляров построим как центр O_M круга, проходящего через M_1, M_2, M_3 , так и полюсы P_{12}, P_{13}, P_{23} . Тогда будем иметь пять точек: полюсы, центр O_M и центр D , — конического сечения, соответствующего пря-

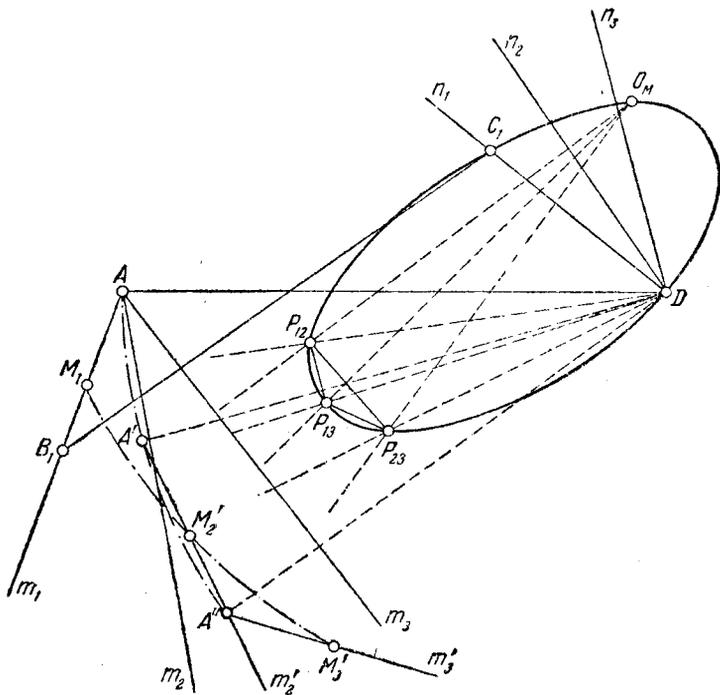


Фиг. 266.

моу конического сечения, соответствующего пря-

мой Am_1 в плоскости кривошипа; по пяти точкам, как будет указано ниже построим коническое сечение K и находим вторую точку C_1 пересечения его с Dn_1 — это и будет искомым центр шарнира. В результате получим требуемый четырёхзвенник AB_1C_1D ; это будет единственное решение поставленной задачи.

Для построения конического сечения по пяти его точкам, например P_{12} , P_{13} , P_{23} , O_M и D (фиг. 268), поступаем так. Находим точку K пересече-



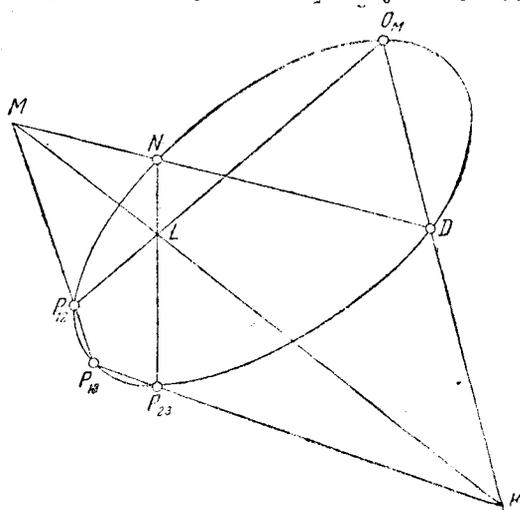
Фиг. 267.

ния прямых $P_{13}P_{23}$ и $O_M D$ и точку L пересечения прямой $P_{13}O_M$ с произвольной прямой, проходящей через точку P_{23} . Затем находим точку M пересечения прямых KL и $P_{13}P_{12}$ и соединяем её с D . Прямая DM пересечёт $P_{23}L$ в точке N конического сечения, проходящего через данные пять точек. Проводя через P_{23} другую произвольную прямую, найдём на ней таким же построением ещё одну точку конического сечения и т. д., пока не получим достаточное число точек для соединения их непрерывной линией. Если некоторые вспомогательные точки, например L и M , выйдут за пределы чертежа, то для дальнейшего построения можно взять другие уже найденные точки в соединении с данными в общем числе пяти или те же данные пять точек, но в другом порядке, например за точку K принять точку пересечения прямых $P_{12}P_{13}$ и $P_{23}D$, а прямые проводить из точки P_{13} и т. д.

Если поставить требование определённой длины шатуна, то для этой длины надо построить в плоскости кривошипа R_1 -кривую, а в плоскости коромысла — R_M -кривую. Подбирая соответственные точки этих кривых, найдём подходящие места для шатунных шарниров.

Передать вращение можно и при помощи кулисного механизма. Если кривошип вращается вокруг центра A , а кулиса должна проходить через постоянную точку D и трём положениям кривошипа Am_1 , Am_2 , Am_3 должны соответствовать положения кулисы Dn_1 , Dn_2 , Dn_3 , то поступаем так (фиг. 269).

Поворотом вокруг A совмещаем Am_2 и Am_3 с Am_1 , вследствие чего получаем точки D' , D'' и прямые $D'n'_2$, $D'n'_3$; центр круга, касающегося прямых Dn_1 ,



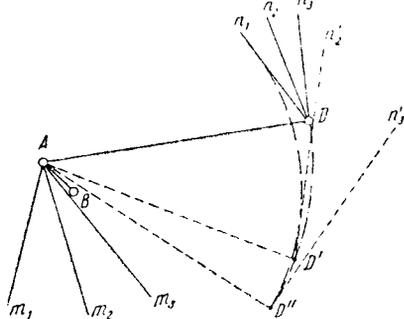
Фиг. 268.

определённому направлению, а полюсы P_{13} и P_{23} будут на конечном расстоянии один от другого. Полюсный треугольник обратится в полуполосу, ограниченную отрезком $P_{23}P_{13}$ и двумя параллелями из P_{23} и P_{13} в направлении полюса P_{12} . Если задана точка M_3 подвижной плоскости, то центр O_M найдётся обычным путём, т. е. откладыванием

$D'n'_2$, $D'n'_3$, и будет центром пальца кривошипа. Требуемый механизм показан на фиг. 270.

Для построения кривошипно-шатунного механизма по заданным трём положениям ползуна C_1 , C_2 , C_3 (фиг. 274) и соответствующим положениям кривошипа Am_1 , Am_2 , Am_3 находим по предыдущему точки C'_2 и C'_3 и определяем центр круга, проходящего через C_1 , C'_2 , C'_3 ; этот центр и будет искомым точкой B^*).

В заключение рассмотрим случай, когда два из трёх положений параллельны, т. е. переход из одного положения в другое может быть совершён поступательным движением. Пусть это будут положения E_1 и E_2 (фиг. 272), а E_3 не параллельно им; тогда полюс P_{12} удалится в бесконечность по определённому направлению, а полюсы P_{13} и P_{23} будут на конечном расстоянии один от другого. Полюсный треугольник обратится в полуполосу, ограниченную отрезком $P_{23}P_{13}$ и двумя параллелями из P_{23} и P_{13} в направлении полюса P_{12} . Если задана точка M_3 подвижной плоскости, то центр O_M найдётся обычным путём, т. е. откладыванием угла $P_{12}P_{23}O_M$, равного углу $P_{13}P_{23}M_3$, и угла $P_{12}P_{13}O_M$, равного углу $P_{23}P_{13}M_3$. Положение M_1 найдётся, если построить M , симметричную с M_3 относительно $P_{23}P_{13}$, а затем M_1 , симметричную с M относительно $P_{13}P_{12}$; так же получается и точка M_2 . От-



Фиг. 269.



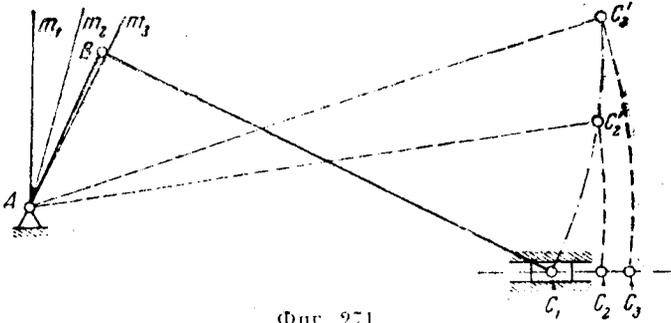
Фиг. 270.

сюда видно, что точки M_1 и M_2 лежат на перпендикуляре к $P_{23}P_{12}$ и $P_{13}P_{12}$, а центр O_M — на параллели к этим прямым в расстоянии от $P_{23}P_{13}$, равном расстоянию M_1 от $P_{13}P_{12}$, и в расстоянии от $P_{13}P_{12}$, равном расстоянию M_2 от $P_{23}P_{12}$. Таким образом, если задана точка M_1 , то для построения центра O_M с одной стороны откладываем угол $P_{23}P_{13}O_M$, равный углу $P_{12}P_{13}M_1$, а с другой — проводим прямую O_MP_{12} , параллельную $P_{23}P_{12}$ на расстоянии от $P_{23}P_{12}$, равном расстоянию M_1 от $P_{13}P_{12}$.

Вместо круга, описанного вокруг полюсного треугольника, получаем прямую $P_{23}P_{13}$ в совокупности с бесконечно удалённой прямой; так как последняя

*) Применение кулисного и кривошипно-шатунного механизмов указывается здесь впервые.

не имеет физического значения, то геометрическим местом центров вращений прямых подвижной плоскости будет полюсная прямая $P_{23}P_{13}$, и наоборот,



Фиг. 271.

геометрическим местом точек подвижной плоскости, тройки положений которых лежат на одной прямой, будет прямая $P_{13}P_{23}$.

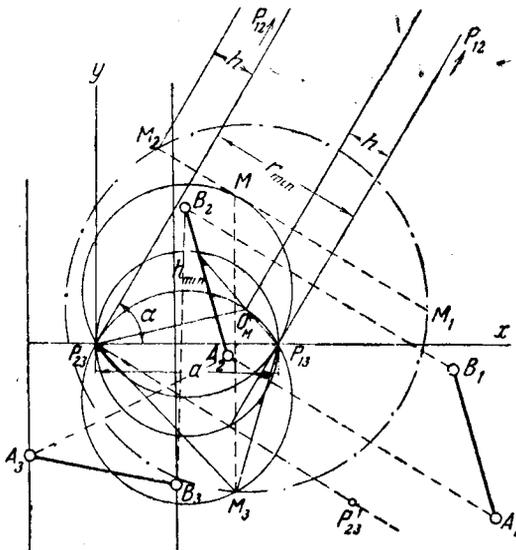
Если учесть, что

$$t_1 + t_2 = 0, \quad (t_1 + t_2) \operatorname{ctg} \alpha_{12} = -(1 + t_1^2) = -\frac{1}{\cos^2 \alpha},$$

то формулы преобразования (3) получают вид:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{y} (x - t_1 y) (y - at_1 + t_1 x) \cos^2 \alpha, \\ y_0 &= \frac{1}{y} (y + t_1 x) (y - at_1 + t_1 x) \cos^2 \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (131')$$

Из этих формул видно, что соответствие остаётся квадратичным, т. е. прямой в одной плоскости соответствует коническое сечение в другой. В дан-



Фиг. 272.

ном случае оно будет гиперболой, проходящей через P_{23} и P_{13} , с асимптотами, из которых одна параллельна $P_{13}P_{12}$; если взята прямая, параллельная $P_{13}P_{12}$,

гипербола распадается на пару прямых, одна из которых есть полюсная прямая $P_{23}P_{13}$, а другая параллельна $P_{13}P_{12}$.

Найдём еще R_1 -кривые и R_M -кривые для этого случая. Подставляя в (132) значения x_M и y_M из (131'), получим после упрощений уравнение:

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + a^2 - 2ax) \sin^2 \alpha = r^2 y^2,$$

т. е. уравнение четвёртой степени. Раскрывая скобки и вводя параметр

$$b^2 = \frac{r^2}{\sin^2 \alpha} - a^2,$$

дадим уравнению вид:

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 - b^2 y^2 = 0,$$

или

$$(x^2 + y^2 - ax + by)(x^2 + y^2 - ax - by) = 0, \quad (133)$$

т. е. кривая распадается на два круга, проходящих через полюсы P_{23} и P_{13} (в третьем положении плоскости). Нетрудно убедиться, что

$$\angle P_{23}O_M P_{13} + \angle P_{23}M_3 P_{13} = 180^\circ;$$

в самом деле,

$$\angle P_{23}O_M P_{13} = 180^\circ - (\angle O_M P_{23} P_{13} + \angle O_M P_{13} P_{23}),$$

а

$$\angle P_{23}M_3 P_{13} = 180^\circ - (\angle M_3 P_{23} P_{13} + \angle M_3 P_{13} P_{23});$$

но

$$\angle M_3 P_{23} P_{13} = \angle P_{12} P_{23} O_M,$$

а

$$\angle M_3 P_{13} P_{23} = \angle P_{12} P_{13} O_M;$$

поэтому

$$\begin{aligned} \angle P_{23}O_M P_{13} + \angle P_{23}M_3 P_{13} &= 360^\circ - (\angle O_M P_{23} P_{13} + \angle P_{12} P_{23} O_M) - \\ &\quad - (\angle O_M P_{13} P_{23} + \angle P_{12} P_{13} O_M) = 360^\circ - \alpha - (180^\circ - \alpha) = 180^\circ. \end{aligned}$$

Это значит, что точка O_M лежит на том же круге, что и точка M_3 , именно — на круге, проходящем через P_{23} и P_{13} ; если этот круг есть один из кругов, на которые распадается кривая R_3 , т. е. точка M_3 удовлетворяет требованию заданного радиуса r , то и точка O_M лежит на этом же круге. Отсюда следует, что кривые R_M и R_3 совпадают.

Кривые же R_1 и R_2 будут построены на хордах $P_{23}^1 P_{13}$ и $P_{23}^2 P_{13}$, как кривая R_3 построена на хорде $P_{23} P_{13}$. Кругу, вписанному в полюсный треугольник, здесь соответствует круг, касающийся параллельных $P_{23} P_{12}$ и $P_{13} P_{12}$ и прямой $P_{23} P_{13}$; его диаметр равен расстоянию между этими параллельными, следовательно, это расстояние и будет наименьшим возможным радиусом r , т. е.

$$r_{\min} = a \sin \alpha,$$

откуда

$$b_{\min} = 0,$$

т. е. оба круга кривой R_M совпадают. Таким образом, здесь при r_{\min} получается не одна точка, как в общем случае, а круг, имеющий диаметром $P_{23} P_{13}$; все точки этого круга обладают требуемым свойством быть центрами кругов наименьшего радиуса, проходящего через тройки положений соответствующих точек подвижной плоскости, причём в третьем положении эти точки лежат на том же круге.

§ 40. Синтез четырёхзвенных механизмов по четырём заданным положениям звеньев.

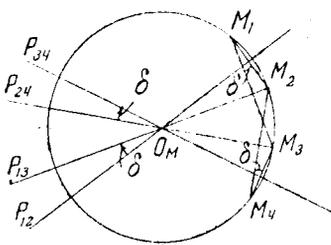
Для четырёх положений подвижной плоскости E_1, E_2, E_3, E_4 существуют шесть полюсов конечного перемещения: $P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{23}, P_{24}, P_{34}$. Если мы хотим, чтобы эта плоскость была шатуновой плоскостью некоторого шарнирного четырёхзвенника, то мы уже не можем, как в предыдущем случае, взять произвольно ни одного центра шарнира на этой плоскости, потому что четыре положения какой-либо точки, вообще говоря, могут не оказаться на одном

круге. Попробуем разыскать такие точки, если они вообще существуют. Рассмотрим для этого три положения из четырёх, например E_1, E_2, E_3 , и возьмём в подвижной плоскости какую-либо прямую; мы знаем, что на неподвижной плоскости ей будет соответствовать коническое сечение, проходящее через полюсы P_{12}, P_{13}, P_{23} . Возьмём далее другие три положения, например E_1, E_2, E_4 ; для этих трёх положений той же прямой подвижной плоскости будет соответствовать уже другое коническое сечение, проходящее через полюсы P_{12}, P_{14}, P_{24} . Эти два конических сечения, имея уже одну общую точку P_{12} , непременно пересекутся ещё по крайней мере в одной точке, но не более чем в трёх, так как общее число точек пересечения двух конических сечений не может быть более четырёх, среди которых может оказаться одна или две пары мнимых; совпадающие точки (в случае касания) будем считать раздельно. Этим точкам пересечения конических сечений будут соответствовать на взятой прямой столько же точек, обладающих требуемым свойством; в самом деле, для каждой такой точки три её положения M_1, M_2, M_3 лежат на одном круге и три её положения M_1, M_2, M_4 лежат тоже на одном круге; круги эти должны быть тождественны, так как у них общий центр, именно — точка пересечения конических сечений, соответствующая взятой точке, и две общие точки M_1, M_2 . Этим доказано не только существование точек, четвёрки положений которых лежат на одном круге, но и определено число таких точек на произвольной прямой. Таким образом, на подвижной плоскости существует геометрическое место точек, четвёрки положений которых лежат на одном круге, и это геометрическое место есть кривая третьего порядка.

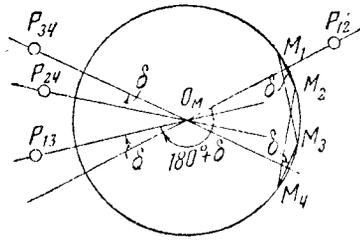
Эту кривую Бурместер назвал кривой круговых точек. Центры этих кругов образуют на неподвижной плоскости кривую центров. Если обратить движение, то на основании таких же соображений, которые приведены выше, найдём, что и эта кривая будет третьего порядка.

Нетрудно усмотреть, что в плоскости E_1 кривая проходит через все шесть полюсов $P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{23}, P_{24}, P_{34}$, так как для каждой из этих точек четыре положения сводятся к трём (например $P_{12}, P_{12}, P_{12}^2, P_{12}^3$) и поэтому всегда лежат на одном круге. Путём обращения движения найдём, что кривая центров проходит через все шесть полюсов на неподвижной плоскости: $P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{23}, P_{24}, P_{34}$.

Можно было бы построить эти кривые, взяв ряд прямых на плоскости E_1 и находя на каждой прямой точки, удовлетворяющие поставленному условию, при помощи конических сечений. Однако, это выходит очень громоздко. Они могут быть построены значительно проще на основании следующего их



Фиг. 273а.



Фиг. 273б.

основного свойства. Пусть точки M_1, M_2, M_3, M_4 (фиг. 273а) представляют четыре положения точки подвижной плоскости, лежащие на одном круге. Центр этого круга O_M лежит на перпендикуляре, восставленном из середины $M_1 M_2$; но на этом же перпендикуляре лежит и полюс P_{12} . Центр O_M лежит также на перпендикуляре, восставленном из середины $M_3 M_4$; но на этом же перпендикуляре лежит и полюс P_{34} . Поэтому при расположении полюсов, показанном на чертеже, угол $P_{12} O_M P_{34}$ равен углу $M_2 M_1 M_3$; при другом расположении (фиг. 273б) эти углы дают в сумме 180° . Таким же образом найдём, что либо $\angle P_{24} O_M P_{13} = \angle M_2 M_1 M_3$, либо сумма этих углов

равна 180° . Но углы $M_2M_1M_3$ и $M_2M_4M_3$ равны, как вписанные, а потому либо $\angle P_{12}O_M P_{13} = \angle P_{24}O_M P_{34}$, либо $\angle P_{12}O_M P_{13} + \angle P_{24}O_M P_{34} = 180^\circ$.

Если же брать не абсолютные величины углов, а отсчитывать их в одном и том же направлении, например по часовой стрелке, от лучей, идущих к полюсам с одной и той же цифрой в индексе, например в нашем случае с цифрой 2, то вместо последнего равенства надо написать:

$$\angle P_{12}O_M P_{13} = \angle P_{24}O_M P_{34} + 180^\circ.$$

Возможно ещё и иное расположение точек M на круге (фиг. 273с), когда

$$\angle M_2M_1M_3 + \angle M_2M_4M_3 = 180^\circ,$$

но если и здесь принять приведённое выше условие, то вместо этого равенства надо опять написать:

$$\angle M_2M_4M_3 = \angle M_2M_1M_3 + 180^\circ.$$

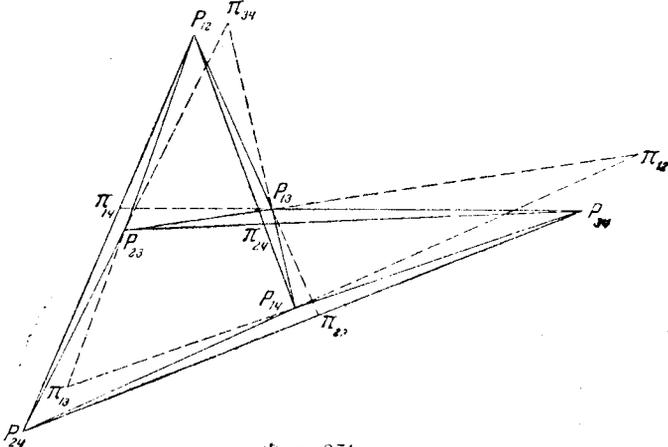
При указанном расположении полюсов получим:

$$\angle P_{24}O_M P_{34} = \angle P_{12}O_M P_{13} + 180^\circ.$$

Фиг. 273с.

Итак, центр O_M обладает тем свойством, что две пары полюсов $P_{12}P_{13}$ и $P_{24}P_{34}$ видны из него либо под равными углами, либо под углами, отличающимися один от другого на 180° . Поэтому кривая центров есть геометрическое место точек, из которых две пары противоположностей видны либо под равными углами, либо под углами, отличающимися один от другого на 180° .

«Противоположностями» здесь названы такие полюсы, индексы которых не содержат одинаковых цифр; в нашем случае P_{12} и P_{34} являются противоположностями, равно как и P_{13} и P_{24} ; но могут быть взяты также противоположности P_{12} , P_{34} и P_{14} , P_{23} или P_{13} , P_{24} и P_{14} , P_{23} .



Фиг. 274.

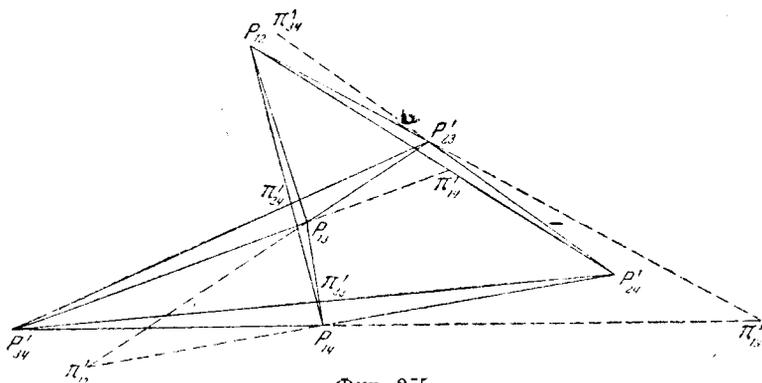
Найдём точку пересечения прямых $P_{13}P_{23}$ и $P_{14}P_{24}$; пусть это будет точка π_{12} (фиг. 274). Из неё отрезки $P_{13}P_{23}$ и $P_{14}P_{24}$ видны под углами, равными нулю, следовательно, она лежит на кривой центров. Из точки π_{34} эти отрезки видны под совпадающими углами; следовательно, и эта точка лежит на кривой центров. Из точки π_{14} отрезок $P_{13}P_{34}$ виден под углом нуль, а отрезок $P_{12}P_{24}$ — под углом 180° , следовательно, и эта точка лежит на той же кривой. Точно так же установим, что кривая проходит через точку π_{13}

пересечения прямых $P_{12}P_{23}$ и $P_{14}P_{34}$ через точку π_{23} пересечения прямых $P_{12}P_{13}$ и $P_{24}P_{34}$ и, наконец, через точку π_{24} пересечения прямых $P_{12}P_{14}$ и $P_{23}P_{34}$.

Таким образом, на неподвижной плоскости имеем для кривой центров 12 точек — шесть полюсов и шесть точек пересечения полюсных прямых.

На подвижной плоскости для кривой круговых точек также имеем 12 точек.

Для положения E_1 это будут шесть полюсов $P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{23}, P_{24}, P_{34}$ и шесть точек пересечения полюсных прямых $\pi_{12}, \pi_{13}, \pi_{14}, \pi_{23}, \pi_{24}, \pi_{34}$ (фиг. 275).



Фиг. 275.

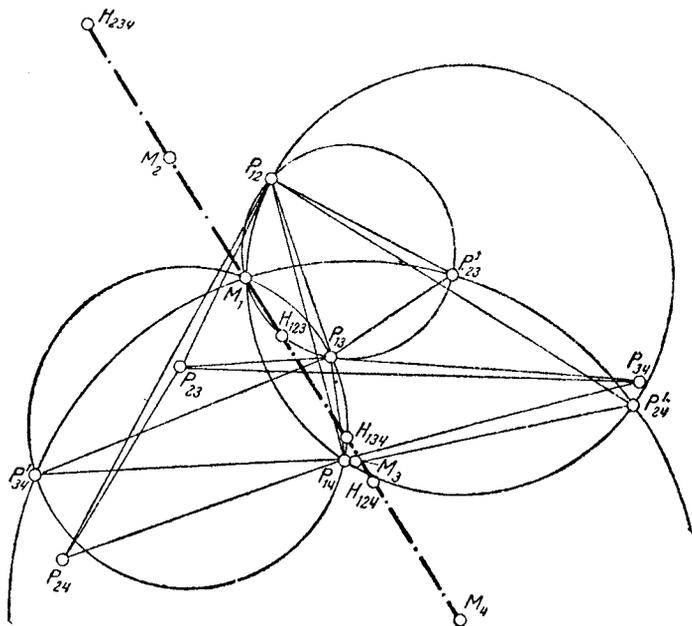
Найденные 12 точек каждой кривой находятся во взаимном соответствии, а именно: точка P_{12} есть вершина двух полюсных треугольников $P_{12}P_{13}P_{23}$ и $P_{12}P_{14}P_{24}$; поэтому на E_1 ей соответствует прямая $P_{13}P_{23}$ для системы 123 и прямая $P_{14}P_{24}$ для системы 124; следовательно, для системы 1234 ей соответствует точка π_{12} пересечения этих прямых. Аналогично найдём, что точке P_{13} соответствует точка π_{13} , точке P_{14} — точка π_{14} , точке P_{23} — точка π_{23} , точке P_{24} — точка π_{24} и точке P_{34} — точка π_{34} . Точка π_{12} , как лежащая на сторонах полюсных треугольников $P_{12}P_{13}P_{23}$ и $P_{12}P_{14}P_{24}$, имеет себе соответствующую в противоположной вершине, т. е. в точке P_{24} . Аналогично для точки π_{13} найдём соответствующую в точке P_{13} и для точки π_{14} — в точке P_{14} . Для точки π_{23} , как лежащей на сторонах полюсных треугольников $P_{12}P_{13}P_{23}$ и $P_{23}P_{24}P_{34}$, соответствующая точка находится в противоположной вершине, т. е. в P_{24} . Аналогично для точек π_{24} и π_{34} найдём соответствующие точки в P_{24} и в P_{34} 1).

Определяя обе кривые Бурместера как геометрические места точек, из которых две пары противоположных видны под углами, либо равными, либо отличающимися один от другого на 180° , находим, что эти кривые тождественны с геометрическим местом двойных точек шатунных кривых для положения шарнирного четырёхзвенника, центры шарниров которого находятся во взятых парах противоположных. Отсюда следует, что эти кривые могут быть построены указанным там способом (см. § 26).

Возьмём опять три положения из четырёх заданных, например E_1, E_2, E_3 ; точки круга, описанного вокруг полюсного треугольника $P_{12}P_{13}P_{23}$ (фиг. 276), имеют тройки положений на одной прямой, проходящей через ортоцентр H_{123} полюсного треугольника $P_{12}P_{13}P_{23}$.

1) Alt H.: Beziehungen zwischen Punkten der Mittelpunkt- und Kreispunktkurve, Maschinenbau, Juli 1936.

Для других трёх положений, например E_1, E_2, E_4 , найдём на круге, описанном вокруг полюсного треугольника $P_{12}P_{14}P_{24}^1$, точки, тройки положений которых лежат также на одной прямой, проходящей через ортоцентр H_{124} полюсного треугольника $P_{12}P_{14}P_{24}$. Точка M_1 пересечения этих кругов имеет остальные три свои положения M_2, M_3, M_4 на одной прямой, проходящей через оба ортоцентра. Таким образом, как точка подвижной плоскости, так и прямая на неподвижной, на которой лежат все четыре положения этой точки,



Фиг. 276.

вполне определены. Мы могли бы взять ещё два других полюсных треугольника $P_{13}P_{14}P_{34}^1$ и $P_{23}P_{34}P_{24}^1$ и нашли бы, что круги, описанные вокруг них, пересекаются в той же точке M_1 , а ортоцентры треугольников $P_{13}P_{14}P_{34}$ и $P_{23}P_{34}P_{24}$ лежат на той же прямой. Итак, в подвижной плоскости существует одна и только одна точка, именно — точка пересечения кругов, описанных вокруг четырёх полюсных треугольников, четвёрка положений которой лежит на одной прямой, именно — на прямой, проходящей через ортоцентры всех четырёх полюсных треугольников неподвижной плоскости.

Наоборот, если мы хотим на неподвижной плоскости найти точку, через которую проходит прямая подвижной плоскости в четырёх заданных положениях, то мы найдём её в точке пересечения кругов, описанных вокруг полюсных треугольников

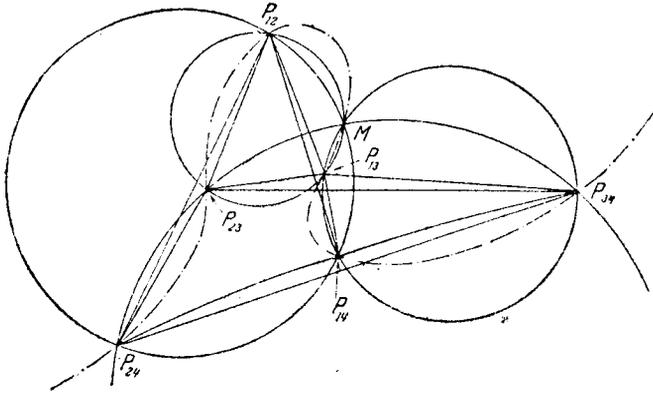
$$P_{12}P_{13}P_{23}, P_{12}P_{14}P_{24}, P_{13}P_{14}P_{34} \text{ и } P_{23}P_{24}P_{34}$$

(фиг. 277), а прямая подвижной плоскости окажется прямой, проходящей через ортоцентры полюсных треугольников $P_{12}P_{13}P_{23}^1, P_{12}P_{14}P_{24}^1, P_{13}P_{14}P_{34}^1$ и $P_{23}P_{24}P_{34}^1$.

Следовательно, в подвижной плоскости существует одна и только одна прямая, именно — прямая, проходящая через ортоцентры полюсных треугольников, четвёрки положений которой проходят через одну точку неподвижной плоскости, именно — точку пересечения кругов, описанных вокруг полюсных треугольников.

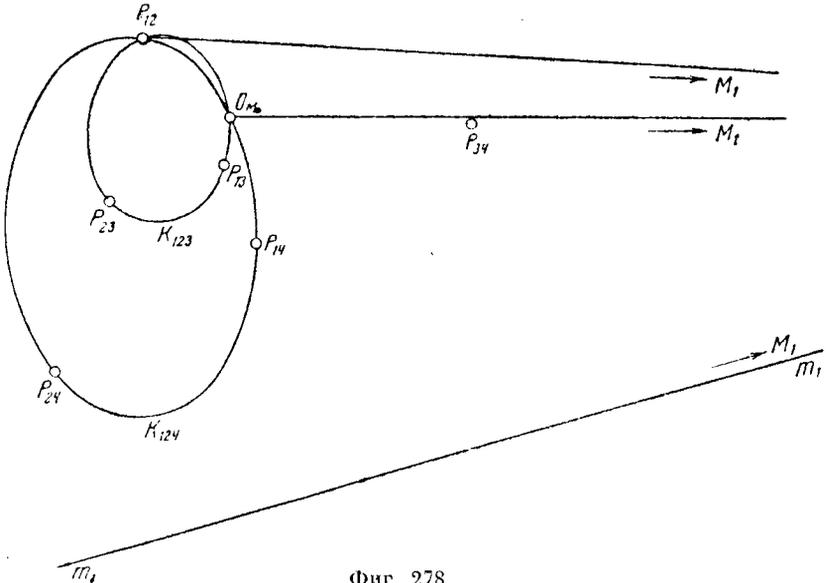
Для получения шарнирного четырёхзвенника, переводящего своим шатуном подвижную плоскость через четыре заданных положения, можно применить один из следующих способов.

Во-первых, можно задаться в подвижной плоскости прямою m_1m_1 и построить по ней два конических сечения k_{123} и k_{124} (фиг. 278), которые кроме



Фиг. 277.

полюса P_{12} имеют ещё по крайней мере одну общую точку; таковой оказалась в нашем случае точка O_M , которая и должна быть принята за неподвижный центр вращения. Соответствующая ей точка M_1 подвижной плоскости, в которой должен быть помещён центр шатунной головки, лежит на взятой прямой m_1m_1 и в нашем случае оказалась за пределами чертежа. Задаваясь

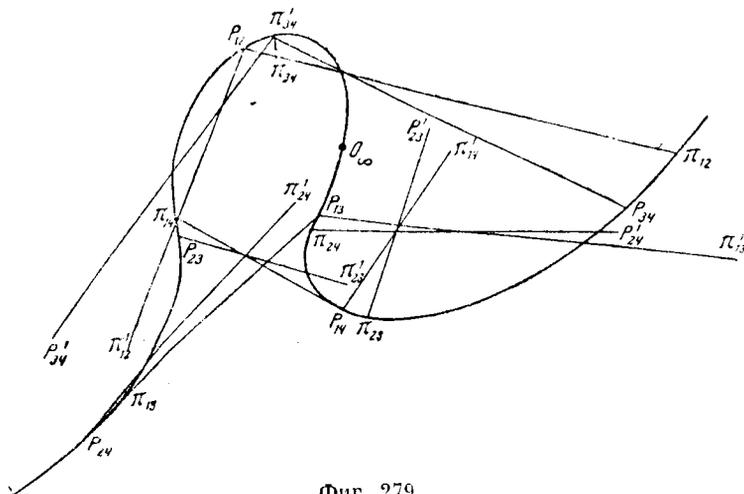


Фиг. 278.

различными прямыми, можно получить на них нужные точки и выбрать две наиболее подходящие для конструирования механизма.

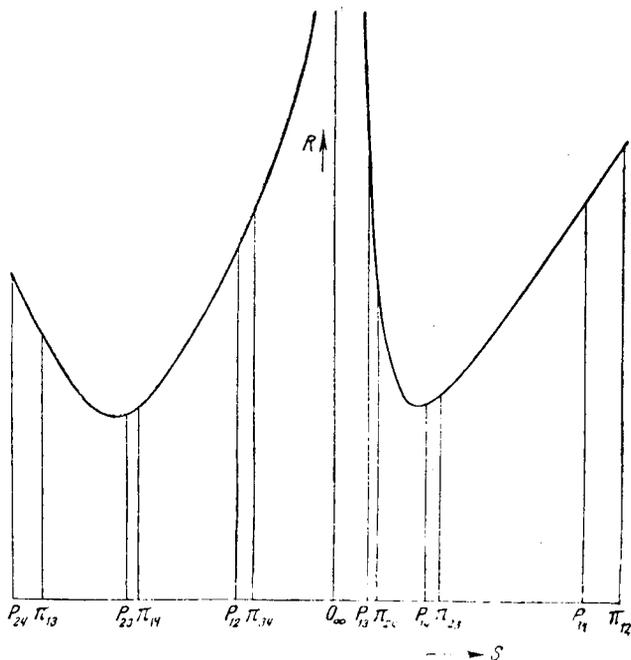
Во-вторых, можно построить одну из кривых Бурместера, например на подвижной плоскости, и взять на ней две произвольные точки, которые и будут двумя центрами шарниров; пара других центров получится построением соответствующих точек на неподвижной плоскости. Для того, чтобы выбрать

наиболее подходящие места для этих центров, целесообразно поступить так. Предположим, что мы построили кривую Бурместера на неподвижной пло-



Фиг. 279.

скости (фиг. 279); отметим на ней 12 точек: P_{12} , P_{13} , P_{14} , P_{23} , P_{24} , P_{34} , π_{12} , π_{13} , π_{14} , π_{23} , π_{24} , π_{34} и 13-ю — O_∞ , соответствующую бесконечно удаленной



Фиг. 280.

точке подвижной плоскости; кроме этой последней будем иметь на подвижной плоскости 12 точек, соответствующих отмеченным точкам на неподвижной плоскости. Эти 12 пар точек определяют 12 радиусов вращения; 13-й будет бесконечно велик. Построим теперь по этим данным диаграмму зависимости ра-

дуга R от длины дуги кривой (фиг. 280); давая наглядное представление о величинах радиусов в разных точках кривой. Эта диаграмма позволит выбрать область этой кривой, наиболее подходящую для постановки шарниров. По ней можно, например, выбрать наименьшие возможные радиусы, если взять точки вблизи полюса P_{23} и P_{14} .

В-третьих, можно задаться радиусами вращающихся звеньев и построить по этим радиусам R_M -кривые для трёх положений, например E_1, E_2, E_3 ; точки пересечения этих кривых с кривой Бурместера дадут искомые центры. Так как R_M -кривая имеет в полюсах P_{12}, P_{13}, P_{23} двойные точки, то в этих точках надо считать всего шесть точек пересечения с кривой Бурместера, которые и надо вычесть из $6 \times 3 = 18$ точек пересечения кривых. Кроме того, надо вычесть те шесть точек, которых недостаёт из общего числа точек пересечения R_M -кривой с любым кругом. В результате получим не более шести действительных точек пересечения R_M -кривой с кривой Бурместера. Они называются точками Альта.

Вместо четырёхшарнирного механизма можно построить кривошипно-шатунный. Для этого надо только найти точку, четвёртого положения которой лежит на одной прямой, и принять её за центр шарнира, соединяющего шатун с ползуном; центр другого шарнира найдётся одним из указанных выше трёх способов.

Можно также построить для той же цели кулисный механизм, который получится обращением кривошипно-шатунного, построенного для четырёх положений неподвижной плоскости относительно одного из положений подвижной.

Механизм с двумя поступательными парами на одном звене построить нельзя вследствие существования лишь одной точки, удовлетворяющей поставленному требованию. Но можно построить механизм с чередующимися поступательными и вращательными парами, если как для заданного движения, так и для обратённого, найти по одной такой точке; точки эти и будут центрами двух вращательных пар, а прямые их четвёрок — направлениями поступательных пар.

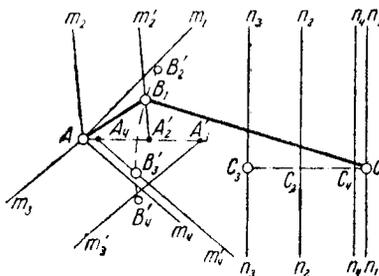
При передаче вращения между параллельными осями посредством шатуна можно потребовать соответствия между четырьмя положениями обоих вращающихся звеньев. Пусть, например, положения одного звена заданы прямыми Am_1, Am_2, Am_3, Am_4 , а соответствующие положения другого — прямыми Dn_1, Dn_2, Dn_3, Dn_4 (фиг. 281). Найдём относительные положения первого звена по отношению к третьему положению второго, как было указано для трёх положений, в результате чего получим четыре положения, определяемых точками A, A_1, A_2, A_4 и прямыми $Am_3, A_1m_1', A_2m_2', A_4m_4'$. Для точек A, A_1, A_2, A_4 имеем центр D . Вторым центром получим одним из указанных выше трёх способов. Находим в плоскости Am_3 точку будет шарниром B_3 , а центр круга, проходящего через B_3, B_1, B_2, B_4 — шарниром C_3 .

Фиг. 281.

Если задаться длиной шатуна BC , то построение ведётся по третьему способу.

Для передачи вращения при помощи кулисного механизма поступаем так же, но точкой B_1 будет единственная точка, четвёрка положений которой относительно кулисы лежит на одной прямой, а эта прямая будет направлением поступательной пары.

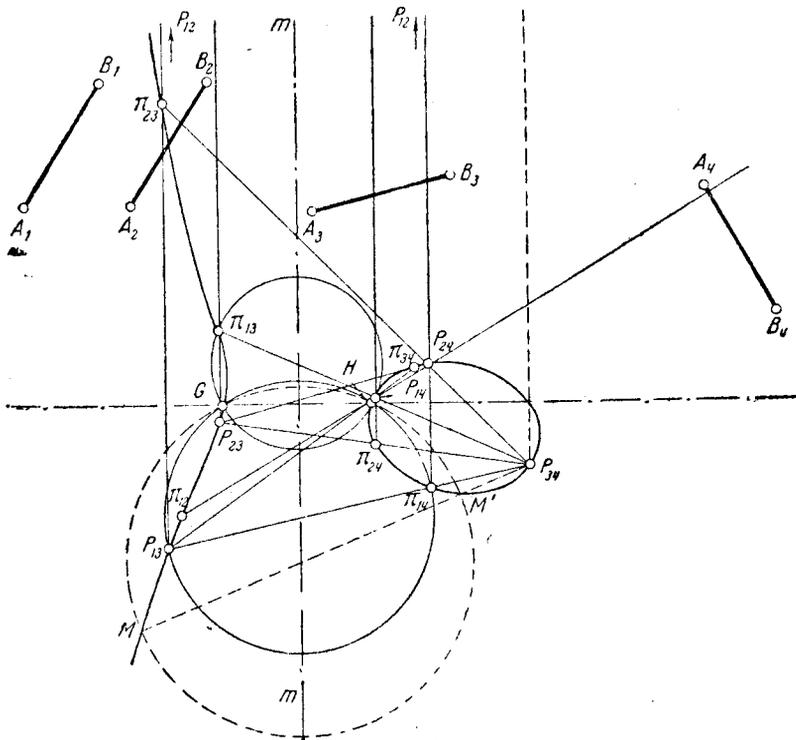
Если требуется преобразовать вращательное движение в поступательное, то четыре положения ползуна задать нельзя, по можно задать четыре параллели $n_1n_1, n_2n_2, n_3n_3, n_4n_4$ для этих положений (фиг. 282) и центр вращения с четырьмя соответствующими лучами. Поступая по-предыдущему, найдём четыре положения вращающегося звена $Am_1, A'm'_2, A''m'_3, A'''m'_4$ относительно прямой n_1n_1 и определяем на этой прямой точку C_1 , как центр круга, проходящего через четвёрку B_1, B'_2, B'_3, B'_4 .



Фиг. 282.

Рассмотрим случай параллельности двух положений, например E_1 и E_2 из четырёх (фиг. 283), вследствие чего полюс P_{12} удалится в бесконечность по направлению, перпендикулярному к поступательному перемещению $E_1 - E_2$. Остальные

полюсы и точки пересечения полюсных прямых найдутся обычным путём. Для построения кривой Бурместера полюс P_{12} не может быть исполь-



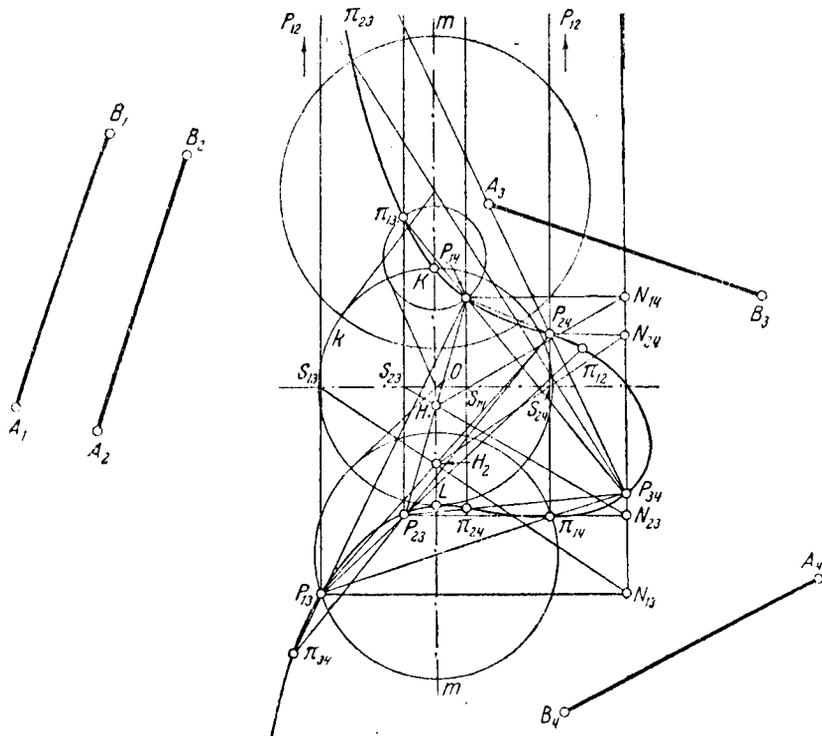
Фиг. 283.

зован, но мы можем взять пару противоположных полюсов $P_{13}P_{24}$ и $P_{14}P_{23}$ для этой цели. Однако, в данном случае мы поступим иначе. Обратим внимание на то, что расстояние между прямыми $P_{13}P_{12}$ и $P_{23}P_{12}$ равно расстоянию между

прямыми $P_{14}P_{12}$ и $P_{24}P_{12}$, что представляет следствие равенства углов $P_{13}P_{12}P_{23}$ и $P_{14}P_{12}P_{24}$ при удалении P_{12} в бесконечность; из этого равенства вытекает также равенство расстояний между прямыми $P_{13}P_{12} - P_{14}P_{12}$ и $P_{23}P_{12} - P_{24}P_{12}$. Поэтому средняя линия mn делит пополам расстояния $P_{24}P_{23}$, $P_{14}P_{13}$, $P_{23}P_{24}$ и $P_{13}P_{14}$ на лучах, выходящих из полюса P_{34} . Кроме того, окружности, построенные на этих отрезках, как на диаметрах, все пересекаются в двух точках G и H , симметричных относительно mn , образуя таким образом пучок. Применяя теперь для точек G , H и P_{23} построение, приведенное нами для нахождения второй кривой третьего порядка, определяющей точки самоприкосновения шатунных кривых (см. § 26), мы получим кривую третьего порядка, проходящую через точки P_{34} , P_{24} , P_{23} , P_{14} , P_{13} , P_{23} , P_{24} , P_{13} и P_{14} , т. е. через девять точек кривой Бурместера. Но всякая кривая третьего порядка вполне определяется девятью точками, поэтому построенная таким образом кривая и будет кривой Бурместера. Точки G и H также будут лежать на кривой.

Точки G и H могут слиться в одну, т. е. круги, построенные указанным выше образом, будут иметь общую точку касания, которая в этом случае будет лежать на прямой mn и будет двойной точкой кривой Бурместера; построения не приводим, так как оно ничем не отличается от предыдущего.

Может, однако, случиться, что круги не пересекутся вовсе, так что при построении нельзя будет опереться на точки G и H . Тем не менее и в этом

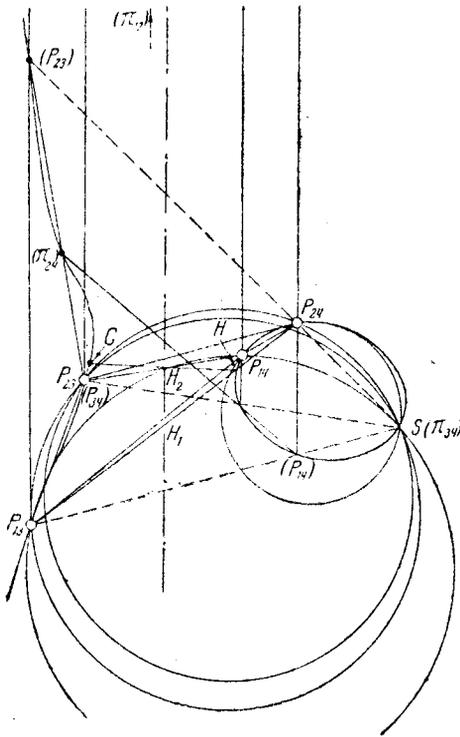


Фиг. 284.

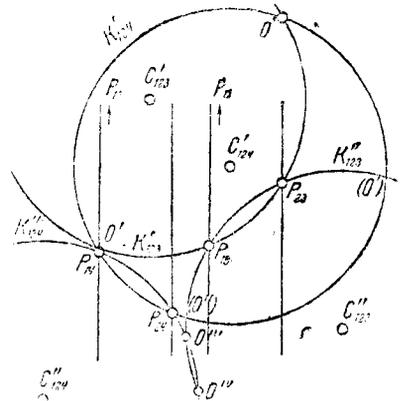
случае можно построить пучок кругов с общими мнимыми точками пересечения, что производится следующим образом. Пусть круги, построенные на диаметрах $P_{14}P_{13}$ и $P_{13}P_{14}$, не пересекаются (фиг. 284). Тогда для определения общей хорды этих кругов, которая будет действительной прямой, как пределом круга с центром на mn в бесконечности, опустим из P_{13} , P_{23} , P_{24} и P_{14} перпендикуляры на $P_{34}P_{12}$ и основания их N_{13} , N_{23} , N_{24} и N_{14} соединим с точками H_1 и H_2 пересечения прямых $P_{13}P_{24}$ и $P_{14}P_{23}$ с mn ; пересечение этих прямых с

прямыми $P_{13}P_{12}$, $P_{23}P_{12}$, $P_{14}P_{12}$ и $P_{24}P_{12}$ соответственно даст четыре точки S_{13} , S_{23} , S_{14} и S_{24} искомой хорды. Затем из точки O пересечения этой прямой с mn проводим касательные к кругам, которые окажутся равными, и радиусом этих касательных опишем круг. Теперь, взяв на mn произвольную точку C и приняв её за центр круга пучка, проводим из неё касательную к кругу k и этим радиусом описываем круг пучка; пересечение его с лучом $P_{24}C$ даст точки кривой Бурместера. Точки K и L пересечения круга K с mn также лежат на этой кривой.

Отметим кстати интересный факт. Кривая Бурместера, как мы знаем, определяется вполне двумя парами противоположных, например $P_{13}P_{24}$, $P_{14}P_{23}$; для остальных двух полюсов получается лишь требование лежать на этой кривой, т. е. кривая Бурместера представляет геометрическое место двух остальных полюсов, если заданы две пары противоположных. Взяв произвольно пятый полюс на кривой, мы получим вполне определённую точку на этой же кривой для шестого полюса. Выбирая для пятого полюса различные точки, мы будем иметь дело, конечно, с различными четвёрками положений подвижной плоскости, но для всех этих четвёрок кривая Бурместера будет одна и та же. В частности, взяв пятый полюс в бесконечности, мы получим его противоположное в центре лучей, дающих приведённое выше построение. Но так как эта же кривая годится и для другого положения пятого полюса, то и построение это может быть применено в общем случае, когда ни один полюс не удалится в бесконечность. — Надо лишь определить среднюю линию, общую хорду и центр пучка лучей. Средняя линия mn определяется просто как прямая, проходящая через середины H_1 и H_2 диагоналей полюсного четырёхугольника $P_{13}P_{14}P_{24}P_{23}$. Затем определяем центр пучка лучей как точку S пересечения кругов, описанных вокруг треугольников $P_{14}P_{24}P_{23}$, $P_{14}P_{12}P_{13}$, $P_{23}P_{24}P_{12}$ и $P_{13}P_{23}P_{24}$ (фиг. 285). Если эту точку принять за полюс P , то получим распределение полюсов, как на фиг. 283. Но можно здесь поставить точку π_{34} ; тогда полюсы придёт переименовывать, как показано в скобках на фиг. 285. После этого общая хорда определяется, как указано выше.



Фиг. 285.



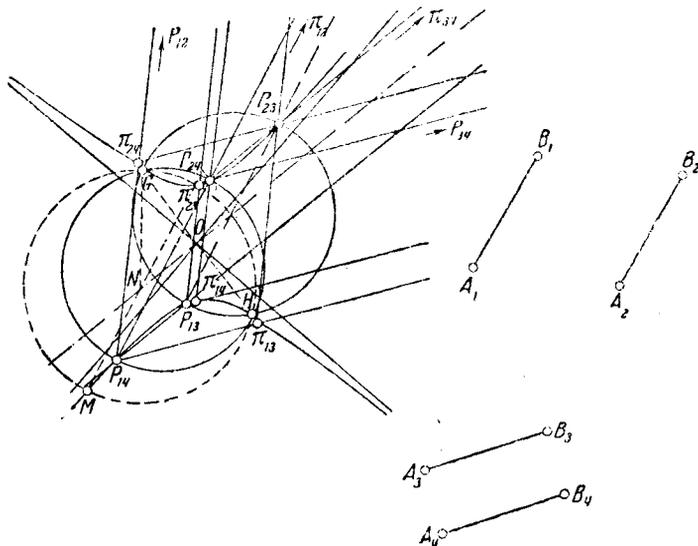
Фиг. 286.

общем случае, но проще построить две R_M -кривые для E_1, E_2, E_3 и E_1, E_2, E_4 при параллельных E_1 и E_2 , так как в этом случае такими кривыми служат

пары кругов k'_{123} , k''_{123} и k'_{124} , k''_{124} (фиг. 286). Точки O' и O'' пересечения кругов k'_{123} и k'_{124} равно как O''' и O''' кругов k''_{123} и k''_{124} будут искомыми центрами. Так как они должны лежать на кривой Бурместера, то углы, под которыми из них видны отрезки $P_{13}P_{23}$ и $P_{14}P_{24}$, должны быть либо равны, либо давать в сумме 180° ; поэтому точки (O') и (O'') пересечения кругов k'_{124} и k''_{124} равно как кругов k'_{123} и k''_{124} (если бы они были действительными), как не удовлетворяющие этому условию, не годятся для центров.

Этими же кругами можно воспользоваться и для построения кривой Бурместера, задавая различные значения радиуса для R_M -кривых; однако, вряд ли это построение выйдет проще указанных раньше.

Рассмотрим ещё случай, когда четыре положения попарно параллельны, например $E_1 \parallel E_2$ и $E_3 \parallel E_4$ (фиг. 287), вследствие чего как полюсы P_{12} , так и полюсы P_{34} удаляются в бесконечность¹⁾. Если поступательные перемеще-



Фиг. 287.

ния E_1-E_2 и E_3-E_4 имеют разные направления, то прямая $P_{12}P_{34}$ будет бесконечно удалённой прямой, случай же одинакового направления этих перемещений рассмотрим особо.

Как и в предыдущем случае, расстояние между параллелями $P_{14}P_{12}$ и $P_{24}P_{12}$ равно расстоянию между параллелями $P_{13}P_{12}$ и $P_{23}P_{12}$, по из тех же соображений расстояние между параллелями $P_{23}P_{34}$ и $P_{24}P_{34}$ равно расстоянию между параллелями $P_{13}P_{34}$ и $P_{14}P_{34}$. В силу этого полюсы P_{14} , P_{24} , P_{23} и P_{13} являются вершинами параллелограмма; отсюда следует, что и точки τ_{12} и τ_{34} уходят в бесконечность по направлению сторон этого параллелограмма. Таким образом, для кривой Бурместера имеет четыре бесконечно удалённые точки P_{12} , P_{34} , τ_{12} и τ_{34} ; для кривой третьего порядка это возможно лишь в том случае, когда она распадается на бесконечно удалённую прямую, содержащую все эти четыре точки, и коническое сечение. Последнее может быть построено по способу лучей и средней линии. На чертеже за центр лучей принята точка τ_{12} , следовательно, имеем здесь пучок лучей, параллельных большим сторонам параллелограмма $P_{14}P_{24}P_{23}P_{13}$; тогда средней линией будет прямая, проведённая от центра O этого параллелограмма параллельно меньшим его сторонам.

¹⁾ A lt H.: Die Mittelpunktkurve und die Kreispunktkurve in dem Sonderfall bei dem vier Lagen einer Ebene paarweise parallel sind, Maschinenbau, Februar 1937.

Вследствие такого выбора окружности, построенные на больших сторонах, как на диаметрах, пересекутся в действительных точках G и H , центрах пучка кругов.

Для суждения о характере конического сечения примем центр O за начало координат, а оси координат (косугольные) направим по прямым $O\pi_{12}$ и $O\pi_{34}$: тогда

$$MN^2 = y_M^2 = GN^2 = ON^2 + OG^2 = x_M^2 + OG^2,$$

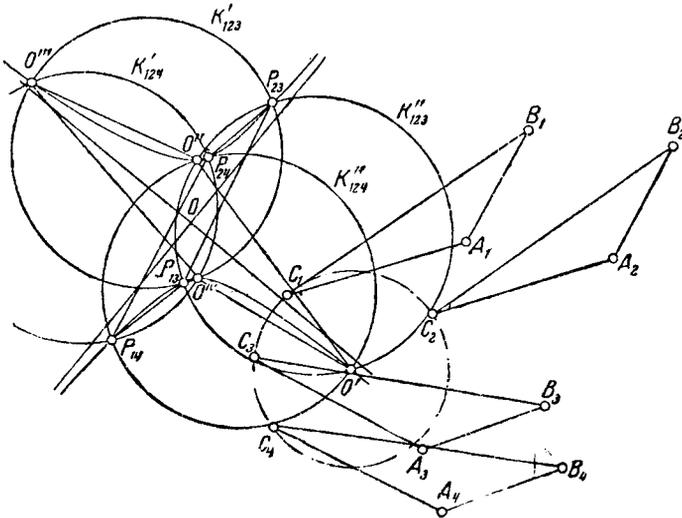
следовательно,

$$y_M^2 - x_M^2 = OG^2 = \text{const.},$$

т. е. наше коническое сечение представляет равностороннюю гиперболу, отнесённую к сопряжённым диаметрам и имеющую асимптотами прямые, равноделящие углы $\pi_{12}O\pi_{34}$. Зная асимптоты и ряд точек P_{14} , P_{13} , P_{24} , P_{23} , π_{14} , π_{13} , π_{24} и π_{23} , можно построить и остальные точки, не прибегая к окружностям.

Построенной кривой Бурместера на неподвижной плоскости соответствует кривая Бурместера на подвижной плоскости тоже в виде гиперболы, в основе которой лежит параллелограмм $P_{13}P_{14}P_{23}P_{24}$; построение это не представит затруднений, поэтому мы его здесь и не приводим. Расстояние между соответственными точками кривых Бурместера дадут, как всегда, радиусы вращения звеньев.

Вместо выбора точек на кривых Бурместера можно задаться радиусами и построить R_M -кривые Альта в виде двух пар кругов на противоположных сторонах полюсного параллелограмма. Следует и здесь взять большие стороны, чтобы получать действительные точки пересечения соответствующих кругов k'_{123} и k'_{124} с одной стороны и k''_{123} и k''_{124} — с другой (фиг. 288); центры соответствующих кругов надо брать с одной и той же стороны обеих параллелей,



Фиг. 288.

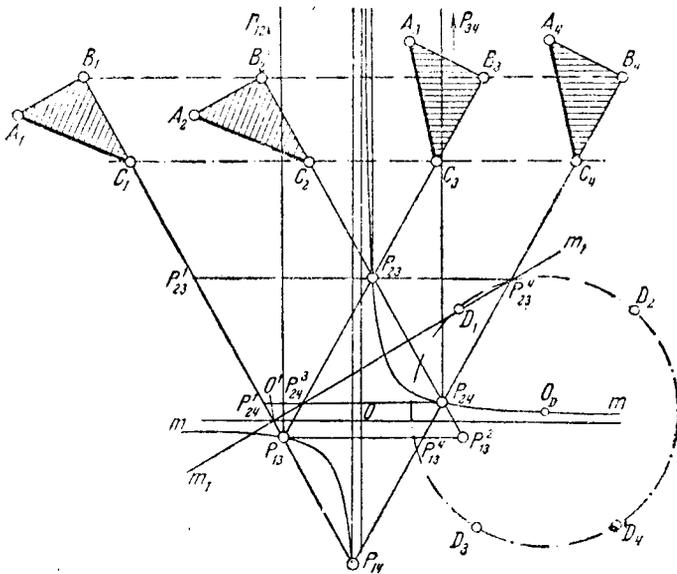
в результате чего получим всего четыре точки, имеющие заданный радиус. На чертеже эти точки обозначены через O' , O'' , O''' и OIV ; они находятся в вершинах параллелограмма с центром в O и со сторонами, перпендикулярными сторонам полюсного параллелограмма; они, конечно, должны лежать на упомянутой выше гиперболе. Отсюда следует, что, взяв на этой гиперболе произвольную точку, мы можем построить остальные три точки, имеющие тот же радиус, если построим симметричную с данной точкой относительно центра O , а затем проведём из этих точек прямые, перпендикулярные к сторонам полюс-

ного параллелограмма. Из этих четырёх точек следует выбрать ту, которая будет наиболее пригодна для помещения в ней неподвижного центра; на чертеже показана для этой цели точка O' и построены четыре положения точки C подвижной плоскости C_1, C_2, C_3, C_4 , лежащие на окружности заданного радиуса.

Для получения точек с наименьшим радиусом надо построить круги на $P_{14}P_{24}$ и $P_{13}P_{23}$, как на диаметрах; две точки их пересечения дадут искомые центры; это будут точки G и H .

Для получения точек подвижной плоскости, четвёрки положений которых лежат на одной прямой, надо, как мы знаем, построить прямую ортоцентров полюсных треугольников; но в нашем случае одной из вершин этих треугольников непременно окажется либо P_{12} , либо P_{34} , вследствие чего прямая ортоцентров вся удалится в бесконечность. Поэтому в рассматриваемом случае не существует таких точек, четвёрки которых лежали бы на одной прямой, следовательно, не существует и кривошипно-шатунного механизма, переносящего своим шатуном подвижную плоскость через четыре заданных положения, попарно-параллельных.

Посмотрим, однако, при каких условиях такой механизм всё же существует. С этой целью зададим четыре положения точки C на одной прямой



Фиг. 289.

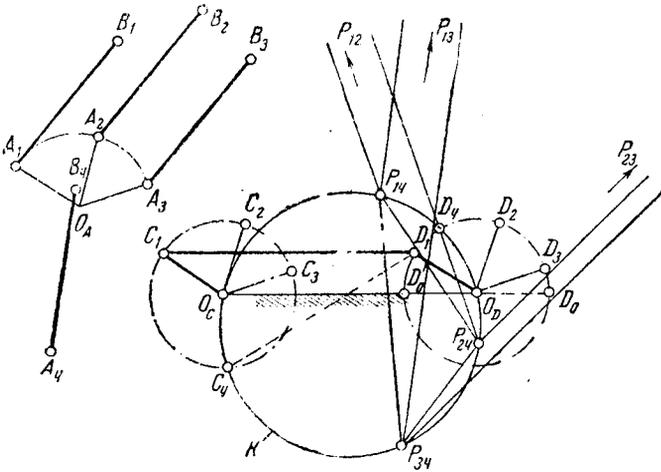
(фиг. 289) и наметим соответствующие положения подвижной плоскости, взяв ещё одну произвольную точку A_1 в первом положении и построив её остальные положения A_2, A_3 и A_4 , наблюдая параллельность $A_2C_2 \parallel A_1C_1$ и $A_4C_4 \parallel A_3C_3$. При построении полюсов обращаем прежде всего внимание на то, что полюсы P_{12} и P_{34} удаляются в бесконечность в одном и том же направлении и перпендикулярно к заданной прямой. Остальные четыре полюса образуют параллелограмм $P_{13}P_{23}P_{24}P_{14}$, стороны которого $P_{13}P_{23}$ и $P_{23}P_{24}$ симметричны относительно $P_{23}P_{12}$, а стороны $P_{13}P_{14}$ и $P_{14}P_{24}$ симметричны относительно $P_{14}P_{12}$. Вследствие этого кривая Бурместера будет здесь гиперболой m , одна из асимптот которой направлена к P_{12} , а другая параллельна заданной прямой. Построим кривую Бурместера на подвижной плоскости в первом положении. Для этого берём отрезок $P_{23}P_{24}$ в плоскости E_2 и переносим его в E_1 ; так как этот перенос есть параллельное перемещение на величину C_2C_1 , то точки P_{23}^1 и P_{24}^1 лягут на полюсную прямую $P_{13}P_{14}$, следовательно, полюсный

параллелограмм здесь обратится в эту же прямую $P_{13}P_{23}^1P_{24}^1P_{14}$, а центр его O' будет в середине $P_{13}P_{24}^1$, или, что всё равно, — в середине $P_{23}^1P_{14}$. Так как четыре точки кривой Бурместера оказались на одной прямой, то гипербола распалась на эту прямую и прямую m_1 , перпендикулярную к ней в точке O' . Только точки второй прямой соответствуют точкам гиперболы m , т. е. четвёрки положений этих точек, например D , лежат на одной окружности с центром на гиперболе. Точки же полюсной прямой $P_{13}P_{14}$ все соответствуют бесконечно удалённой точке неподвижной плоскости, именно полюсам P_{12} и P_{34} . Иначе говоря, полюсная прямая $P_{13}P_{14}$ есть геометрическое место точек, четвёрки положений которых лежат на одной прямой.

Таким образом, при удалении полюсов P_{12} и P_{34} в бесконечность в одном и том же направлении существует бесчисленное множество кривошипно-шатунных механизмов, шатунная плоскость которых проходит через четыре заданных попарно-параллельных положения.

Центр вращения кривошипа должен быть взят на определённой выше гиперболе, а линия движения центра ползуниного шарнира должна быть взята перпендикулярной к направлению полюсов P_{12} и P_{34} .

Рассмотрим, наконец, случай, когда из четырёх заданных положений три параллельны, например $E_1 \parallel E_2 \parallel E_3$ (фиг. 290), вследствие чего три полюса



Фиг. 290.

P_{12} , P_{13} , P_{23} удаляются в бесконечность. Если поступательные перемещения $E_1 - E_2$ и $E_2 - E_3$ не совпадают, то P_{12} и P_{23} уходят в разных направлениях; но в этом случае и перемещение $E_1 - E_3$ не совпадает ни с одним из первых двух, а потому и полюс P_{13} уходит в третьем направлении. Точки π_{12} , π_{13} и π_{23} , как лежащие на бесконечно удалённой прямой $P_{12}P_{23}P_{13}$, также находятся в бесконечности. Имея шесть точек в бесконечности, кривая Бурместера распадается на бесконечно удалённую прямую и коническое сечение. Для суждения о характере этого конического сечения обратим внимание на то, что оно, как и всякая кривая Бурместера, есть геометрическое место точек, из которых две пары противоположностей видны под равными углами. Взяв противоположности $P_{12}P_{34}$ и $P_{13}P_{24}$, получим для какой-либо точки O_M кривой

$$\angle P_{12}O_MP_{13} = \angle P_{24}O_MP_{34};$$

но угол $P_{12}O_M P_{13} = \text{const.}$ вследствие постоянства направлений $O_M P_{12}$ и $O_M P_{13}$, поэтому и $\angle P_{24}O_M P_{34} = \text{const.}$ Последнее соотношение показывает, что точка O_M лежит на круге, проходящем через полюсы P_{24} и P_{34} ; но этот круг в качестве кривой Бурместера должен проходить и через третий полюс P_{14} ; что можно доказать и непосредственно, взяв противоположные P_{12}, P_{34} и P_{14}, P_{23} и написав

$$\angle P_{12}O_M P_{23} = \text{const.} = \angle P_{14}O_M P_{34}.$$

что означает, что точка O_M лежит на круге, проходящем через P_{14} и P_{34} . Таким образом, в этом случае кривая центров есть круг, описанный вокруг полюсного треугольника $P_{14}P_{24}P_{34}$.

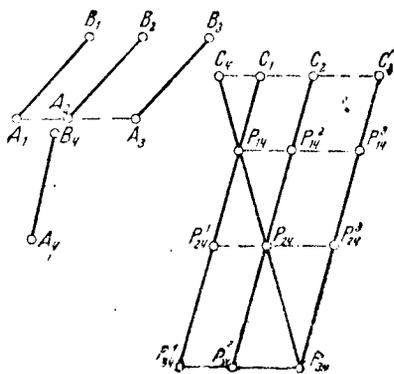
Совершенно так же докажем, что кривая круговых точек есть круг, описанный вокруг полюсного треугольника в подвижной плоскости; для E_4 полюсным треугольником будет тот же треугольник $P_{14}P_{24}P_{34}$, следовательно, в этом положении обе кривые совпадают. Построение таких же кругов в трёх других положениях не представляет затруднений.

Круг, описанный вокруг полюсного треугольника $P_{14}P_{24}P_{34}$, как проходящий через полюсы P_{14} и P_{24} , можно считать одним из кругов, образующих R_M -кривую для положений E_1, E_2, E_4 ; но так как он проходит также через пару полюсов P_{14} и P_{34} , то его надо считать в числе кругов R_M -кривой для положений E_1, E_2, E_4 ; по той же причине он имеет такое же значение для положений E_2, E_3, E_4 . Иначе говоря, все круги четвёрки положений точек подвижной плоскости имеют одинаковые радиусы.

Радиус этих кругов может быть получен как радиус круга, проходящего через A_1, A_2, A_3 или B_1, B_2, B_3 и т. д., так как положения $E_1 \parallel E_2 \parallel E_3$. Поэтому для получения шарнирного четырёхзвенника, переводящего шатунную плоскость через четыре заданных положения, достаточно взять на круге, описанном вокруг полюсного треугольника $P_{14}P_{24}P_{34}$, две любые точки и описать из них, как из центров, круги, равные кругу, проходящему через первые три положения любой точки плоскости. Если взять, например, точки A_1, A_2, A_3 и найти центр O_A круга, через них проходящего, то из O_C и O_D на круге k надо провести $O_C C_1 \parallel O_A A_1, O_C C_2 \parallel O_A A_2, O_C C_3 \parallel O_A A_3$, а также $O_D D_1 \parallel O_A A_1, O_D D_2 \parallel O_A A_2, O_D D_3 \parallel O_A A_3$; шарнирный параллелограмм $O_C C D O_D$ будет тем механизмом, который переведёт шатун через три заданных параллельных положения $E_1 \parallel E_2 \parallel E_3$. Что же касается четвёртого положения E_4 и D_4 , то они являются точками пересечения кругов $C_1 C_2 C_3$ и $D_1 D_2 D_3$ с кругом k . Равенство $C_4 D_4 = C_1 D_1 = C_2 D_2 = C_3 D_3$ должно служить проверкой. Если при этом окажется, что точки D_1, D_2, D_3 и D_4 лягут по одну сторону линии центров $O_C O_D$, а точка C_4 этой линией отделится от точек C_1, C_2, C_3 , то для достижения этого положения $C_4 D_4$ параллелограмм должен перейти в антипараллелограмм $O_C C_4 D_4 O_D$ при переходе через предельное положение $O_C C O_D O_D$. Этот случай и показан на чертеже. При другом расположении точек C и D не получается требуемого механизма.

Если поступательные перемещения $E_1 - E_2 - E_3$ совпадают, то три положения какой-либо точки A подвижной плоскости находятся на одной прямой (фиг. 291), и любой круг четвёрки обращается в прямую. Полюсный треугольник $P_{14}P_{24}P_{34}$ обращается в прямую, которая и представляет геометрическое место точек подвижной плоскости, четвёрки положений которых лежат на одной прямой. Все эти прямые параллельны $A_1 A_2 A_3$. Точек же, четвёрки положений которых лежали бы на круге, в этом случае не существует вовсе.

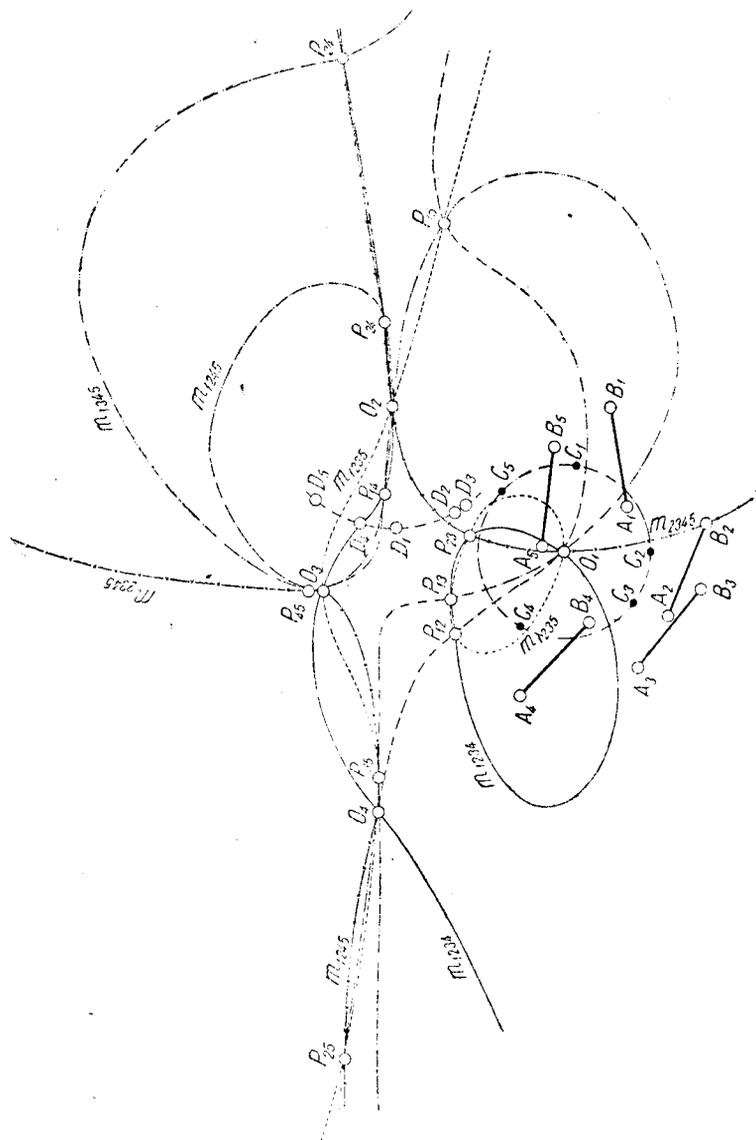
В силу этого не существует четырёхзвенника, осуществляющего заданные перемещения.



Фиг. 291.

§ 41. Синтез четырёхзвенных механизмов по пяти заданным положениям звеньев.

При пяти положениях подвижной плоскости E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 имеем 10 полюсов: $P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{15}, P_{23}, P_{24}, P_{25}, P_{34}, P_{35}, P_{45}$ (фиг. 292). Для опре-



Фиг. 292.

деления тех точек, пятёрки положений которых лежат на одном круге, и центра этого круга возьмём из пяти положений только четыре, например E_1, E_2, E_3, E_4 , и построим для них на неподвижной плоскости кривую Бурместера m_{1234} . Затем для другой комбинации из четырёх положений, например E_1, E_2, E_3, E_5 , построим другую кривую Бурместера: m_{1235} . Обе кривые про-

ходят через полюсы P_{12}, P_{18}, P_{23} ; но эти точки не могут быть приняты за центры кругов пятёрок, так как остальные комбинации четырёх положений дают кривые Бурместера, вообще говоря, не проходящие через эти полюсы. Так, для E_1, E_2, E_4, E_5 найдём только один полюс P_{12} , общий с двумя первыми кривыми; но он не будет лежать на кривых для положений E_1, E_3, E_4, E_5 и E_2, E_3, E_4, E_5 . Таким образом, через каждый полюс пройдут только три кривые Бурместера из пяти возможных. Остаётся искать другие точки пересечения, общие всем пяти кривым; на чертеже их оказалось четыре: O_1, O_2, O_3, O_4 , которые и могут быть приняты за центры искоемых кругов. Найдя на подвижной плоскости соответствующие им точки, получим возможность построить шарнирный четырёхзвённый, проводящий своим шатуном подвижную плоскость через заданные пять положений; на чертеже показаны точки C и D , пятёрки положений которых лежат на кругах с центрами O_1 и O_2 соответственно. Найденные точки называются точками Бурместера. Их может быть вообще не больше четырёх (действительных).

Чтобы доказать это, выразим аналитически основное свойство точек Бурместера, как лежащих на всех кривых Бурместера: из каждой точки Бурместера две пары противоположностей видны под углами, равными или отличающимися один от другого на 180° . Так, для точки Бурместера O_1 будем иметь:

$$\angle P_{12}O_1P_{23} = \angle P_{14}O_1P_{34}$$

как для точки, лежащей на m_{1234} ; но для m_{1235} получим:

$$\angle P_{12}O_1P_{23} + 180^\circ = \angle P_{15}O_1P_{35};$$

отсюда следует также

$$\angle P_{14}O_1P_{34} + 180^\circ = \angle P_{15}O_1P_{35},$$

что соответствует прохождению m_{1245} через ту же точку O_1 . Но разница в углах на 180° не изменяет функции тангенса. Поэтому можно написать равенство тангенсов углов $P_{12}O_1P_{23}, P_{14}O_1P_{34}$ и $P_{15}O_1P_{35}$:

$$\frac{y - y_{12}}{x - x_{12}} \cdot \frac{y - y_{23}}{x - x_{23}} = \frac{y - y_{14}}{x - x_{14}} \cdot \frac{y - y_{34}}{x - x_{34}} = \frac{y - y_{15}}{x - x_{15}} \cdot \frac{y - y_{35}}{x - x_{35}},$$

$$1 + \frac{(y - y_{12})(y - y_{23})}{(x - x_{12})(x - x_{23})} = 1 + \frac{(y - y_{14})(y - y_{34})}{(x - x_{14})(x - x_{34})} = 1 + \frac{(y - y_{15})(y - y_{35})}{(x - x_{15})(x - x_{35})},$$

или после преобразований:

$$\frac{(y_{23} - y_{12})x + (x_{12} - x_{23})y + x_{23}y_{12} - x_{12}y_{23}}{x^2 + y^2 - (x_{12} + x_{23})x - (y_{12} + y_{23})y + x_{12}x_{23} + y_{12}y_{23}} =$$

$$= \frac{(y_{34} - y_{14})x + (x_{14} - x_{34})y + x_{34}y_{14} - x_{14}y_{34}}{x^2 + y^2 - (x_{14} + x_{34})x - (y_{14} + y_{34})y + x_{14}x_{34} + y_{14}y_{34}} =$$

$$= \frac{(y_{35} - y_{15})x + (x_{15} - x_{35})y + x_{35}y_{15} - x_{15}y_{35}}{x^2 + y^2 - (x_{15} + x_{35})x - (y_{15} + y_{35})y + x_{15}x_{35} + y_{15}y_{35}}.$$

Любая пара этих равных отношений даёт уравнение кривой Бурместера: либо m_{1234} (равенство первых двух отношений), либо m_{1235} (равенство первого и третьего отношений), либо m_{1345} (равенство двух последних отношений). Так как все три кривые имеют общую точку P_{13} , то координаты этой точки удовлетворяют написанному равенству, а также и следующему, получающемуся из них составлением производной пропорции:

$$\frac{[(y_{23} - y_{12})x + (x_{12} - x_{23})y + x_{23}y_{12} - x_{12}y_{23}] - [(y_{15} - y_{12})x + (x_{15} - x_{12})y + x_{15}y_{12} - x_{12}y_{15}]}{[-(x_{12} + x_{23})x - (y_{12} + y_{23})y + x_{12}x_{23} + y_{12}y_{23}] - [-(x_{15} + x_{12})x - (y_{15} + y_{12})y + x_{15}x_{12} + y_{15}y_{12}]} =$$

$$\frac{[(y_{34} - y_{14})x + (x_{14} - x_{34})y + x_{34}y_{14} - x_{14}y_{34}] - [(y_{15} - y_{14})x + (x_{15} - x_{14})y + x_{15}y_{14} - x_{14}y_{15}]}{[-(x_{14} + x_{34})x - (y_{14} + y_{34})y + x_{14}x_{34} + y_{14}y_{34}] - [-(x_{15} + x_{14})x - (y_{15} + y_{14})y + x_{15}x_{14} + y_{15}y_{14}]} \quad (137)$$

Каждый член этой пропорции представляет многочлен первой степени относительно x, y ; обозначая эти члены сокращённо через $g_{13,24}^I, g_{13,24}^{II}, g_{13,45}^I$.

$g_{13,45}^{II}$ наше уравнение мы можем написать так:

$$g_{13,24}^I \cdot g_{13,45}^{II} - g_{13,45}^I \cdot g_{13,24}^{II} = 0. \quad (134')$$

Это есть уравнение конического сечения k_{13} , проходящего через полюс P_{13} . Составляя таким же образом уравнения для кривых Бурместера, проходящих по три через другие полюсы, мы найдём всего 10 конических сечений, проходящих через точки Бурместера. Для получения этих точек достаточно построить два конических сечения, которые, как известно, могут пересекаться не более чем в четырёх точках. Этим и определяется число точек Бурместера. Это имеет место, конечно, и для подвижной плоскости. Итак, существует не более четырёх точек на подвижной плоскости, пятёрки и оложений которых лежат на одном круге.

Это положение известно под именем теоремы Бурместера. Кроме того, мы нашли, что точки Бурместера являются не только общими точками всех пяти кривых Бурместера, но и общими точками десяти конических сечений, каждое из которых проходит через один из десяти полюсов.

Таким образом, вместо построения пары кривых Бурместера можно построить пару конических сечений. Посмотрим, как это сделать, например, для конического сечения k_{13} .

Нам известна уже одна точка этого конического сечения, именно, P_{13} . Из его уравнения (134') видно, кроме того, что оно удовлетворяется при

$$1) g_{13,24}^I = 0 \quad \text{и} \quad g_{13,24}^{II} = 0;$$

$$2) g_{13,45}^I = 0 \quad \text{и} \quad g_{13,45}^{II} = 0;$$

$$3) g_{13,24}^I = 0 \quad \text{и} \quad g_{13,45}^I = 0;$$

$$4) g_{13,24}^{II} = 0 \quad \text{и} \quad g_{13,45}^{II} = 0.$$

Каждое из четырёх приведённых уравнений представляет прямую; поэтому k_{13} проходит через четыре точки пересечения этих прямых в указанной комбинации. Таким образом, мы будем иметь ещё четыре точки конического сечения, если построим эти прямые, а пять точек, как известно, вполне определяют коническое сечение.

Для построения прямой $g_{13,24}^I = 0$ преобразуем левую часть этого уравнения следующим образом:

$$g_{13,24}^I = [(y_{23} - y_{12})(x - x_{12}) - (x_{23} - x_{12})(y - y_{12})] - \\ - [(y_{34} - y_{14})(x - x_{14}) - (x_{34} - x_{14})(y - y_{14})];$$

первая квадратная скобка обращается в нуль для точек прямой $P_{12}P_{23}$, а вторая — для точек прямой $P_{14}P_{34}$; следовательно, для точки π_{13} пересечения прямых $P_{12}P_{23}$ и $P_{14}P_{34}$ имеем $g_{13,24}^I = 0$, т. е. эта прямая проходит через точку π_{13} (фиг. 293). Кроме того, эта прямая имеет угловой коэффициент:

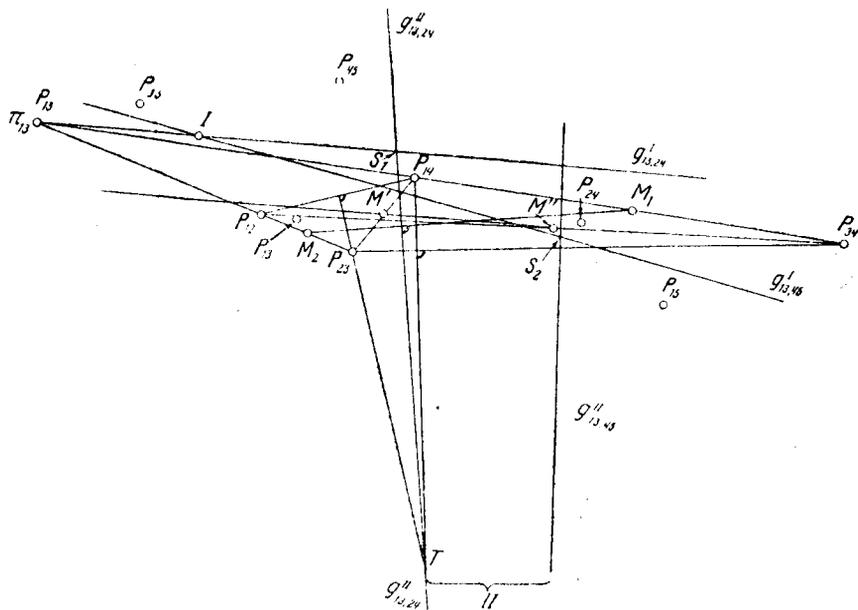
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{13,24}^I = \frac{(y_{23} + y_{14}) - (y_{12} + y_{34})}{(x_{23} + x_{14}) - (x_{12} + x_{34})} = \frac{\frac{1}{2}(y_{23} + y_{14}) - \frac{1}{2}(y_{12} + y_{34})}{\frac{1}{2}(x_{23} + x_{14}) - \frac{1}{2}(x_{12} + x_{34})},$$

т. е. равный угловому коэффициенту прямой, соединяющей середины отрезков $P_{14}P_{23}$ и $P_{12}P_{34}$; эти середины обозначены на чертеже буквами M' и M'' , следовательно, прямая $g_{13,24}^I = 0$ параллельна $M'M''$. Итак, для построения этой прямой надо через точку π_{13} провести прямую, параллельную $M'M''$.

Для построения прямой $g_{13,24}^{\text{II}} = 0$ преобразуем левую часть её уравнения так:

$$g_{13,24}^{\text{II}} = [(x_{14} - x_{12})(x - x_{23}) + (y_{14} - y_{12})(y - y_{23})] + [(x_{34} - x_{23})(x - x_{14}) + (y_{34} - y_{23})(y - y_{14})];$$

первая квадратная скобка обращается в нуль для точек прямой, проходящей через P_{23} перпендикулярно $P_{12}P_{14}$, а вторая — для точек прямой, проходящей



Фиг. 293.

через P_{14} перпендикулярно $P_{23}P_{34}$; следовательно, для точки T пересечения этих прямых $g_{13,24}^{\text{II}} = 0$, т. е. эта прямая проходит через точку T . Кроме того, она имеет угловой коэффициент:

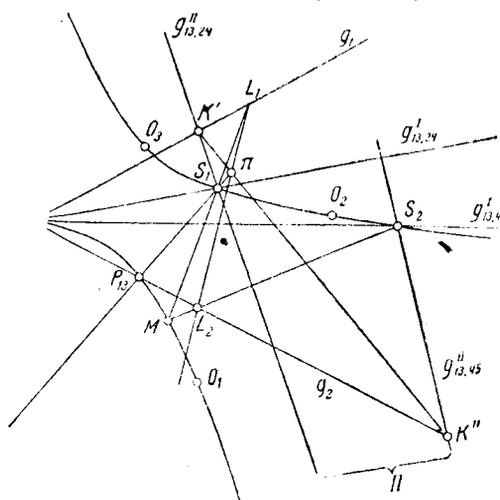
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{13,24}^{\text{I}} = -\frac{(x_{14} + x_{34}) - (x_{12} + x_{23})}{(y_{14} + y_{34}) - (y_{12} + y_{23})} = -\frac{\frac{1}{2}(x_{14} + x_{34}) - \frac{1}{2}(x_{12} + x_{13})}{\frac{1}{2}(y_{14} + y_{34}) - \frac{1}{2}(y_{12} + y_{23})},$$

что означает, что эта прямая перпендикулярна к прямой M_1M_2 , соединяющей середины отрезков $P_{14}P_{34}$ и $P_{12}P_{23}$. Итак, для построения прямой $g_{13,24}^{\text{II}} = 0$ надо через точку T провести прямую, перпендикулярную M_1M_2 .

Аналогично строятся прямые $g_{13,45}^{\text{I}} = 0$ и $g_{13,45}^{\text{II}} = 0$.

После этого находим точку S_1 пересечения прямых $g_{13,24}^{\text{I}}$ и $g_{13,24}^{\text{II}}$, точку S_2 пересечения прямых $g_{13,45}^{\text{I}}$ и $g_{13,45}^{\text{II}}$, точку I пересечения $g_{13,24}^{\text{I}}$ и $g_{13,45}^{\text{I}}$ и точку II пересечения $g_{13,24}^{\text{II}}$ и $g_{13,45}^{\text{II}}$. Так как последняя точка ушла за пределы чертежа, то для построения конического сечения k_{13} применяем следующий способ, при котором эта точка явно не входит в построение (фиг. 294). Через точку I проводим две произвольные прямые g_1 и g_2 (для упрощения чертёжной работы одна из них, у нас g_2 , проведена через P_{13}) и находим точки k' и k'' пересечения этих прямых с $g_{13,24}^{\text{I}}$ и $g_{13,45}^{\text{II}}$ соответственно. Далее находим точку π пересечения $k'k''$ с $P_{13}S_1$ и проводим через неё произвольную

прямую, пересекающую g_1 в точке L_1 и g_2 в точке L_2 . После этого находим точку M пересечения S_1L_1 с S_2L_2 ; эта точка и будет точкой искомого конического сечения. В нашем случае получилась гипербола ¹⁾.



Фиг. 294.

Если все четыре точки Бурместера действительны, то для построения четырёхзвенника мы имеем возможность выбрать из них две наиболее подходящие для постановки шарниров; всего оказывается шесть возможных комбинаций. Если две точки Бурместера окажутся мнимыми (два конических сечения пересекутся лишь в двух действительных точках), то никакого выбора не будет, и может оказаться, что найденные две точки или одна из них вовсе не годятся для постановки шарниров по условиям конструкции или монтажа. Наконец, все четыре точки могут оказаться мнимыми (конические сечения не пересекаются); тогда не существует механизма, удовлетворяющего поставленному условию.

Если одна из точек Бурместера на неподвижной плоскости уйдёт в бесконечность, то это будет означать, что на подвижной плоскости имеется точка, пять положений которой лежат на одной прямой. Но это может случиться лишь при некотором особом расположении заданных пяти положений. Следовательно, вообще говоря, не существует кривошипно-шатунного механизма, переводящего подвижную плоскость через пять заданных положений.

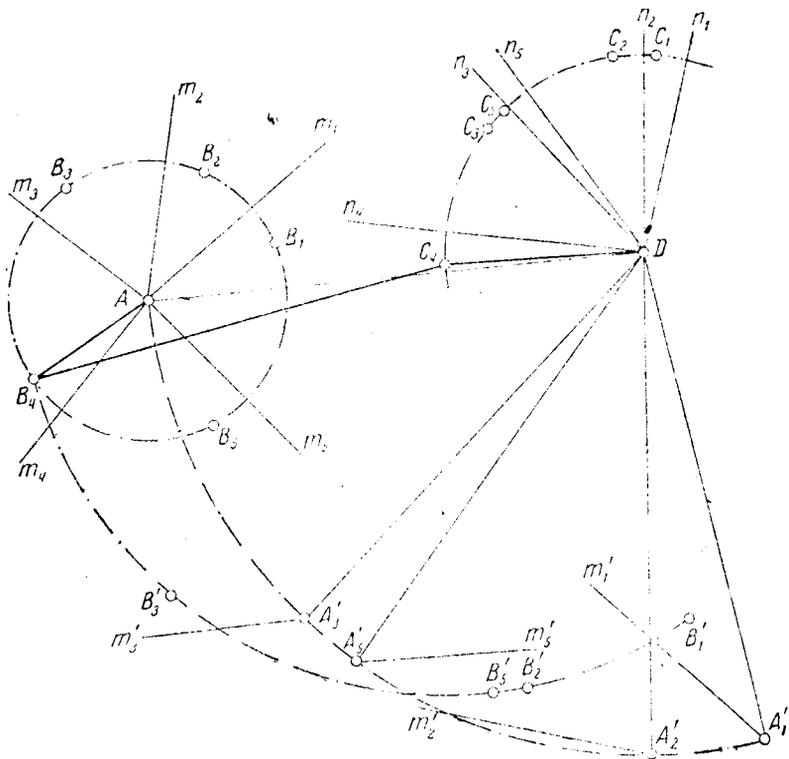
Такое же заключение можно сделать и относительно кулисного механизма.

Пользуясь точками Бурместера, можно построить шарнирный четырёхзвенник, передающий вращения между параллельными осями при условии соответствия пяти положений вращающихся звеньев. Пусть, например, положения одного звена с центром вращения A заданы лучами $Am_1, Am_2, Am_3, Am_4, Am_5$ (фиг. 295), а соответствующие положения другого звена — лучами $Dn_1, Dn_2, Dn_3, Dn_4, Dn_5$. Для определения двух недостающих шарниров найдём относительные положения первого звена по отношению к одному из положений второго, на чертеже — по отношению к четвёртому; эти положения определяются точками $A'_1, A'_2, A'_3, A'_4, A'_5$ и лучами $A'_1m'_1, A'_2m'_2, A'_3m'_3, A'_4m'_4, A'_5m'_5$. Точки A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 и A'_5 лежат на одном круге с центром D , следовательно, последний является одной из точек Бурместера; поэтому имеется ещё по крайней мере одна точка Бурместера, которую и можно найти для заданных пяти относительных положений при помощи кривых Бурместера или конических сечений. Эта вторая точка Бурместера и будет центром шарнира, соединяющего шатун со вторым звеном в его четвёртом положении, т. е. точкой C_4 ; соответствующая ей точка первого звена B_4 будет вторым шарниром шатуна. Таким образом, решение этой задачи всегда возможно.

Если получится всего четыре точки Бурместера, то одной из них будет центр D , а каждая из трёх остальных может быть взята за точку C_4 ; следо-

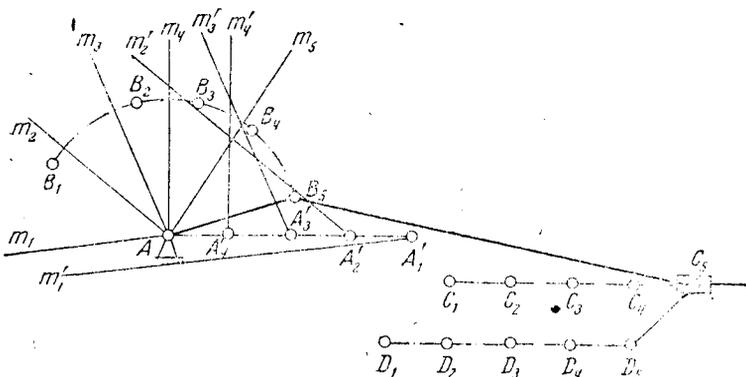
¹⁾ Hackmüller: Analytische Bestimmung der Burmesterschen Punkten, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Aug. 1938, и Maschinenbau, Dez. 1938. Вместо применяемого этим автором метода комплексного перемещения нами в этом вопросе применён координатный метод, который оказался ничуть не сложнее того.

вательно, будем иметь три решения, из которых можно будет выбрать наиболее подходящее для построения механизма.



Фиг. 295.

Можно построить и кривошипно-шатунный механизм по заданным пяти положениям ползуна, соответствующим заданным же пяти положениям криво-



Фиг. 296.

шпа. Пусть, например, положения ползуна заданы точками D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 (фиг. 296), соответствующие положения кривошпа — лучами $Am_1, Am_2,$

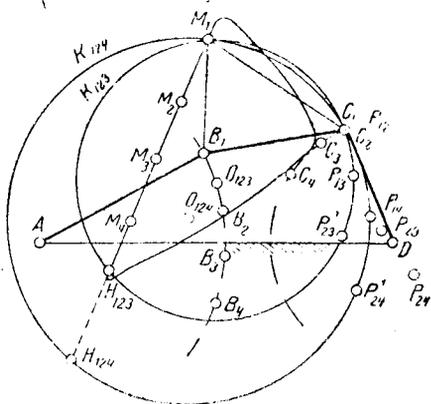
Am_3, Am_4, Am_5 . Построим все положения кривошипа относительно пятого положения ползуна, для чего передвинем поступательно луч Am_1 на величину D_1D_5 , луч Am_2 — на величину D_2D_5 , луч Am_3 — на величину D_3D_5 и луч Am_4 на величину D_4D_5 . Затем для пяти положений $A'_1m'_1, A'_2m'_2, A'_3m'_3, A'_4m'_4, Am_5$ найдём точки Бурместера, одной из которых на подвижной плоскости, т. е. на плоскости кривошипа, будет точка A , так как пять её положений расположены на одной прямой. Вторая точка Бурместера будет центром шарнира, соединяющего плоскость кривошипа с шатуном, т. е. точкой B_5 ; соответствующая ей точка на плоскости ползуна C_5 будет вторым шарниром шатуна. Соединяя жёстко точку D с ползуном, мы получим пять заданных положений этой точки, соответствующих пяти заданным положениям кривошипа, при движении кривошипно-шатунного механизма ABC .

§ 42. Синтез направляющих механизмов.

Направляющие механизмы, построенные по принципу наилучшего касания шатунной кривой с прямой, обладают тем недостатком, что в них нельзя заранее определить границ практического совпадения траектории с прямой. Между тем на практике часто ставится именно это требование. Для его выполнения и следует пользоваться теорией, изложенной в этой главе. На основании её могут быть решены следующие задачи.

Известны длины всех звеньев шарнирного четырёхзвенника, требуется в шатунной плоскости его найти такую точку, которая между двумя заданными положениями механизма двигалась бы почти по прямой.

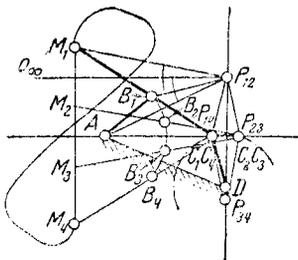
Пусть задан шарнирный четырёхзвенник $ABCD$ в двух его положениях AB_1C_1D и AB_2C_2D (фиг. 297) и требуется найти в плоскости шатуна BC такую точку, которая между этими положениями двигалась бы почти по прямой. С этой целью берём ещё два промежуточных положения механизма AB_2C_2D и AB_3C_3D , причём для упрощения построений точку C_2



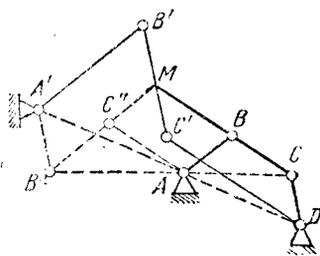
Фиг. 297.

берём в точке C_1 , вследствие чего в этой же точке получается полюс P_{12} . Затем строим полюсы P_{13}, P_{23} и P_{23}^1 и проводим круг k_{123} через точки P_{12}, P_{13}, P_{23}^1 . Этот круг должен проходить также через ортоцентр H_{123} треугольника $P_{12}P_{13}P_{23}$. Затем строим полюсы P_{14}, P_{24} и P_{24}^1 и проводим круг k_{124} через точки P_{12}, P_{14}, P_{24}^1 ; он должен проходить также через ортоцентр H_{124} треугольника $P_{12}P_{14}P_{24}$. Точка M_1 пересечения этих кругов, не совпадающая с P_{12} , и будет той точкой в первом положении шатуна, которая вместе с тремя остальными положениями M_2, M_3, M_4 лежит на одной прямой, именно — на прямой, проходящей через оба ортоцентра H_{123} и H_{124} . Можно ожидать, что в промежутках M_1M_2, M_2M_3 и M_3M_4 шатунная кривая будет мало отличаться от этой прямой, что в действительности и наблюдается, как показывает полное течение траектории точки M . Для проверки точности прямолинейного движения следует определить в каждом положении направление нормали при помощи мгновенного полюса; в нашем примере оказалось следующее: в точке M_1 нормаль пошла немного вверх от перпендикуляра к прямой, в точке M_2 — немного вниз, в точке M_3 — опять вверх, в точке M_4 — опять вниз; дальнейший ход траектории показывает, что за точкой M_1 ещё имеется её точка на этой же прямой, равно как и за точкой M_4 . Таким образом оказалось, что эта прямая пересекает траекторию в наибольшем возможном числе точек — в шести, т. е. наше требование выполнено с избытком.

чём эти положения окажутся попарно совпадающими: C_1 с C_4 и C_2 с C_3 (фиг. 299); в этих же точках будут полюсы P_{14} и P_{23} соответственно, а другая пара противоположностей P_{12} и P_{34} расположится на среднем перпендикуляре к $P_{14}P_{23}$ в равных расстояниях; на том же перпендикуляре будут и остальные два полюса P_{13} , P_{24} . Вследствие параллельности полюсных прямых у прямой Бурместера получаются четыре бесконечно удалённые точки, а потому в её состав входит бесконечно удалённая прямая, выпадающая из рассмотрения. Остав-



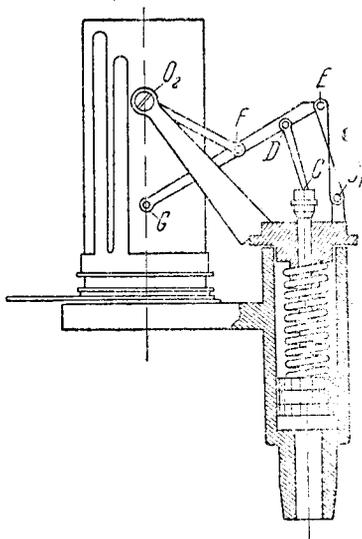
Фиг. 299.



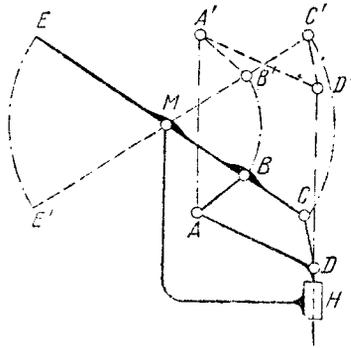
Фиг. 300.

шая коническое сечение включает прямую, содержащую четыре полюса P_{12} , P_{13} , P_{24} , P_{34} ; на этой прямой должен быть взят центр D окружности, проходящей через C_1 , C_2 , C_3 , C_4 . Другая прямая определяется парой полюсов P_{14} , P_{23} ; на ней в любой точке можно взять центр A . Для получения точки B_1 достаточно построить $\angle M_1P_{12}B_1 = \angle O_\infty P_{12}A$ и найти точку B_1 как точку пересечения стороны $P_{12}B_1$ этого угла с прямой M_1C_1 . В результате получим механизм $ABCD$, осуществляющий заданное движение. Траектория точки M имеет форму восьмёрки, следовательно, на заданной прямой лежит пятая точка кривой, соответствующая участку вне M_1M_4 ; поэтому на участке M_1M_4 должна быть ещё одна точка, которую можно обнаружить построением нормали.

Полученный механизм имеет историческое значение как механизм, изобретённый Эвансом для своей паровой машины вместо механизма Уатта. Инте-



Фиг. 301.



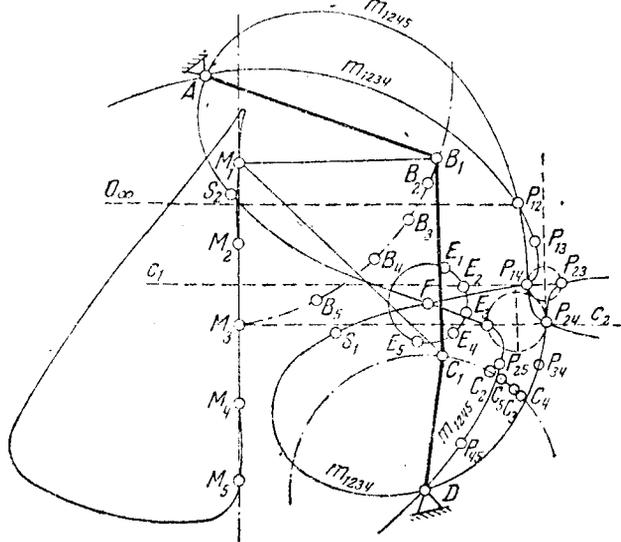
Фиг. 302.

ресно отметить, что механизм Уатта может быть получен из механизма Эванса применением теоремы Робертса (фиг. 300). Исторически, однако, оба механизма изобретены независимо и задолго до открытия Робертсом его теоремы. Механизм Эванса применялся затем в индикаторе Розенкранца (фиг. 301).

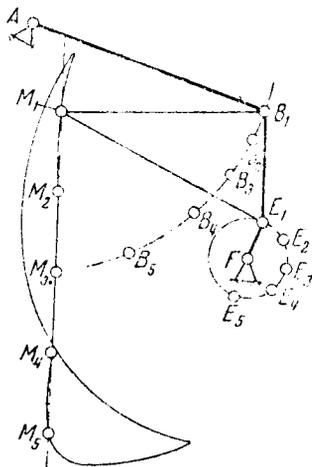
На этом механизме покажем ещё возможность использования направляющих механизмов для построения механизмов с пассивными связями. Представим себе присоединённым к этому механизму ещё пятое звено, сочлёрненное

шарниром в M с шатуном и поступательной парой со стойкой (фиг. 302). В пределах прямолинейного движения точки M это звено будет совершать прямолинейно-поступательное движение, а за этими пределами механизм вообще работать не будет. Поставим теперь наш пятизвенный механизм на это пятое звено. Тогда точка M станет неподвижным центром вращения звена $EMBC$; точки A и D будут двигаться по параллельным прямым, и механизм может быть использован для приведения в движение насоса, как это и было сделано в середине прошлого столетия Нерлихом в Германии.

Можно поставить себе задачей построить направляющий механизм для пяти заданных положений ведомой точки. Для этого задаёмся пятью положениями: M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 на прямой g (фиг. 303), берём произвольный центр A и проводим из него круг, на котором отмечаем пять положений: B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 так, чтобы $M_1B_1 = M_2B_2 = M_3B_3 = M_4B_4 = M_5B_5$. Таким образом определяется пять положений подвижной плоскости, для которых находим полюсы. Для построения кривой Бурместера m_{1234} замечаем, что вследствие $M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_4 = M_4M_5$ полюсы P_{12} и P_{24} находятся на равных расстояниях от прямой $P_{14}P_{23}$, а потому эта прямая будет средней линией C_1 для m_{1234} ; найди затем центр S_1 пучка лучей, строим и самую m_{1234} . Точно так же найдём, что прямая $P_{13}P_{24}$ будет средней линией C_2 для m_{1235} , а найдя центр S_2 , строим и самую m_{1245} . Обе кривые должны пересекаться в $P_{12}, P_{14}, P_{24}, A$ и $O\infty$; кроме того, они пересекались ещё в двух точках D и F , каждая из которых может быть принята за неподвижный центр в дополнение к A . На чертеже взята точка D , вследствие чего получился механизм $ABCD$; действительная траектория точки M на всём протяжении от M_1 до M_5 не отличима практически от прямой. На фиг. 304 показана траектория этой точки при устройстве центра в F , а на фиг. 305 образован механизм с центрами в D и F . В обоих последних случаях траектория точки M , хотя и проходит через все пять точек на прямой g , но в промежутках M_1M_2 и M_4M_5 заметно отклоняется от этой прямой. Точки D и F могут быть также определены при помощи копических сечений, как было указано выше.



Фиг. 303.

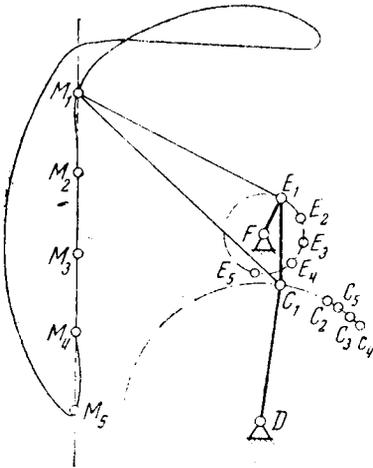


Фиг. 304.

Для каждого из трёх найденных механизмов можно по теореме Роберта найти ещё два механизма, удовлетворяющих поставленному условию.

Посмотрим ещё, как можно получить шатуновую кривую, проходящую через шесть точек на одной прямой, и применим для этой цели кулисный меха-

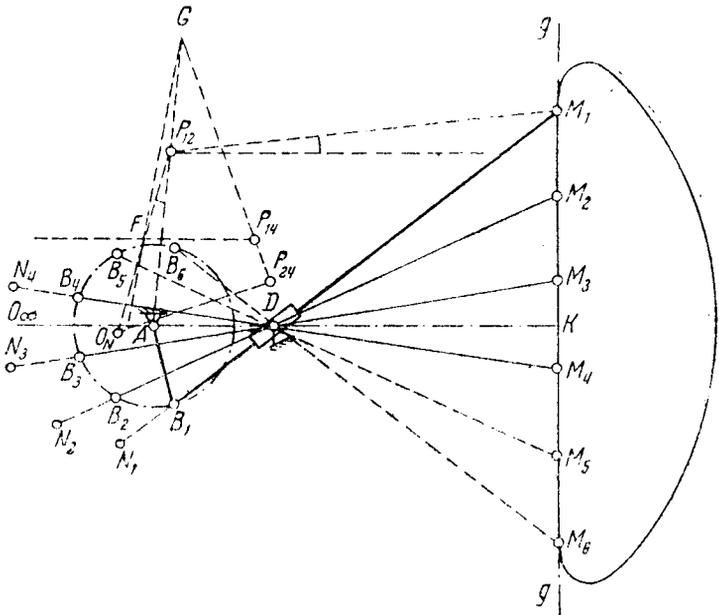
низм. Пусть заданы шесть точек $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$ на прямой g в равных расстояниях одна от другой (фиг. 306). Проведём к M_1M_5 средний перпендикуляр KO_∞ и возьмём на нём центр D вращения кулисы. Таким образом, для шатуна будем иметь шесть положений, определяемых прямыми,



Фиг. 305.

проходящими через D и через точки M_k ($k=1, 2, 3, 4, 5, 6$). Так как положение этой прямой симметрично относительно KO_∞ , то для определения механизма достаточно взять четыре положения: M_1D, M_2D, M_3D, M_4D . Возьмём ещё точку N на той же прямой и построим её четыре положения N_1, N_2, N_3, N_4 . Если взять две тройки положений, например 124 и 134 , то для каждой тройки найдём коническое сечение как геометрическое место центров кругов, проходящих через тройки положений точек в подвижной плоскости. Вследствие симметрии положений 3 и 4 относительно KO_∞ коническое сечение k_{134} распадается на прямую KO_∞ и другую прямую; мы будем искать центр A именно на KO_∞ , отбрасывая вторую прямую. Для конического сечения k_{124} мы имеем пять точек: $P_{12}, P_{14}, P_{24}, O_\infty$ и центр O_N круга, проходящего через N_1, N_2, N_4 . Строить это коническое сечение нет надобности, так как нас интересует лишь одна его точка, именно — точка пересечения его с

прямой KO_∞ , не считая O_∞ . Для нахождения её определяем точку E пересечения $O_N P_{24}$ с KO_∞ и точку F пересечения $O_N P_{12}$ с $P_{14} O_\infty$. Затем находим точку G пересечения EF с $P_{14} P_{24}$ и проводим прямую GP_{12} , которая и пере-



Фиг. 306.

сечёт KO_∞ в искомом центре A . Точку B_1 на прямой DM_1 получаем построением угла $AP_{12}B_1$, равного углу $O_\infty P_{12}M_1$. Круг из A радиусом AB_1 пересе-

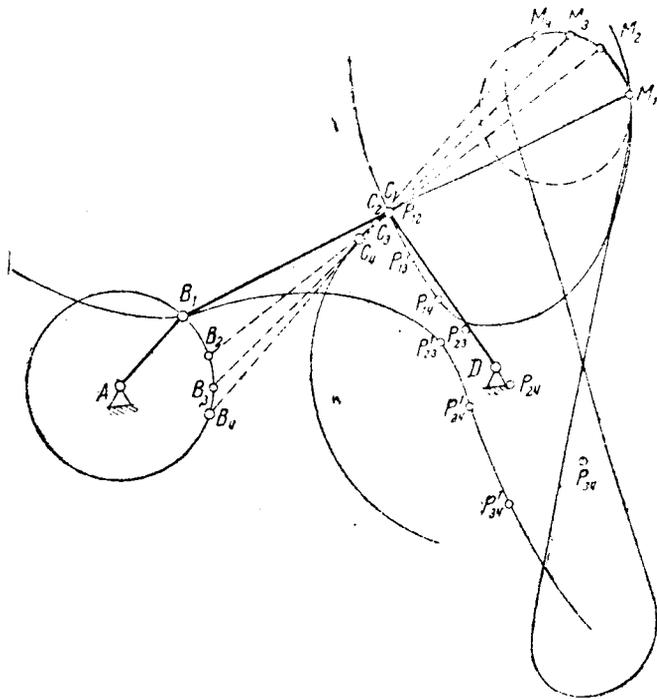
чёрты прямые M_2D , M_3D , M_4D , а вследствие симметрии и M_5D , в соответствующих точках B_2 , B_3 , B_4 , B_5 , B_6 . Таким образом, получим механизм ABD , точка M шатуна которого опишет траекторию, проходящую через шесть точек прямой g . На всём участке M_1M_6 траектория практически неотличима от прямой.

§ 43. Синтез механизмов с остановкой.

По отношению к этим механизмам можно сделать такое же замечание: наилучшее касание шатунной кривой с кругом не обеспечивает заранее желательных границ практического совпадения кривых, что определяет продолжительность остановки. Поэтому и здесь целесообразно применить метод отдельных положений для решения следующих задач.

Известны длины всех звеньев шарнирного четырёхзвенника; требуется в шатунной плоскости его найти такую точку, которая между двумя заданными положениями механизма двигалась бы почти по кругу.

Пусть задан шарнирный четырёхзвенник $ABCD$ в двух его положениях AB_1C_1D и AB_4C_4D (фиг. 307); требуется найти в плоскости шатуна BC такую



Фиг. 307.

точку, которая между этими положениями двигалась бы почти по кругу. С этой целью берём ещё два промежуточных положения механизма AB_2C_2D и AB_3C_3D и для четырёх положений шатуна находим точки, четыре положения которых лежат на одном круге. Эти точки, как известно, лежат на кривой Бурместера, а потому любая точка этой кривой может быть принята за искомым точку. При выборе той или иной точки можно руководствоваться различными соображениями.

Можно, например, пожелать, чтобы эта точка лежала на оси шатуна, что может быть благоприятно для конструирования. В таком случае получится единственное решение, так как на этой прямой уже имеются две точки B и C такого свойства, а больше трёх таких точек на прямой быть не может. Для нахождения этой точки можно не строить кривой Бурместера, но найти

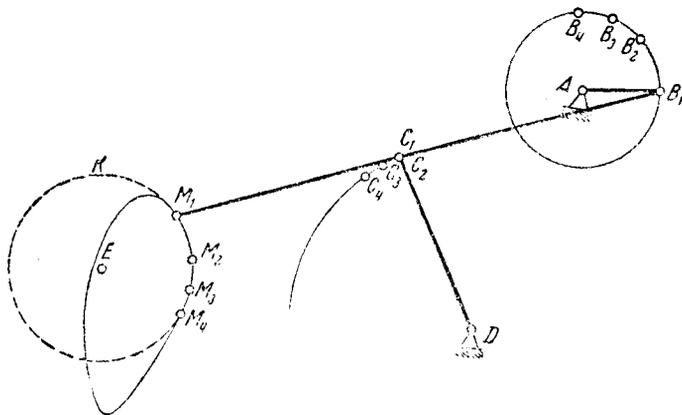
центр искомого круга как четвертую точку пересечения конических сечений k_{123} и k_{124} , которые пересекаются в точках P_{12} , A и D . Для k_{123} , кроме того, имеем точки P_{13} и P_{23} , а для k_{124} — точки P_{14} и P_{24} ; таким образом, каждое коническое сечение определяется пятью точками.

Но можно руководствоваться длиной передаточного шатуна и положением шарнира на ведомом коромысле. В этом случае целесообразно построить диаграмму радиусов кругов по дуге кривой Бурместера, как это было указано выше (см. стр. 186), и определить область использования этой кривой.

Можно, наконец, взять не два, а три промежуточных положения, и определить точки Бурместера для полученных пяти положений. Если они окажутся подходящими для конструкции, то получим наилучшее приближение к кругу, что будет означать наиболее точную установку, без заметных отклонений ведомого коромысла в промежутках.

Следующей задачей может быть такая. Дан круг и на нём две точки, как пределы движения шатунной точки почти по этому кругу; требуется построить четырёхзвенник, осуществляющий это движение.

Пусть на круге k заданы точки M_1 и M_4 , как пределы движения точки M шатуна (фиг. 308), и пусть эта точка лежит на оси шатуна. Намечаем два



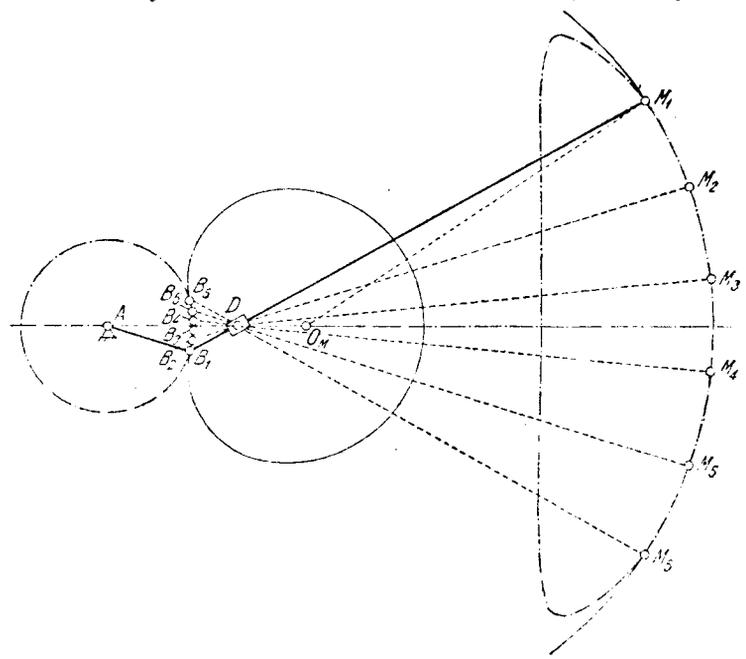
Фиг. 308.

промежуточных положения M_2 и M_3 , берём круг произвольного центра D и радиуса, задаёмся длиной SM и строим четыре положения C_1, C_2, C_3, C_4 , соответствующие точкам M_1, M_2, M_3, M_4 ; этим определяются четыре положения шатунной плоскости. Задача свелась, таким образом, к предыдущей; находим на SM точку B , четыре положения которой лежат на одном круге, центр которого A принимаем за неподвижный центр. В результате получаем шарнирный четырёхзвенник $ABCD$, точка M шатуна которого описывает траекторию, совпадающую практически с дугой круга на участке M_1M_4 .

Вместо шарнирного четырёхзвенника можно построить кривошипно-шатунный механизм, удовлетворяющий поставленному условию. Для этого надо поступить так: либо вместо круга с центром D взять прямую и найти по предыдущему кривошип AB , либо взять круг с центром D и искать в плоскости шатуна точку, четыре положения которой лежали бы на одной прямой, и принять эту прямую за линию движения ползуна. Решение той и другой задачи предоставляем читателю, так как после всего сказанного оно не представит затруднений.

Решим ещё поставленную задачу посредством кулисного механизма, для чего на заданном круге между точками M_1 и M_6 возьмём четыре промежуточных точки M_2, M_3, M_4, M_5 (фиг. 309) на равных расстояниях $M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_4 = M_4M_5 = M_5M_6$, а центр D вращения кулисы возьмём на оси симметрии, на которой также будем искать центр A вращения кривошипа. Задача может быть решена совершенно аналогично задаче о направляющем механизме, решённой на стр. 206. Но ввиду того, что в данном примере

полюсы оказываются весьма близко один от другого, невозможно достигнуть хорошей точности. Поэтому предлагаем метод проб, дающий в таких случаях большую точность и заключающийся в следующем. На прямой MD берём ряд точек и строим для каждой точки шесть её положений, откладывая $M_1B_1 = M_2B_2 = M_3B_3 = M_4B_4 = M_5B_5 = M_6B_6$. Среди этих точек найдём и такую, шесть положений которой лежат на одном круге; вследствие симметрии движения шатуна центр A этого круга будет лежать на оси симметрии. Таким образом, получаем механизм ABD , точка M шатуна которого описы-



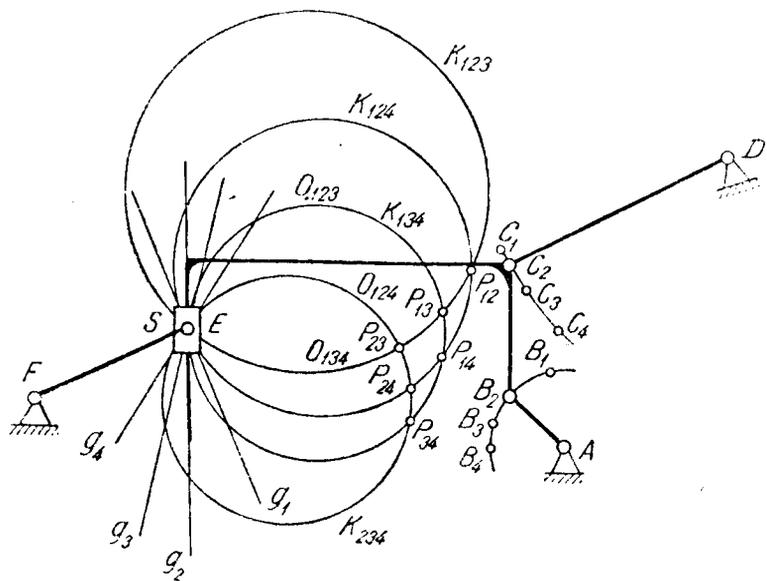
Фиг. 309.

вает траекторию, совпадающую практически с дугой круга на участке M_1M_6 . Если бы точку M двигать точно по кругу при помощи кривошипа OMM , то точка B описала бы траекторию, практически совпадающую с дугой круга на участке B_1B_6 .

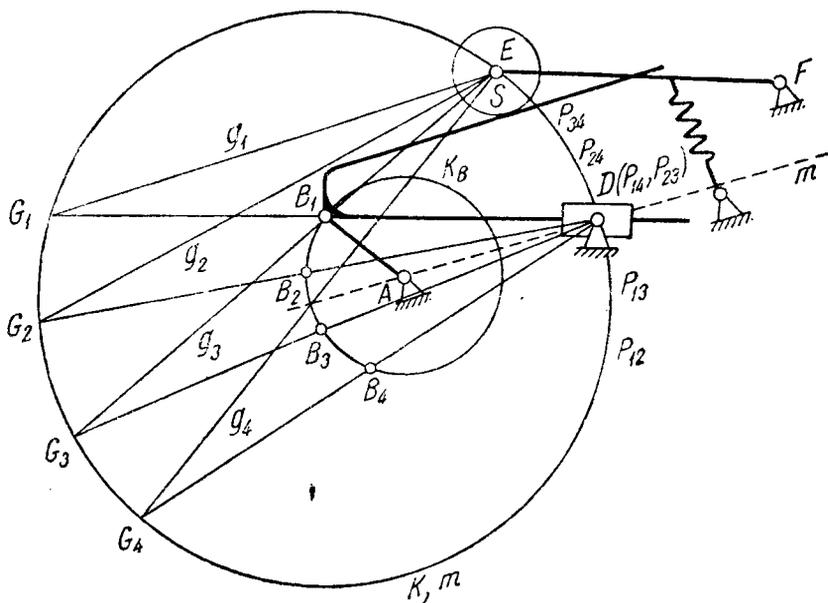
Рассмотрим далее следующую задачу. В плоскости шатуна данного четырёхзвенника найти такую прямую, четыре положения которой проходили бы через постоянную точку.

Пусть мы имеем шарнирный четырёхзвенник $ABCD$ (фиг. 310). Взяв его четыре последовательных положения и построив полюсы, проведём четыре круга $k_{123}, k_{124}, k_{134}, k_{234}$, описанных вокруг полюсных треугольников $P_{12}P_{13}P_{23}, P_{12}P_{14}P_{24}, P_{13}P_{14}P_{34}, P_{23}P_{24}P_{34}$ соответственно; они пересекутся в общей точке S , которая и будет искомой постоянной точкой. Прямая g_1 будет прямой ортоцентров полюсных треугольников $P_{12}P_{13}P_{23}^1, P_{12}P_{14}P_{24}^1, P_{13}P_{14}P_{34}^1$ и $P_{23}^1P_{24}^1P_{34}^1$, вместе с остальными её положениями g_2, g_3, g_4 она проходит через точку S .

Если теперь прямую g реализовать в виде стержня, жёстко связанного с шатуном BC и ходящего во втулке, шарнирно связанной с коромыслом EF так, что в некотором положении коромысла центр E шарнира совпадает с точкой S , то в этом положении коромысла будет иметь остановку во всё время движения четырёхзвенника от первого до четвертого положения. Это время мы можем назначить наперёд, взяв соответственно этому дугу круга кривошипа V_1B_4 ; отклонения в промежутках B_1B_2, B_2B_3 и B_3B_4 будут ничтожны.



Фиг. 310.

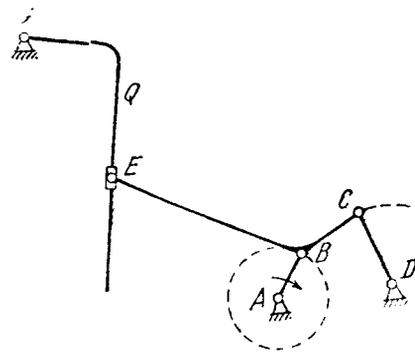


Фиг. 311.

Пусть мы имеем теперь лисный механизм ABD (фиг. 311), на окружности кривошипа которого взяты из равных расстояний и симметрично к AD четыре точки B_1, B_2, B_3, B_4 . Для четырёх положений шатуна найдём шесть полюсов, которые все будут лежать на одном круге k . Этот круг будет, таким образом, представлять все четыре круга, описанных вокруг полюсных треугольников, а потому любая точка этого круга может быть принята за точку S их пересечения, т. е. за постоянную точку, через которую проходит прямая g шатуновой плоскости в четырёх заданных положениях. Этот же круг вместе с прямой AD представляет кривую Вурместера.

Если теперь построить коромысло EF так, чтобы в каком-либо положении точка E совпала с S , то в этом положении коромысло будет иметь остановку продолжительностью, равною времени поворота кривошипа от AB_1 до AB_4 . Конструктивно целесообразно на шарнир E надеть ролик, катающийся по линейке, жёстко связанной с шатуном и параллельной прямой g .

Наконец, для устройства механизма с остановкой можно использовать любой направляющий механизм. Пусть, например, построен шарнирный четырёхзвённый $ABCD$ (фиг. 312), точка E шатуна которого описывает траекторию, в известной своей части достаточно хорошо приближающуюся к прямой. Тогда по этой прямой устанавливают стержень Q , жёстко связанный с коромыслом, имеющим центр вращения в G , а в точке E помещают шарнир, соединяющий шатун со втулкой, ходящей по стержню. Во всё время движения точки E по прямой коромысло будет иметь остановку в заданном положении.



Фиг. 312.

VIII. СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ ПРИ НАЛИЧИИ ДОБАВОЧНЫХ УСЛОВИЙ.

§ 41. Условия Грасгофа¹⁾.

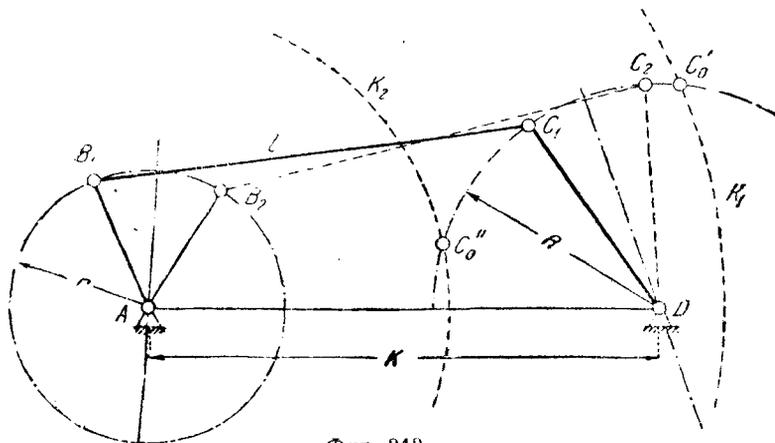
На практике почти всегда приходится проектировать механизм, включающий в свой состав непрерывно вращающийся вал. Для четырёхзвённого механизма это ведёт к требованию соблюдения известного условия Грасгофа. Ограничимся только случаем кривошипно-коромыслового механизма; тогда непрерывно вращающийся вал будет наименьшим из четырёх звеньев, а сумма длины этого звена с длиной наибольшего звена должна быть меньше или равна сумме длин двух остальных звеньев. Случай равенства даёт предельный механизм; по соображениям, изложенным в шестой главе, таких механизмов следует избегать, а потому в дальнейшем мы их исключим из рассмотрения.

Рассмотрим теперь, какое влияние на выбор длин звеньев окажет это условие в качестве добавочного условия к тем, которые были поставлены в предыдущей главе.

При двух заданных положениях подвижной плоскости можно задаться двумя точками этой плоскости и одну из них принять за центр шарнира, соединяющего плоскость с плоскостью вращения вала. Если центр вала задан, то эта точка не может быть взята произвольно, но на перпендикуляре, восстановленном из середины отрезка, соединяющего два положения этого центра относительно заданных положений плоскости (см. стр. 166). В таком случае мы можем задаться ещё радиусом кривошипа как наименьшего звена. Вторая точка подвижной плоскости может быть взята произвольно, однако на расстоянии от первой, большем радиуса кривошипа. Если задан также и центр вращения коромысла, то относительно второй точки должно быть со-

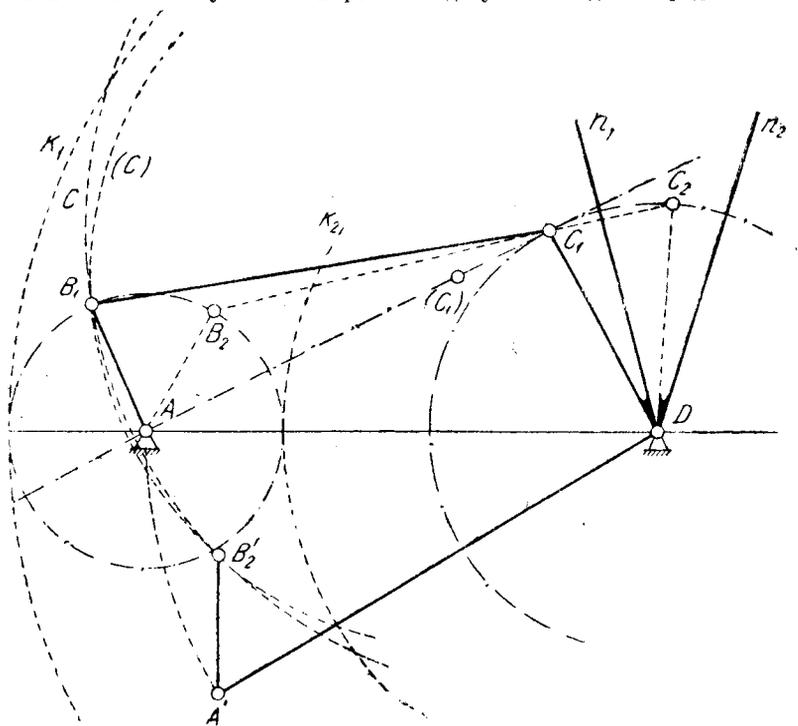
¹⁾ Этот параграф разработан нами самостоятельно.

облюдено ещё такое же условие, как и для первой точки при заданном центре кривошипа. Окончательно место второй точки обуславливается требованием



Фиг. 313.

Грасгофа. Так как задание неподвижных центров равносильно заданию центров на плоскости шатуна, то мы решим задачу в последнем предположении.

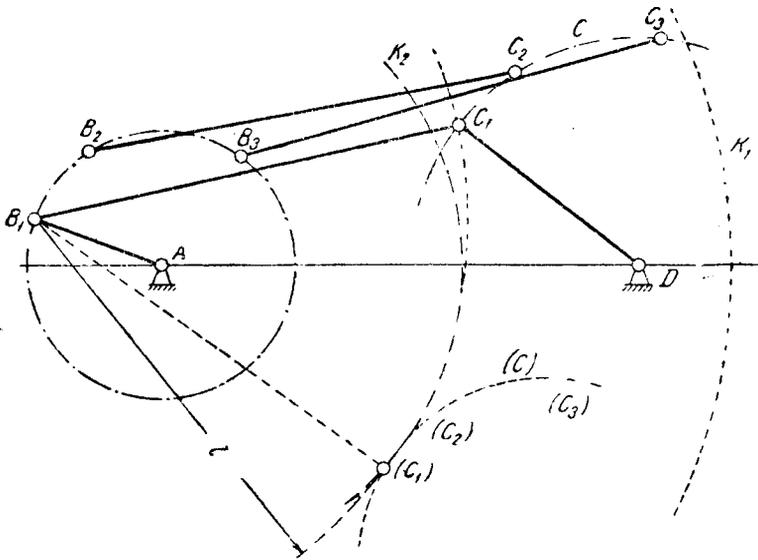


Фиг. 314.

Итак, пусть два положения подвижной плоскости заданы отрезками $B_1C_1 = B_2C_2 = l$ (фиг. 313), а неподвижный центр A выбран на перпендикуляре к B_1B_2 в середине этого отрезка, так что $AB_1 = AB_2 = r < l$. Восставив

перпендикуляр из середины C_1C_2 , возьмём на нём тангую точку D , чтобы окружность, описанная из неё как из центра и проходящая через C_1 и C_2 , пересекла как окружность k_1 , описанную из A радиусом $l+r$, так и окружность k_2 , описанную из A радиусом $l-r$. Точки пересечения C'_0 и C''_0 будут крайними положениями точки C , а потому условие Грасгофа будет выполнено, т. е. механизм будет кривошипно-коромысловый.

Если заданы два положения коромысла Dn_1 и Dn_2 , соответствующие двум положениям кривошипа AB_1 и AB_2 (фиг. 314), то для построения шарнирного четырёхзвенника, осуществляющего заданное движение, строим прежде всего положение $A'B'_2$ кривошипа AB_2 относительно DC_1 при повороте коромысла из Dn_2 в Dn_1 и из середины $B_1B'_2$ восстанавливаем перпендикуляр. На этом перпендикуляре надо взять такую точку, чтобы окружность, проведённая из неё как из центра и проходящая через B_1 и B'_2 , пересекла окружности k_1 и k_2 из центра D , касательные к кругу кривошипа. Точка C_1 с окружностью c удовлетворяет этому условию; точка (C_1) с окружностью (c) не удовлетворяет ему. В результате получаем кривошипно-коромысловый механизм AB_1C_1D . При трёх заданных положениях можно задаться одной точкой подвижной плоскости, три положения которой лежат на окружности данного радиуса,



Фиг. 315.

принимаемой за окружность кривошипа. Пусть такой точкой будет B (фиг. 315). Задаёмся затем длиной $BC=l$ и на окружности радиуса l из центра B берём ряд точек, для которых находим центры кругов, проходящих через их три положения. Если круг этих точек пересечёт круги k_1 и k_2 из центра A радиусами $l+r$ и $l-r$, то он и будет кругом коромысла. Точка C_1 удовлетворяет этому условию, а точка (C_1) — нет. В результате получаем механизм AB_1C_1D .

Подобным же образом можно построить кривошипно-коромысловый механизм по трём соответственным парам положений кривошипа и коромысла.

При четырёх заданных положениях и заданном радиусе кривошипа получаются определённые точки на подвижной плоскости для центра кривошипной головки шатуна. Другую точку — для центра коромысловой головки шатуна — надо выбрать на кривой Бурместера. Каждая такая точка уже вполне определяет как длину шатуна l , так и радиус коромысла R . Взяв ряд таких точек, можно выбрать из них такую, которая давала бы механизм, удовлетво-

ряющий условию Грасгофа. Проведение этого процесса про б на каком-либо примере предоставляем читателю.

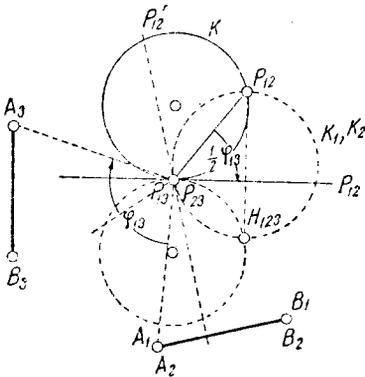
При пяти заданных положениях получается не более четырёх точек на подвижной плоскости для постановки шарниров (точки Бурместера); поэтому можно только проверить, для какой из шести возможных комбинаций удовлетворяется условие Грасгофа

§ 45. Задание мёртвых положений.

Будем называть «мёртвыми» положениями такие положения какого-либо звена механизма, когда скорости всех точек этого звена равны нулю, между тем как все остальные звенья имеют в этот момент определённые скорости. Особенность такого положения механизма заключается прежде всего в том, что бесконечно малое отклонение механизма влечёт бесконечно малые отклонения всех звеньев кроме того, которое находится в мёртвом положении, — последнее не отклоняется вовсе; точнее говоря, его отклонение представляет величину бесконечно малую высшего порядка по отношению к отклонениям других звеньев. Так как бесконечно малые отклонения первого порядка характеризуются мгновенным полюсом, то у звена, находящегося в мёртвом положении, такового не оказывается, точнее его положение неопределённо, так как скорости всех точек звена могут быть нулями только при нулевой угловой скорости, а в этом случае все скорости будут нулями независимо от положения полуса.

Шатун четырёхзвенника не может находиться в мёртвом положении, ибо это означало бы равенство нулю скоростей и двух других звеньев этого механизма, но для многозвенного механизма такое положение могло бы оказаться. В четырёхзвенном механизме мёртвое положение может иметь место только для коромысла. В этом случае для построения механизма по нескольким заданным положениям, среди которых указано одно мёртвое, следует построить положения остальных звеньев именно относительно этого мёртвого положения; для четырёхзвенного механизма это приводится к построению относительных положений звена, противоположного коромыслу. Рассмотрим поэтому, какие изменения в построениях произойдут при таком задании.

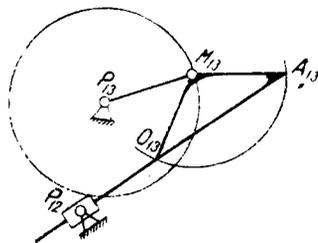
Пусть заданы два положения подвижной плоскости относительно мёртвого положения другой подвижной плоскости. В положении, соответствующем мёртвому положению звена, мы должны считать два бесконечно близких положения подвижной плоскости, следовательно, должны считать существующим мгновенный полюс, который будет также мгновенным полюсом и в относительном движении, так как за этот бесконечно малый элемент времени звено, к которому отнесено движение, не перемещается. Поэтому в целях приведения этого случая к обычному, рассмотренному в предыдущей главе, будем считать такое положение за два совпадающих, но при наличии полюса, второе же заданное положение будем считать третьим. На фиг. 316 это выражено тем, что отрезки A_1B_1 и A_2B_2 совпадают, а полюс P_{12} находится



Фиг. 316.

в мгновенном полюсе этого положения; кроме того, задано положение A_3B_3 , определяющее два остальных полюса P_{13} и P_{23} в одной точке. Хотя эти полюсы совпали, но поясная прямая $P_{13}P_{23}$ имеет вполне определённое положение, так как она образует с $P_{13}P_{12}$ угол, равный половине угла поворота, у нас — по часовой стрелке; эта прямая обозначена через p_{12} . Круг, описанный вокруг полюсного треугольника $P_{12}P_{13}P_{23}$, касается этой прямой; он обозначен буквой k . Полюс P_{12}^3 симметричен с P_{12} относительно p_{12} , а полюсы P_{13}^3 и P_{23}^3 совпадают с P_{13} и P_{23} ; таким образом, круг k_3 симметричен с k относительно

P_{12} , круги k_1 и k_2 совпадают и касаются прямой p_{12}' , симметричной с p_{12} относительно $P_{12}P_{13}$. Точка H_{123} пересечения кругов k_1, k_2, k_3 есть ортоцентр треугольника $P_{12}P_{13}P_{23}$. Эти круги, будучи предельными положениями кругов, описанных вокруг полюсных треугольников трёх произвольных положений плоскости, при совпадении двух из них и при наличии полюса P_{12} являются геометрическим местом точек, тройки положений которых лежат на одной прямой, причём два из этих положений бесконечно близки. Точно так же точка круга k является точкой пересечения трёх положений некоторой прямой подвижной плоскости, из которых два бесконечно близки.



Фиг. 317.

открытую цепь с кривошипом $P_{13}M_{13} = \frac{r}{2 \sin \frac{1}{2} \theta_{13}}$ и жёстким треугольником

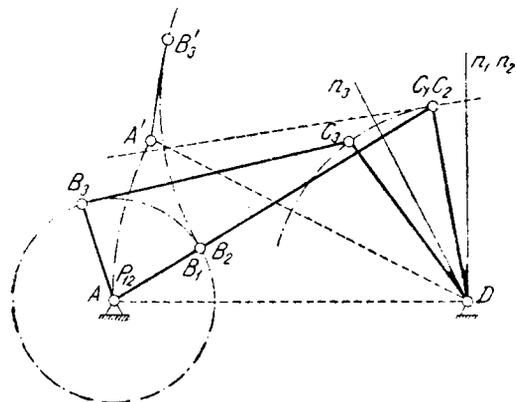
$M_{13}A_{13}O_{13}$, в котором $A_{13}O_{13} = r$, $M_{13}A_{13} = M_{13}O_{13} = \frac{r}{2 \sin \frac{1}{2} \theta_{13}}$ (фиг. 317).

Тогда мы найдём, что при всех положениях этой цепи прямая $O_{13}A_{13}$ в своём первом положении будет проходить через полюс P_{12} , будучи радиусом круга тройки положений. Поэтому цепь получит движение с одной степеню свободы, обратясь в кулисный механизм с центром вращения кулисы в P_{12} , а точки A_{13} и O_{13} опишут искомые геометрические места. Итак, геометрическое место точек подвижной плоскости при двух её бесконечно близких положениях, тройки положений которых лежат на кругах заданного радиуса, а также геометрическое место центров этих кругов представляют шатуновые кривые одного и того же кулисного четырёхзвенника.

Для построения этого четырёхзвенника надо за основание его взять отрезок $P_{12}P_{13}$, затем построить равнобедренный треугольник с основанием, равным заданному радиусу r и углом при вершине, равным углу поворота θ_{13} , соединить его с кривошипом, имеющим центр вращения в P_{13} и радиус, равный боковой стороне треугольника, и снабдить его стержнем, проходящим сквозь втулку (кулису), вращающуюся вокруг центра A_2 ¹⁾.

Ввиду того, что полюсы P_{13} и P_{23} совпадают, других четырёхзвенников для той же цели мы не получим, что согласно с теоремой Робертса — Чебышева.

Применим полученные выводы к построению кривошипно-коромыслового механизма по двум парам соответственных положений кривошипа и коромысла, из которых одна пара заключает мёртвое положение коромысла. Пусть это последнее задано прямыми Dn_1n_2 и Dn_3 (фиг. 318), а соответствующие положения



Фиг. 318.

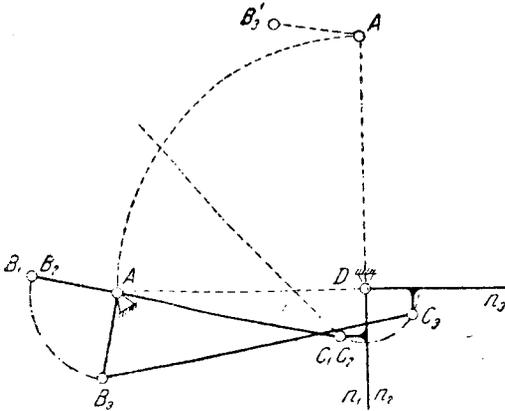
кривошипа заданы радиусами AB_1B_2 и AB_3 . Построив относительное

¹⁾ Эта задача решена нами на основе идей С. А. Черкудинова, высказанных им в цит. соч.

положение кривошипа AB_3 в виде отрезка $A'B_3$, восстановим из середины B_1B_3' перпендикуляр; на этом перпендикуляре надо искать точку C_1 как центр круга, проходящего через B_1, B_2, B_3' . Но, с другой стороны, полюс P_{12} находится в центре A , а потому для перемещения B_1B_2 нормалью служит AB_1 ; таким образом, точка C_1 должна лежать на этой нормали. Это впрочем очевидно и непосредственно, так как в мёртвом положении точки A, B_1 и C_1 должны лежать на одной прямой.

В результате получим механизм AB_1C_1D .

Такой случай имеет место при устройстве двери автобуса, открываемой только водителем. Пусть AB_1 есть колеччатый вал, управляемый водителем, B_1C_1 — шатун, соединяющий этот вал с дверью Dn_1 (фиг. 319); эта дверь в закрытом положении не может быть открыта пассажирами, но открывается водителем, который поворачивает вал в положение AB_3 , отчего дверь открывается и занимает положение Dn_3 . Шарнир C_1 получается как точка пересечения

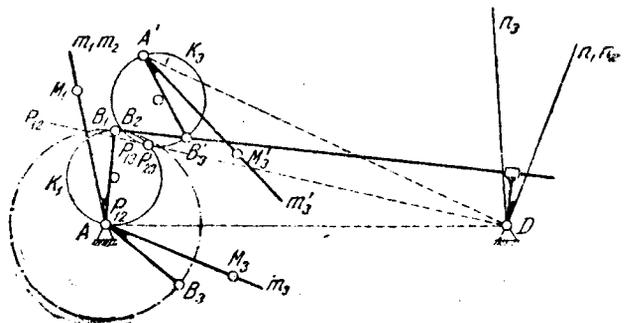


Фиг. 319.

вращения B_1A с перпендикуляром, восстановленным из середины B_1B_3' . Задаваясь длиной шатуна BC вместо кривошипа AB , мы должны будем для решения задачи применить указанные выше геометрические места.

Можно построить для той же цели кулисный механизм. Пусть заданы два положения кулисы: мёртвое Dn_1n_2 и другое Dn_3 (фиг. 320) и соответствующие

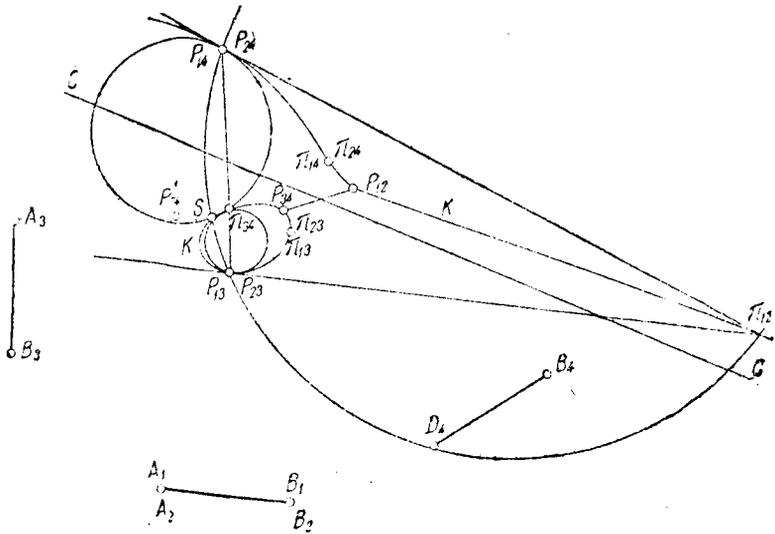
положения плоскости кривошипа Am_1m_2 и Am_3 . Строим относительное положение плоскости кривошипа Am_3 в виде $A'm_3$, определяем, как было указано, полюсы P_{12}, P_{13}, P_{23} и круг k_1 . На этом круге берём произвольную точку B_1 ; другое положение этой точки B_3' лежит на круге k_3 . Точка пересечения кругов k_1 и k_3 , или ортоцентр H_{123} , оказалась очень близко к B_1 , а потому для большей точности находим B_3' для



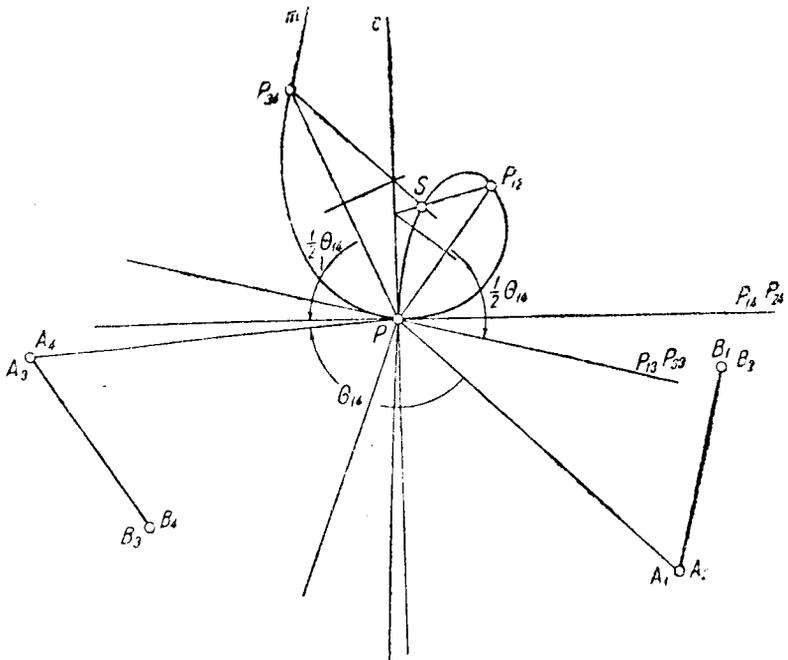
Фиг. 320.

проведения прямой B_1B_3' , которая и будет осью шатуна в мёртвом положении, как хорда B_1H_{123} (точка H_{123} ввиду близости её к B_1 не показана на чертеже) она перпендикулярна к AB_1 , ибо H_{123} есть точка, диаметрально противоположная A на круге k_1 . В результате мы получим механизм AB_1D .

Пусть теперь заданы три положения подвижной плоскости относительно мёртвого положения другой подвижной плоскости отрезками $A_1B_1 \approx A_2B_2, A_3B_3$ и A_4B_4 (фиг. 321) и полюсом P_{12} . По-предыдущему строим полюсную прямую $P_{13}P_{23}$ и аналогично — полюсную прямую $P_{14}P_{24}$. Полюс P_{34} определяется обычным путём, а полюс P_{34}^1 — как точка, симметричная P_{34} относи-



Фиг. 321;



Фиг. 322.

тельно $P_{13}P_{14}$. Обычным путём находим точки π_{12} , $\pi_{13} \approx \pi_{23}$, $\pi_{14} \approx \pi_{24}$; что касается точки π_{34} , то её положение на $P_{13}P_{14}$ определяется так. Из предыдущей главы (см. стр: 183) мы знаем, что эта точка соответствует точке P_{34}^1 , т. е. есть центр круга, проходящего через P_{34}^1 , P_{34}^2 и P_{34} ; но P_{34}^1 и P_{34}^2 совпадают, а нормаль к перемещению $P_{34}^1 P_{34}^2$ есть $P_{12}P_{34}^1$, следовательно, π_{34} находится в пересечении $P_{13}P_{14}$ и $P_{12}P_{34}^1$. Две пары противоположностей P_{12} , P_{34} и P_{13} , P_{24} определяют кривую Бурместера, которая будет иметь, вообще говоря, обычный вид нераспадающейся кривой; единственной особенностью её будет касание прямых $P_{13}P_{23}$ и $P_{14}P_{24}$. Для построения этой кривой находим среднюю линию s , проходящую через середины $P_{13}P_{24}$ и $P_{12}P_{34}$, и центр пучка лучей как точку S пересечения кругов, описанных вокруг треугольников $P_{13}P_{14}\pi_{12}$, $P_{13}P_{23}\pi_{34}$ и $P_{14}P_{24}\pi_{34}$; последние два круга проходят через точку π_{34} и касаются прямых $P_{13}P_{23}$ и $P_{14}P_{24}$ соответственно.

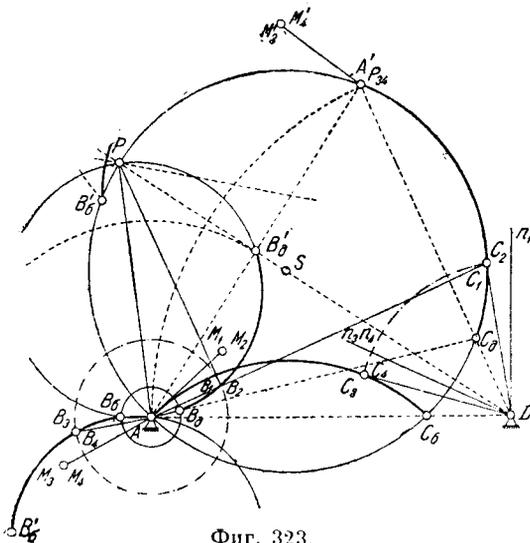
При помощи кривой Бурместера решаются задачи, указанные в предыдущей главе.

Предположим теперь, что заданы два мёртвых положения некоторой подвижной плоскости и два соответствующих положения другой подвижной плоскости. Тогда определяем относительные положения этой второй плоскости относительно одного из мёртвых положений первой. Пусть эти положения определены отрезками $A_1B_1 \approx A_3B_2$ и $A_3B_3 \approx A_4B_4$ при соответствующих полюсах P_{12} и P_{34} (фиг. 322). Остальные полюсы P_{13} , P_{23} , P_{14} , P_{24} совпадут в одну точку, обозначенную просто буквой P . Полюсные прямые $P_{13}P_{23}$ и $P_{14}P_{24}$ определяются, как было указано раньше, по углу $\frac{1}{2}\theta_{13} = \frac{1}{2}\theta_{14}$. Для

построения кривой Бурместера проводим среднюю линию s через P и середину $P_{12}P_{34}$, а центр S находим следующим образом: из середины PP_{12} возставляем перпендикуляр до пересечения его с s в O_{12} , а из середины PP_{34} — перпендикуляр до пересечения с s в O_{34} , после чего точка S находится как точка пересечения $P_{12}O_{12}$ и $P_{34}O_{34}$. Кривая имеет двойную точку в P .

Применим этот метод к построению кривошипно-коромыслового механизма по двум мёртвым положениям. Пусть эти положения заданы лучами Dn_1n_2 и Dn_3n_4 , а соответствующие положения кривошипа — отрезками AM_1M_2 и AM_3M_4 (фиг. 323). Совмещая Dn_3n_4 с Dn_1n_2 , получим вместо AM_3M_4 отрезок $A'M_3M_4'$ и для двух положений AM_1M_2 и $A'M_3M_4'$ построим полюсы и кривую Бурместера. Полюс P_{12} будет в точке A , а полюс P_{34} — в точке A' ; остальные полюсы будут в точке P пересечения биссектрисы угла ADA' с перпендикуляром в середине M_1M_3 .

Кривая Бурместера должна иметь двойную точку в P симметричного расположения полюсов P_{12} и P_{34} относительно прямой PD последняя служит средней линией кривой Бурместера, а центр S будет центром круга, проходящего через P , P_{12} , P_{34} , а это означает, что кривая Бурместера распадается на прямую PD и этот круг. При этом прямая есть геометрическое место центров кругов, проходящих через точки A и A' , а потому из даль-

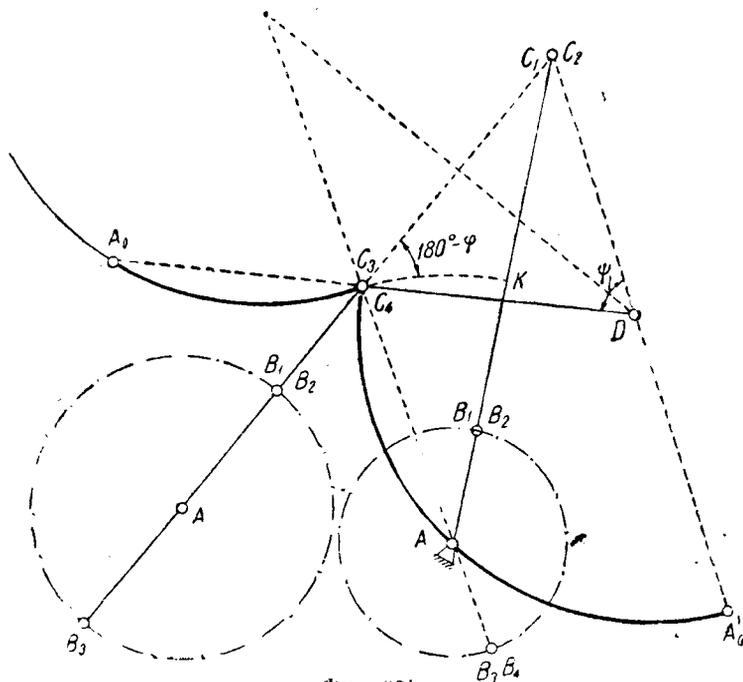


Фиг. 323.

и проходить через A , A' и D . Вследствие симметричного расположения полюсов P_{12} и P_{34} относительно прямой PD последняя служит средней линией кривой Бурместера, а центр S будет центром круга, проходящего через P , P_{12} , P_{34} , а это означает, что кривая Бурместера распадается на прямую PD и этот круг. При этом прямая есть геометрическое место центров кругов, проходящих через точки A и A' , а потому из даль-

нейшего рассмотрения исключается; таким образом, геометрическим местом искомой точки C_1C_2 будет определённый выше круг. Аналогично найдём, что геометрическим местом второго мёртвого положения C_3C_4 будет также круг, именно — симметричный с предыдущим относительно AD . Однако, не все точки этих кругов могут быть использованы, так как должно быть еще выполнено условие Грасгофа. Предельные положения найдём из следующих соображений. Наибольшее значение радиуса кривошипа равно длине шатуна, а это случится, когда точка C_1C_2 окажется в A' ; соединяя A' с A , получим предельное значение AB'_D радиуса кривошипа. Наименьшее значение этого радиуса получится, если взять точку C_d пересечения DA' с окружностью; соединяя C_d с A , получим второе предельное значение AB_d этого радиуса. Этот кривошип в другом положении AB_6 соответствует мёртвому положению DC_6 коромысла, когда все четыре точки A, B, C, D лежат на одной прямой, т. е. механизм обращается в предельный. Найденные области искомых точек показаны на чертеже толстыми линиями. Взяв точку C_1C_2 в этой области и соединяя её с A , получим механизм AB_1C_1D в дальнем мёртвом положении. Проведя дуги C_1C_2 из центра D , найдём на другом круге точку C_3C_4 , а соединяя её с A , найдём механизм AB_2C_3D в ближнем положении.

Задача эта может быть решена без помощи полюсов на основании следующих соображений. Прежде всего обратим внимание на то, что абсолютная величина заданного расстояния AD несущественна для решения задачи, так



Фиг. 324.

как она всё равно откладывается в масштабе; поэтому можно задаться другим размером, например радиусом DC коромысла, а по окончании решения, когда будет найдено расстояние AD , определить масштаб чертежа так, чтобы это расстояние было равно заданному. Во-вторых, для решения задачи имеют значение только угол поворота коромысла между мёртвыми положениями, т. е. угол размаха его, и соответствующий угол поворота кривошипа. Поэтому поступаем так. Из точки D (произвольной точки чертежа) проводим два радиуса $DC_1C_2 = DC_3C_4$ произвольной величины под углом ϕ один к дру-

тому, где ϕ — заданный угол размаха коромысла (фиг. 324). Затем на отрезке C_1C_3 строим два сегмента, вмещающих угол $180^\circ - \varphi$, где φ — угол поворота кривошипа при переходе коромысла из одного мёртвого положения в другое. На этих сегментах и должна быть выбрана точка A , после чего определится как расстояние AD , так и расстояния AC_1 и AC_3 ; но

$$AC_1 = l + r, \quad AC_3 = l - r,$$

а потому радиус кривошипа

$$r = \frac{1}{2} (AC_1 - AC_3),$$

а длина шатуна

$$l = \frac{1}{2} (AC_1 + AC_3).$$

Это приводит к следующему построению: из A проводим дугу радиусом AC_3 до пересечения в K с AC_1 ; тогда $r = \frac{1}{2} KC_1$. Точка A на сегменте не может быть, однако, взята произвольно, но лишь от точки C_3 до точек A_0 и A'_0 , представляющих точки пересечения DC_3 и DC_1 с сегментами. Эти области указаны на чертеже толстыми линиями¹⁾.

Задание угла размаха коромысла представляет весьма обычный случай при проектировании механизма питания или подачи материала. Что же касается соответствующего угла поворота кривошипа, то он определяет время прямого и обратного хода коромысла при равномерном вращении кривошипа. В самом деле, время прямого хода, за который мы будем считать перемещение из ближнего мёртвого положения в дальнее, равно:

$$t_{\text{пр}} = \frac{\varphi}{\omega},$$

а время обратного хода:

$$t_{\text{об}} = \frac{2\pi - \varphi}{\omega};$$

их отношение, называемое коэффициентом обратного хода, равно:

$$k_{\text{об}} = \frac{t_{\text{об}}}{t_{\text{пр}}} = \frac{2\pi - \varphi}{\varphi} = \frac{2\pi}{\varphi} - 1.$$

Если задан этот коэффициент, то

$$\varphi = \frac{2\pi}{1 + k_{\text{об}}}.$$

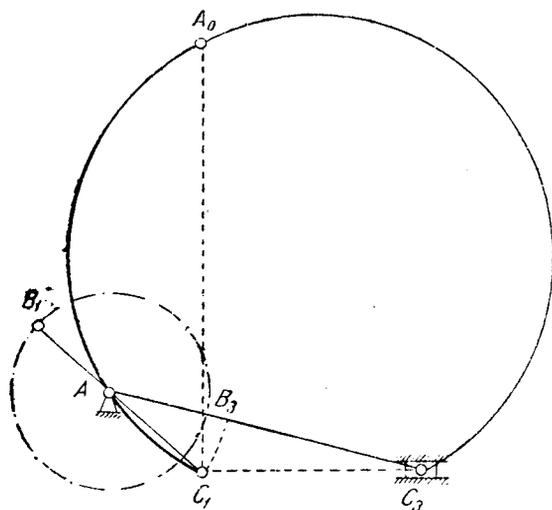
Предыдущая задача упрощается при задании равного времени прямого и обратного хода, т. е. при $k_{\text{об}} = 1$. В таком случае центр A надо взять просто из прямой C_1C_3 , а радиус кривошипа будет равен $\frac{1}{2}C_1C_3$.

Аналогично решается задача о построении кривошипно-шатунного механизма по заданным мёртвым точкам ползуна C_1 и C_3 и соответственному углу поворота кривошипа φ (фиг. 325). Здесь геометрическим местом центров A будет также сегмент, построенный на C_1C_3 и вмещающий угол $180^\circ - \varphi$, причём достаточно ограничиться одним сегментом, так как другой даёт симметричный механизм; крайней точкой используемой дуги сегмента будет точка пересечения его с перпендикуляром к C_1C_3 в C_1 .

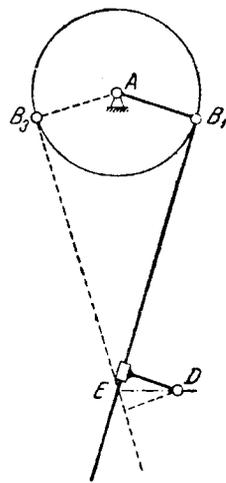
В кулиском механизме угол размаха кулисы всегда равен углу, дополняющему до 180° соответствующий угол поворота кривошипа (фиг. 326). Поэтому задание угла размаха кулисы равносильно заданию коэффициента обратного

¹⁾ Предлагаемое нами здесь решение имеет, по нашему мнению, преимущество большей простоты перед решениями немецких авторов.

хода: Для построения механизма по такому заданию проводим в круге кривошипа два радиуса AB_1 и AB_3 , под углом, соответствующим заданию, и в точках B_1 и B_3 — касательные к кругу кривошипа, дающие точку E пересечения. Центр D должен быть выбран на внешней равноделящей угла



Фиг. 325.

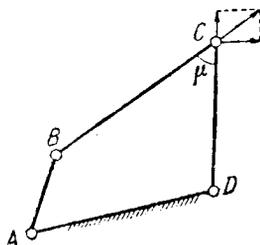


Фиг. 326.

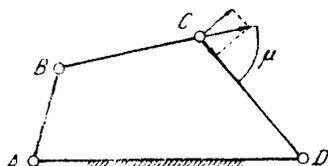
B_1EB_3 , причём достаточно ограничиться точками по одну сторону E , так как точки по другую сторону дают механизмы, симметричные первым. Если взять центром самую точку E , то получим механизм с симметричным движением кулисы; такой механизм обычно и применяется на практике.

§ 46. Задание угла передачи¹⁾.

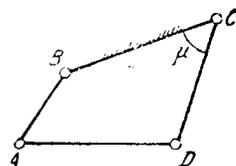
Углом передачи в шарнирном четырёхзвеннике будет угол между осями (линиями шатуна и ведомого звена, если этот угол острый (фиг. 327), или дополнительный к нему до 180° , если он тупой (фиг. 328)). Значение этого угла известно: при очень малой его величине передача может оказаться или неспокойной или даже вовсе невозможной вследствие малой слагающей в направлении движения и большой радиальной слагающей, увеличивающей сопротивление трения в опоре, как указано на фиг. 327, 328. Поэтому целесообразно задаваться наименьшим углом передачи.



Фиг. 327.



Фиг. 328.

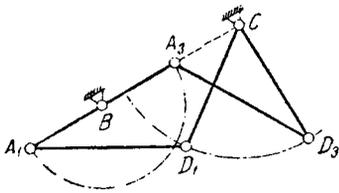


Фиг. 329.

Для выяснения вопроса о тех положениях механизма, в которых угол передачи получается наименьшим, обратим движение, сделав шатун стойкой (фиг. 329). Тогда угол передачи превратится в угол отклонения ведомого

¹⁾ Этот вопрос разработан нами. Ср. Alt H.: Der Übertragungswinkel und seine Bedeutung für das Konstruieren periodischer Getriebe. Werkstattstechnik, 1932.

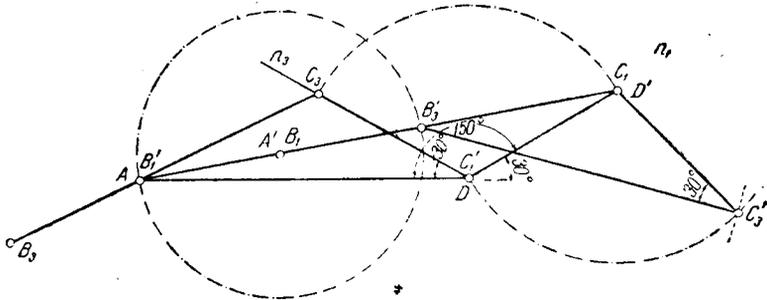
взвешен с. стойки, или угол, дополненный к нему до 180° . Мы знаем, что этот угол достигает минимума в мёртвых положениях; поэтому задача построения механизма по наименьшему углу передачи сводится к построению механизма по мёртвым положениям и затем к обращению этого механизма. Эти положения для кривошипно-коромыслового механизма при ведущем кривошипе и ведомом коромысле соответствуют расположению кривошипа на линии центров (фиг. 330), что следует из указанного выше соотношения с мёртвыми положениями.



Фиг. 330.

Пусть, например, мы задались наименьшим углом передачи в 30° , это соответствует отклонению коромысла от стойки в двух мёртвых положениях, равным 30° и 150° . Построим по этим данным кривошипно-коромысловый механизм, задаваясь длиной коромысла и откладывая $DC_1 = DC_3$ (фиг. 331) под этими углами к AD . По величинам AC_1 и AC_3 находим радиус кривошипа и длину шатуна и, таким образом, находим два положения механизма AB_1C_1D и AB_3C_3D . Ставим теперь механизм на B_1C_1 ; тогда первое положение нового механизма будет $A'B_1C_1D'$. Для получения второго положения строим на B_3D' треугольник $B_3D'C_3'$, равный треугольнику AC_3D ; второе положение механизма будет $A'B_3C_3'D$.

Вопрос о наименьшем угле передачи может быть поставлен и в отношении кривошипно-шатунного механизма. Здесь этим углом будет угол между осевой

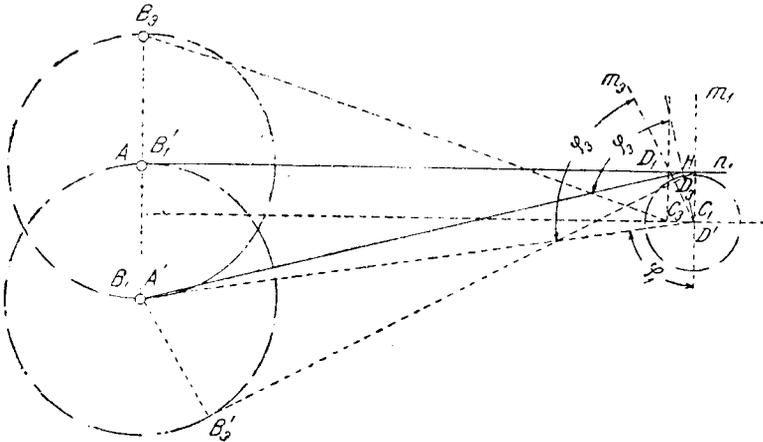


Фиг. 331.

линией шатуна и перпендикуляром к линии движения ползуна. Он достигает наименьших значений при положениях кривошипа AB_1 и AB_3 , перпендикулярных к линии движения ползуна (фиг. 332); это будут углы φ_1 и φ_3 . При обращении движения постановкой механизма на шатун мы получаем кулисный механизм $A'B_1D'$, в котором кулиса направлена по $D'm$, а шатун — по $B_1'n_1$; в этом положении угол отклонения кулисы от линии центров $A'D'$ равен углу φ_1 и будет наименьшим, так как кулиса находится в мёртвом положении. Второе мёртвое положение есть $A'B_3D_3$; в нём кулиса $D'm_3$ отклонена от линии центров $A'D'$ на угол, равный φ_3 , так как фигура $A'D_3B_3$ равна фигуре $B_3C_3D_1A$.

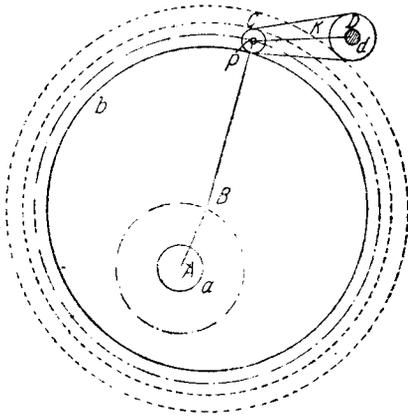
Поэтому, если заданы наименьшие углы передачи φ_1 и φ_3 для кривошипно-шатунного механизма, то мы откладываем их при произвольной точке D' в разные стороны. Затем на общей стороне берём произвольную точку A' и опускаем из неё перпендикуляр $A'H$ на равноуделяющую угла $m_3D'm$, а из H опускаем перпендикуляры на $D'm_1$ и $D'm_3$; основания этих перпендикуляров определяют на $D'm_1$ и $D'm_3$ отрезки, равные смещению центра A , самый же этот центр берётся на пересечении $Hn_1 \perp D'm_1$ и $A'A \parallel D'm_1$.

Таким образом определяется кривошипно-шатунный механизм AB_1C_1 в положении наименьшего угла φ_1 ; второе положение AB_2C_2 строится по точке B_2 , диаметрально противоположной B_1 .
 В виде другого примера решим задачу об определении подходящих размеров шарнирного четырёхзвенника для бесступенчатого редуктора Vasanta¹⁾.

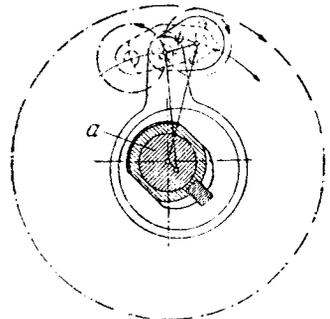


Фиг. 332.

Основной частью этого редуктора является механизм, передающий вращение от ведущего вала a (фиг. 333) к валу d , от которого уже идёт передача к ведомому валу, соосному с a , не показанная на чертеже. На валу a эксцентрично насажен диск b с круговым пазом, внутри которого катается ролик p , сидящий на конце рычага k , а последний составляет одно целое с валом d . При непрерывном вращении вала a рычаг k совершает колебательное движение.



Фиг. 333.



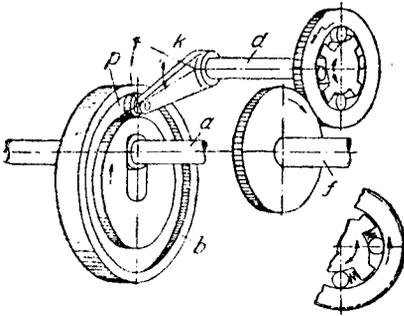
Фиг. 333а.

ние, а потому дальнейшая передача от вала d к ведущему валу устроена по принципу «свободного хода», т. е. с передачей лишь в одном направлении. Таких рычагов k и валов d имеется пять штук, и все они передают вращение одному ведомому валу; вследствие разницы фаз колебания рычагов, накладываясь одно на другое, дают практически равномерное движение, уравнива-

¹⁾ В о с к А.: Fortschritte in der Konstruktion stufenlos regelbarer Übersetzungsgetriebe, Maschinenbau, Nov. 1937.

емое, кроме того, инерцией вращающихся масс. Бесступенчатое регулирование заключается в том, что эксцентриситет диска b может быть изменён на ходу (фиг. 333а), вследствие чего изменяется передаточное отношение редуктора.

Общее расположение звеньев механизма показано на фиг. 334.



Фиг. 334.

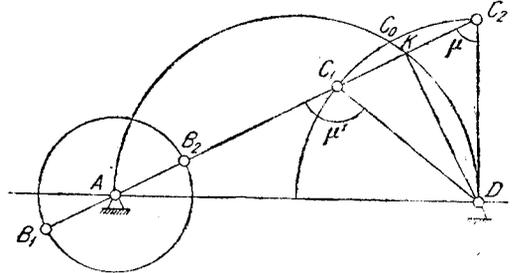
Механизм эквивалентен шарнирному четырёхзвеннику $ABCD$, у которого кривошипом является эксцентриситет $AB = r$, шатуном — радиус l средней окружности канавки, коромыслом — длина рычага R и стойкой — расстояние L центров валов a и d . Последнее, равно как и R , выбирается наперёд, радиус r изменяется в определённых пределах, так как передаточное число может быть, принято приблизительно равным $r : R$; остаётся подобрать величину l , исходя из следующих соображений. Наименьшие колебания скорости теоретически получаются при одинаковом времени размаха коромысла в обе стороны.

Поэтому, строго говоря, для каждого значения r следовало бы взять своё значение l , что можно сделать, если на AD как на диаметре построить полукруг (фиг. 335), а из D как из центра описать дугу радиусом R ; точка C_0 их пересечения соответствует $r = 0$, кака-либо другая точка K между C_0 и D даёт длину $l = AK$.

соответствующую $r = \frac{1}{2} C_1 C_2$.

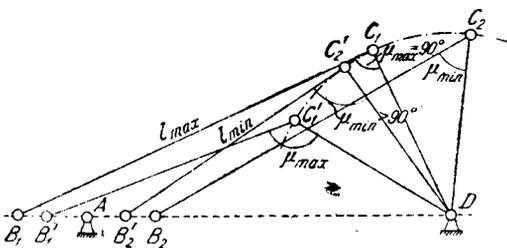
При этом получаются углы μ и μ' в мёртвых положениях. Определим теперь пределы для выбора l , т. е. l_{\max} и l_{\min} , исходя из условий

$$\mu \leq 90^\circ, \mu' \geq 90^\circ.$$

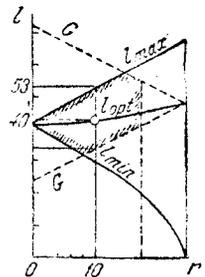


Фиг. 335.

С этой целью возьмём на дуге коромысла произвольную точку C_1 (фиг. 336) и проведём в ней касательную $C_1 B_1$, которая и даст l_{\max} для $r = AB_1$; при этом μ_{\min} получим, если отложим $AB_2 = AB_1$ и сделаем $B_2 C_2 = = B_1 C_1$. Взяв другую точку C_2 , определим таким же образом $C_2 B_2 = l_{\min}$, соот-



Фиг. 336.



Фиг. 337.

ветствующий $r = AB_2$; при этом μ'_{\max} получим при точке C_2 . Проведя ряд таких построений, получим диаграмму (фиг. 337) для l_{\max} , l_{\min} и l_{opt} . Кроме того, по условию Грасгофа имеем:

$$L + R - r \geq l \geq L + r - R,$$

что даёт на диаграмме две прямые G , ограничивающие область возможных l . Наконец, задаваясь ещё $\mu = 45^\circ$ и $\mu' = 135^\circ$ в мёртвых точках, получим угол размаха коромысла в 90° , вследствие чего для g найдём наибольшее значение:

$$g_{\text{наиб}} = R \sin 45^\circ.$$

В результате для выбора подходящей длины l будем иметь на диаграмме заштрихованную область. В этой области можно подобрать такую ординату для l , которая давала бы с одной стороны горизонтальный отрезок, соответствующий заданным пределам передаточного числа и наиболее близкий к линии $l_{\text{орт}}$, т. е. наиболее приближающий передачу к равномерной.

§ 47. Задание равенства радиусов кривизны в двух и трёх положениях.

Предположим, что нам известно движение плоскости в самой себе, так что для каждого положения мы знаем мгновенный полюс и круг перегиба и будем искать точки, для которых радиусы кривизны траекторий одинаковы в нескольких положениях. Начнём с двух положений.

Как это было показано выше, для всякого положения движущейся плоскости можно построить кривую Альта, каждая точка которой имеет в данном положении заданный радиус кривизны своей траектории. Зададимся поэтому каким-либо радиусом кривизны ρ и построим эти кривые для положений плоскости E_1 и E_2 ; обозначим их через c_1 и c_2 . Перенесём теперь c_2 из E_2 в E_1 так, чтобы соответственные точки совпали (это удобнее всего сделать посредством кальки), и назовём перенесённую кривую через c'_2 . Тогда точки пересечения c_1 и c'_2 дадут те точки E_1 , которые будут иметь радиус кривизны ρ как в первом, так и во втором положениях. Задаваясь другим ρ и повторяя указанное построение, мы найдём ещё точки с равными радиусами кривизны в двух положениях. Таким образом, мы можем построить геометрическое место точек, обладающих требуемым свойством.

Построение этого геометрического места может быть выполнено без помощи кривых c_1 и c'_2 , но по его уравнению, которое получится посредством исключения ρ из уравнений c_1 и c'_2 :

$$\begin{aligned} (x_1^2 + y_1^2)^2 &= \rho^2 (x_1^2 + y_1^2 - d_1 y_1)^2; \\ (x_2^2 + y_2^2)^2 &= \rho^2 (x_2^2 + y_2^2 - d_2 y_2)^2. \end{aligned}$$

Здесь x_1, y_1 — координаты точек кривой c_1 , отнесённой к полюсу P_1 как к началу и к кругу перегиба k_1 диаметра d_1 , а x_2, y_2 — координаты точек кривой c'_2 , отнесённой к полюсу P'_2 , т. е. к полюсу P_2 , перенесённому в E_1 , и к кругу перегиба k'_2 , т. е. к кругу перегиба k_2 диаметра d_2 , перенесённому также в E_1 . Исключение ρ даёт:

$$\frac{(x_1^2 + y_1^2)^3}{(x_2^2 + y_2^2)^3} = \frac{(x_1^2 + y_1^2 - d_1 y_1)^2}{(x_2^2 + y_2^2 - d_2 y_2)^2}. \quad (133)$$

Чтобы привести уравнение к одним осям координат, например к первым, надо положить:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_{P_1} + x_1 \cos \varphi_1 - y_1 \sin \varphi_1; \\ y_2 &= y_{P_1} + x_1 \sin \varphi_1 + y_1 \cos \varphi_1; \end{aligned}$$

отсюда

$$\begin{aligned} x_2^2 + y_2^2 &= x_{P_1}^2 + y_{P_1}^2 + x_1^2 + y_1^2 + 2(x_{P_1} \cos \varphi_1 + y_{P_1} \sin \varphi_1) x_1 + \\ &+ 2(-x_{P_1} \sin \varphi_1 + y_{P_1} \cos \varphi_1) y_1. \end{aligned}$$

Вследствие этого старшие члены в обеих частях (133) будут одинаковы и равны $(x_1^2 + y_1^2)^5$, а потому сократятся; таким образом, уравнение будет не 40-й степени, как может показаться сначала, а 9-й. Кривая может быть по-

строена посредством двух пучков кругов, которые получим, полагая

$$\frac{(x_1^2 + y_1^2)^3}{(x_2^2 + y_2^2)^3} = \frac{(x_1^2 + y_1^2 - d_1 y_1)^2}{(x_2^2 + y_2^2 - d_2 y_2)^2} = k^6.$$

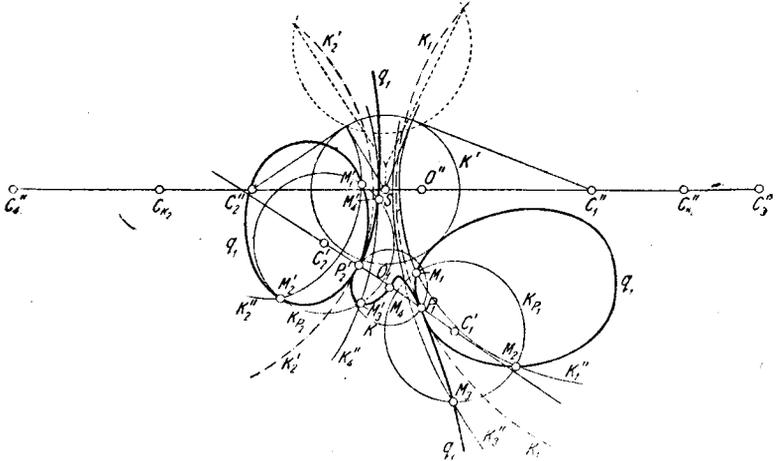
Первый пучок определяется уравнением:

$$x_1^2 + y_1^2 = k^2 (x_2^2 + y_2^2),$$

а второй — уравнением:

$$x_1^2 + y_1^2 - d_1 y_1 = \pm k^2 (x_2^2 + y_2^2 - d_2 y_2).$$

Давая k одно и то же значение, мы выделим из каждого пучка круги, пересечение которых даст точки искомого геометрического места. Покажем, как строить эти круги.



Фиг. 338.

Центры кругов первого пучка лежат на прямой P_1P_2 вне этого отрезка; расстояния центров кругов k_{P_1} и k_{P_2} (фиг. 338) от середины O' отрезка $P_1P_2 = a$ равны:

$$O'C'_1 = O'C'_2 = \frac{a}{2} \cdot \frac{k^3 + 1}{k^2 - 1},$$

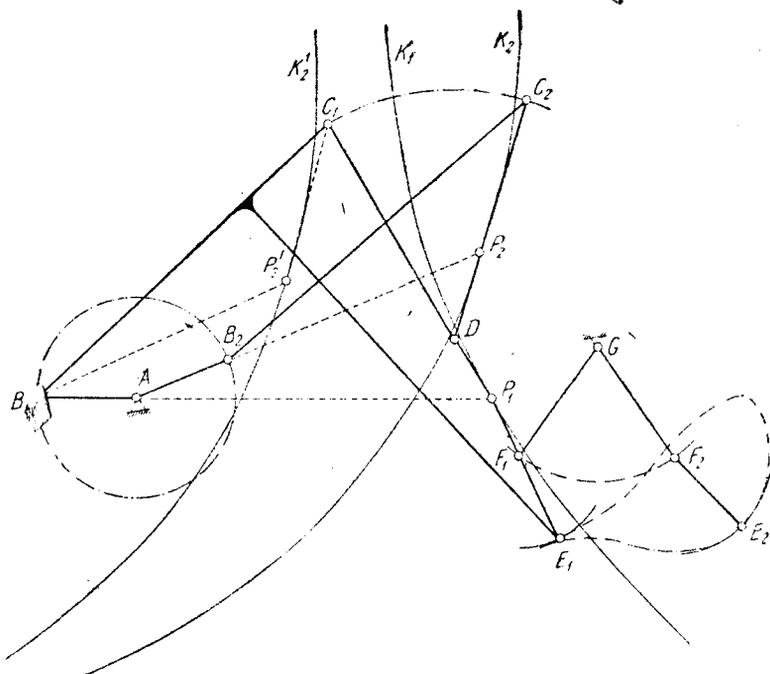
радиусы этих кругов равны длине касательной, проведённой из центра к кругу k , построенному на P_1P_2 как на диаметре. Соответствующие круги второго пучка имеют центры на прямой центров C_{k_1} и C_{k_2} кругов перегиба k_1 и k_2 ; их расстояние от середины O'' отрезка $C_{k_1}C_{k_2} = b$ равно:

$$O''C''_1 = O''C''_2 = \frac{b}{2} \cdot \frac{k^3 + 1}{k^3 - 1},$$

а радиусы определяются прохождением всех кругов через точки пересечения кругов k_1 и k_2 , если эти точки действительные. Если же они — мнимые (как у нас на чертеже), то строим круг k' , пересекающий ортогонально круги k_1 и k_2 , для чего проводим произвольный круг, пересекающий оба эти круга, и из точки пересечения общих хорд опускаем перпендикуляр на $C''_1C''_2$; основание S этого перпендикуляра будет центром искомого круга k' , а его радиус будет равен касательной, проведённой из S к кругам k_1 или k_2 . Радиусы кругов k''_1 и k''_2 из центров C''_1 и C''_2 равны касательным из C''_1 и C''_2 соответственно к кругу k' . Так как переменна знака при k не изменяет расстояний $O'C'_1 = O'C'_2$, но изменяет расстояния $O''C''_1 = O''C''_2$, то каждому кругу k_{P_1} и k_{P_2}

соответствуют два круга второго лучка; поэтому для одного абсолютного значения k получаем восемь точек кривой, обозначенных на чертеже M_1, M_2, M_3, M_4 (на круге k_{P_1}) и M'_1, M'_2, M'_3, M'_4 (на круге k_{P_2}). Таким построением получена кривая q_1 , состоящая из двух овалов и ветви, простирающейся в бесконечность; оба овала касаются третьей ветви и кругов k_1 и k'_2 в полюсах P_1 и P'_2 .

Применим этот метод к построению механизма с двумя остановками, производимого от шатуна уже имеющегося шарнирного четырёхзвенника, причём требуется, чтобы остановки были вблизи данных положений AB_1C_1D и AB_2C_2D



Фиг. 339.

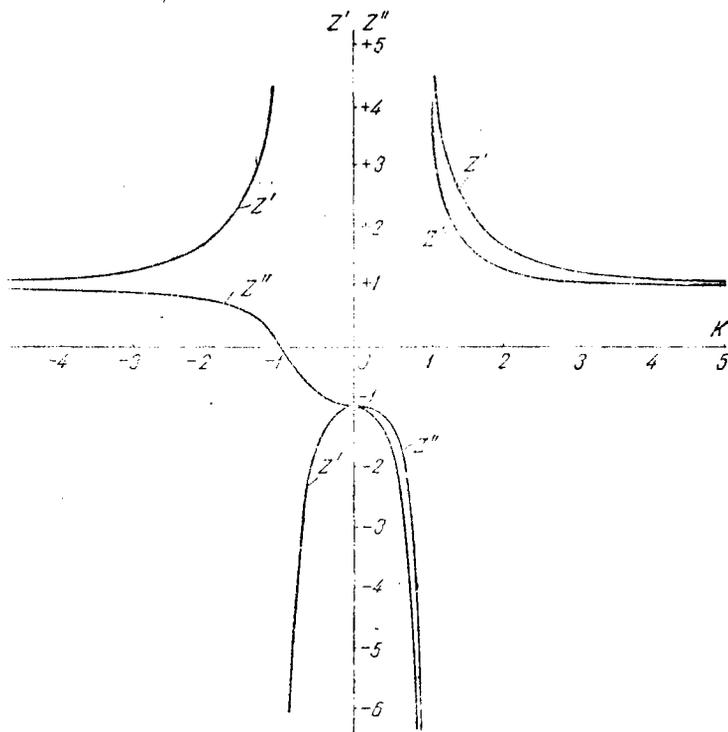
(фиг. 339). Находим полюсы P_1 и P_2 и круги перегиба k_1 и k_2 и переносим P_2 и k_2 в первое положение, где они обозначены P'_2 и k'_2 . Строим далее кривую q_1 (для взятого примера это будет та самая кривая, которая построена на фиг. 338), причём для облегчения построения дан график функций (фиг. 340)

$$z' = \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1} \quad \text{и} \quad z'' = \frac{k^3 + 1}{k^3 - 1}.$$

На этой кривой взята точка E_1 , рассматриваемая как точка шатунной плоскости, найден центр F_1 кривизны траектории и присоединена диада E_1F_1G . Коромысло GF будет иметь остановки в положении GF_1 с GF_2 . Показана также траектория точки E для суждения о продолжительности остановок.

Если желательно иметь касание высшего порядка, то в подвижной плоскости можно построить кривую Бурместера для первого положения и найти точки пересечения её с кривой q_1 ; одна из них и должна быть взята за точку E_1 . Однако, во втором положении эта точка, вообще говоря, не будет лежать на кривой Бурместера для второго положения плоскости, а потому здесь будет касание лишь второго порядка, между тем как в первом положении оно будет третьего порядка.

Так как для двух положений получается геометрическое место точек, удовлетворяющих поставленному условию равенству радиусов кривизны, то можно поставить это условие для трёх положений. Тогда придется построить



Фиг. 340.

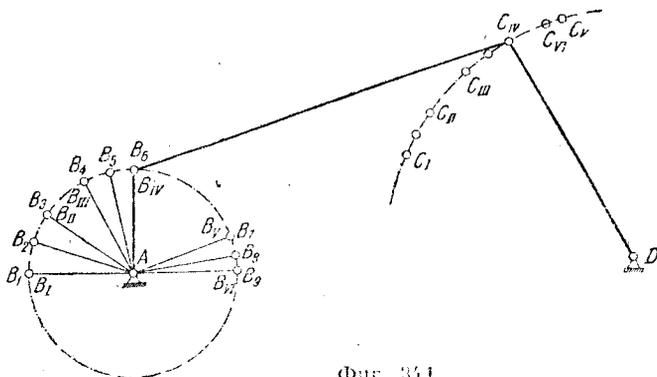
кривую q_{12} для положений 1 и 2 и кривую q_{13} для положений 1 и 3; точки их пересечения дадут те точки шатуновой плоскости, которые будут иметь одинаковые радиусы кривизны в трёх положениях, а потому могут быть использованы для построения механизма с тремя остановками.

48. Задание равенства радиусов конечных дуг в двух и трёх местах траектории.

Механизмы с остановками, построенные по принципу предыдущего параграфа, не обеспечивают определённой продолжительности остановок, так как кривизна траектории в данном положении, будучи равна кривизне в другом положении, может резко измениться в ближайших положениях. Для установления наперёд заданной продолжительности мы применим тот же метод, который был указан в предыдущей главе для построения механизма с одной остановкой. Пусть требуется от имеющегося шарнирного четырёхзвенника сделать привод к качающемуся коромыслу, которое должно иметь две остановки в заданных промежутках движения ведущего звена, например, между положениями AB_I и AB_{II} кривошина первая остановка, а между положениями AB_{III} и AB_{IV} — вторая (фиг. 341). В таком случае в каждом интервале берём ещё по одному промежуточному положению, так что всего получается шесть положений, которые мы обозначим так: $AB_1 \approx AB_I$, AB_2 , $AB_3 \approx AB_{II}$, $AB_4 \approx AB_{III}$, AB_5 , $AB_6 \approx AB_{IV}$. Зададимся определённым радиусом круга, на котором должны лежать положения 1, 2, 3 некоторой точки шатуна BC , и построим геометрическое место точек, обладающих этим свойством (кривые R_1 Альта) в положении B_1C_1 ; затем сделаем то же для положений 4, 5, 6, т. е.

построим кривую R_4 Альта для того же выбранного радиуса и перенесём эту кривую в первое положение, обозначив её как кривую R_4^1 . Так как эти кривые представляют шатунные кривые определённого вида, зависящие только от величины выбранного радиуса и положения полюсов, то кривую R_4^1 можно

строить непосредственно в первом положении, перенеся туда полюсный треугольник $P_{45}P_{46}P_{56}$. Точки пересечения кривых R_1 и R_4^1 дадут точки M шатунной плоскости в первом её положении, для которых как M_1, M_2, M_3 , так и M_4, M_5, M_6 лежат на кругах одинакового заданного радиуса. Беря последовательные значения



Фиг. 341.

радиуса и строя соответствующие им кривые R_1 и R_4^1 , найдём в первом положении шатунной плоскости геометрическое место точек, две тройки положений которых 1, 2, 3 и 4, 5, 6 лежат на кругах одинакового радиуса.

Уравнения кривых R_1 и R_4^1 , отнесённых каждая к своему полюсному треугольнику, будут:

$$\begin{aligned} (x_1^2 + y_1^2) [(x_1 - k_1)^2 + y_1^2] [(x_1 - l_1)^2 + (y_1 - m_1)^2] &= \\ &= r^2 (x_1^2 + y_1^2 - l_1 x_1 - l_1 \operatorname{ctg} \gamma_1 \cdot y_1)^2, \\ (x_2^2 + y_2^2) [(x_2 - k_2)^2 + y_2^2] [(x_2 - l_2)^2 + (y_2 - m_2)^2] &= \\ &= r^2 (x_2^2 + y_2^2 - l_2 x_2 - l_2 \operatorname{ctg} \gamma_2 \cdot y_2)^2. \end{aligned}$$

Исключая из них r и замечая аналогично сказанному в предыдущем параграфе, что старшие члены десятого порядка, имеющие вид $(x_1^2 + y_1^2)^3$, сокращаются, получим уравнение девятой степени. Таким образом, и эта кривая, которую мы по Альту назовём кривой S_1 , подобно кривой q_1 , есть кривая девятого порядка. Однако, построение её пучками кругов оказывается невозможным вследствие более сложного состава левой части её уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{(x_1^2 + y_1^2) [(x_1 - k_1)^2 + y_1^2] [(x_1 - l_1)^2 + (y_1 - m_1)^2]}{(x_2^2 + y_2^2) [(x_2 - k_2)^2 + y_2^2] [(x_2 - l_2)^2 + (y_2 - m_2)^2]} &= \\ &= \frac{(x_1^2 + y_1^2 - l_1 x_1 - l_1 y_1 \operatorname{ctg} \gamma_1)^2}{(x_2^2 + y_2^2 - l_2 x_2 - l_2 y_2 \operatorname{ctg} \gamma_2)^2}. \end{aligned}$$

Приравнявая каждое отношение произвольному числу k^2 , мы нашли бы два пучка кривых, из которых только второй состоял бы из кругов, а первый из некоторых кривых шестого порядка, построение которых представило бы больше трудностей, чем построение кривых R_1 .

Если желательно иметь более точную остановку, то между AB_I и AB_{II} можно взять два промежуточных положения, обозначив AB_I через AB_1 , промежуточные положения — через AB_2 и AB_3 , AB_{II} через AB_4 , AB_{III} через AB_5 , промежуточное положение — через AB_6 и AB_{IV} — через AB_7 . Затем для положений 1, 2, 3, 4 построим кривую Бурместера k_1 , пересечение которой с кривой s_1 даст искомые точки. Таким образом, более точная остановка получится лишь для интервала $AB_I - AB_{II}$.

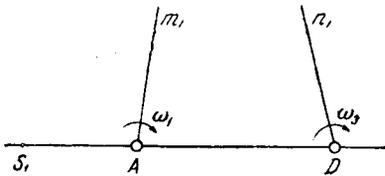
В данном случае можно обойтись и без кривой s_1 , а поступить следующим образом. Построив кривую k_1 , определим для ряда точек этой кривой радиусы соответствующих кругов и построим диаграмму этих радиусов по дуге кривой k_4 (см. стр. 186). Затем для этих же точек в положениях 5, 6, 7 найдём радиусы кругов, проходящих через эти тройки, и нанесём диаграмму этих радиусов на первую диаграмму. Точки пересечения диаграмм определяют те точки кривой k_1 , которые будут пригодны для поставленной цели.

Если требуется иметь три остановки, например в интервалах $AB_I - AB_{II}$, $AB_{III} - AB_{IV}$ и $AB_V - AB_{VI}$, то берём ещё по одному промежуточному положению в каждом интервале, в результате чего получим три тройки положений: $AB - AB_2 - AB_3$, $AB_4 - AB_5 - AB_6$ и $AB_7 - AB_8 - AB_9$.

Строим, как указано выше, кривую s_{12} для первой и второй троек положений, а затем вторую кривую s_{13} — для первой и третьей троек положений. Точки пересечения обеих кривых определит точки шатуновой плоскости в её первом положении, пригодные для поставленной цели. Впрочем и здесь можно обойтись без второй кривой s_{13} , если построить диаграмму радиусов по дуге s_{12} и диаграмму соответствующих радиусов для троек 7, 8, 9; точки пересечения диаграмм дадут положение искомым точек на кривой s_{12} .

§ 49. Задание передаточного отношения¹⁾.

Передаточным отношением, как известно, называется отношение угловых скоростей двух каких-либо звеньев механизма. Для шарнирного четырёхзвенника наибольшее практическое значение имеют угловые скорости звеньев, вращающихся вокруг постоянных центров (двух кривошипов или кривошипа и коромысла, или двух коромысел). Передаточное отношение этих звеньев по известной теореме Виллиса равно обратному отношению расстояний их относительного мгновенного центра от постоянных центров, причём это отношение берётся со знаком плюс при внешнем расположении мгновенного центра по отношению к отрезку между постоянными центрами и со знаком минус — при внутреннем его расположении. Задание передаточного отношения в одном положении представляет одно дополнительное условие. Поэтому для двух заданных положений можно задать передаточное отношение в обоих положениях и ещё останется возможность выбора пятого условия; при трёх заданных положениях можно задать передаточное отношение в двух положениях, отчего задача получит уже определённое решение. Наконец, при четырёх заданных положениях можно задать передаточное отношение только в одном положении.



Фиг. 342.

Пусть для соответствующих положений вращающихся звеньев, определяемых лучами Am_1 и Dn_1 , задано передаточное отношение $i_{13} = \frac{\omega_1}{\omega_3}$ (фиг. 342); это определяет на прямой AD точку S_1 по условию:

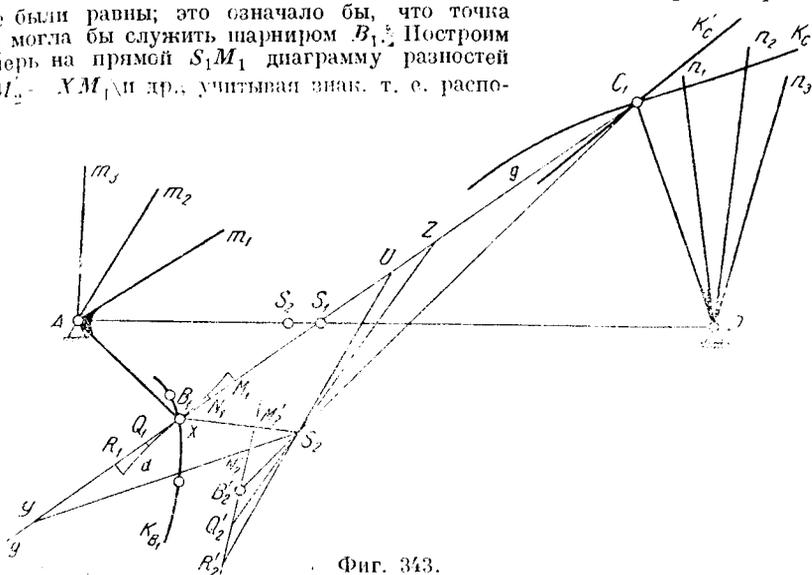
$$\frac{S_1D}{S_1A} = i.$$

Через эту точку и должна проходить осевая линия шатуна в данном положении.

Рассмотрим случай задания двух положений Am_1, Am_2 и Dn_1, Dn_2 (фиг. 343) и двух передаточных отношений, определяющих на линии AB две точки S_1 и S_2 . Для построения механизма требуется найти точки B и C в каком-либо положении, например, в первом. С этой целью проводим через S_1 произвольную прямую gg и берём на ней ряд точек M_1, N_1, Q_1, R_1 , которые будем считать принадлежащими звену Am_1 . Построим известным способом положение этих точек во втором положении по отношению к первому положению звена Dn_1 ; это будут точки M'_2, N'_2, Q'_2, R'_2 . Для точки S_2 также най-

¹⁾ Предлагаемое здесь нами решение даётся вместо указанного Alt II. в цит. выше соч.: «Zur Synthese...».

дём положение S'_2 , которое определит осевые линии шатуна $M'_2S'_2$, $N'_2S'_2$, $Q'_2S'_2$, $R'_2S'_2$. Пересечение их с прямой S_1M_1 даёт точки X , Y , Z , U , которые могли бы быть приняты за точки C_1 , если бы расстояния XM'_2 и XM_1 и другие были равны; это означало бы, что точка M_1 могла бы служить шарниром B_1 . Построим теперь на прямой S_1M_1 диаграмму разностей $XM'_2 - XM_1$ и др., учитывая знак, т. е. распо-

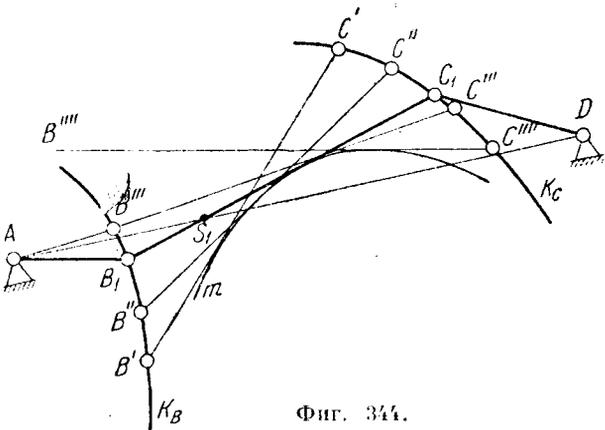


Фиг. 343.

ложение точек X , Y , Z , U относительно S_1 ; эта диаграмма обозначена на чертеже буквой d , а пересечение её с прямой S_1M_1 даёт положение точки B_1 , так как в этом случае $B'_2C_1 = B_1C_1$.

Таким образом, на каждой прямой, проходящей через S_1 , существуют определённые точки B_1 и C_1 для постановки шатуновых шарниров. Мы можем, следовательно, найти геометрическое место точек B_1 на звене Am_1 и точек C_1 на звене Dn_1 ; это будут кривые k_B и k_C .

Если задано ещё третье положение Am_3 и Dn_3 , то, построив указанные выше геометрические места k_B и k_C , найдём в плоскости звена Dn_1 кривую k'_C , соответствующую кривой k_B , т. е. геометрическое место центров кругов, проходящих через тройки положений точек кривой k_B ; точки



Фиг. 344.

пересечения этой кривой k'_C с кривой k_C укажут места постановки шарнира C_1 , а соответствующие им точки кривой k_B — места шарниров B_1 .

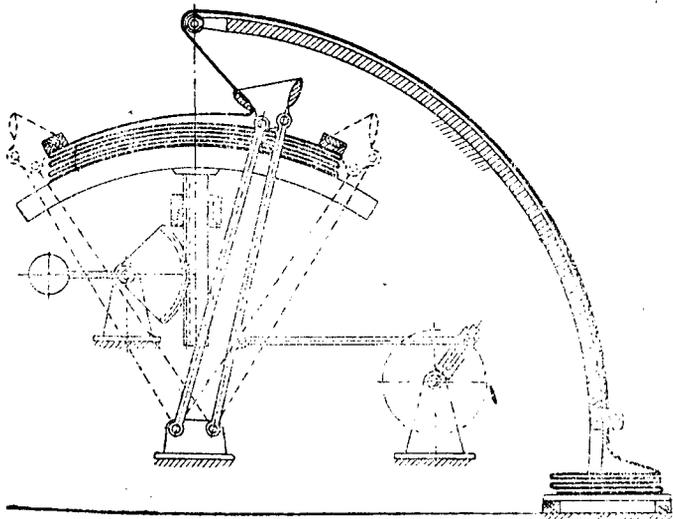
Пусть теперь заданы четыре соответственных положения звеньев, вращающихся вокруг центров A и D (фиг. 344). Тогда мы можем построить для

первого положения каждого звена кривую Бурместера; пусть это будут k_B и k_C , на которых намечены соответствующие точки: $B' - C'$, $B'' - C''$ и т. д. По условию заданного передаточного отношения одна из этих прямых BC должна проходить через точку S_1 ; чтобы найти эту прямую, построим кривую m , огибающую прямые $B'C'$, $B''C''$ и т. д., а из точки S_1 проведём касательную к ней, которая и определит на k_B требуемую точку B_1 , а на k_C — требуемую точку C_1 .

IX. СИНТЕЗ МНОГОЗВЕННЫХ МЕХАНИЗМОВ.

§ 50. Общю соображения.

Необходимость прибегать к многозвенным механизмам, т. е. к механизмам более чем с четырьмя звеньями, диктуется многими соображениями.



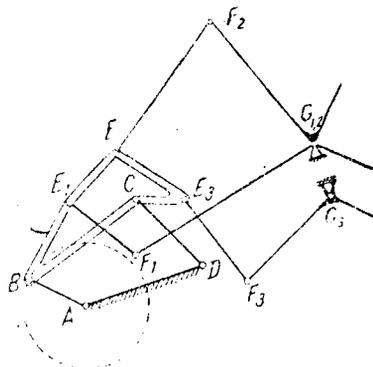
Фиг. 345.

Во-первых, часто приходится делать новый привод от уже существующего механизма, выполняющего определённую функцию, для получения других операций, например для приведения в движение конденсационного насоса к паровой маншине или компрессора к двигателю Дизеля. Если такой привод делается от главного вала или вообще от звена, сочленимого со стойкой, то присоединённые звенья вместе с этим звеном и стойкой можно рассматривать как отдельный механизм независимо от главного. Но иногда бывает легче выполнить конструктивно механизм присоединением новых звеньев к шатуну; так, например, конструируются V-образные и звездообразные авиационные моторы, приводы к компрессору в двигателях Дизеля и др. Здесь приходится учитывать движение всех звеньев. Такой случай мы уже имели при синтезе механизмов с остановками.

Во-вторых, может оказаться, что спроектированный для заданной цели механизм не содержит непрерывно вращающегося звена, а потому от вала

сообщить движение ему можно только при помощи промежуточных звеньев. Таков, например, укладочный механизм для тканей (фиг. 345). Или в построенном механизме используется только некоторая область его движения, как это имеет место в направляющих механизмах, где существенную роль играет лишь прямолинейная часть траектории. В таком случае передача движения этому механизму от главного вала должна быть сделана посредством промежуточных звеньев. Таков, например, механизм машины для лошения кож (фиг. 346), представляющий в основном направляющий механизм с прямолинейным участком траектории точки E , приводимый в попеременно-возвратное движение на этом участке от вала при помощи шатуна BC .

В-третьих, иногда требуется одновременно или в определенной последовательности совершать несколько операций, например в автоматах. В таких случаях не-



Фиг. 347а.



Фиг. 347б.

зресообразно иметь один главный механизм с разветвлениями, осуществляющими заданные движения, вместо постановки нескольких механизмов по одному на каждую операцию. Пример такого механизма для четырех движений с их диаграммами приведен на фиг. 347.

Наконец, многозвеньевые механизмы вообще заключают больше параметров, чем четырёхзвеньевые, а потому здесь больше простора для осуществления заданного движения, т. е. можно поставить большее число требований к этому движению.

§ 51. Условие неестественности¹⁾

Если к существующему механизму присоединяются новые звенья, то помимо тех требований, которым должно удовлетворять движение этих звеньев по заданию, необходимо соблюсти требование, чтобы присоединяемые звенья не стесняли движения первоначального механизма. Мы рассмотрим здесь лишь случай присоединения диады, один внешний шарнир которой соединяет её со стойкой, а другой — со звеном, не примыкающим к стойке. Случай присоединения диады к двум подвижным звеньям может быть приведен к предыдущему путём постановки механизма на одно из звеньев присоединения. Если найдены траектории двух точек этого звена, то легко может быть построена относительная траектория любой точки любого звена. Итак, будем считать, что центр одного внешнего шарнира описывает известную траекторию (фиг. 348). Эта траектория будет описана полностью, если наибольшее расстояние неподвижного центра от траектории будет меньше суммы длин звеньев диады, а наименьшее расстояние этого центра от той же траектории — больше разно-

¹⁾ Это решение даётся нами на основе идей, изложенных в нашей работе «Построение траекторий для плоских шарнирных механизмов» (Труды Военной воздушной академии, сборник № 18 за 1937 г.).

сти тех же длин. Оба эти расстояния расположены по нормальям к траектории. Поэтому, если задан центр, что имеет место в случае передачи движения кривошину или коромыслу, то находим наибольшее и наименьшее расстояния центра путём проведения из него кругов, касающихся траектории. Пусть эти величины будут равны r_{\max} и r_{\min} ; тогда длины звеньев диады x и y должны удовлетворять условию:

$$x + y > r_{\max}, \quad x - y < r_{\min}.$$

откуда

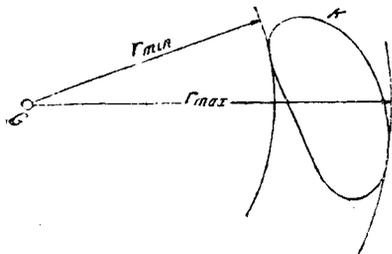
$$y > \frac{1}{2} (r_{\max} - r_{\min});$$

таково условие для меньшего звена y . Если обозначить $y = \frac{1}{2} (r_{\max} - r_{\min}) = \alpha$, то для большего звена x получим:

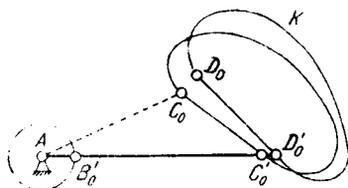
$$\frac{1}{2} (r_{\max} + r_{\min}) + \alpha > x > \frac{1}{2} (r_{\max} + r_{\min}) - \alpha.$$

Если же выбраны длины звеньев диады, то строим для траектории две эквидистанты — по сумме и разности этих длин и определяем область для постановки центра между этими эквидистантами.

Если спроектированный механизм должен приводиться от вала, не входящего в его состав, то условие нестесненности должно быть соблюдено для этого вала. Пусть, например, построен механизм, дающий шатунную кривую k (фиг. 349) и требуется дать попеременно-возвратное движение только на участке $D_0 - D'_0$. Принимаем точки D_0 и D'_0 за мёртвые точки и, если конструктивно возможно, соединяем их шатуном с кривошином AB ; если же точка D для этого окажется непригодной (например, в приведённой выше



Фиг. 348.



Фиг. 349.

доильной машине, где в точке D должен быть поставлен инструмент), то выбираем соответствующий участок $C_0 - C'_0$ траектории другой точки C и строим шатун BC . Если никаких других условий не поставлено, то центр A может быть взят произвольно, и тогда радиус кривошипа r и длина шатуна l определяются по уравнениям:

$$l + r = AC_0, \quad l - r = AC'_0.$$

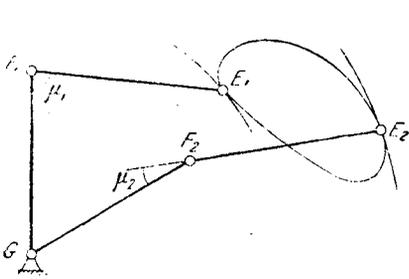
Если же поставлено условие sobstности заданное отношение средней скорости обратного хода, то по этому отношению определяем угол поворота кривошипа за время прохождения данного участка и строим на $C_0C'_0$ сегменты, вмещающие этот угол и представляющие геометрическое место возможных центров A . При задании равновременности прямого и обратного хода центр A должен быть взят на прямой $C_0C'_0$.

§ 52. Задание угла передачи ¹⁾.

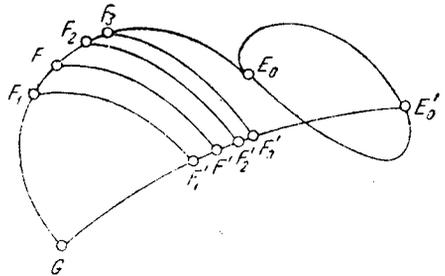
Условия нестесненности могут оказаться недостаточными для возможности передачи движения присоединяемым звеньям. Как раз в положениях наиболь-

¹⁾ Разработано нами.

и наименьшего удаления шатушной кривой от центра вращения нового звена получаются наименьшие углы передачи между звеньями диады (фиг. 350); они не должны быть слишком малы. Если мы ими зададимся, например по 30°

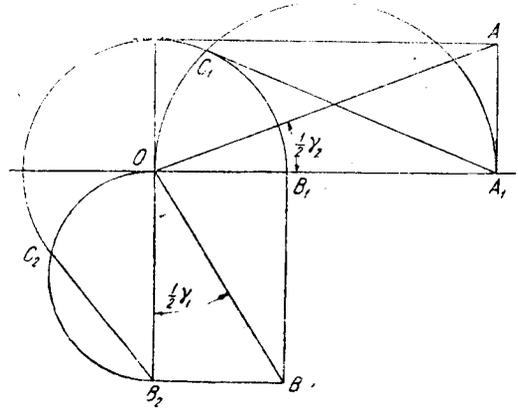


Фиг. 350.



Фиг. 351.

в каждом положении, то при задании длин звеньев диады получаем r_{\max} и r_{\min} как третьи стороны треугольников, две стороны которых равны этим длинам и заключают углы 150° и 30° соответственно. Найдя таким образом r_{\max} и r_{\min} , строим по ним эквидистанты, пересечение которых даёт положение центра G. Если же нам задан этот центр G, то по нему находим r_{\max} и r_{\min} . Как было указано в предыдущем параграфе, и строим на этих величинах сегменты, вмещающие заданные углы передачи (фиг. 351). Засекая затем из G эти сегменты дугами разных радиусов, определяем расстояния E_0F_1 и $E'_0F'_1$, E_0F_2 и $E'_0F'_2$ и т. д. Путём графической интерполяции найдём такое значение FG, при котором окажется $E_0F = E'_0F'$; это и будут искомые длины звеньев диады.



Фиг. 352.

Эти длины можно также выразить формулами через $r_{\max} = a$, $r_{\min} = b$ и углы γ_1 и γ_2 из треугольников E_0FG и $E'_0F'G$:

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos \gamma_1 = a^2, \quad x^2 + y^2 - 2xy \cos \gamma_2 = b^2;$$

решая эти уравнения, найдём:

$$x = \frac{\sqrt{a^2 \cos^2 \frac{1}{2} \gamma_2 - b^2 \sin^2 \frac{1}{2} \gamma_1} + \sqrt{b^2 \cos^2 \frac{1}{2} \gamma_1 - a^2 \sin^2 \frac{1}{2} \gamma_2}}{2 \sqrt{\cos \gamma_2 + \cos \gamma_1}},$$

$$y = \frac{\sqrt{a^2 \cos^2 \frac{1}{2} \gamma_2 - b^2 \sin^2 \frac{1}{2} \gamma_1} - \sqrt{b^2 \cos^2 \frac{1}{2} \gamma_1 - a^2 \sin^2 \frac{1}{2} \gamma_2}}{2 \sqrt{\cos \gamma_2 + \cos \gamma_1}}$$

Эти формулы нетрудно построить.

С этой целью проводим две перпендикулярные оси Ox и Oy (фиг. 352) и векторы $OA = a$ и $OB = b$ под углами $\frac{1}{2} \gamma_2$ и $\frac{1}{2} \gamma_1$ соответственно. Тогда

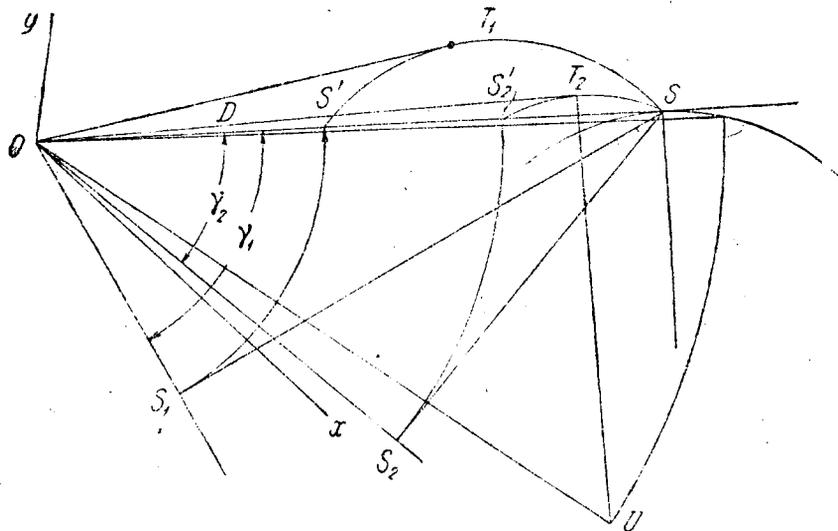
$OA_1 = a \cos \frac{1}{2} \gamma_2$, $OB_1 = b \sin \frac{1}{2} \gamma_1$. Построив на OA_1 полукруг и засекая его радиусом OB_1 из O , получим точку C_1 , определяющую

$$A_1C_1 = R_1 = \sqrt{a^2 \cos^2 \frac{1}{2} \gamma_2 - b^2 \sin^2 \frac{1}{2} \gamma_1}.$$

Аналогично получаем:

$$B_2C_2 = R_2 = \sqrt{b^2 \cos^2 \frac{1}{2} \gamma_1 - a^2 \sin^2 \frac{1}{2} \gamma_2}.$$

Величины $s = R_1 + R_2$ и $d = R_1 - R_2$ дают числители для выражений x и y . Если теперь отложить $OS = s$ (фиг. 353) и спроектировать на прямые под углами γ_1 и γ_2 , то получим $OS_1 = s \cos \gamma_1$ и $OS_2 = s \cos \gamma_2$; снося эти про-



Фиг. 353.

екции на OS по дугам из O , найдём точки S'_1 и S'_2 ; проведя через S' и S_1 окружность и к ней касательную из O , найдём:

$$OT_1 = \sqrt{s^2 \cos \gamma_1};$$

аналогично найдём:

$$OT_2 = \sqrt{s^2 \cos \gamma_2}.$$

Построив на катетах OT_1 и OT_2 прямоугольный треугольник, найдём гипотенузу:

$$OU = c = \sqrt{OT_1^2 + OT_2^2} = s \sqrt{\cos \gamma_1 + \cos \gamma_2}.$$

Поэтому

$$x = \frac{\sqrt{s^2}}{2} \cdot \frac{s}{\sqrt{\cos \gamma_1 + \cos \gamma_2}} = \frac{\sqrt{s^2}}{2} \cdot \frac{s^2}{c};$$

величина $\frac{s^2}{c}$ строится известным способом, а коэффициент $\frac{\sqrt{s^2}}{2}$ означает, что надо взять половину диагонали квадрата, построенного на $\frac{s^2}{c}$. Таким образом получено $OX = x$.

Аналогично по $OD = d$ построено $OY = y$.

При построении механизмов с остановками по указаниям предыдущих глав надо всегда проверять результат не только на условие нестесненности, но и на угол передачи. Последнее условие покрывает первое.

Из полученных формул для x и y видно, что выбор углов γ_1 и γ_2 стеснен величинами a и b , а именно, должно быть:

$$a \cos \frac{1}{2} \gamma_2 > b \sin \frac{1}{2} \gamma_1,$$

$$b \cos \frac{1}{2} \gamma_1 > a \sin \frac{1}{2} \gamma_2;$$

из этих соотношений следует:

$$\cos \frac{1}{2} \gamma_1 \cos \frac{1}{2} \gamma_2 > \sin \frac{1}{2} \gamma_1 \sin \frac{1}{2} \gamma_2,$$

т. е.

$$\gamma_1 + \gamma_2 < 180^\circ,$$

что обычно и имеет место. Если же выбрано $\gamma_2 = \gamma_1 = \gamma$, то второе неравенство даёт:

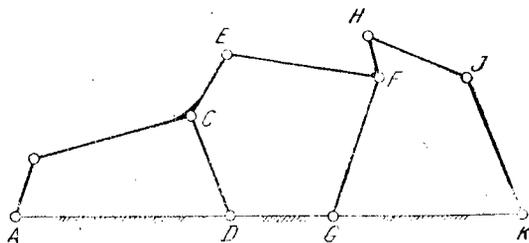
$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma < \frac{b}{a},$$

а так как $a > b$, то первое неравенство при этом удовлетворяется.

53. Использование шатунных кривых.

Уже для шестизвенных механизмов шатунные кривые получаются более высокого порядка, чем шестой. Это ведёт, с одной стороны, к возможности касания более высокого порядка с прямой и кругом, чем пятый, а с другой стороны — к большему разнообразию кривых. В частности, если шатунные кривые четырёхзвенников могли дать только приближённое ведение по прямой и кругу, то при помощи шести и восьмизвенных механизмов возможно осуществить точное приближённое и круговое движение. Практически впрочем это преимущество теряется вследствие неизбежных зазоров и деформаций, которые при большем числе шарниров оказывают больше влияния на точность движения, так что в конце концов теоретически точное движение может оказаться в действительности менее точным, чем теоретически приближённое.

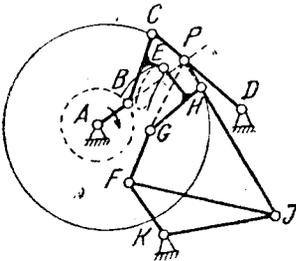
Относительно же касания высших порядков надо сказать следующее. Выведенные в первой главе условия такого касания хотя и прилагались только к движению шатуна четырёхзвенника, но имеют общее значение для всякого плоского движения. Поэтому, если уже построен шестизвенный механизм $ABCDEF$ (фиг. 354), например как механизм с остановками, то для движения плоскости шатуна EF можно в каждом положении найти центр кривизны траектории любой точки, кривую Бурместера для касания третьего порядка и точки Бурместера для касания четвёртого порядка. Так как для точки F центр кривизны всегда находится в G , а для точки



Фиг. 354.

E он определяется по точкам A, B, C, D , то центр кривизны траектории какой-либо точки H найдётся по точкам E, F и их центрам кривизны. Если точка E лежит на кривой Бурместера для шатуна BC , то точка H будет лежать на кривой Бурместера шатуна EF , которая, как известно, строится по полюсу и двум точкам. Если E будет точкой Бурместера, то и H будет такой точкой. Если, наконец, точка E окажется точкой Бурместера с касанием пятого порядка, то такое же касание произойдёт

и в точке H ; это, как мы знаем, может случиться только в некоторых положениях. Касание порядка выше пятого для шатуна невозможно, между тем для шатуна EF оно а priori возможно; но для нахождения такого касания надо ещё удовлетворить некоторым условиям, что до сих пор ещё не выяснено. Остаётся путь эмпирического подбора такой точки H , траектория которой на-глаз достаточно хорошо и на большом участке совпадает с кругом; тогда, присоединяя диаду HJK , где J — центр кривизны траектории точки H , а K — неподвижная точка, получим в этом положении продолжительную остановку коромысла JK .



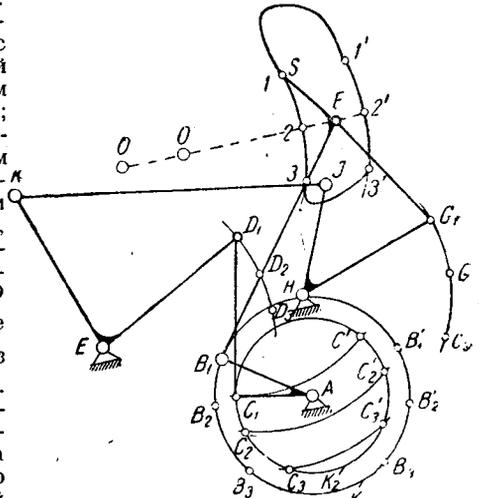
Фиг. 355.

Чтобы он не стеснил этого движения и в дальнейшем, укрепляют звено FJ на опоре при помощи шарнира K ; тогда во всё время совпадения траекторий звено FJK будет неподвижно, а в остальное время будет качаться на шарнире K , следовательно, в данном положении оно будет иметь остановку.

§ 54. Метод геометрических мест.

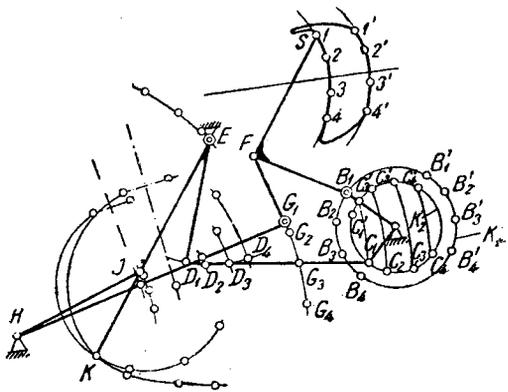
Вместо искания касания высших порядков можно задаваться большим числом точек шатунной кривой с дополнительными условиями. Пусть, например, требуется построить шатунную кривую, проходящую через шесть данных точек, по три на кругах одинакового радиуса (фиг. 356) в последовательности $1-2-3-3'-2'-1'$.

Выберем центр A и радиус AB круга кривошипа K_1 произвольно, но с тем, чтобы из всех шести положений точки S можно было сделать на нём засечки некоторым радиусом SB ; пусть эти засечки определяют положения $B_1, B_2, B_3, B_3', B_2', B_1'$. Проведём второй круг кривошипа K_2 для какой-либо точки его C и отметим соответствующие положения $C_1, C_2, C_3, C_3', C_2', C_1'$. Выберем затем произвольную длину шатуна CD и определим точку D_1 на расстоянии CD от C_1 и C_1' , точку D_2 на таком же расстоянии от C_2 и C_2' и точку D_3 на таком же расстоянии от C_3 и C_3' . В центре E круга, проходящего через D_1, D_2, D_3 , ставим опорный шарнир для коромысла ED . Затем на шатуне BS берём произвольную точку E' и строим её шесть положений $F_1, F_2, F_3, F_3', F_2', F_1'$; по этим положениям строим три точки G_1, G_2, G_3 , как по шести положениям точки C строили три положения точки D , и определяем центр H второго коромысла HG . Остаётся соединить оба коромысла шатуном JK при трёх парах соответственных положений их, что делается согласно указаниям главы VII. На чертеже показана вся траектория точки S ; она позволит устроить две остановки.



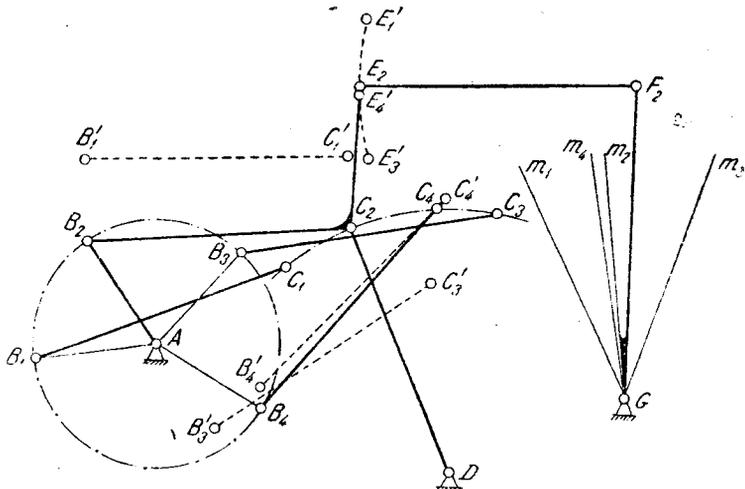
Фиг. 356.

Для более точных остановок можно задать на дугах по четыре точки: $1, 2, 3, 4; 4', 3', 2', 1'$ (фиг. 357). Круги k_1 и k_2 можно выбрать попережно произвольно с указанным выше ограничением. Для точки B получим восемь положений: $B_1, B_2, B_3, B_4, B_4', B_3', B_2', B_1'$, и для точки C соответственно $C_1, C_2, C_3, C_4, C_4', C_3', C_2', C_1'$. Теперь надо подобрать длину CD так, чтобы положения D_1, D_2, D_3, D_4 , при условии $D_1 C_1 = D_1' C_1', D_2 C_2 = D_2' C_2'$ и т. д. лежали на одном круге. С этой целью дадим величине CD последовательный ряд значений и найдём геометрическое место центров кругов, проходящих через D_1, D_2, D_3 и D_1, D_2, D_4 ; точка их пересечения определит центр E круга, проходящего через D_1, D_2, D_3, D_4 . Таким образом определится размер CD и DE . Затем на шатуне BS берём произвольную точку F и аналогично предыдущему находим точки G_1, G_2, G_3, G_4 , лежащие на одном круге с центром H . Остаётся соединить оба коромысла шатуном JK при заданных четырёх парах их соответственных положений согласно указаниям главы VIII.



Фиг. 357.

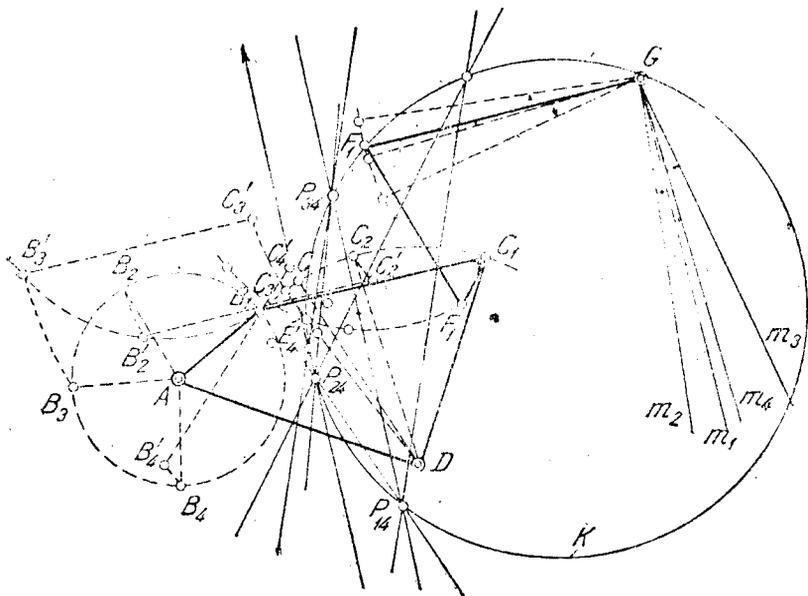
Решим теперь следующую задачу. От шатуна данного шарнирного четырёхзвенника $ABCD$ (фиг. 358) требуется сделать отвод посредством



Фиг. 358.

второго шатуна к коромыслу с центром вращения G при условии соответствия четырёх положений этого коромысла Gm_1, Gm_2, Gm_3, Gm_4 четырём заданным положениям кривошипа AB_1, AB_2, AB_3, AB_4 . Для нахождения точек E и F , в которых надо поставить шарниры для соединительного шатуна, найдём четыре абсолютных положения шатуна $B_1 C_1, B_2 C_2, B_3 C_3, B_4 C_4$ и их относительные положения $B_1' C_1', B_2' C_2', B_3' C_3', B_4' C_4'$, как обычно, т. е. поворотом фигур $B_1 C_1 Gm_1, B_3 C_2 Gm_3$ и $B_4 C_4 Gm_4$ вокруг G до совпадения

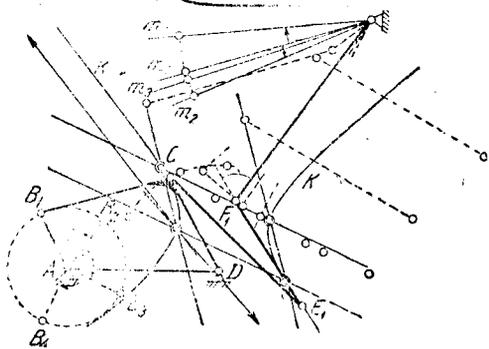
Gm_1, Gm_3 и Gm_4 с Gm_2 . Для этих четырёх относительных положений построим кривую Бурместера; подходящим образом выбранная точка этой кривой даст точку E_2 , а центр круга, проходящего через E_1, E_2, E_3, E_4 , — точку F_2 . Таким образом, задача решена в общем виде.



Фиг. 359.

Частные, более простые, решения этой задачи получаются, если мы имеем возможность построить в основной четырёхзвенник $ABCD$, приспособив его движение к нашей задаче. Пусть, например, нам заданы лишь четыре положения кривошипа AB_1, AB_2, AB_3, AB_4 , соответствующие четырём положениям ведомого коромысла Gm_1, Gm_2, Gm_3, Gm_4 (фиг. 359). Тогда выбираем три направления шатуна B_1n_1, B_2n_2, B_3n_3 , образующих произвольные, но равные углы с Gm_1, Gm_2, Gm_3 соответственно. Берём на этих прямых

точки C_1, C_2, C_3 и проводим через них круг с центром D ; четвёртая точка C_4 получится запиской из B_4 радиусом $B_1C_1 = B_2C_2 = B_3C_3$. Если теперь построить относительные положения шатуна $B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3, B_4C_4$, то три из них окажутся параллельными, вследствие чего кривая Бурместера окажется кругом k , проходящим через полюсы P_{14}, P_{24}, P_{34} , как это было указано в главе УИ. Взяв на этом круге произвольную точку F_1 и описав из неё дугу радиусом, равным радиусу круга, проходящего через B_1, B_2, B_3 , найдём на том же круге k точку E'_4 ; другие точки, E_1, E_2, E_3 получаются как точки,

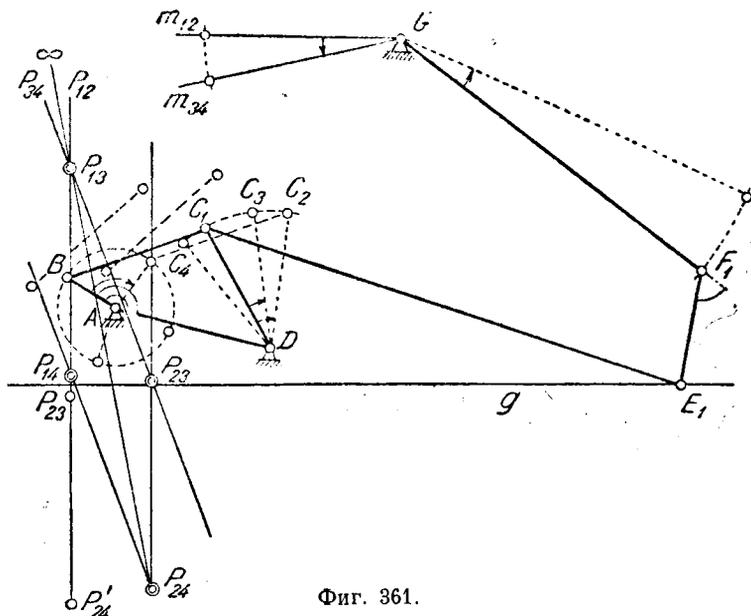


Фиг. 360.

соответственные E'_4 в положениях B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3 . Все четыре точки E_1, E_2, E_3, E_4 должны лежать на одном круге с центром F . Таким образом получится второй шатун E_1F_1 и коромысло F_1Gm_1 .

Вместо трёх параллельных положений можно задаться четырьмя попарно параллельными положениями. Для этого через точки B_1 и B_2 круга кривошипа (фиг. 360) проводим прямые B_1n_1 и B_2n_2 под произвольными, но равными углами к соответственным положениям Gm_1 и Gm_2 ведомого коромысла, а через точки B_3 и B_4 того же круга — прямые B_3n_3 и B_4n_4 под другими, но тоже равными между собой углами к Gm_3 и Gm_4 . Тогда относительные положения $Gm_1 \parallel G'm'_1$ и $G'm'_3 \parallel Gm'_4$. Для таких положений кривая Бурместера обращается в равностороннюю гиперболу k , произвольная точка которой E может служить местом постановки шарнира на шатуне B_1C_1 . Соответствующая ей точка F_1 в плоскости коромысла укажет место постановки другого шарнира.

В следующем примере задача упрощается ещё более вследствие задания положения Gm_1 и Gm_2 совпадающими, равно как и положений Gm_3 и Gm_4



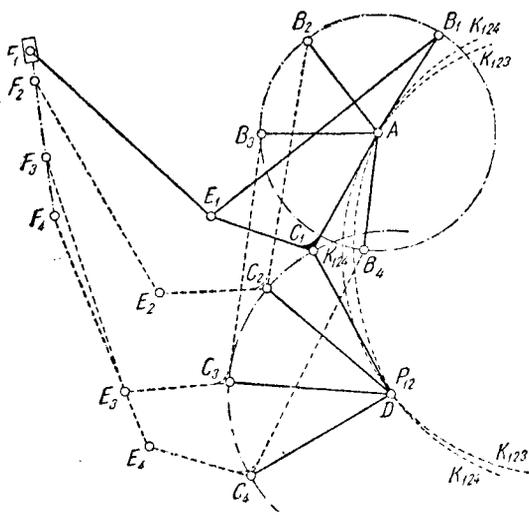
Фиг. 361.

(фиг. 361). Построив по предыдущему линии шатунов $B_1n_1 \parallel B_2n_2$ и $B_3n_3 \parallel B_4n_4$, причём угол между B_1n_1 и B_3n_3 , взяв равным углу $m_1 Gm_3$, найдём, что относительные положения $B_1C_1 \parallel B'_2C'_2$ (последнее совпадает с B_2C_2) и $B'_3C'_3 \parallel B'_4C'_4$. Допустим ещё, что угол $m_1 Gm_3$ равен углу между прямыми B_1B_2 и B_3B_4 ; тогда для четырёх относительных положений полюсы P_{12} и P_{34} уйдут в бесконечность по одному направлению, а для геометрического места точки E_1 получим прямую g как общий перпендикуляр из середины P_{13} P_{24} и P_{14} P_{23} . По точке E_1 однозначно определяется соответствующая точка F_1 .

Решим ещё примеры на построение механизма для проведения ползуна через заданные положения, соответствующие заданным же положениям кривошипа. Пусть заданы четыре положения ползуна F_1, F_2, F_3, F_4 (фиг. 362), а соответствующие положения кривошипа будут AB_1, AB_2, AB_3, AB_4 . Заданная произвольными данными BE и EF и по ним построим засечками четыре положения точки E , именно E_1, E_2, E_3, E_4 . Проведём теперь через точку B в плоскости шатуна BC какую-либо прямую Vm и будем искать на ней точку, четыре положения которой лежали бы на одном круге. Для этого достаточно построить в неподвижной плоскости два конических сечения, соответствующих прямой Vm для положений B_1m_1, B_2m_2, B_3m_3 один раз и для положений B_1m_1, B_2m_2, B_4m_4 другой раз. Эти конические сечения пересекаются в полюсе P_{12} и в центре A . Одна из двух остальных точек пересече-

ния может служить центром D . Так как, окажутся мнимыми (конические сечения могут которыми будут в данном случае P_{12} и B),

однако, эти две точки могут иметь лишь две общие точки, то лучше взять прямую, не проходящую через B ; в этом случае конические сечения будут иметь лишь одну наперед известную точку P_{12} , а потому наверное будут иметь по крайней мере ещё одну точку. Найдя точку D , определим на взятой прямой соответствующую точку C . В результате получим четырёхзвенник $ABCD$ с диадой EF , осуществляющий заданное движение.

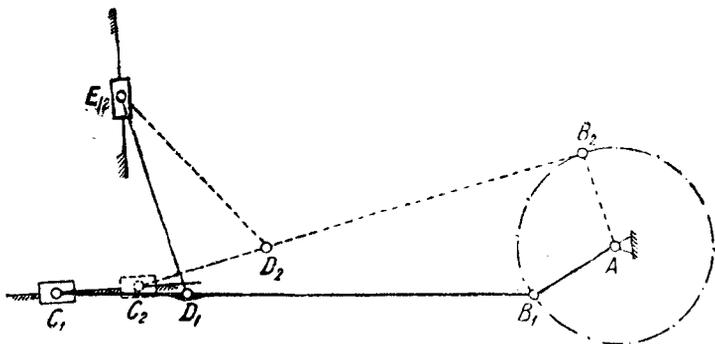


Фиг. 362.

Пусть ещё имеем заданный кривошипно-шатунный механизм в двух положениях AB_1C_1 и AB_2C_2 (фиг. 363) и требуется сделать от него отвод для движения ползуна E , который должен находиться в одном и том же положении E_{12} при двух заданных положениях кривошипа. Делаем отвод при помощи шатуна DE , точка D которого на линии шатуна BC подлелжит определению. Для этой цели найдём второе отно-

сительное положение точки E_1 , построив треугольник $C_1E'B_1$, равный треугольнику C_2EB_2 , и восставим перпендикуляр из середины EE' ; пересечение его с B_1C_1 и даст искомую точку D . Проверкой будет служить равенство $E_1D_1 = E_2D_2$. Построение не затруднит читателя.

Наконец, можно поставить совместное требование возможно точной остановки и точного начала и конца этой остановки. Для этого используем как

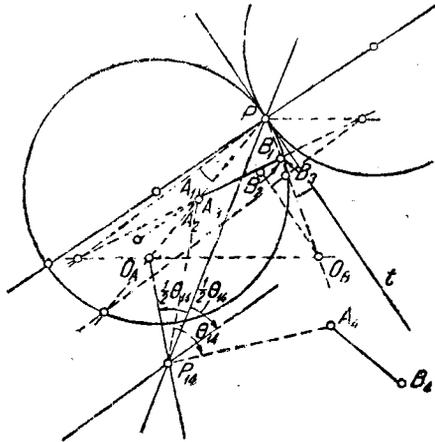


Фиг. 363.

свойства кривизны траекторий, так и геометрические места, относящиеся к отдельным положениям ¹⁾.

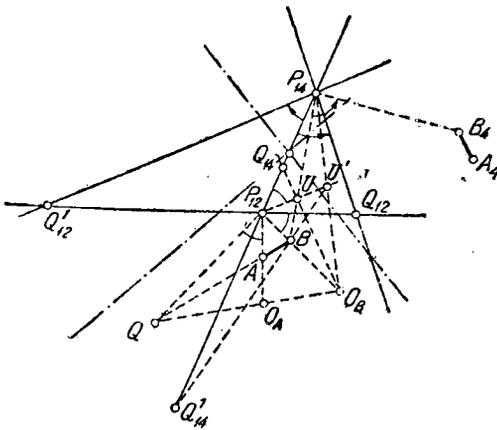
Пусть нам заданы четыре положения подвижной плоскости, из которых три бесконечно близки. На чертеже (фиг. 364) это мы выразим тем, что отрезок $A_1B_1 \approx A_2B_2 \approx A_3B_3$ изображает одновременно эти три бесконечно близкие положения, а потому в этом положении мы знаем не только полюс P , в котором совпадают полюсы P_{12} , P_{13} и P_{23} , но и центры кривизны любых

точек плоскости, для чего достаточно иметь либо круг перегиба, либо центры кривизны траекторий двух точек, как это было указано в главе VI (см. стр. 122). Предположим, что такими точками будут именно точки A и B , т. е. что нам известны для них центры кривизны O_A и O_B . Четвёртое положение плоскости задано отрезком A_4B_4 . На чертеже показаны также круг перегиба и круг



Фиг. 364.

поллюсы $P_{24}, P_{34}, P_{24}^1, P_{34}^1$. Поллюсные прямые $P_{12}P_{13}$ и $P_{13}P_{23}$ совпадают с касательной Pt к центроиду, которая построена по указаниям главы VI. Совпадающие между собой поллюсные прямые $P_{14}P_{24}$ и $P_{14}P_{34}$ найдутся, если при P_{14} построить угол $P_{12}P_{14}P_{24} = \frac{1}{2} \theta_{14}$ в направлении поворота от 1 к 4; здесь $\theta_{14} = \angle A_1P_{14}A_{14}$. Откладывая такой же угол $\frac{1}{2} \theta_{14}$ в противоположную сторону, получим поллюсные прямые $P_{14}P_{24}^1$ и $P_{14}P_{34}^1$. Отметим ещё точки пересечения поллюсных прямых (фиг. 365): Q_{12} как точку пересечения $P_{12}P_{23}$ и $P_{14}P_{34}^1$, Q_{13} и Q_{23} , совпадающие с Q_{12} , и совпадающие между собой точки $Q_{12}^1, Q_{13}^1, Q_{32}^1$ как точку пересечения Pt и $P_{14}P_{24}^1$. Совпадающие точки Q_{14}, Q_{24}, Q_{34} могут быть найдены следующим образом. Точка Q_{14} есть центр кривизны траектории той точки подвижной плоскости, которая в положении I совпадает с полюсом P_{14} ; поэтому указанным в главе VI построением, т. е.

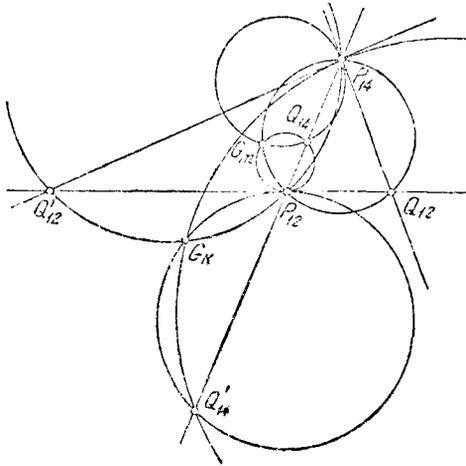


Фиг. 365.

построив при P_{12} угол γ , равный углу между касательной Pt и нормалью PB_1 , найдём точку U пересечения второй стороны этого угла с $P_{14}B_1$; тогда прямая OB_1U пересечёт $P_{12}P_{14}$ в искомой точке Q_{14} . Точка Q_{14}^1 найдётся следующим образом. Точку U' пересечения прямых $P_{12}U$ и $P_{14}OB_1$ соединим с B_1 ; прямая $U'B_1$ пересечёт $P_{14}P_{12}$ в Q_{14}^1 .

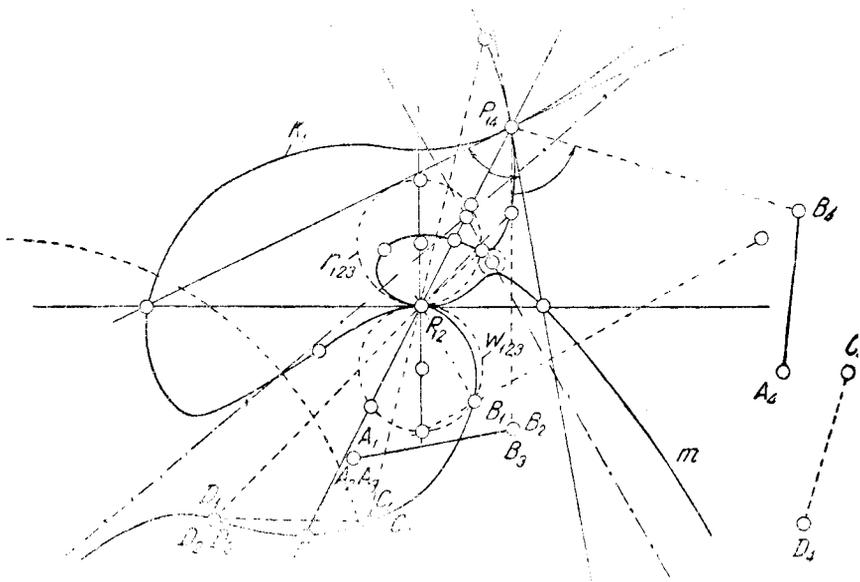
Построим теперь кривые Бурместера. Средняя линия z_m кривой центров m проходит через середины отрезков $P_{12}P_{14}$ и $Q_{12}Q_{14}$. Средняя линия z_k кривой круговых точек k_1 проходит через середины отрезков $P_{12}P_{14}$ и $Q_{21}^1Q_{14}^1$. Фокальный центр G_m кривой m есть точка пересечения трёх кругов: одного, проходящего через P_{12}, P_{14}, Q_{12} , и двух других, проходящих через Q_{14} , из которых один касается P_{12}^1 в P_{12} , а другой касается $P_{14}Q_{12}$ в P_{14} (фиг. 366). Аналогично находим фокальный центр G_k кривой k_1 как точку пересечения трёх кругов: проходящего через P_{12}, P_{14}, Q_{12}^1 , проходящего через Q_{14}^1 и касающегося P_{12}^1 в P_{12} и проходящего через Q_{14}^1 и касающегося $P_{14}Q_{12}^1$ в P_{14} . По средним линиям и

фокусным центрам строим кривые m и k , как было указано в главе VII. В полюсе P_1 кривая k_1 имеет круг кривизны W_{123} , а кривая m имеет круг кривизны Γ_{123} . Обе кривые показаны на фиг. 367. Кривая k_1 есть геометрическое место тех точек подвижной плоскости в первом положении, для которых круг кривизны в этом положении проходит через их четвертые положения, а кривая m есть геометрическое место соответствующих центров кривизны.



Фиг. 366.

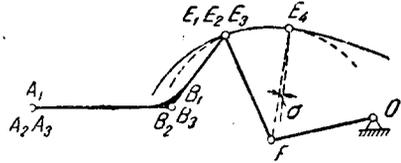
Теперь мы можем построить механизм с остановкой большой точности и с заранее намеченным по времени окончанием остановки. Для этого предположим, что мы можем использовать существующий механизм, звено которого AB имеет вполне определенное движение (фиг. 368). Задаваясь положением $A_1B_1 \approx A_2B_2 \approx A_3B_3$, для которого выберем точку $E_1 \approx E_2 \approx E_3$ на кривой k_1 с центром кривизны F и другим положением A_4 , соответствующим концу остановки, когда точка E займет положение E_4 , будем иметь для перомысла OF хорошую остановку на протяже-



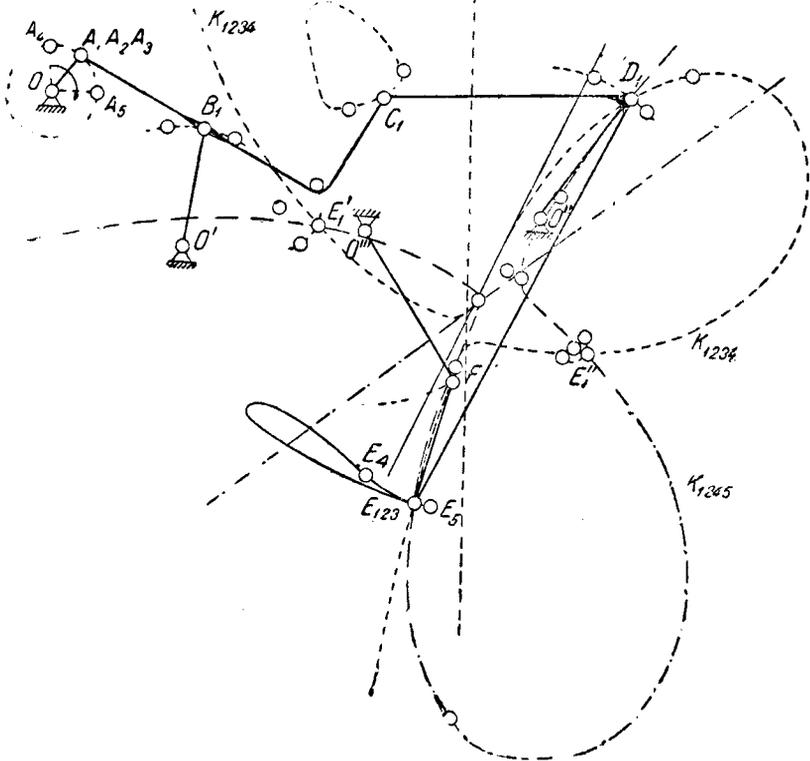
Фиг. 367.

нии $I-1$ с точным окончанием в положении A_4 . Точность окончания остановки зависит от того, насколько нормаль к траектории точки E в положении E_4 отклоняется от прямой KE_4 , т. е. как велик угол σ .

Построим ещё механизм с остановкой большой точности и с заданной продолжительностью этой остановки, т. е. моментами начала и конца её. Пусть мы имеем уже шестизвенный механизм $OA_1B_1O'C_1D_1O''$ с неподвижными центрами вращения O_1, O', O'' и ведущим кривошипом OA (фиг. 369). Предписаны положения A_1, A_4, A_5 на круге кривошипа. Требуется от звена CD сделать отвод к коромыслу $O'''F$ с неподвижным центром O''' , чтобы оно имело возможно точную остановку между положениями 4 и 5 кривошипа. Положение же A может быть взято до известной степени произвольно; на чертеже оно взято по середине A_4A_5 . Задача решается следующим образом. Прежде всего находим центр кривизны траектории точки C_1 звена A_1B_1 . Так как для точки D_1 центр кривизны находится в O'' , то мы имеем возможность определить как круг перегиба, так и кривизну траектории любой точки звена CD . Находим, как указано выше, полюсы и строим кривые круговых точек k_{1234} и k_{1245} , причём для последней будем иметь два бесконечно близких положения 1 и 2.



Фиг. 368.



Фиг. 369.

Четыре точки пересечения этих кривых будут точками Бурместера на подвижной плоскости, а соответствующие им точки Бурместера на неподвижной плоскости найдутся как центры кривизны траекторий первых точек. Из полученных четырёх пар точек три оказались непригодными для конструирования механизма, а взята лишь точка E_{123} и вычерчена её траектория, которая на участке E_1E_3 практически не отличима от дуги круга с центром F ; поэтому коромысло $O'''F$ в течение всего времени поворота кривошипа от OA_4 до OA_5 остаётся в покое.

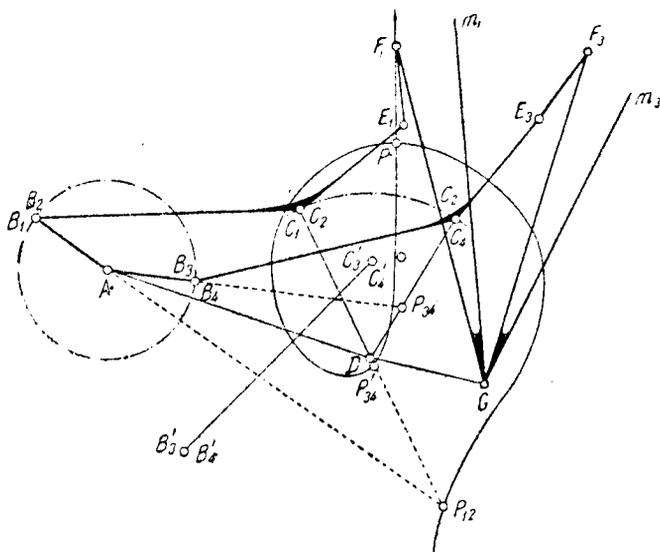
При одном заданном, начальном или конечном, моменте остановки можно потребовать ещё большей точности, т. е. касания третьего порядка траектории с кругом кривизны. Для этого надо найти лишь точки Бурместера как точки пересечения k_{1235} , построенной, как указано выше, с k_{1234} , построение которой было указано в главе VII.

§ 55. Задание мёртвых положений¹⁾.

Здесь могут быть поставлены и решены следующие три задачи.

Первая задача может быть сформулирована следующим образом. От шатуна данного четырёхзвенника сделать привод к коромыслу с заданным углом размаха.

Пусть задан шарнирный четырёхзвенник $ABCD$ (фиг. 370) и коромысло, качающееся вокруг центра G между крайними положениями Gm_1m_2 и Gm_3m_4 , которым соответствуют положения AB_1B_2 и AB_3B_4 кривошипа. Строим по-



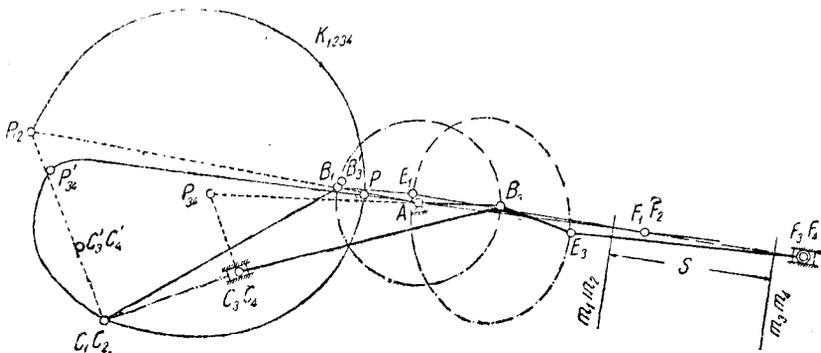
Фиг. 370.

ложения шатуна $B_1C_1 \approx B_2C_2$ и $B_3C_3 \approx B_4C_4$ и их относительные положения $B_1C_1 \approx B_2C_2$ и $B_3C_3 \approx B_4C_4$. Кроме того, строим полюсы P_{12} и P_{34} и относительные их положения P_{12}' и P_{34}' . Наконец, находим полюс P как точку пересечения перпендикуляров из середины B_1B_3' и C_1C_3' . Полюсы P_{12} , P_{34}' и P определяют кривую Бурместера k (см. стр. 214). Остаётся взять произвольную точку F_1 этой кривой и соответствующую ей точку E_1 в плоскости шатуна B_1C_1 . Поверной правильности построения служит то, что точки E_1 , F_1 и P_{12} лежат на одной прямой, равно как и точки E_3 , F_3 и P_{34} ; это должно быть вследствие того, что в крайних положениях коромысла GF шатун EF должен располагаться по нормали к траектории точки E . Таким образом получится шестизвённый механизм, состоящий из данного четырёхзвенника $ABCD$ и диды EFG .

Аналогичную задачу можно решить и для кривошипно-шатунного механизма. Пусть, например, требуется построить двухцилиндровый насос, приводимый от вала при помощи одного эксцентрика. Тогда поршень одного цилиндра может быть приведён от этого вала посредством «главного» шатуна, а для приведения в движение второго поршня надо вставить между ним и главным шатуном второй «прицепной» шатун. Пусть ABC есть главный меха-

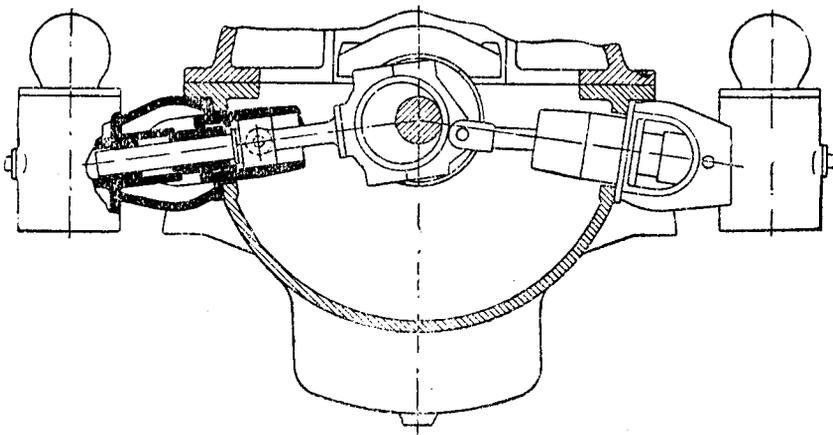
¹⁾ Этот параграф разработан нами.

низ, а мёртвые положения прицепного поршня соответствуют положениям AB_1 и AB_3 кривошипа (фиг. 371); кроме того, задано направление движения прицепного поршня и его ход s . Остаётся найти центры шарниров прицепного



Фиг. 371.

шатунa. С этой целью строим, как и в предыдущем случае мгновенные полюсы P_{12} и P_{34} , и относим как их положение, так и положение B_3C_2 главного шатунa к ближнему мёртвому положению прицепного поршня m_1m_2 . В результате получаем тот же полюс P_{12} , вместо полюса P_{34} — полюс P'_{34} и вместо B_3C_2 — положение $B'_3C'_2$. Для положения B_1C_1 и $B'_3C'_2$ находим полюс P , который вместе с полюсами P_{12} и P'_{34} определяет кривую Бурместера k_{1234} , имеющую форму



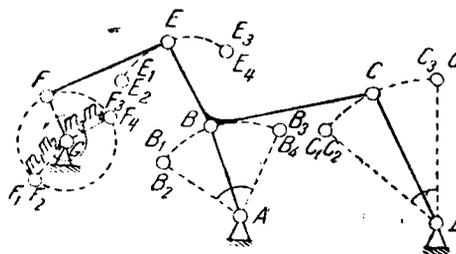
Фиг. 372.

буквы ϕ и близкую к распадению на круг и среднюю прямую. Взяв на этой кривой произвольную точку, примем её за центр поршневого пальца прицепного поршня в его мёртвом положении, т. е. за точку F_1F_2 ; соответствующая точка E_1E_2 плоскости шатунa BC будет центром второго шарнира. Таким образом определяется точка прицепа на главном шатуне и длина прицепного шатунa. Конструктивное выполнение механизма показано на фиг. 372.

Задача проектирования прицепного механизма V-образного авиационного мотора несколько отличается от решённой здесь задачи, так как положение поршневого пальца в поршне уже определено заранее, а потому при задании обоих мёртвых точек прицепного поршня можно задать только одно положение кривошипа, соответствующее одной мёртвой точке; второе положение

кривошипа определится из построения. Задача эта в различных постановках решена Н. Г. Бруевичем¹⁾.

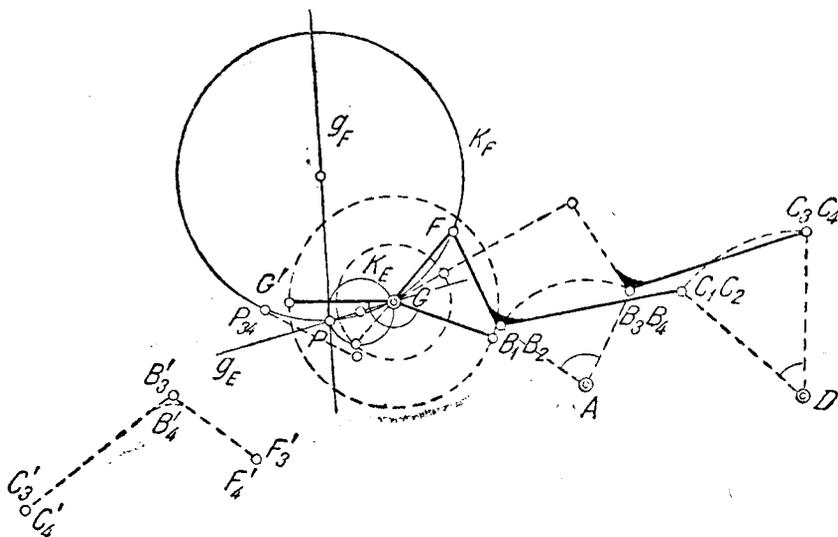
Вторая задача может быть поставлена так: данный четырёхзвенник должен быть приведён в качательное движение от вала, не входящего в его состав, между заданными крайними положениями:



Фиг. 373.

В том случае, когда задан только центр вала или только угол поворота вала, соответствующий одному колебанию данного четырёхзвенника, задача была решена ранее (см. стр. 234), причём точка шатуна, через которую механизм приводится в движение, может быть взята произвольно. Здесь мы решим эту задачу в предположении, что задан и центр G вала, и положения его, определяемые прямыми Gm_1m_2 и Gm_3m_4 , соответствующими мёртвым положениям четырёхзвенника $ABCD$ (фиг. 373). Для решения задачи строим относительные положения вала, т. е. прямых Gm_1m_2 и Gm_3m_4 ,

и положения его, определяемые прямыми Gm_1m_2 и Gm_3m_4 , соответствующими мёртвым положениям четырёхзвенника $ABCD$ (фиг. 373). Для решения задачи строим относительные положения вала, т. е. прямых Gm_1m_2 и Gm_3m_4 ,



Фиг. 374.

по отношению к положению шатуна $B_1C_1 \approx B_2C_2$ (фиг. 374). Полюс P_{12} находится в G , полюс P_{31} — в G' , остальные — в точке P пересечения перпендикуляров из середин GG' и $M_1M'_3$, где M_1 — произвольная точка на Gm_1 .

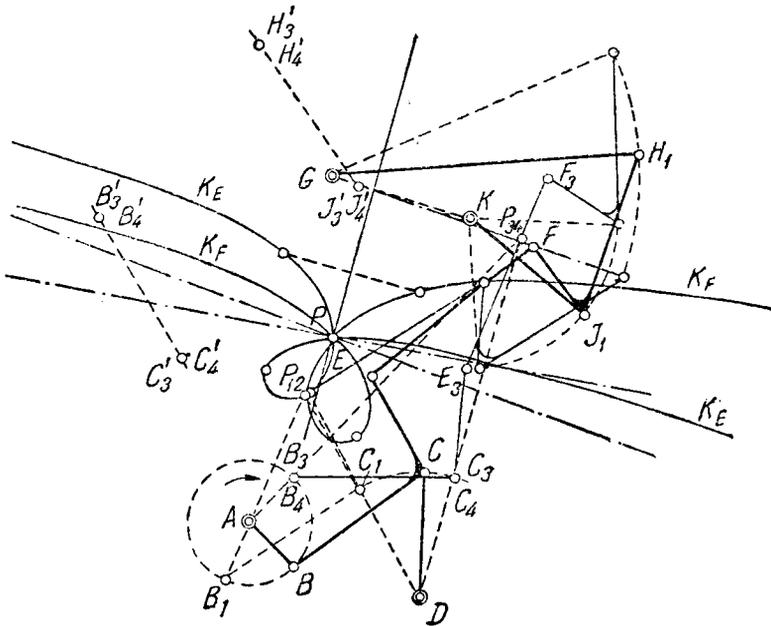
Вследствие этого кривая Бурместера для шатуна BC распадается на круг k_E , проходящий через G, G' и P , и прямую g_E , представляющую перпендикуляр из середины GG' . Кривая Бурместера в плоскости вала также распадается на круг k_F , имеющий диаметром GP , и прямую g_F , проходящую через G и P . Соответствующие точки E_1 и F_1 , а также E_3 и F_3 лежат на прямых, проходящих через G , что служит проверкой.

Последняя задача будет следующей: от данного четырёхзвенника сделать привод к другому данному четырёхзвеннику, соединяя их шатуны промежу-

1) Труды ВВА КА им. Жуковского, сборник № 15 (1936 г.).

точным шатуном так, чтобы мёртвые положения второго четырёхзвенника соответствовали заданным положениям первого.

Пусть ведущий четырёхзвенник будет $ABCD$, а ведомый — $GHIK$ (фиг. 375); соответствующие положения указаны одинаковыми индексами. Строим опять относительные положения B_1C_1 и $B'_3C'_3$ по отношению к шатуну H_1I_1 , находим полюсы и кривую Бурместера k_B , которая будет геометрическим местом



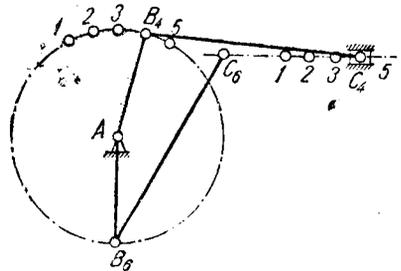
Фиг. 375.

точки F_1 шатуна H_1I_1 ; на чертеже построена также кривая Бурместера k_B для относительных положений шатуна HI по отношению к шатуну B_1C_1 . Соответственные точки этих кривых и могут быть приняты за центры шарниров, соединяющих третий шатун с двумя данными. Поверкой решения должно служить прохождение E_1F_1 через P_{12} и E_3F_3 через P_{34} .

§ 56. Задание равномерного движения.

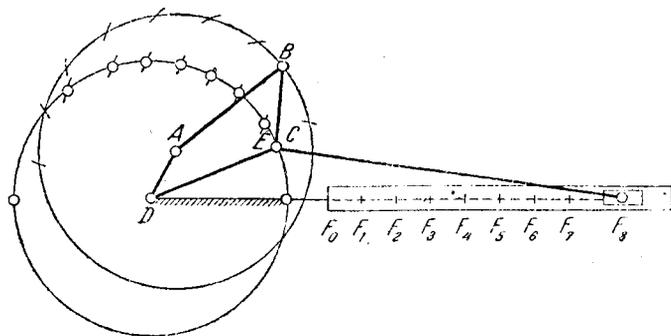
Часто требуется сообщить ползуну на некотором участке его пути равномерное или почти равномерное движение при равномерном вращении главного вала. Кривошипно-шатунный механизм годился бы для этой цели, если бы линия движения ползуна пересекала окружность кривошипа в точках на небольшом расстоянии одна от другой (фиг. 376). Но при этом на обратном ходу получается малый угол передачи.

Издавна применяется в таких случаях шестизвённый механизм. Пусть, например, задан ход ползуна и разделен на восемь равных частей: $F_0F_1 = F_1F_2 = F_2F_3 = F_3F_4 = F_4F_5 = F_5F_6 = F_6F_7 = F_7F_8$ (фиг. 377); требуется привести его в движение от вала, центр которого не дан, и притом так, чтобы при равномерном вращении вала расстояния $F_1F_2 = F_2F_3 = F_3F_4 = F_4F_5 = F_5F_6 = F_6F_7$ проходились бы в равные или почти равные промежутки времени. Берём на продолжении линии F_0F_8 центр D кривошипа и проводим из



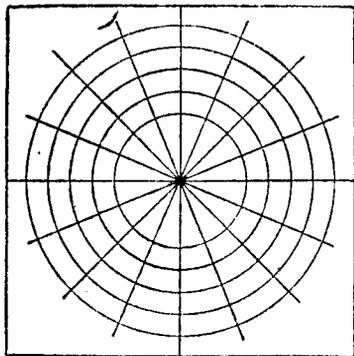
Фиг. 376.

него круг кривошипа радиусом, равным половине хода, т. е. $\frac{1}{2} F_0 F_8$, а длина шатуна EF будет равна расстоянию центра D от середины хода, т. е. от F_4 . Это будет ведомый кривошип, который должен вращаться неравномерно,



Фиг. 377.

чтобы осуществить заданное движение ползуна. Центр и радиус ведущего кривошипа определяются эмпирически после выбора длины соединительного шатуна BE следующим образом. Из точек F_1, F_2, \dots, F_7 делаем засечки длины EF на круге кривошипа в точках $E_1 E_2, \dots, E_7$, а из этих точек проводим дуги s_1, s_2, \dots, s_7 радиусом BC . Затем наносим на кальку ряд concentрических кругов и радиусов, делящих эти круги на 16 равных частей (фиг. 378). Двигая кальку по чертежу, можно добиться того, что семь последовательных точек какого-нибудь круга лягут на семи последовательных дугах s : тогда центр и радиус этого круга определяют центр и радиус ведущего кривошипа AB .



Фиг. 378.

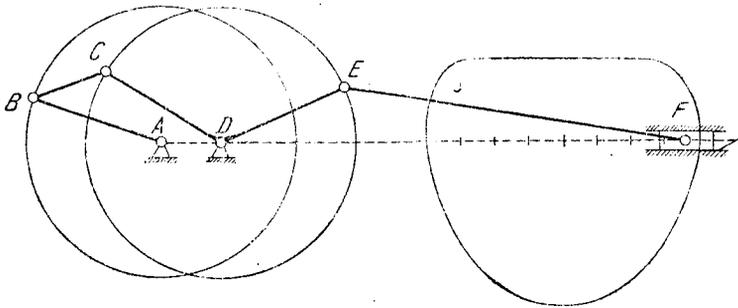
Можно поместить центр ведущего кривошипа на прямую DF , если повернуть весь двукривошипный механизм $ABCD$, разделив, таким образом, точки C и E (фиг. 379), т. е. выполняя ведомый кривошип в форме углового рычага CDE .

Вместо двукривошипного механизма можно взять кулисный механизм. Ведомый кривошип будет вращающейся кулисой. Проведя из его центра вращения D радиусы к точкам деления E_1, E_2, \dots, E_7 (фиг. 380), помещаем кальку с кругами и лучами

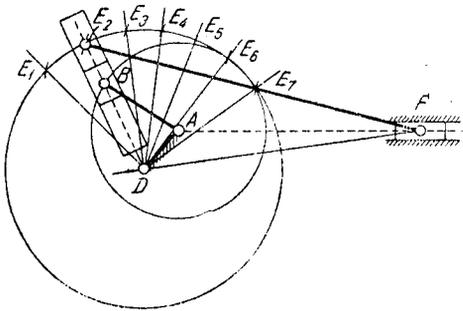
так, чтобы семь последовательных делений какого-либо круга легли на семи последовательных радиусах DE_1, DE_2, \dots, DE_7 . Центр и радиус подходящего круга определяют центр и радиус ведущего кривошипа.

Если взять ведомым кривошипом качающуюся кулису, то целесообразно взять линию движения ползуна проходящей через середину стрелки дуги качания конца кулисы (фиг. 381); в этом случае углы передачи будут наименьшими, а середина хода ползуна будет соответствовать среднему положению кулисы. В этом случае, однако, добиться равномерности очень трудно, так как круг ведущего кривошипа стеснен ещё одним условием: он должен касаться крайних положений кулисы. Если пользоваться смещённым механизмом (фиг. 382), то вместо лучей, соединяющих точки деления дуги кулисы с её центром, надо из этих точек деления провести касательные к кругу смещения; это может облегчить подбор круга ведущего кривошипа.

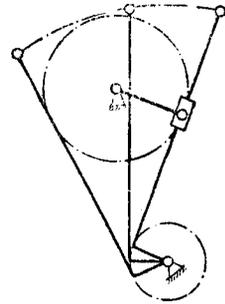
Передача к ползуну может быть осуществлена не шатуном, а вторым кулисным камнем, ходящим либо в той же кулисе (фиг. 383), либо в прорезе



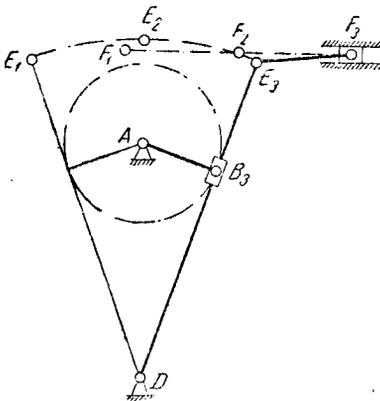
Фиг. 379.



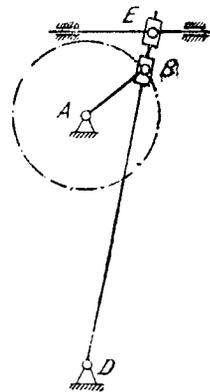
Фиг. 380.



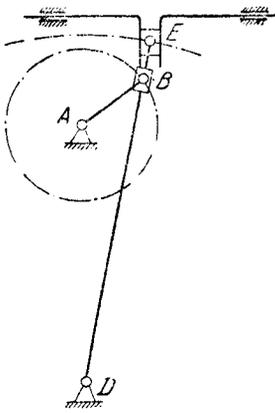
Фиг. 382.



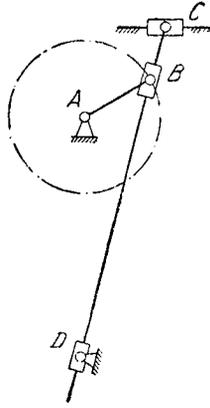
Фиг. 381.



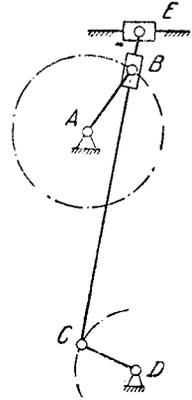
Фиг. 383.



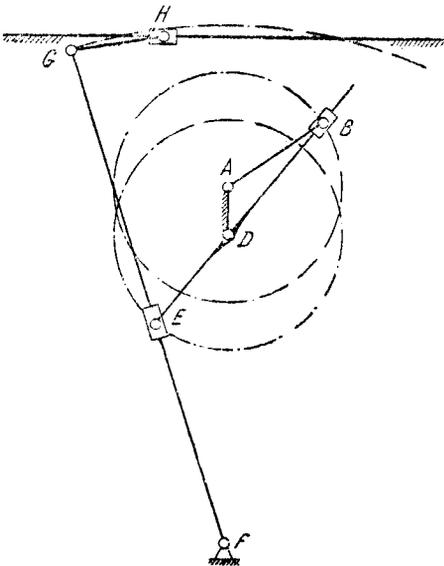
Фиг. 384.



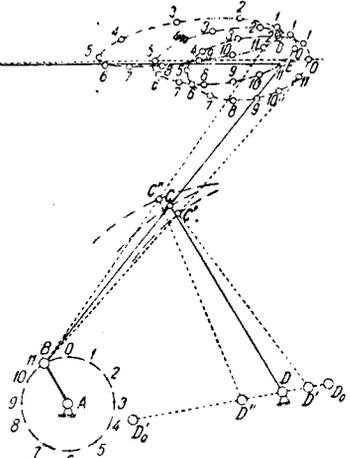
Фиг. 385.



Фиг. 386.



Фиг. 387.



Фиг. 388.

ползуна (фиг. 384); в последнем случае обычно камень выкидывается, а гд-ловка кулисы непосредственно ходит в прорезе ползуна, образуя с ним высшую пару. Конструкция в общем упрощается, но это мало помогает решению поставленной задачи.

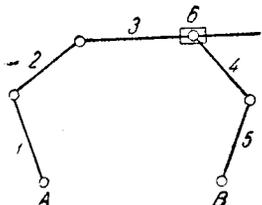
Наконец, ведущий кривошип с кулисным камнем может быть диадой, ведущей шатун четырёхзвенного механизма, осуществляющего движение ползуна. Такой четырёхзвенник выполняется или в виде конхоидального механизма (фиг. 385) или в виде коромысло-шатунного (фиг. 386). Но и здесь круг кривошипа связан тем же дополнительным условием касания крайних положений ведомого шатуна. В настоящее время в станках шепинг (поперечно-строгальных) иногда применяется комбинация вращающейся кулисы с качающейся. Такой восьмизвенный механизм (фиг. 387) даёт более удовлетворительное решение задачи о равномерном движении.

В заключение укажем на возможность приведения ползуна в движение посредством передаточного шатуна EF от ведущего шарнирного четырёхзвенника $ABCD$ (фиг. 388). Размеры звеньев можно подобрать (эмпирически) так, что движение ползуна на некотором участке прямого хода будет весьма близко к равномерному, как показывает разметка его пути на чертеже. Интересно отметить также, что в этом механизме изменение хода ползуна производится перестановкой опоры D коромысла по прямой между точками D_0 и D'_0 , между тем как в предыдущих механизмах, которые обычно применяются в металлорежущих станках, это изменение получается в результате перестановки пальца кривошипа в радиальном прорезе последнего, т. е. при изменении радиуса кривошипа¹⁾.

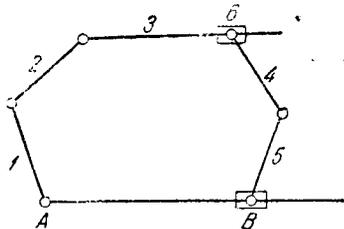
Х. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СИНТЕЗА ПРОСТЫХ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ.

§ 57. Предварительные замечания.

Рассмотрим простые плоские кинематические цепи со звеньями, входящими во вращательные и поступательные кинематические пары. Как будет показано ниже, плоские механизмы с низшими парами могут быть образованы последовательным наложением простых кинематических цепей. Из этих же цепей могут быть образованы и кинематические цепи любой степени сложности. В связи с этим различные вопросы общей теории синтеза плоских механизмов с низшими парами целесообразно рассматривать сначала в аналогичной постановке для простых цепей, а затем найденные результаты применять к отдельным механизмам и сложным цепям. Такой подход к построению общей



Фиг. 389.



Фиг. 390.

теории позволяет разработать достаточно общие приёмы, пригодные для решения различных практических задач по синтезу как простых, так и сложных механизмов и кинематических цепей.

Кинематические цепи принято делить на замкнутые и открытые. На фиг. 389 изображена простая открытая кинематическая цепь. В ней звенья 1 и 5 не входят в кинематическую пару, а с остальными звеньями входят только в одну кинематическую пару. На фиг. 390 изображена замкнутая простая кинематическая цепь.

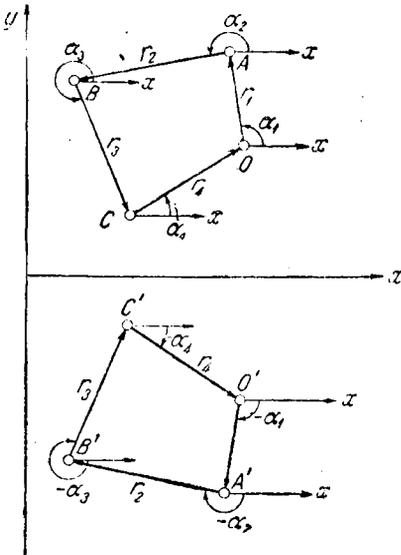
¹⁾ Bricard R.: Leçons de cinématique, т. II, стр. 182—183 (1927).

Матическая цепь. В ней каждое звено входит в две кинематические пары с двумя другими звеньями.

Открытую цепь можно всегда заменить кинематически эквивалентной замкнутой. В самом деле, если рассматриваемая цепь открытая, то расстояние между её конечными точками A и B (фиг. 389) всегда можно принять за некоторое добавочное звено переменной длины. Присоединяя это добавочное звено к действительным звеньям открытой цепи, получим замкнутую цепь, которая по своим кинематическим свойствам совпадает с заданной открытой. Добавочное звено можно себе представить в виде кулисы (фиг. 390), в рамке которой сделана прорезь достаточной длины. Таким образом, для последующих теоретических целей достаточно рассмотреть теорию замкнутых простых кинематических цепей.

§ 58. Уравнения замкнутости четырёхзвенной шарнирной цепи.

Образом из звеньев цепи замкнутый векторный контур и спроектируем его на оси прямоугольной системы координат xy (фиг. 391):



Фиг. 391.

$$\left. \begin{aligned} r_1 \cos \alpha_1 + r_2 \cos \alpha_2 + \\ + r_3 \cos \alpha_3 + r_4 \cos \alpha_4 = 0, \\ r_1 \sin \alpha_1 + r_2 \sin \alpha_2 + \\ + r_3 \sin \alpha_3 + r_4 \sin \alpha_4 = 0. \end{aligned} \right\} (134)$$

Умножив второе уравнение системы (134) на мнимую единицу и применяя формулу Эйлера:

$$\cos \alpha_j + i \sin \alpha_j = e^{i\alpha_j} \quad (j = 1, 2, 3, 4),$$

получим:

$$r_1 e^{i\alpha_1} + r_2 e^{i\alpha_2} + r_3 e^{i\alpha_3} + r_4 e^{i\alpha_4} = 0. \quad (135)$$

Для зеркального отображения $O'A'B'C'O'$ векторного контура $OABC$ в нижней полуплоскости (фиг. 391) справедливо уравнение:

$$\left. \begin{aligned} r_1 e^{-i\alpha_1} + r_2 e^{-i\alpha_2} + r_3 e^{-i\alpha_3} + \\ + r_4 e^{-i\alpha_4} = 0, \end{aligned} \right\} (136)$$

которое получается из основного уравнения (135) заменой знаков при мнимых единицах на обратные. Уравнения (135) и (136) называются сопряжёнными и система их

$$\left. \begin{aligned} r_1 e^{i\alpha_1} + r_2 e^{i\alpha_2} + r_3 e^{i\alpha_3} + \\ + r_4 e^{i\alpha_4} = 0, \\ r_1 e^{-i\alpha_1} + r_2 e^{-i\alpha_2} + r_3 e^{-i\alpha_3} + \\ + r_4 e^{-i\alpha_4} = 0 \end{aligned} \right\} (137)$$

Фиг. 392.

эквивалентна обычным уравнениям (134). Преимущества записи уравнений замкнутости в форме (137) выявятся при рассмотрении конкретных задач синтеза.

Для четырёхзвенного шарнирного механизма (фиг. 392), принимая звено C за стойку и считая, что ось x направлена по CO , получим по (135):

$$r_1 e^{i\alpha_1} + r_2 e^{i\alpha_2} + r_3 e^{i\alpha_3} = -r_4.$$

§ 59. Применение основного уравнения к решению задач синтеза.

Пусть, например, требуется построить шарнирный четырёхзвенник по трём заданным положениям его кривошипа OA и коромысла CB . Принимая первые положения кривошипа OA_1 и коромысла CB_1 за начальные, определим остальные положения этих звеньев углами φ_{12} , φ_{13} , φ_{22} , φ_{23} (фиг. 393), где первый индекс определяет номер звена по фиг. 392, а второй положение звена по фиг. 393. Применяя основное уравнение к трём рассматриваемым положениям механизма, получим:

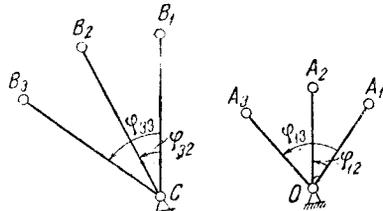
$$\left. \begin{aligned} r_1 e^{i\varphi_{11}} + r_2 e^{i\varphi_{21}} + r_3 e^{i\varphi_{31}} &= -r_4, \\ r_1 e^{i(\varphi_{11} + \varphi_{12})} + r_2 e^{i(\varphi_{21} + \varphi_{22})} + r_3 e^{i(\varphi_{31} + \varphi_{32})} &= -r_4, \\ r_1 e^{i(\varphi_{11} + \varphi_{13})} + r_2 e^{i(\varphi_{21} + \varphi_{23})} + r_3 e^{i(\varphi_{31} + \varphi_{33})} &= -r_4, \end{aligned} \right\} \quad (138)$$

где φ_{22} и φ_{33} — углы, определяющие поворот шатуна AB механизма по отношению к его начальному положению A_1B_1 . Очевидно, что для построения искомого механизма, переводящего кривошип и коромысло в заданные по фиг. 393 положения, достаточно вычислить комплексные числа:

$$z_1 = r_1 e^{i\varphi_{11}}, \quad z_2 = r_2 e^{i\varphi_{21}}, \quad z_3 = r_3 e^{i\varphi_{31}},$$

определяющие начальное его положение. Вводя неизвестные z_1 , z_2 , z_3 в уравнения (138), получим систему трёх линейных комплексных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} z_1 + z_2 + z_3 &= -r_4, \\ z_1 e^{i\varphi_{12}} + z_2 e^{i\varphi_{22}} + z_3 e^{i\varphi_{32}} &= -r_4, \\ z_1 e^{i\varphi_{13}} + z_2 e^{i\varphi_{23}} + z_3 e^{i\varphi_{33}} &= -r_4, \end{aligned} \right\} \quad (138')$$



Фиг. 393.

которую решаем методом определителей. Составляем определитель системы из коэффициентов при неизвестных в левой части:

$$\delta_0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e^{i\varphi_{12}} & e^{i\varphi_{22}} & e^{i\varphi_{32}} \\ e^{i\varphi_{13}} & e^{i\varphi_{23}} & e^{i\varphi_{33}} \end{vmatrix},$$

и заменяя последовательно его столбцы на столбец, состоящий из свободных членов, получим:

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} -r_4 & 1 & 1 \\ -r_4 & e^{i\varphi_{22}} & e^{i\varphi_{32}} \\ -r_4 & e^{i\varphi_{23}} & e^{i\varphi_{33}} \end{vmatrix},$$

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -r_4 & 1 \\ e^{i\varphi_{12}} & -r_4 & e^{i\varphi_{32}} \\ e^{i\varphi_{13}} & -r_4 & e^{i\varphi_{33}} \end{vmatrix},$$

$$\delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -r_4 \\ e^{i\varphi_{12}} & e^{i\varphi_{22}} & -r_4 \\ e^{i\varphi_{13}} & e^{i\varphi_{23}} & -r_4 \end{vmatrix}.$$

Тогда неизвестные z_1 , z_2 и z_3 определяются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \frac{\delta_1}{\delta_0}, \\ z_2 &= \frac{\delta_2}{\delta_0}, \\ z_3 &= \frac{\delta_3}{\delta_0}. \end{aligned} \right\} \quad (139)$$

Указанный способ определения неизвестных применим к системе n линейных уравнений с n комплексными неизвестными, при условии, что $\delta_0 \neq 0$.

Особый случай, когда одновременно все δ_j ($j=0, 1, 2, 3, \dots, n$) обращаются в нуль, в дальнейшем изложении не рассматривается как не представляющий практического интереса. Таким образом, система (138) определяет единственный шарнирный четырёхзвенник при условии, что все δ_j ($j=0, 1, 2,$

3) не равны нулю и для вспомогательных углов φ_{22} и φ_{23} выбраны определённые частные значения. Свободой в выборе углов φ_{22} и φ_{23} можно воспользоваться для синтеза механизма, удовлетворяющего большему числу заданных условий.

Пусть, например, требуется построить шарнирный четырёхзвенник по пяти заданным положениям его кривошипа OA и коромысла CB (фиг. 393). Аналогично изложенному выше выписываем систему уравнений для пяти рассматриваемых положений механизма:

$$\left. \begin{aligned} z_1 + z_2 + z_3 &= -r_4, \\ z_1 e^{i\varphi_{12}} + z_2 e^{i\varphi_{22}} + z_3 e^{i\varphi_{32}} &= -r_4, \\ z_1 e^{i\varphi_{13}} + z_2 e^{i\varphi_{23}} + z_3 e^{i\varphi_{33}} &= -r_4, \\ z_1 e^{i\varphi_{14}} + z_2 e^{i\varphi_{24}} + z_3 e^{i\varphi_{34}} &= -r_4, \\ z_1 e^{i\varphi_{15}} + z_2 e^{i\varphi_{25}} + z_3 e^{i\varphi_{35}} &= -r_4. \end{aligned} \right\} \quad (140)$$

Очевидно, что неизвестные z_1, z_2, z_3 определяются из любых трёх уравнений написанной системы, например первых трёх, и их значения вычисляются по формулам (139). Остаётся выяснить, при каких условиях найденное решение (139) первых трёх линейных уравнений будет удовлетворять остальным двум уравнениям системы (140). Эти условия получим, подставляя значения z_1, z_2, z_3 в последние два уравнения системы (140). Имеем:

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 e^{i\varphi_{14}} + \delta_2 e^{i\varphi_{24}} + \delta_3 e^{i\varphi_{34}} + r_4 \delta_0 &= 0, \\ \delta_1 e^{i\varphi_{15}} + \delta_2 e^{i\varphi_{25}} + \delta_3 e^{i\varphi_{35}} + r_4 \delta_0 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (141)$$

или после перестановки столбцов в определителях $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3$ в форме определителей четвёртого порядка:

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= \begin{vmatrix} -r_4 & 1 & 1 & 1 \\ -r_4 & e^{i\varphi_{12}} & e^{i\varphi_{22}} & e^{i\varphi_{32}} \\ -r_4 & e^{i\varphi_{13}} & e^{i\varphi_{23}} & e^{i\varphi_{33}} \\ -r_4 & e^{i\varphi_{14}} & e^{i\varphi_{24}} & e^{i\varphi_{34}} \end{vmatrix} = 0, \\ D_2 &= \begin{vmatrix} -r_4 & 1 & 1 & 1 \\ -r_4 & e^{i\varphi_{13}} & e^{i\varphi_{23}} & e^{i\varphi_{33}} \\ -r_4 & e^{i\varphi_{15}} & e^{i\varphi_{25}} & e^{i\varphi_{35}} \\ -r_4 & e^{i\varphi_{14}} & e^{i\varphi_{24}} & e^{i\varphi_{34}} \end{vmatrix} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (142)$$

Разлагая написанные определители по элементам последних строк, получим, очевидно, условие совместности системы линейных уравнений (140) в форме (141). Система двух комплексных уравнений (142) эквивалентна системе четырёх обычных уравнений с четырьмя неизвестными. По условию рассматриваемой задачи этими неизвестными могут быть только углы $\varphi_{22}, \varphi_{23}, \varphi_{24}, \varphi_{25}$.

Для вычисления z_j ($j=1, 2, 3$) достаточно определить значения только двух углов φ_{22} и φ_{23} . Методы решений системы уравнений типа (142) будут подробно рассмотрены в дальнейшем изложении. Уравнения совместности (142) получены в предположении, что для определения z_1, z_2, z_3 взяты первые три уравнения системы (140). Если для определения этих неизвестных выбрать какую-либо другую комбинацию трёх уравнений системы (140), например первое, второе и четвёртое, то уравнения совместности запишутся в виде двух определителей.

$$\left. \begin{aligned} D'_1 &= \begin{vmatrix} -r_4 & 1 & 1 & 1 \\ -r_4 & e^{i\varphi_{12}} & e^{i\varphi_{22}} & e^{i\varphi_{32}} \\ -r_4 & e^{i\varphi_{13}} & e^{i\varphi_{23}} & e^{i\varphi_{33}} \\ -r_4 & e^{i\varphi_{14}} & e^{i\varphi_{24}} & e^{i\varphi_{34}} \end{vmatrix} = 0, \\ D'_2 &= \begin{vmatrix} -r_4 & 1 & 1 & 1 \\ -r_4 & e^{i\varphi_{13}} & e^{i\varphi_{23}} & e^{i\varphi_{33}} \\ -r_4 & e^{i\varphi_{14}} & e^{i\varphi_{24}} & e^{i\varphi_{34}} \\ -r_4 & e^{i\varphi_{15}} & e^{i\varphi_{25}} & e^{i\varphi_{35}} \end{vmatrix} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (143)$$

При этом второе уравнение системы (143) отличается от соответствующего ему

уравнения системы (142). В силу единственности решений системы значений φ_{2k} ($k=2, 3, 4, 5$), вычисленные из уравнений (142) и (143), должны быть одинаковыми. Отсюда следует, что независимыми могут быть только два уравнения совместности из написанных четырёх уравнений (142) и (143). Сказанное в равной мере относится ко всем возможным уравнениям, которые могут быть получены указанным способом при решении системы линейных уравнений (140). Следовательно, система линейных уравнений (140) будет совместна, если из всех возможных определителей четвёртого порядка, составленных из её коэффициентов и свободных членов, любые два равны нулю. При этом как следствие будут равны нулю и все остальные определители четвёртого порядка.

При большом числе рассматриваемых линейных уравнений уравнения совместности проще получать из рассмотрения матрицы системы, составляемой из коэффициентов при неизвестных и из свободных членов.

Составим из коэффициентов левых частей уравнений (140) таблицу:

$$M' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e^{i\varphi_{12}} & e^{i\varphi_{21}} & e^{i\varphi_{31}} \\ e^{i\varphi_{13}} & e^{i\varphi_{23}} & e^{i\varphi_{33}} \\ e^{i\varphi_{14}} & e^{i\varphi_{24}} & e^{i\varphi_{34}} \\ e^{i\varphi_{15}} & e^{i\varphi_{25}} & e^{i\varphi_{35}} \end{vmatrix},$$

и назовём её матрицей системы уравнений (140). Составленная матрица содержит пять строк и три столбца. Любая часть матрицы, содержащая одинаковое количество строк и столбцов, может быть рассматриваема как некоторый определитель. В частности, например, из элементов первых трёх строк написанной матрицы M' составляется определитель третьего порядка:

$$\delta_0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e^{i\varphi_{12}} & e^{i\varphi_{21}} & e^{i\varphi_{31}} \\ e^{i\varphi_{13}} & e^{i\varphi_{23}} & e^{i\varphi_{33}} \end{vmatrix},$$

который входит в формулы (139) для вычисления неизвестных z_j ($j=1, 2, 3$).

Назовём рангом матрицы наивысший порядок определителя, отличный от нуля, который можно из неё выделить. Так как, в частности, по условию решения линейных уравнений $\delta_0 \neq 0$, то ранг матрицы M' равен трём. Составим из коэффициентов и свободных членов уравнений (140) таблицу:

$$M'' = \begin{vmatrix} -r_4 & 1 & 1 & 1 \\ -r_4 & e^{i\varphi_{12}} & e^{i\varphi_{21}} & e^{i\varphi_{31}} \\ -r_4 & e^{i\varphi_{13}} & e^{i\varphi_{23}} & e^{i\varphi_{33}} \\ -r_4 & e^{i\varphi_{14}} & e^{i\varphi_{24}} & e^{i\varphi_{34}} \\ -r_4 & e^{i\varphi_{15}} & e^{i\varphi_{25}} & e^{i\varphi_{35}} \end{vmatrix}$$

и назовём её расширенной матрицей системы линейных уравнений (140). Очевидно, что из написанной матрицы выделяются все возможные определители четвёртого порядка, из которых образуются системы уравнений совместности типа (142) или (143). Так как по условию совместности системы линейных уравнений (140) все эти определители должны быть равны нулю, то ранг матрицы M'' не может быть равен четырём. Так как по крайней мере один определитель третьего порядка, выделенный из матрицы M'' , например δ_0 , отличен от нуля, то ранг матрицы M'' равен трём. Изложенное формулируется в следующей общей теореме: система линейных уравнений с числом уравнений, большим числа неизвестных, совместна, если ранг расширенной её матрицы равен рангу матрицы, составленной из коэффициентов при неизвестных. Расширенная матрица M'' системы линейных уравнений служит для непосредственного составления системы независимых уравнений совместности. Эту операцию проще всего выполнить следующим образом. Выделяем из матрицы определитель четвёртого порядка, взяв первые четыре строки, и заменяем в нём последовательно последнюю строку оставшимися строками.

В общем случае, при решении системы n линейных уравнений с m неизвестными, расширенная матрица системы будет состоять из $m+1$ столбцов и

n строк. Уравнения совместности составляются из определителей $m+1$ порядка, причём число независимых уравнений равно $n-m$. Более подробное и строгое изложение методов решения систем линейных уравнений можно найти в любом курсе высшей алгебры¹⁾. Показанный выше на частном примере метод решения систем линейных уравнений, связанных с задачами синтеза четырёхзвенных механизмов, непосредственно применим при рассмотрении простых цепей с любым числом звеньев.

§ 60. Уравнение замкнутости простой цепи.

Возьмём простую замкнутую кинематическую цепь с прямолинейными кулисными звеньями (фиг. 394) и образуем из её звеньев замкнутый векторный контур.

Воспользовавшись комплексными числами:

$$z_{jk} = r_{jk} e^{i\alpha_{jk}},$$

запишем уравнение замкнутости цепи в следующем виде:

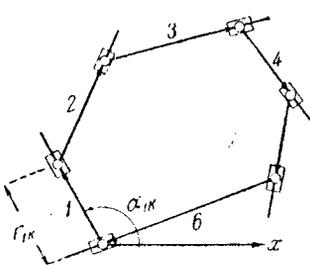
$$\sum_{j=1}^n r_{jk} e^{i\alpha_{jk}} = 0, \quad (144)$$

где r_{jk} — переменные размеры кулисных звеньев, α_{jk} — переменные углы, определяющие направления этих звеньев при деформации цепи²⁾. Считая, что начальному положению цепи соответствует индекс $k=1$, имеем для этого случая

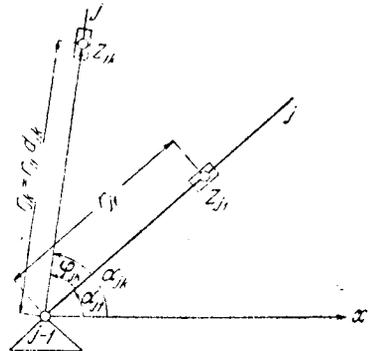
$$\sum_{j=1}^n z_j = 0, \quad (145)$$

где $z_j = r_{j1} e^{i\alpha_{j1}}$ — комплексные числа, определяющие конфигурацию рассматриваемой цепи в начальном её положении.

При деформации цепи происходит растяжение и вращение её



Фиг. 394.



Фиг. 395.

звеньев и комплексные числа z_j превращаются в комплексные числа z_{jk} , определяющие конфигурацию цепи в некотором произвольном k -том её положении. Переход от z_j к z_{jk} задается аналитически некоторыми комплексными числами:

$$\tilde{z}_{jk} = d_{jk} e^{i\varphi_{jk}}$$

и определяется по формуле:

$$z_{jk} = z_j \tilde{z}_{jk}$$

Модуль d_{jk} каждого заданного комплексного числа \tilde{z}_{jk} определяет растяжение звеньев цепи (фиг. 395):

$$d_{jk} = \frac{r_{jk}}{r_{j1}}$$

¹⁾ См., например, Сушкевич: Основы высшей алгебры.

²⁾ Здесь и в дальнейшем под деформацией цепи будем понимать только любое изменение относительных положений её звеньев.

а аргумент φ_{jk} — вращение звеньев.

$$\varphi_{jk} = a_{jk} \cdot \alpha_{j1}.$$

Зададим ξ_{jk} для ряда положений звена j устанавливаются относительные приращения размеров кулисных звеньев d_{jk} и углы поворотов этих звеньев φ_{jk} , отсчитываемые от некоторого начального их положения. Из самого определения ξ_{jk} следует, что

$$d_{j1} = 1, \varphi_{j1} = 0, \xi_{j1} = 1.$$

Подставляя значения ξ_{jk} в формулу (144), получим уравнение замкнутости для любой допустимой деформации цепи:

$$\sum_{j=1}^n z_{j1} \xi_{jk} = 0,$$

или, перенося слагаемое с индексом n в правую часть:

$$\sum_{j=1}^{n-1} z_{j1} \xi_{jk} = -z_{n1} \xi_{nk}. \quad (146)$$

§ 61. Уравнение скоростей простой цепи.

Для получения скоростей дифференцируем по времени произвольное слагаемое левой части уравнения (144), считая r_{jk} и α_{jk} переменными:

$$\frac{d}{dt} (r_{jk} e^{i\alpha_{jk}}) = v_{jk} e^{i\alpha_{jk}} + i r_{jk} \omega_{jk} e^{i\alpha_{jk}},$$

где

$$v_{jk} = \frac{dr_{jk}}{dt}, \quad \omega_{jk} = \frac{d\alpha_{jk}}{dt}.$$

Так как $e^{i\alpha_{jk}}$ — орт, определяющий направление прямолинейной прорези кулисы, то вектор $v_{jk} e^{i\alpha_{jk}}$ даёт скорость ползушки относительно кулисы. Аналогично этому вектор $i r_{jk} \omega_{jk} e^{i\alpha_{jk}}$, перпендикулярный к направлению прямолинейной прорези кулисы, представляет скорость точки кулисы относительно звена, с которым она связана шарниром, и следовательно, вся сумма

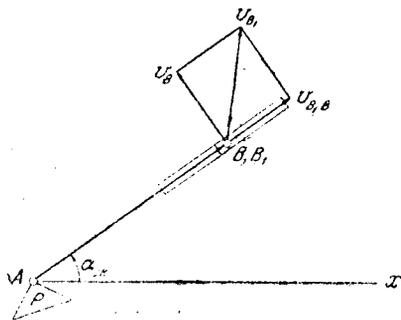
$$v_{jk} e^{i\alpha_{jk}} + i r_{jk} \omega_{jk} e^{i\alpha_{jk}}$$

даёт скорость ползушки по отношению к звену, с которым кулиса связана шарниром. Графическое изображение результатов дифференцирования дано на фиг. 396. Здесь P — звено, относительно которого рассматривается движение связанной с ним кулисы, B — точка кулисы, скорость которой равна $i r_{jk} \omega_{jk} e^{i\alpha_{jk}} = v_{B1}$. B_1 — точка ползушки, совпадающая в рассматриваемый момент времени с точкой B , $v_{jk} e^{i\alpha_{jk}} = v_{B,B}$ — скорость ползушки относительно кулисы, v_{B1} — скорость ползушки относительно звена P , полученная дифференцированием вектора $r_{jk} e^{i\alpha_{jk}}$. Суммируя результаты дифференцирования и дели обе части уравнений на i , получим уравнение для повернутых скоростей:

$$-i \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} (r_{jk} e^{i\alpha_{jk}}) = \sum_{j=1}^n (r_{jk} \omega_{jk} - i v_{jk}) e^{i\alpha_{jk}} = 0.$$

Преобразуем выражение под вторым знаком суммы:

$$(r_{jk} \omega_{jk} - i v_{jk}) e^{i\alpha_{jk}} = \left(\omega_{jk} - \frac{v_{jk}}{r_{jk}} \right) r_{jk} e^{i\alpha_{jk}} = z_{jk} \lambda_{jk}.$$



Фиг. 396.

где

$$\eta_{jk} = \omega_{jk} - \frac{iv_{jk}}{r_{jk}}$$

Заменяя $z_{jk} = z_{j1} \xi_{jk}$ и подставляя найденное выражение в уравнение скоростей, получим:

$$\sum_{j=1}^n \xi_{jk} \eta_{jk} z_{j1} = 0,$$

или, перенося слагаемое с индексом n в правую часть:

$$\sum_{j=1}^{n-1} \xi_{jk} \eta_{jk} z_{j1} = -\xi_{nk} \eta_{nk} z_{n1}. \quad (147)$$

Вводя величины

$$b_{jk} = \frac{v_{jk}}{r_{j1}},$$

заданием которых для ряда положений цепи определяются приращения относительных линейных скоростей ползушек, представим коэффициенты η_{jk} в следующем виде:

$$\eta_{jk} = \omega_{jk} - \frac{iv_{jk}}{r_{jk}} = \omega_{jk} - \frac{ib_{jk}}{d_{jk}}$$

§ 62. Уравнение ускорений простой цепи.

Дифференцируем два раза по времени произвольное слагаемое левой части уравнения (144),

$$\frac{d^2}{dt^2} (r_{jk} e^{i\alpha_{jk}}) = (ir_{jk} \dot{\epsilon}_{jk} - r_{jk} \omega_{jk}^2) e^{i\alpha_{jk}} + (a_{jk} + 2iv_{jk} \omega_{jk}) e^{i\alpha_{jk}},$$

где $a_{jk} = \frac{dv_{jk}}{dt}$, $\dot{\epsilon}_{jk} = \frac{d\omega_{jk}}{dt}$. Графическое изображение результатов дифферен-

цирования дано на фиг. 397. Слагаемое

$$a_{BA} = (ir_{jk} \dot{\epsilon}_{jk} - r_{jk} \omega_{jk}^2) e^{i\alpha_{jk}}$$

представляет собой ускорение точки B кулисы при её движении относительно звена P , слагаемое

$$a_{B_1B} = a_{jk} e^{i\alpha_{jk}}$$

есть ускорение точки B_1 ползушки по отношению к кулисе, направленное вдоль кулисы, слагаемое

$$a_C = 2iv_{jk} \omega_{jk} e^{i\alpha_{jk}}$$

есть ускорение Кориолиса, направленное перпендикулярно кулисе. Суммируя результаты дифференцирования и деля

Фиг. 397.

обе части на i , получим для повернутых ускорений:

$$\sum_{j=1}^n (r_{jk} \dot{\epsilon}_{jk} + 2v_{jk} \omega_{jk} + ir_{jk} \omega_{jk}^2 - ia_{jk}) e^{i\alpha_{jk}} = 0. \quad (148)$$

Преобразуем выражение под знаком суммы:

$$\begin{aligned} (r_{jk} \dot{\epsilon}_{jk} + 2v_{jk} \omega_{jk} + ir_{jk} \omega_{jk}^2 - ia_{jk}) e^{i\alpha_{jk}} &= \left(\epsilon_{jk} + i\omega_{jk}^2 + \frac{2v_{jk} \omega_{jk} - ia_{jk}}{r_{jk}} \right) r_{jk} e^{i\alpha_{jk}} = \\ &= z_{jk}^v z_{jk}. \end{aligned}$$

где

$$\zeta_{jk} = \varepsilon_{jk} + i\omega_{jk}^2 + \frac{2v_{jk}\omega_{jk}}{r_{jk}} - \frac{ia_{jk}}{r_{jk}}.$$

Заменяя $z_{jk} = z_{j1}^2 \zeta_{jk}$ и подставляя в формулу для ускорений, получим:

$$\sum_{j=1}^n \xi_{jk} \zeta_{jk} z_{j1} = 0,$$

или, перенося слагаемое с индексом n в правую часть:

$$\sum_{j=1}^{n-1} \xi_{jk} \zeta_{jk} z_{j1} = -\xi_{nk} \zeta_{nk} z_{n1}. \quad (149)$$

Вводя величины

$$c_{jk} = \frac{a_{jk}}{r_{j1}},$$

определяющие приращения относительных ускорений ползушек, представим коэффициенты ζ_{jk} в следующем виде:

$$\zeta_{jk} = \varepsilon_{jk} + i\omega_{jk}^2 + 2\omega_{jk} \frac{b_{jk}}{d_{jk}} - \frac{ic_{jk}}{d_{jk}}.$$

§ 63. Уравнения первых и вторых производных от ускорений простой цепи.

Дифференцируя (148) по времени и обозначая $\frac{d^3 r_{jk}}{dt^3} = a_{jk}$, $\frac{d^3 a_{jk}}{dt^3} = \varepsilon'_{jk}$,

получим уравнение первых производных от повернутых ускорений:

$$\sum_{j=1}^n [r_{jk} \varepsilon'_{jk} + 3a_{jk} \omega_{jk} + 3v_{jk} \varepsilon_{jk} - r_{jk} \omega_{jk}^3 + i(3v_{jk} \omega_{jk}^2 + 3r_{jk} \omega_{jk} \varepsilon_{jk} - a'_{jk})] e^{i\alpha_{jk}} = 0$$

Вводя комплексный коэффициент:

$$\begin{aligned} \mu_{jk} &= \varepsilon'_{jk} - \omega_{jk}^3 + 3i\omega_{jk} \varepsilon_{jk} + \frac{3a_{jk} \omega_{jk} + 3v_{jk} \varepsilon_{jk} + i(2v_{jk} \omega_{jk}^2 - a'_{jk})}{r_{jk}} \\ &= \varepsilon'_{jk} - \omega_{jk}^3 + 3i\omega_{jk} \varepsilon_{jk} + \frac{3b_{jk}}{d_{jk}} (\varepsilon_{jk} + i\omega_{jk}^2) + \frac{2c_{jk}}{d_{jk}} \omega_{jk} - \frac{if_{jk}}{d_{jk}}, \end{aligned}$$

где $f_{jk} = \frac{a'_{jk}}{r_{j1}}$, свяжем уравнение первых производных от ускорений с величинами z_{j1} , определяющими начальное положение цепи:

$$\sum_{j=1}^n \xi_{jk} \mu_{jk} z_{j1} = 0,$$

или, перенеся слагаемое с индексом n в правую часть:

$$\sum_{j=1}^{n-1} \xi_{jk} \mu_{jk} z_{j1} = -\xi_{nk} \mu_{nk} z_{n1}. \quad (150)$$

Для вторых производных от ускорений имеем:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^n (4v_{jk} \varepsilon'_{jk} + r_{jk} \varepsilon''_{jk} + 4a'_{jk} \omega_{jk} + 6a_{jk} \varepsilon_{jk} - 4v_{jk} \omega_{jk}^3 - 6r_{jk} \omega_{jk}^2 \varepsilon_{jk}) e^{i\alpha_{jk}} + \\ &+ i \sum_{j=1}^n (6a_{jk} \omega_{jk}^2 + 12v_{jk} \omega_{jk} \varepsilon_{jk} + 3r_{jk} \varepsilon_{jk}^2 + 4r_{jk} \omega_{jk} \varepsilon'_{jk} - r_{jk} \omega_{jk}^4 - a''_{jk}) e^{i\alpha_{jk}} = 0. \quad (151) \end{aligned}$$

Уравнения (150) и (151) применяются при синтезе механизмов по наперёд заданному экстремальному значению ускорения рабочего звена.

§ 64. Постановка задач аналитического синтеза.

Выберем для начального положения n звена цепи $z = 0$ (звено параллельно оси x : $r_{n1} = 1$, так что $z_{n1} = r_{n1} e^{i\varphi_{n1}} = 1$, и запишем уравнения (146), (147), (149), (150) в следующей общей форме:

$$\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{jk} z_k^{j-1} = i_{nk}, \quad (152)$$

где под λ_{jk} следует понимать $\lambda_{jk} = \xi_{jk}$ для уравнений (146), $\lambda_{jk} = \xi_{jk} \eta_{jk}$ для уравнения (147), $\lambda_{jk} = \xi_{jk} \zeta_{jk}$ для уравнения (149), $\lambda_{jk} = \xi_{jk} \mu_{jk}$ для уравнений (150) ($j = 1, 2, 3, \dots$). Отметим, что уравнения (152) линейны относительно величин z_{j1} , определяющих рассматриваемую цепь в начальном её положении согласно уравнению (145).

Зададим для ряда положений звеньев искомого цепи величины φ_{jk} , ω_{jk} , ε_{jk} , ξ'_{jk} , d_{jk} , b_{jk} , c_{jk} , f_{jk} и определим по ним комплексные коэффициенты ξ_{jk} , η_{jk} , ζ_{jk} , μ_{jk} , воспользовавшись ранее приведёнными формулами. Тогда для соответствующего заданию числа уравнений (152) будут известны коэффициенты λ_{jk} , и задача синтеза цепи сводится к решению системы комплексных линейных уравнений (152) с неизвестными z_{j1} , определяющими искомую цепь в начальном её положении.

При синтезе цепи с одними вращательными парами $d_{jk} = 1$, $b_{jk} = 0$, $c_{jk} = 0$, $f_{jk} = 0$. В этом случае для проектируемой цепи заданием φ_{jk} , ω_{jk} , ε_{jk} , ξ'_{jk} заранее устанавливаются в ряде её положений значения углов поворотов, угловых скоростей, угловых ускорений и первых производных от угловых ускорений звеньев.

При синтезе цепи с вращательными парами и одной поступательной парой условимся кулису нумеровать индексом $j = n$. Так как по принятому условию

$$r_{n1} = 1,$$

то

$$d_{nk} = \frac{r_{nk}}{r_{n1}} = r_{nk}, \quad b_{nk} = \frac{a_{nk}}{r_{n1}} = a_{nk}, \quad c_{nk} = \frac{a_{nk}}{r_{n1}} = a_{nk}, \quad f_{nk} = \frac{a_{nk}}{r_{n1}} = a'_{nk}.$$

Для остальных значений индекса $j = 1, 2, \dots, n-1$ коэффициенты b_{jk} , c_{jk} , f_{jk} равны нулю. В этом случае для проектируемой цепи заданием φ_{jk} , ω_{jk} , ε_{jk} , ξ'_{jk} , d_{nk} , b_{nk} , c_{nk} , f_{nk} кроме углов угловых скоростей, угловых ускорений и их производных заранее устанавливаются отдельные значения перемещения, скорости, ускорения и первой производной от ускорения ползушки.

При синтезе цепи с несколькими поступательными парами заданием d_{jk} , b_{jk} , c_{jk} , f_{jk} заранее устанавливаются относительные приращения перемещений, скоростей, ускорений и первых производных от ускорений ползушек. Только для n кулисного звена относительные приращения этих величин могут рассматриваться как абсолютные их значения, так как для этого звена по условию $r_{n1} = 1$.

§ 65. Определитель цепи.

Пусть намечены определённые значения φ_{ik} и d_{jk} для s_1 положений цепи, ω_{jk} и b_{jk} для s_2 из s_1 положений цепи, c_{jk} и c_{jk} для s_3 из s_2 положений цепи, ε'_{jk} и f_{jk} для s_4 из s_3 положений цепи, так что $s_1 \geq s_2 \geq s_3 \geq s_4$. Тогда для построения цепи и определения z_{j1} имеем систему $s = s_1 + s_2 + s_3 + s_4$ линейных уравнений (152). Выделяем из системы $n-1$ независимых линейных урав-

нений с $n - 1$ неизвестными z_j :

$$\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{jk} z_j = -\lambda_{nk} \quad \left. \vphantom{\sum_{j=1}^{n-1}} \right\} \quad \underbrace{k=1, 2, \dots, s_1, 1, 2, \dots, s_2, 1, 2, \dots, s_3, 1, 2, \dots, s_4}_{n-1 \text{ значений}}$$

и решаем их методом определителей. После соответствующей перестановки столбцов определителей решение представится в следующем виде:

$$z_{j1} = (-1)^{n-j} \frac{\delta_j}{\delta_n}, \quad (153)$$

где δ_n и δ_j ($j = 1, 2, \dots, n - 1$) определители $n - 1$ порядка:

$$\left. \begin{aligned} \delta_n &= |\lambda_{jk}|^* \quad (j=1, 2, \dots, n-1), \\ \delta_1 &= |\lambda_{jk}| \quad (j=2, 3, \dots, n), \\ \delta_2 &= |\lambda_{jk}| \quad (j=1, 3, 4, \dots, n), \\ \delta_{n-1} &= |\lambda_{jk}| \quad (j=1, 2, \dots, n-2, n). \end{aligned} \right\} \quad \underbrace{k=1, 2, \dots, s_1, 1, 2, \dots, s_2, 1, 2, \dots, s_3}_{n-1 \text{ значений}}$$

Подставляем найденное решение в уравнение (145), которое при этом обращается в тождество и, учитывая, что $z_{n1} = 1$, получаем:

$$1 - \frac{\delta_{n-1}}{\delta_n} + \frac{\delta_{n-2}}{\delta_n} - \frac{\delta_{n-3}}{\delta_n} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{\delta_1}{\delta_n} = 0.$$

Умножая на $\delta_n \neq 0$, имеем

$$\delta_1 - \delta_2 + \delta_3 - \delta_4 + \dots + (-1)^{n-1} \delta_n = 0$$

или, введя обозначение для единицы $\lambda_{j0} = 1$, в форме определителя n -го порядка:

$$D = |\lambda_{jk}| = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} j=1, 2, \dots, n \\ k=0, 1, 2, \dots, s_1, 1, 2, \dots, s_2, 1, 2, \dots, s_3, 1, 2, \dots, s_4 \end{array} \right. \quad (154)$$

n значений

Назовём D определителем кинематической цепи. Так как уравнение (154) получено из (145), то оно также выражает условие замкнутости кинематической цепи, причём операция умножения на δ_n эквивалентна подобному преобразованию цепи с увеличением её размеров в $\text{mod } \delta_n$ раз и повороту всей цепи на угол $\arg \delta_n$.

§ 66. Матрица цепи.

Если $s \leq n - 1$, то намеченные значения φ_{jk} , ω_{jk} , ε_{jk} , d_{jk} , b_{jk} , c_{jk} , f_{jk} выбираются, вообще говоря, произвольно. Кроме того, при $s < n - 1$ на проектируемую цепь могут быть наложены дополнительные $2(n - 1 - s)$ условий. При $s > n - 1$ найденное решение (153) будет удовлетворять всем уравнениям системы (152), если её коэффициенты и свободные члены подобраны так, что всякий определитель n -го порядка, выделенный из расширенной матрицы системы, равен нулю. Расширенная матрица системы содержит s строк и n столбцов и составляется из всех коэффициентов и свободных членов системы (152):

$$M' = \lambda_{jk} \quad \left\{ \begin{array}{l} j=1, 2, \dots, n; \\ k=1, 2, \dots, s_1, 1, 2, \dots, s_2, 1, 2, \dots, s_3, 1, 2, \dots, s_4 \end{array} \right.$$

*) Здесь под символом $|\lambda_{jk}|$ следует понимать комплексный определитель $n - 1$ -го порядка, составленный из элементов λ_{jk} , причём для каждого столбца остаётся неизменным индекс j , а k принимает $n - 1$ различных значений, и для каждой строки остаётся неизменным индекс k , а индекс j принимает $n - 1$ различных значений, указанных для каждого в отдельности определителя в скобках.

Известно¹⁾, что число независимых определителей n -го порядка, выделенных из написанной матрицы, равно $q = s - n + 1$. Приравнявая нулю независимые определители матрицы M' , получаем систему $q = s - n + 1$ комплексных уравнений совместности, определяющих $2(s - n + 1)$ действительных величин, значения которых не могут быть заданы произвольно.

При соединим к матрице строку $\lambda_{j0} = 1 (j = 1, 2, \dots, n)$ и составим новую матрицу:

$$M = \|\lambda_{jk}\| \begin{matrix} j = 1, 2, \dots, n; \\ k = 0, 1, 2, \dots, s_1, 1, 2, \dots, s_2, 1, 2, \dots, s_3, 1, 2, \dots, s_4, \end{matrix} \quad (155)$$

из $s + 1$ строк и n столбцов.

Очевидно, что из матрицы M получаются определитель цепи D и все необходимые уравнения совместности. Назовём M матрицей кинематической цепи. Условимся в дальнейшем располагать в первой строке матрицы M коэффициенты $\lambda_{j0} = 1$, а во второй — коэффициенты $\lambda_{jk} = \xi_{jk}$ одного из уравнений

$$(146) \text{ при значении индекса } k = 1. \text{ Так как по определению } d_{j1} = \frac{r_{j1}}{r_{j1}} = 1 \text{ и}$$

$\varphi_{j1} = a_{j1} - \alpha_{j1} = 0$, то $\xi_{j1} = d_{j1} e^{i\varphi_{j1}} = 1$, и при принятом способе записи строк матрицы M её первые две строки будут всегда состоять из единиц:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Элементы остальных строк матрицы M определяются условиями поставленной задачи и структурой кинематических пар проектируемой цепи.

§ 67. Общая схема решения задач синтеза.

Установленное выше соответствие между матрицей M и кинематической цепью позволяет решать задачи синтеза по следующей общей схеме. Сначала по условию задачи из соответствующего числа коэффициентов ξ_{jk} , η_{jk} , ζ_{jk} , μ_{jk} составляется матрица M , из которой затем выделяются определитель цепи и независимые уравнения совместности. По числу уравнений совместности намечаем из величин φ_{jk} , ω_{jk} , ε_{jk} , ε_{jk} , d_{jk} , b_{jk} , c_{jk} , f_{jk} соответствующее число неизвестных и устанавливаем для остальных из них значения, вытекающие из условий, которым должна удовлетворять проектируемая цепь. Решая уравнения совместности, находим значения только тех неизвестных, которые входят в определитель цепи D . Разлагаем далее определитель цепи по элементам первой строки (состоящей из единиц) и вычисляем (или строим графически) полученные при разложении определителя $n - 1$ -го порядка δ_j . По найденным значениям δ_j строим искомую кинематическую цепь в начальном её положении согласно уравнению:

$$\delta_1 - \delta_2 + \delta_3 - \delta_4 + \dots + (-1)^{n-1} \delta_n = 0.$$

В качестве примеров составим матрицы для различных частных типов простых замкнутых цепей.

§ 68. Матрица цепи с вращательными парами.

Кинематическая цепь с одними вращательными парами (фиг. 398) получается из цепи, изображённой на фиг. 304, если положить $r_{jk} = r_{j1} = \text{const}$.

При этом, очевидно, $v_{jk} = 0$, $a_{jk} = 0$, $a'_{jk} = 0$, $d_{jk} = \frac{r_{jk}}{r_{j1}} = 1$, и коэффициенты ξ_{jk} , η_{jk} , ζ_{jk} , μ_{jk} имеют следующие частные значения:

$$\xi_{jk} = e^{i\varphi_{jk}} = u_{jk},$$

$$\eta_{jk} = \omega_{jk},$$

$$\zeta_{jk} = \varepsilon_{jk} + i\omega_{jk}^2,$$

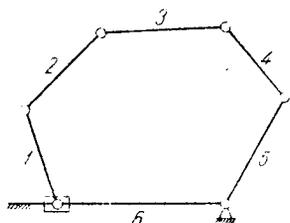
$$\mu_{jk} = \varepsilon'_{jk} - \omega_{jk}^3 + 3i\omega_{jk}\varepsilon_{jk}.$$

¹⁾ Чебышев П. Л.: Высшая алгебра, 1936.

Кулису можно считать неподвижной (или двигающейся только поступательно), если $\sigma_{nk} = \text{const}$. При этом $\varphi_{nk} = \sigma_{nk} - \sigma_{n1} = 0$ и $u_{nk} = e^{i\varphi_{nk}} = 1$. Так как по принятому ранее условию для n -го звена цепи $r_{n1} = 1$, то $r_{nk} = r_{n1} d'_{nk} = d'_{nk}$ и $\xi_{nk} = d_{nk} e^{i\varphi_{nk}} = r_{nk}$. При неподвижной кулисе $\omega_{nk} = 0$, $\varepsilon_{nk} = 0$, $\varepsilon'_{nk} = 0$, и коэффициенты τ_{nk} , ζ_{nk} , μ_{nk} имеют следующие значения:

$$\tau_{nk} = \frac{i v_{nk}}{r_{nk}}, \quad \zeta_{nk} = -\frac{ia'_{nk}}{r_{nk}}, \quad \mu_{nk} = \frac{ia''_{nk}}{r_{nk}}.$$

Для матрицы рассматриваемой цепи (фиг. 399) первые $n-1$ столбцов ничем не отличаются от столбцов матрицы цепи с вращательными парами,



Фиг. 399.

составленной в § 68. Остаётся установить элементы последнего n -го столбца матрицы. Первым и вторым элементами последнего столбца матрицы будут единицы. Для значений индекса k от $k=1$ до $k=s_1$ включительно s_1 элементов последнего столбца матрицы составляются из величин $\lambda_{nk} = \xi_{nk} = r_{nk}$.

Для значений индекса k от $k=1$ до $k=s_2$ включительно s_2 элементов последнего столбца матрицы M составляются из величин $\lambda_{nk} = \xi_{nk} \tau_{nk} = -i v_{nk}$.

Для значений индекса k от $k=1$ до $k=s_3$ включительно s_3 элементов последнего столбца матрицы M составляются из величин $\lambda_{nk} = \xi_{nk} \zeta_{nk} = -ia'_{nk}$.

Для значений индекса k от $k=1$ до $k=s_4$ включительно s_4 элементов последнего столбца матрицы M составляются из величин $\lambda_{nk} = \xi_{nk} \mu_{nk} = -ia''_{nk}$. Матрица рассматриваемой цепи получается из матрицы цепи с вращательными парами (§ 68), в которой последний столбец заменяется на столбец:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ r_{n1} \\ \vdots \\ r_{ns_1} \\ -i v_{ns_2} \\ \vdots \\ -i a'_{ns_3} \\ \vdots \\ -i a''_{ns_4} \\ \vdots \\ i a'_{ns_4} \end{array}$$

§ 70. Матрица цепи с одной подвижной кулисой.

Полагаем так же, как и в предыдущем параграфе, $r_{jk} = r_{j1} = \text{const}$, $v_{jk} = 0$, $a_{jk} = 0$, $a'_{jk} = 0$ для значений индекса $k=1, 2, \dots, n-1$, чем преобразуем цепь, изображённую на фиг. 394 в цепь с одной кулисой (фиг. 400). По принятому ранее условию для n -го звена цепи $r_{n1} = 1$ и, следовательно,

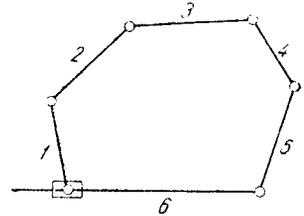
$d_{nk} = \frac{r_{nk}}{r_{n1}} = r_{nk}$. Для коэффициентов ξ_{nk} , τ_{nk} , ζ_{nk} , μ_{nk} имеем следующие

выражения:

$$\begin{aligned} \xi_{nk} &= r_{nk} e^{i\omega_{nk}}, & \tau_{nk} &= \omega_{nk} - \frac{i\nu_{nk}}{r_{nk}}, \\ \zeta_{nk} &= \xi_{nk} - i\omega_{nk}^2 + \frac{2\omega_{nk} \nu_{nk} - ia_{nk}}{r_{nk}}, \end{aligned}$$

$$u_{nk} = \xi'_{nk} - \omega_{nk}^3 + 3i\omega_{nk} \xi_{nk} + \frac{3a_{nk} \omega_{nk} + 3\nu_{nk} \xi_{nk} + 3i\nu_{nk} \omega_{nk}^2 - ia'_{nk}}{r_{nk}}$$

Для матрицы рассматриваемой цепи первые $n-1$ столбцов ничем не отличаются от соответствующих столбцов матрицы цепи с вращательными парами. Установим выражения для элементов последнего столбца. Первым и вторым элементами последнего столбца матрицы будут единицы. Для значений индекса k от $k=1$ до $k=s_1$ включительно s_1 элементов последнего столбца матрицы составляются из величин $u_{nk} = \xi_{nk} = r_{nk} e^{i\omega_{nk}} = r_{nk} u_{nk}$. Для значений индекса k от $k=1$ до $k=s_2$ включительно s_2 элементов последнего столбца матрицы M составятся из величин $u_{nk} = \zeta_{nk} = \tau_{nk} = (\omega_{nk} r_{nk} - i\nu_{nk}) u_{nk}$. Аналогичным образом устанавливаем, что



Фиг. 400.

$$u_{nk} = \xi_{nk} \zeta_{nk} = \left[(\xi'_{nk} + i\omega_{nk}^2) r_{nk} + 2\omega_{nk} \nu_{nk} - ia_{nk} \right] u_{nk}$$

для значений k от $k=1$ до $k=s_2$ включительно, а для значений k от $k=1$ до $k=s_1$ включительно

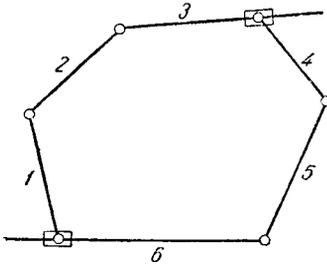
$$u_{nk} = \xi_{nk} u_{nk} = \left[(\xi'_{nk} - \omega_{nk}^3 + 3i\omega_{nk} \xi_{nk}) r_{nk} + 3a_{nk} \omega_{nk} + 3\nu_{nk} \xi_{nk} + 3i\nu_{nk} \omega_{nk}^2 - ia'_{nk} \right] u_{nk}.$$

Матрица рассматриваемой цепи получается из матрицы цепи с вращательными парами, если последний её столбец заменить на столбец

$$\begin{aligned} & 1 \\ & 1 \\ & r_{n_2} u_{n_1} \\ & \vdots \\ & r_{ns_1} u_{ns_1} \\ & \omega_{n_1} - i\nu_{n_1} \\ & \omega_{n_2} r_{n_2} - i\nu_{n_2} u_{n_1} \\ & \vdots \\ & \omega_{ns_1} r_{ns_1} - i\nu_{ns_1} u_{ns_1} \\ & \xi'_{n_1} + i\omega_{n_1}^2 + 2\omega_{n_1} \nu_{n_1} - ia_{n_1} \\ & \left[r_{n_2} (\xi'_{n_2} + i\omega_{n_2}^2) + 2\omega_{n_2} \nu_{n_2} - ia_{n_2} \right] u_{n_2} \\ & \vdots \\ & \left[r_{ns_1} (\xi'_{ns_1} + i\omega_{ns_1}^2) + 2\omega_{ns_1} \nu_{ns_1} - ia_{ns_1} \right] u_{ns_1} \\ & \xi'_{n_1} - \omega_{n_1}^3 + 3i\omega_{n_1} \xi_{n_1} + 3a_{n_1} \omega_{n_1} + 3\nu_{n_1} \xi_{n_1} + 3a_{n_1} \omega_{n_1}^2 - ia'_{n_1} \\ & \left[r_{n_2} (\xi'_{n_2} - \omega_{n_2}^3 + 3i\omega_{n_2} \xi_{n_2}) + 3a_{n_2} \omega_{n_2} + 3\nu_{n_2} \xi_{n_2} + 3a_{n_2} \omega_{n_2}^2 - ia'_{n_2} \right] u_{n_2} \\ & \vdots \\ & \left[r_{ns_1} (\xi'_{ns_1} - \omega_{ns_1}^3 + 3i\omega_{ns_1} \xi_{ns_1}) + 3a_{ns_1} \omega_{ns_1} + 3\nu_{ns_1} \xi_{ns_1} + 3a_{ns_1} \omega_{ns_1}^2 - ia'_{ns_1} \right] u_{ns_1} \end{aligned}$$

§ 71. Матрица цепи с двумя подвижными кулисами.

Нумеруем кулисные звенья индексами j и l и приходим к заключению, что матрица рассматриваемой цепи (Фиг. 401) составляется из $n-2$ столбцов матрицы цепи с вращательными парами, одного столбца матрицы цепи с одной кулисой, составленного в предыдущем параграфе, и одного нового столбца, составленного из комбинаций коэффициентов ξ_{jk} , η_{jk} , ζ_{jk} , ν_{jk} , представленных в своём общем виде:



Фиг. 401.

$$\xi_{jk} = d_{jk} u_{jk} \quad (k=1, 2, \dots, s_1),$$

$$\xi_{jk} \eta_{jk} = (\omega_{jk} d_{jk} - i b_{jk}) u_{jk} \quad (k=1, 2, \dots, s_2),$$

$$\xi_{jk} \zeta_{jk} = [(\varepsilon_{jk} + i \omega_{jk}^2) d_{jk} + 2 \omega_{jk} b_{jk} - i c_{jk}] u_{jk} \quad (k=1, 2, \dots, s_3),$$

$$\xi_{jk} \nu_{jk} = [(\varepsilon'_{jk} - \omega_{jk}^3 + 3i \omega_{jk} \varepsilon_{jk}) d_{jk} + (b_{jk} (\varepsilon_{jk} + i \omega_{jk}^2) + 3c_{jk} \omega_{jk} - f_{jk}) u_{jk} \quad (k=1, 2, \dots, s_4).$$

Первый и второй элементы j -го столбца равны единице, так что столбец кулисного звена цепи представится в следующем виде:

$$\begin{aligned} & 1 \\ & 1 \\ & d_{j_2} u_{j_2} \\ & \vdots \\ & d_{j_{s_1}} u_{j_{s_1}} \\ & \omega_{j_1} - i b_{j_1} \\ & (\omega_{j_2} d_{j_2} - i b_{j_2}) u_{j_2} \\ & \vdots \\ & (\omega_{j_{s_2}} d_{j_{s_2}} - i b_{j_{s_2}}) u_{j_{s_2}}, \\ & \varepsilon_{j_1} + i \omega_{j_1}^2 + 2 \omega_{j_1} b_{j_1} - i c_{j_1}, \\ & [(\varepsilon_{j_2} + i \omega_{j_2}^2) d_{j_2} + 2 \omega_{j_2} b_{j_2} - i c_{j_2}] u_{j_2}, \\ & \vdots \\ & [(\varepsilon_{j_{s_3}} + i \omega_{j_{s_3}}^2) d_{j_{s_3}} + 2 \omega_{j_{s_3}} b_{j_{s_3}} - i c_{j_{s_3}}] u_{j_{s_3}}, \\ & \varepsilon'_{j_1} - \omega_{j_1}^3 + 3i \omega_{j_1} \varepsilon_{j_1} + b_{j_1} (\varepsilon_{j_1} + i \omega_{j_1}^2) + 3c_{j_1} \omega_{j_1} - f_{j_1}, \\ & [(\varepsilon'_{j_2} - \omega_{j_2}^3 + 3i \omega_{j_2} \varepsilon_{j_2}) d_{j_2} + b_{j_2} (\varepsilon_{j_2} + i \omega_{j_2}^2) + 3c_{j_2} \omega_{j_2} - f_{j_2}] u_{j_2}, \\ & \vdots \\ & [(\varepsilon'_{j_{s_4}} - \omega_{j_{s_4}}^3 + 3i \omega_{j_{s_4}} \varepsilon_{j_{s_4}}) d_{j_{s_4}} + 3b_{j_{s_4}} (\varepsilon_{j_{s_4}} + i \omega_{j_{s_4}}^2) + 3c_{j_{s_4}} \omega_{j_{s_4}} - f_{j_{s_4}}] u_{j_{s_4}}. \end{aligned}$$

§ 72. Границы применимости метода.

Пусть требуется построить цепь по значениям ε_{jk} и d_{jk} , заданным в s_1 её положениях. В таком случае начальное положение искомой цепи определяется векторами z_{j_1} ($j=1, 2, \dots, n-1$) по уравнениям (146). Покажем, что для всякой цепи число s_1 имеет вполне определённую верхнюю границу (нижняя граница равна, очевидно, $s_1=1$). Прежде всего отметим, что при $s_1 \leq n-1$ задача обычно имеет решение, определяемое формулами (153), причём все величины, в них входящие, могут быть выбраны, вообще говоря, произвольно. Следовательно, искомую верхнюю границу s_1 следует искать для значений

$s_1 > n - 1$, т. е. для задач, решаемых с применением уравнений совместности. Пусть неизвестные углы φ_{jk} , определяемые из уравнений совместности, выбраны так, что два из них входят в одно из заданных уравнений (146). Отбросив это уравнение, построим кинематическую цепь по остальным $s_1 - 1$ уравнениям (146). Далее, по найденным размерам и положениям звеньев, решая систему двух уравнений, состоящую из отброшенного уравнения и ему сопряжённого, находим значения двух неизвестных углов φ_{jk} , которые в них входят, согласно принятому ранее допущению. Очевидно, что построенная таким образом кинематическая цепь будет удовлетворять всем s_1 уравнениям рассматриваемой задачи. Рассуждения не изменятся, если в отброшенное уравнение входят любые комбинации двух неизвестных, например φ_{jk} и d_{jk} или два значения d_{jk} .

Следовательно, задание некоторого уравнения типа (146) только тогда имеет смысл, когда число неизвестных φ_{jk} (или d_{jk}), в него входящих, не превышает одного. Так как, кроме того, для первого уравнения системы при $k=1$ углы $\varphi_{j1}=0$ и $d_{j1}=1$, то допустимое число неизвестных не должно превосходить $s_1 - 1$. Общее число уравнений совместности (вместе с сопряжёнными уравнениями), равное $2(s_1 - n + 1)$, не должно превосходить допустимого числа неизвестных. Следовательно, $2(s_1 - n + 1) \leq s_1 - 1$, откуда

$$s_1 \leq 2n - 3.$$

Выведенным неравенством определяются границы применимости метода при синтезе кинематических цепей по заданным положениям и направлениям звеньев.

Пусть требуется построить цепь по значениям φ_{jk} и d_{jk} , заданным в s_1 её положениях, и значениям ω_{jk} и b_{jk} , заданным в s_2 из s_1 её положений. Пусть неизвестные, определяемые из уравнений совместности, выбраны так, что, например, два угла и две угловые скорости входят в два уравнения, из которых одно типа (146), другое типа (147), написанных для одного положения цепи. Отбросив эти уравнения, построим кинематическую цепь по остальным $s_1 + s_2 - 2$ уравнениям, а затем по известным размерам и положениям звеньев найдём из системы двух отброшенных уравнений и уравнений, им сопряжённых, неизвестные углы φ_{jk} и угловые скорости ω_{jk} .

Очевидно, что построенная таким образом кинематическая цепь будет удовлетворять всем условиям поставленной задачи.

Следовательно, задание двух уравнений (146) и (147) для одного положения цепи только тогда имеет смысл, когда число неизвестных φ_{jk} и ω_{jk} , в них входящих, не превосходит трёх. Исключением будет лишь первая пара уравнений (146) и (147) при значении индекса $k=1$. Так как для первого уравнения (146) при $k=1$ углы $\varphi_{j1}=0$ и $d_{j1}=1$, то в нём не будет неизвестных φ_{jk} или d_{jk} , вследствие чего соответствующее уравнение (147) при $k=1$ не может содержать больше одного неизвестного вида ω_{jk} (или b_{jk}). На основании изложенного для уравнений совместности в рассматриваемом случае можно воспользоваться только таким числом неизвестных: 1) в первой паре уравнений (146) и (147) одним неизвестным типа ω_{j1} (или b_{j1}), 2) в каждой паре из 2 ($s_2 - 1$) уравнений (146) и (147) не более, чем тремя неизвестными вида φ_{jk} и ω_{jk} , 3) в каждом из оставшихся ($s_1 - 1$) - ($s_2 - 1$) уравнений (146) не более чем одним неизвестным типа φ_{jk} . Следовательно, общее допустимое число неизвестных типа φ_{jk} и ω_{jk} равно

$$1 + 3(s_2 - 1) + s_1 - s_2 = s_1 + 2s_2 - 2.$$

Общее число скалярных уравнений совместности для системы из $s_1 + s_2$ уравнений с $n - 1$ неизвестными равно:

$$2(s_1 + s_2 - n + 1).$$

Так как число уравнений совместности не должно превосходить числа неизвестных, то должно быть:

$$s_1 \leq 2n - 4.$$

По условию $s_2 \leq s_1$, так что $s_2 \leq 2n - 4$, и

$$s = s_1 + s_2 \leq 4n - 8.$$

Этим неравенством определяются границы применимости метода при синтезе кинематических цепей по заданным наперед положениям, направлениям и скоростям звеньев.

Пусть требуется построить цепь по значениям φ_{jk} и d_{jk} , заданным в s_1 её положениях, значениям ω_{jk} и b_{jk} , заданным в s_2 из s_1 её положениях, и значениям ε_{jk} и c_{jk} , заданным в s_3 её положениях. Пусть неизвестные, определяемые из уравнений совместности, выбраны так, что, например, два угла φ_{jk} , две угловые скорости ω_{jk} и два угловых ускорения ε_{jk} входят в три уравнения, написанных для одного положения цепи, причем одно из них типа (146), другое — типа (147), а третье — типа (149). Рассуждая аналогично изложенному выше, убеждаемся, что задание трёх уравнений (146), (147) и (149) для одного положения цепи только тогда имеет смысл, когда число неизвестных, в него входящих, не превышает пяти. Исключением будет лишь первая тройка уравнений (146), (147), (149) при $k=1$, для которых допустимое число неизвестных типа ω_{j_1} и ε_{j_1} не должно превосходить трёх. Таким образом, общее допустимое число неизвестных определяется на основании таких соображений: 1) в первой тройке уравнений (146), (147), (149) три неизвестных типа ω_{j_1} и ε_{j_1} , 2) в каждой тройке из 3 ($s_3 - 1$) уравнений (146), (147), (149) по пять неизвестных типа φ_{jk} , ω_{jk} , ε_{jk} , 3) в каждой паре из оставшихся 2 ($s_2 - s_3$) уравнений (146) и (147) по три неизвестных типа φ_{jk} и ω_{jk} , 4) в каждом из оставшихся $s_1 - s_2$ уравнений (146) по одному неизвестному типа φ_{jk} . Следовательно, общее допустимое число неизвестных типа φ_{jk} , ω_{jk} , ε_{jk} равно:

$$3 + 5(s_3 - 1) + 3(s_2 - s_3) + s_1 - s_2 = s_1 + 2s_2 + 2s_3 - 2.$$

Приравняв полученное выражение общему числу скалярных уравнений $2(s_1 + s_2 + s_3 - n + 1)$, получим:

$$s_1 \leq 2n - 4.$$

Так как по условию $s_2 \leq s_1$ и $s_3 \leq s_2$, то

$$s = s_1 + s_2 + s_3 \leq 6n - 12.$$

Этим неравенством определяются границы применимости метода при синтезе простых цепей по заданным наперед положениям, направлениям, скоростям и ускорениям звеньев.

По условиям синтеза механизмов при образовании их из простых кинематических цепей обычно требуется, чтобы неизвестные, определяемые из уравнений совместности, располагались только в одном столбце соответствующих матриц M . В этом случае индекс j для неизвестных φ_{jk} , ω_{jk} , ε_{jk} , ε'_{jk} , d_{jk} , b_{jk} , c_{jk} , f_{jk} , как определяющий номер некоторого звена, имеет одно вполне определенное значение. Общее число неизвестных определяется по числу различных значений только одного индекса k для каждого типа неизвестного. Так как по условию для φ_{jk} индекс $k=2, 3, \dots, s_1$ ($\varphi_{j_1}=0$), для ω_{jk} индекс $k=1, 2, \dots, s_2$, для ε_{jk} индекс $k=1, 2, \dots, s_3$, для ε'_{jk} индекс $k=1, 2, \dots, s_4$, то общее возможное число неизвестных равно $s_1 - 1 + s_2 + s_3 + s_4$. Сравнив с числом уравнений совместности $2(s_1 + s_2 + s_3 + s_4 - n + 1)$, получим:

$$s = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 \leq 2n - 3. \quad (156)$$

Так как, при расположении неизвестных φ_{jk} , ω_{jk} , ε_{jk} , ε'_{jk} в двух или нескольких столбцах матрицы M , практическое решение соответствующих уравнений совместности затруднительно, то по формуле (156) обычно устанавливаются практические границы применимости метода как при синтезе простых цепей, так и механизмов. Только в исключительных частных случаях, когда системы уравнений совместности упрощаются, удаётся решать задачи синтеза при $s > 2n - 3$. Примером такого рода частного случая является задача, рассмотренная в § 96, для которой $s=6$ при $n=4$.

§ 73. Графическое представление комплексного определителя.

Решения всех задач по синтезу простых цепей выражаются через некоторые комплексные определители. Рассмотрим графическое построение комплексного определителя любого порядка.

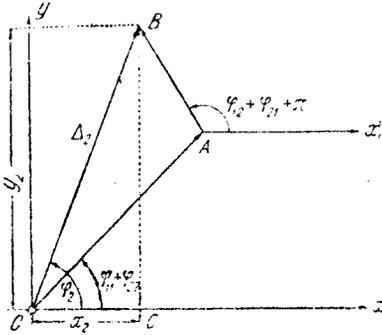
Пусть дан определитель второго порядка:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} A_{11}''_{11} & A_{21}''_{11} \\ A_{12}''_{12} & A_{22}''_{22} \end{vmatrix}.$$

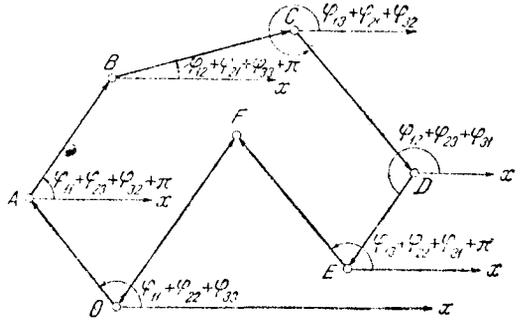
Пишем значение определителя в развёрнутом виде:

$$\Delta_2 = A_{11}A_{22}u_{11}u_{22} - A_{12}A_{21}u_{12}u_{21}$$

и замечаем, что Δ_2 представляет сумму двух комплексных чисел. Воспользовавшись векторным представлением комплексного числа, откладываем (фиг. 402) от начала O под углом $\varphi_{11} + \varphi_{22}$ к оси x отрезок $OA = A_{11}A_{22}$. Тогда $OA = A_{11}A_{22}e^{i(\varphi_{11} + \varphi_{22})}$. От точки A под углом $\varphi_{12} + \varphi_{21} + \pi$ к оси x откладываем отрезок $AB = A_{12}A_{21}$ так, что $AB = -A_{12}A_{21}e^{i(\varphi_{12} + \varphi_{21} + \pi)} = A_{12}A_{21}e^{i(\varphi_{12} + \varphi_{21} + \pi)}$. Со-



Фиг. 402.



Фиг. 403.

единица O с B , получим вектор $OB = \Delta_2$. Непосредственно по чертежу получаем величины x_2, y_2, r_2, φ_2 :

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= x_2 + iy_2 = OC + iCB, \\ \Delta_2 &= r_2 e^{i\varphi_2} = OB e^{i(\pi - \varphi_2)}. \end{aligned}$$

Переходим к построению определителя третьего порядка....

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} A_{11}u_{11} & A_{21}u_{21} & A_{31}u_{31} \\ A_{12}u_{12} & A_{22}u_{22} & A_{32}u_{32} \\ A_{13}u_{13} & A_{23}u_{23} & A_{33}u_{33} \end{vmatrix}$$

Разлагая определитель, имеем:

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= A_{11}A_{22}A_{33}u_{11}u_{22}u_{33} - A_{11}A_{23}A_{32}u_{11}u_{23}u_{32} - A_{12}A_{21}A_{33}u_{12}u_{21}u_{33} + \\ &+ A_{13}A_{21}A_{32}u_{13}u_{21}u_{32} + A_{12}A_{23}A_{31}u_{12}u_{23}u_{31} - A_{13}A_{22}A_{31}u_{13}u_{22}u_{31}. \end{aligned}$$

Определитель Δ_3 в развёрнутом виде представляет сумму шести комплексных чисел. Интерпретируя эти комплексные числа как векторы, откладываем (фиг. 403).

$$\begin{aligned} OA &= A_{11}A_{22}A_{33}e^{i(\varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_{33})}, & AB &= A_{11}A_{23}A_{32}e^{i(\varphi_{11} + \varphi_{23} + \varphi_{32} + \pi)}, \\ BC &= A_{11}A_{23}A_{32}e^{i(\varphi_{11} + \varphi_{23} + \varphi_{32} + \pi)}, & CD &= A_{12}A_{21}A_{33}e^{i(\varphi_{12} + \varphi_{21} + \varphi_{33})}, \\ DE &= A_{12}A_{23}A_{31}e^{i(\varphi_{12} + \varphi_{23} + \varphi_{31})}, & EF &= A_{13}A_{22}A_{31}e^{i(\varphi_{13} + \varphi_{22} + \varphi_{31} + \pi)}. \end{aligned}$$

Соединя O с F , получим вектор $OF = \Delta_3$.

Рассмотрим построение комплексного определителя четвёртого порядка:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} A_{11}u_{11} & A_{21}u_{21} & A_{31}u_{31} & A_{41}u_{41} \\ A_{12}u_{12} & A_{22}u_{22} & A_{32}u_{32} & A_{42}u_{42} \\ A_{13}u_{13} & A_{23}u_{23} & A_{33}u_{33} & A_{43}u_{43} \\ A_{14}u_{14} & A_{24}u_{24} & A_{34}u_{34} & A_{44}u_{44} \end{vmatrix}$$

Разлагаем определитель по элементам какой-либо строки, например первой:

$$\Delta_4 = A_{11}\delta_1 e^{i\varphi_1} - A_{21}\delta_2 e^{i\varphi_2} + A_{31}\delta_3 e^{i\varphi_3} - A_{41}\delta_4 e^{i\varphi_4},$$

где δ_j ($j=1, 2, 3, 4$) комплексные определители третьего порядка:

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} A_{22} & u_{22} & A_{32} & u_{32} & A_{42} & u_{42} \\ A_{23} & u_{23} & A_{33} & u_{33} & A_{43} & u_{43} \\ A_{24} & u_{24} & A_{34} & u_{34} & A_{44} & u_{44} \end{vmatrix},$$

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} A_{12} & u_{12} & A_{32} & u_{32} & A_{42} & u_{42} \\ A_{13} & u_{13} & A_{33} & u_{33} & A_{43} & u_{43} \\ A_{14} & u_{14} & A_{34} & u_{34} & A_{44} & u_{44} \end{vmatrix},$$

$$\delta_3 = \begin{vmatrix} A_{12} & u_{12} & A_{22} & u_{22} & A_{42} & u_{42} \\ A_{13} & u_{13} & A_{23} & u_{23} & A_{43} & u_{43} \\ A_{14} & u_{14} & A_{24} & u_{24} & A_{44} & u_{44} \end{vmatrix},$$

$$\delta_4 = \begin{vmatrix} A_{12} & u_{12} & A_{22} & u_{22} & A_{32} & u_{32} \\ A_{13} & u_{13} & A_{23} & u_{23} & A_{33} & u_{33} \\ A_{14} & u_{14} & A_{24} & u_{24} & A_{34} & u_{34} \end{vmatrix}.$$

Дальнейшие построения возможны по следующим вариантам:

1) Строим значения определителей третьего порядка и представляем результаты в тригонометрической форме:

$$\delta_j = r_j e^{i\varphi_j} \quad (j=1, 2, 3, 4).$$

Подставляем найденные значения δ_j в формулу для Δ_4 :

$$\Delta_4 = A_{11} r_1 e^{i(\varphi_{11} + \varphi_1)} - A_{21} r_2 e^{i(\varphi_{21} + \varphi_2)} + A_{31} r_3 e^{i(\varphi_{31} + \varphi_3)} - A_{41} r_4 e^{i(\varphi_{41} + \varphi_4)}.$$

Строим сумму четырёх комплексных чисел, стоящих в правой части, и получаем искомое значение Δ_4 .

2) Развёртываем значение определителей третьего порядка δ_j в строку и подставляем в формулу для Δ_4 . В результате получим, что Δ_4 представится суммой 24 векторов. Построив эту сумму графически, найдём искомое значение Δ_4 .

В случае определителя любого порядка Δ_n имеем его разложение в строку в виде:

$$\Delta_n = \sum B_k e^{i\varphi_k} \quad (k=1, 2, \dots, n!).$$

Рассматривая $B_k e^{i\varphi_k}$ как векторы, построим многоугольник, соответствующий правой части написанного равенства. Замыкающей стороной многоугольника будет вектор, представляющий значение искомого комплексного определителя Δ_n .

Указанное построение может быть использовано как для приближённого определения значений комплексных определителей, так и для проверки правильности аналитических вычислений.

§ 74. Вычисление комплексного определителя.

Пусть имеем развёрнутое выражение типового комплексного определителя второго порядка:

$$\Delta_2 = A_{11} A_{22} e^{i(\varphi_{11} + \varphi_{22})} - A_{12} A_{21} e^{i(\varphi_{12} + \varphi_{21})}.$$

Обозначая $\Delta_2 = x_2 + iy_2$ и приравнявая действительные и мнимые части, получим:

$$x_2 = A_{11} A_{22} \cos(\varphi_{11} + \varphi_{22}) - A_{12} A_{21} \cos(\varphi_{12} + \varphi_{21}),$$

$$y_2 = A_{11} A_{22} \sin(\varphi_{11} + \varphi_{22}) - A_{12} A_{21} \sin(\varphi_{12} + \varphi_{21}).$$

Модуль r_2 определителя Δ_2 равен:

$$r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \sqrt{A_{11}^2 A_{22}^2 + A_{12}^2 A_{21}^2 - 2A_{11} A_{22} A_{12} A_{21} \cos(\varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_{12} + \varphi_{21})}.$$

В часто встречающемся частном случае при $A_{11} = A_{22} = A_{12} = A_{21} = 1$ имеем более простую формулу:

$$r_2 = 2 \sin \frac{\varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_{12} + \varphi_{21}}{2}.$$

Аргумент φ_2 определителя Δ_2 находится по формуле:

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{y_2}{x_2} = \frac{A_{11}A_{22} \sin(\varphi_{11} + \varphi_{22}) - A_{12}A_{21} \sin(\varphi_{12} + \varphi_{21})}{A_{11}A_{22} \cos(\varphi_{11} + \varphi_{22}) - A_{12}A_{21} \cos(\varphi_{12} + \varphi_{21})}.$$

В случае комплексного определителя третьего порядка (в развёрнутом виде)

$$\begin{aligned} \Delta_3 = & A_{11}A_{22}A_{33}e^{i(\varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_{33})} - A_{11}A_{23}A_{32}e^{i(\varphi_{11} + \varphi_{23} + \varphi_{32})} - A_{12}A_{21}A_{33}e^{i(\varphi_{12} + \varphi_{21} + \varphi_{33})} + \\ & + A_{12}A_{21}A_{33}e^{i(\varphi_{12} + \varphi_{21} + \varphi_{33})} + A_{12}A_{22}A_{31}e^{i(\varphi_{12} + \varphi_{22} + \varphi_{31})} - A_{13}A_{23}A_{31}e^{i(\varphi_{13} + \varphi_{23} + \varphi_{31})} = \\ = & x_3 + iy_3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 = & A_{11}A_{22}A_{33} \cos(\varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_{33}) - A_{11}A_{23}A_{32} \cos(\varphi_{11} + \varphi_{23} + \varphi_{32}) - \\ & - A_{12}A_{21}A_{33} \cos(\varphi_{12} + \varphi_{21} + \varphi_{33}) + A_{13}A_{23}A_{31} \cos(\varphi_{13} + \varphi_{23} + \varphi_{31}) + \\ & + A_{12}A_{22}A_{31} \cos(\varphi_{12} + \varphi_{22} + \varphi_{31}) - A_{13}A_{22}A_{31} \cos(\varphi_{13} + \varphi_{22} + \varphi_{31}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_3 = & A_{11}A_{22}A_{33} \sin(\varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_{33}) - A_{11}A_{23}A_{32} \sin(\varphi_{11} + \varphi_{23} + \varphi_{32}) + \\ & - A_{12}A_{21}A_{33} \sin(\varphi_{12} + \varphi_{21} + \varphi_{33}) + A_{13}A_{21}A_{32} \sin(\varphi_{13} + \varphi_{21} + \varphi_{32}) + \\ & + A_{12}A_{22}A_{31} \sin(\varphi_{12} + \varphi_{22} + \varphi_{31}) - A_{13}A_{22}A_{31} \sin(\varphi_{13} + \varphi_{22} + \varphi_{31}); \end{aligned}$$

$$r_3 = \sqrt{x_3^2 + y_3^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{y_3}{x_3}.$$

В случае определителей четвёртого и более высокого порядков формулы для вычисления x_j и y_j получаются несколькими произведениями с большим числом слагаемых. Такие определители целесообразно приводить к сумме определителей третьего порядка, каждый из которых затем вычисляется по приведённым выше формулам. Так, например, разлагая произвольный определитель четвёртого порядка по элементам любой строки (столбца), получим:

$$\Delta_4 = z_1 \delta_{41} - z_2 \delta_{42} + z_3 \delta_{43} - z_4 \delta_{44},$$

где z_1, z_2, z_3, z_4 — элементы соответствующей строки (столбца), а δ_{4j} — определители третьего порядка. Умножая элементы произвольной строки (столбца) определителей третьего порядка δ_{4j} на соответствующие им множители z_j , получаем:

$$\Delta_4 = \Delta_{31} - \Delta_{32} + \Delta_{33} - \Delta_{34},$$

где $\Delta_{3j} = z_j \delta_{4j}$ — определители третьего порядка. Вычисляя для $\Delta_{3j} = x_{3j} + iy_{3j}$ значения x_{3j} и y_{3j} , найдём:

$$x_4 = x_{31} - x_{32} + x_{33} - x_{34},$$

$$y_4 = y_{31} - y_{32} + y_{33} - y_{34},$$

$$\Delta_4 = x_4 + iy_4.$$

Аналогичным образом поступаем и в случае определителя более высокого порядка.

XI. СИНТЕЗ ЧЕТЫРЁХЗВЕННЫХ МЕХАНИЗМОВ.

§ 75. Типы четырёхзвенных механизмов.

Четырёхзвенные механизмы могут быть образованы из простой восьмизвенной цепи с восемью степенями свободы (фиг. 48^а) наложением на неё семи связей. Так как при закреплении звена на жёсткую цепь накладываются три связи, то остаются четыре дополнительных связи, выбором которых можно располагать. Пусть дополнительные связи определены условиями:

$$r_{jk} = \text{const.} \quad (j = 1, 2, 3, 4).$$

Написанные четыре условия устанавливают неизменность всех размеров звеньев

цепи и превращают её в обычный шарнирный четырёхзвенник (фиг. 405). Пусть дополнительные связи определены условиями:

$$r_{jk} = \text{const.} \quad (j = 1, 2, 3),$$

$$a_{1k} - a_{4k} = \text{const.}$$

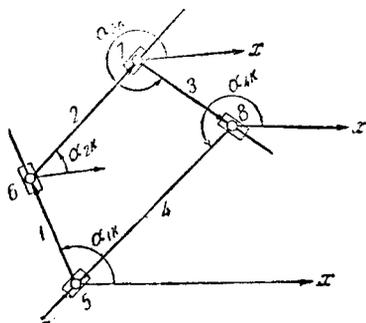
Эти условия устанавливают неизменность трёх размеров звеньев цепи и угла между двумя звеньями и превращают её в зависимости от выбора стойки в дезаксиальный кривошипно-шатунный механизм (фиг. 406) или механизм с вращающейся (качающейся) кулисой (фиг. 407).

Пусть дополнительные связи определены условиями:

$$r_{jk} = \text{const.} \quad (k = 1, 3),$$

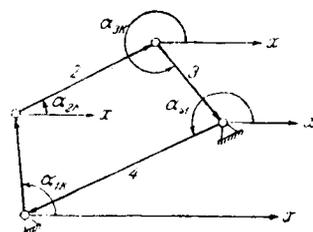
$$a_{1k} - a_{2k} = \text{const.},$$

$$a_{2k} - a_{4k} = \text{const.}$$

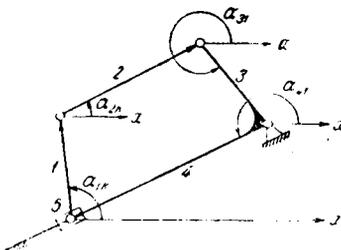


Фиг. 404.

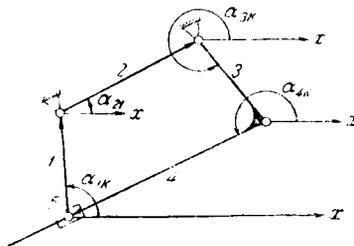
При соблюдении этих условий цепь превращается в четырёхзвенный механизм с двумя поступательными парами типа, изображённого на фиг. 408.



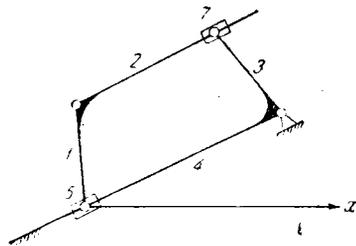
Фиг. 405.



Фиг. 406.



Фиг. 407.



Фиг. 408.

Из изложенного следует, что различные задачи синтеза четырёхзвенных механизмов будут частными случаями таких же задач, сформулированных для простой цепи, изображённой на фиг. 404.

§ 76. Составление матриц шарнирного четырёхзвенника.

Пусть углы поворотов звеньев φ_{jk} заданы в s_1 положениях механизма, угловые скорости ω_{jk} звеньев в s_2 из s_1 положений механизма, угловые ускорения звеньев ε_{jk} в s_3 из s_2 положений механизма и первые производные от ускорений звеньев ε'_{jk} в s_4 из s_3 положениях механизма. Выясним, какие строки будут входить во всевозможные матрицы механизма при решении конкретных задач. Прежде всего отметим, что максимальное число условий s , за-

даваемых для одного звена механизма, а следовательно, и соответствующее общее число частных уравнений типа (152) определяется по формуле (156). Для рассматриваемого случая, полагая $n=4$, имеем:

$$s = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 \leq 2n - 3 \leq 5.$$

Так как, кроме того, $s_1 \geq s_2 \geq s_3 \geq s_4$, то $s_1 \leq 5$, $s_2 \leq 2$, $s_3 \leq 1$ и $s_4 \leq 1$.

Пронумеруем звенья механизма, считая первым звеном кривошип, вторым — шатун, третьим — коромысло (второй кривошип) и четвёртым — стойку (фиг. 405). Тогда для стойки, полагая $j=4$, имеем: $\varphi_{4k}=0$, $\omega_{4k}=0$, $\varepsilon_{4k}=0$, $\varepsilon'_{4k}=0$. Матрица механизма составляется по изложенному в § 68.

Первые две строки матрицы механизма состоят из единиц

$$\left. \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1, \\ 1 & 1 & 1 & 1. \end{array} \right\} \quad (157)$$

Если для построения механизма заданы только углы, определяющие направление звеньев, то $s_1 \leq 5$, $s_2 = s_3 = s_4 = 0$. Полагая $k=2, 3, 4, 5$ и учитывая, что для стойки $u_{4k} = e^{i\varphi_{4k}} = 1$. Будем в этом случае составлять матрицу механизма из строк (157) и следующих:

$$\left. \begin{array}{cccc} u_{12} & u_{22} & u_{32} & 1, \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & 1, \\ u_{14} & u_{24} & u_{34} & 1, \\ u_{15} & u_{25} & u_{35} & 1. \end{array} \right\} \quad (158)$$

Если для построения механизма заданы углы φ_{jk} и угловые скорости ω_{jk} звеньев, то $s_1 \neq 0$, $s_2 \leq 2$, $s_3 = s_4 = 0$. Полагая $k=1, 2$ и учитывая, что для стойки $\omega_{4k}=0$, будем в этом случае составлять матрицу механизма из двух строк (157), строк (158) и следующих:

$$\left. \begin{array}{cccc} \omega_{11} & \omega_{21} & \omega_{31} & 0, \\ \omega_{12} & \omega_{22} & \omega_{32} & 0. \end{array} \right\} \quad (159)$$

Если для построения механизма заданы углы φ_{jk} , угловые скорости ω_{jk} и угловые ускорения ε_{jk} звеньев, то $s_1 \neq 0$, $s_2 \neq 0$, $s_3 = 1$, $s_4 = 0$. Полагая $k=1$ и учитывая, что для стойки $\varepsilon_{4k}=0$, будем в этом случае составлять матрицу механизма из двух строк (157), строк (158), (159) и одной новой:

$$\varepsilon_{11} + i\omega_{11}^2 \quad \varepsilon_{21} + i\omega_{21}^2 \quad \varepsilon_{31} + i\omega_{31}^2 \quad 0. \quad (160)$$

Если для построения механизма заданы φ_{jk} , ω_{jk} , ε_{jk} и первые производные от угловых ускорений ε'_{jk} , то $s_1 \neq 0$, $s_2 \neq 0$, $s_3 \neq 0$, $s_4 = 1$. Полагая $k=1$ и учитывая, что для стойки $\varepsilon'_{41}=0$, будем в этом случае составлять матрицу механизма из двух строк (157), строк (158), (159), (160) и одной новой:

$$\varepsilon'_{11} - \omega_{11}^3 + 3i\varepsilon_{11}\omega_{11} \quad \varepsilon'_{21} - \omega_{21}^3 + 3i\varepsilon_{21}\omega_{21} \quad \varepsilon'_{31} - \omega_{31}^3 + 3i\varepsilon_{31}\omega_{31} \quad 0. \quad (161)$$

§ 77. Составление матриц декартевого кривошипно-шатунного механизма.

Пронумеруем звенья механизма, считая первым звеном стойку, вторым — кривошип, третьим — шатун и четвёртым — кулису. Тогда для неподвижных стойки и кулисы при $j=1, 4$ имеем $\varphi_{1k} = \varphi_{4k} = 0$, $\omega_{1k} = \omega_{4k} = 0$, $\varepsilon_{1k} = \varepsilon_{4k} = 0$, $\varepsilon'_{1k} = \varepsilon'_{4k} = 0$. Столбцы, определяющие движение кривошипа и шатуна, составляются по § 68, а столбец, определяющий движение ползушки, — по § 69. Первые две строки любой матрицы механизма состоят из единиц (157).

Если для построения механизма заданы углы φ_{jk} , определяющие направление звеньев, и расстояния r_{4k} , определяющие движение ползушек, то матрица

механизма составляется из строк (147) и следующих:

$$\left. \begin{array}{l} 1 \quad u_{22} \quad u_{32} \quad r_{42} \\ 1 \quad u_{23} \quad u_{33} \quad r_{43} \\ 1 \quad u_{24} \quad u_{34} \quad r_{44} \\ 1 \quad u_{25} \quad u_{35} \quad r_{45} \end{array} \right\} \quad (162)$$

Если для построения механизма заданы углы φ_{jk} , угловые скорости ω_{jk} , расстояния r_{4k} и линейные скорости v_{4k} , то матрица механизма составляется из двух строк (157), строк (162) и следующих:

$$\left. \begin{array}{l} 0 \quad \omega_{21} \quad \omega_{31} \quad -iv_{41} \\ 0 \quad \omega_{22}u_{22} \quad \omega_{32}u_{32} \quad -iv_{42} \end{array} \right\} \quad (163)$$

Если для построения механизма заданы углы φ_{jk} , угловые скорости ω_{jk} , угловые ускорения ϵ_{jk} , расстояния r_{4k} , скорости v_{4k} и ускорения a_{4k} , то матрица механизма составляется из двух строк (157), строк (162), (163) и одной новой:

$$0 \quad \epsilon_{21} + i\omega_{21}^2 \quad \epsilon_{31} + i\omega_{31}^2 \quad -ia_{41} \quad (164)$$

Если для построения механизма заданы φ_{jk} , ω_{jk} , ϵ_{jk} , r_{4k} , v_{4k} , a_{4k} , a'_{4k} , то матрица механизма составляется из двух строк (157), строк (162), (163), (164) и одной новой:

$$0 \quad \epsilon'_{21} - \omega_{21}^2 + 2i\omega_{21}\epsilon_{21} \quad \epsilon'_{31} - \omega_{31}^2 + 2i\omega_{31}\epsilon_{31} \quad -ia'_{41} \quad (165)$$

Аналогичным образом составляются матрицы для любого другого типа четырёхзвённого механизма.

§ 78. Снятие шарнирного четырёхзвённого механизма по четырём заданным вращательным кривошипа и коромысла.

Пусть четыре положения кривошипа и коромысла заданы соответственно углами φ_{1k} и φ_{3k} ($k=2, 3, 4$), отсчитываемыми от некоторых начальных положений этих звеньев. Обозначая аналогичные углы поворотов шатуна через φ_{2k} ($k=2, 3, 4$), составим матрицу механизма из строк (157) и трёх строк (158):

$$M = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} & 1 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & 1 \\ u_{14} & u_{24} & u_{34} & 1 \end{array} \right\|$$

Выделим из матрицы определитель механизма:

$$D = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} & 1 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & 1 \end{array} \right| = 0,$$

и уравнение совместности:

$$D_1 = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} & 1 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & 1 \\ u_{14} & u_{24} & u_{34} & 1 \end{array} \right| = 0.$$

Комплексное уравнение совместности $D_1 = 0$ определяет значения двух неизвестных углов, например φ_{23} и φ_{24} , когда остальные углы заданы. Так как по условию задачи заданы только углы φ_{1k} и φ_{2k} ($k = 2, 3, 4$), то значение угла φ_{23} выбирается произвольно и, следовательно, существуют ∞^1 шарнирных четырёхзвеньевиков, удовлетворяющих всем условиям поставленной задачи. Разлагаем определитель D_1 по элементам второго столбца, содержащего неизвестные углы φ_{23} и φ_{24} :

$$D_1 = \Delta_1 - \Delta_2 u_{22} + \Delta_3 u_{23} - \Delta_4 u_{24} = 0, \quad (166)$$

где Δ_j ($j = 1, 2, 3, 4$) — комплексные определители третьего порядка, равные (в развёрнутом виде):

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= u_{13}u_{34} - u_{14}u_{33} - u_{12}u_{34} + u_{14}u_{32} + u_{12}u_{33} - u_{13}u_{32}, \\ \Delta_2 &= u_{13}u_{34} - u_{14}u_{33} - u_{34} + u_{23} + u_{14} - u_{13}, \\ \Delta_3 &= u_{12}u_{34} - u_{14}u_{33} - u_{34} + u_{23} + u_{14} - u_{12}, \\ \Delta_4 &= u_{12}u_{33} - u_{13}u_{32} - u_{33} + u_{32} + u_{12} - u_{13}. \end{aligned}$$

Для проверки правильности вычислений и построений, выходяемых при определении значений $\Delta_j = x_j + iy_j$, служат формулы:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_4 &= 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0, \\ y_1 - y_2 + y_3 - y_4 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (167)$$

справедливость которых непосредственно вытекает из уравнения $D_1 = 0$ при $u_{22} = u_{23} = u_{24} = 1$. Обозначим:

$$\Delta_0 = \Delta_1 - \Delta_2 u_{22}.$$

Тогда из (166)

$$u_{24} = \frac{\Delta_0 + \Delta_3 u_{23}}{\Delta_4}.$$

Воспользовавшись сопряжённым уравнением:

$$\frac{1}{u_{24}} = \frac{\bar{\Delta}_0 u_{23} + \bar{\Delta}_3}{\Delta_4 u_{23}}$$

и исключая из написанного уравнения неизвестное u_{24} , получим квадратное уравнение для определения u_{23} :

$$\Delta_3 \bar{\Delta}_0 u_{23}^2 - (r_4^2 - r_0^2 - r_3^2) u_{23} + \Delta_0 \bar{\Delta}_3 = 0,$$

где r_j ($j = 0, 3, 4$) — модули соответствующих комплексных чисел Δ_j .

Решая квадратное уравнение, находим:

$$u_{23} = \frac{r_4^2 - r_0^2 - r_3^2 \pm \sqrt{(r_4^2 - r_0^2 - r_3^2)^2 - 4r_0^2 r_3^2}}{2\Delta_3 \bar{\Delta}_0}.$$

Если $(r_4^2 - r_0^2 - r_3^2)^2 \leq 4r_0^2 r_3^2$, то выражение с знаком квадратного корня чисто мнимое и равно $ik = \sqrt{(r_4^2 - r_0^2 - r_3^2)^2 - 4r_0^2 r_3^2}$, где k — число действительное.

Пологая $\Delta_3 = r_3 e^{i\varphi_3}$, $\bar{\Delta}_0 = r_0 e^{-i\varphi_0}$ и возвращаясь к обозначению $u_{23} = e^{i\varphi_{23}}$, имеем для этого случая:

$$e^{i(\varphi_{23} + \varphi_3 - \varphi_0)} = \frac{r_4^2 - r_0^2 - r_3^2}{2r_0 r_3} + \frac{ik}{2r_0 r_3}.$$

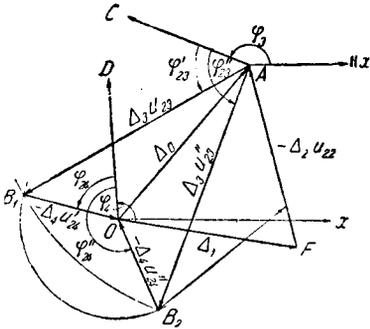
Приравнивая действительные части, получим:

$$\left. \begin{aligned} \cos(\varphi_{23} + \varphi_2 - \varphi_0) &= \frac{r_4^2 - r_0^2 - r_3^2}{2r_0r_3}, \\ \varphi_{23} &= \varphi_0 - \varphi_2 + \arccos \frac{r_4^2 - r_0^2 - r_3^2}{2r_0r_3}. \end{aligned} \right\} (168)$$

Если считать $(r_4^2 - r_0^2 - r_3^2)^2 > 4r_0^2 r_3^2$, то $\cos(\varphi_{23} + \varphi_2 - \varphi_0)$ должно быть числом действительным, что возможно только при $\sin(\varphi_{23} + \varphi_2 - \varphi_0) = 0$. Тогда $\cos(\varphi_{23} + \varphi_2 - \varphi_0) = \pm 1$ и $(r_4^2 - r_0^2 - r_3^2)^2 = 4r_0^2 r_3^2$, что противоречит исходному предположению. Таким образом, решения уравнения существуют только при $(r_4^2 - r_0^2 - r_3^2)^2 \leq 4r_0^2 r_3^2$ и полностью определяются формулами (168).

Исключая из уравнения (166) аналогичным образом u_{23} , получим формулу для вычисления φ_{24} :

$$\varphi_{24} = \varphi_0 - \varphi_4 + \arccos \frac{r_0^2 + r_4^2 - r_3^2}{2r_0r_4}. \quad (169)$$



Фиг. 409.

Переходим к графическому решению уравнения (166). Откладываем вектор $OA = OF + FA = \Delta_0 = \Delta_1 - \Delta_2 u_{22}$ (фиг. 409). Описываем из точки O окружность радиусом $\text{mod } \Delta_4$, а из A — радиусом $\text{mod } \Delta_3$, и находим точки их пересечения B_1 и B_2 . Векторные треугольники OAB_1O и OAB_2O дают два варианта графического изображения уравнения (166), причём $AB_1 = \Delta_3 u'_{23}$, $AB_2 = \Delta_3 u''_{23}$, $OB_1 = \Delta_4 u'_{24}$, $OB_2 = \Delta_4 u''_{24}$.

Проведя через точку A направление AC под углом $\varphi_3 = \arg \Delta_3$ к оси x , измерим $\varphi'_{23} = (\angle AC, AB_1)$, $\varphi''_{23} = (\angle AC, AB_2)$. Проведя через точку O направление OD под углом $\varphi_4 = \arg \Delta_4$ к оси x , измерим $\varphi'_{24} = (\angle OD, OB_1)$, $\varphi''_{24} = (\angle OD, OB_2)$.

После определения значений угла φ_{23} искомый механизм строится по своему определителю D . Разлагаем определитель D по элементам первой строки:

$$D = \delta_1 - \delta_2 + \delta_3 - \delta_4 = 0, \quad (170)$$

где $\delta_j (j = 1, 2, 3, 4)$ суть комплексные определители третьего порядка:

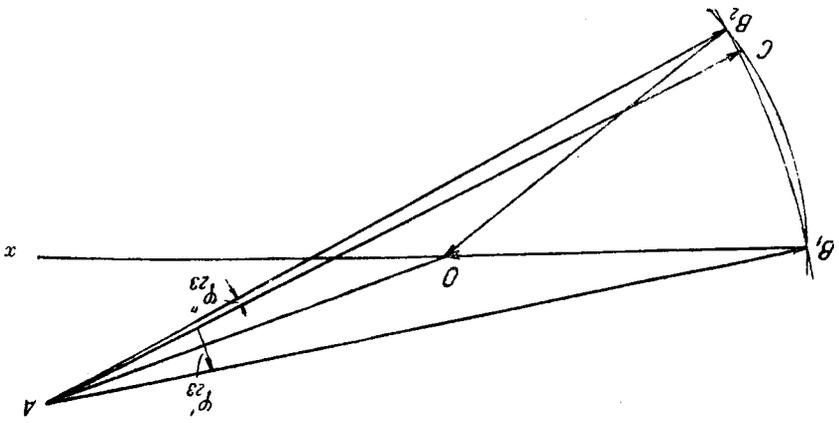
$$\begin{aligned} \delta_1 &= u_{22}u_{33} - u_{23}u_{32} - u_{33} + u_{32} + u_{23} - u_{22}, \\ \delta_2 &= u_{12}u_{33} - u_{13}u_{32} - u_{33} + u_{32} + u_{13} - u_{12}, \\ \delta_3 &= u_{12}u_{23} - u_{13}u_{22} - u_{23} + u_{22} + u_{13} - u_{12}, \\ \delta_4 &= u_{22}u_{33} - u_{23}u_{32} - u_{12}u_{33} + u_{13}u_{32} + u_{12}u_{23} - u_{13}u_{22}. \end{aligned}$$

Вычисление определителей δ_j производится по общему методу, изложенному в § 74. Для проверки вычислений полезны формулы:

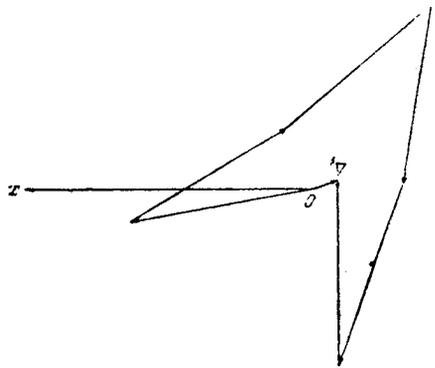
$$\left. \begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0, \\ y_1 - y_2 + y_3 - y_4 &= 0, \end{aligned} \right\} (171)$$

где x_j и y_j — действительные и мнимые части комплексных чисел δ_j . Графическое построение комплексных определителей производится по § 73. Найдя значения δ_j , образуем из них замкнутый векторный контур по уравнению (170), определяющий искомый механизм в начальном его положении, причём

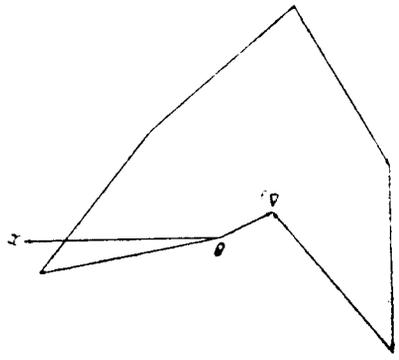
ΦΠΓ. 413.



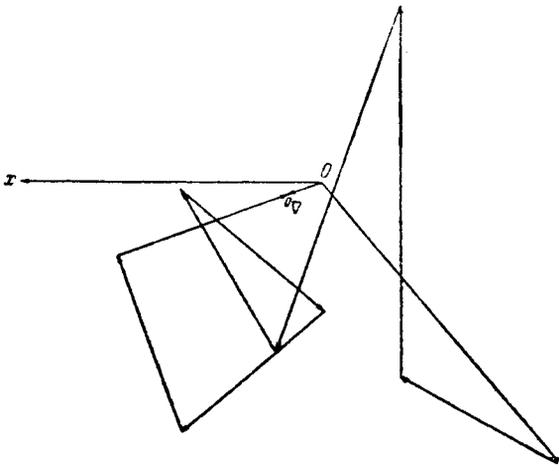
ΦΠΓ. 412.

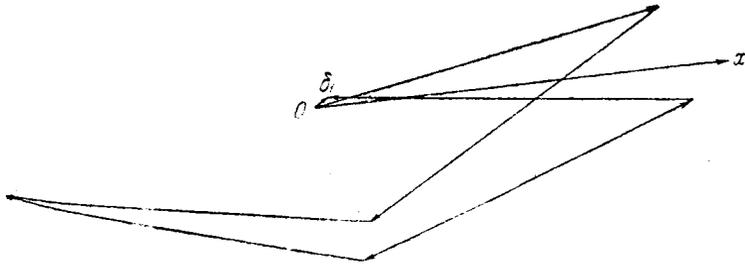


ΦΠΓ. 411.

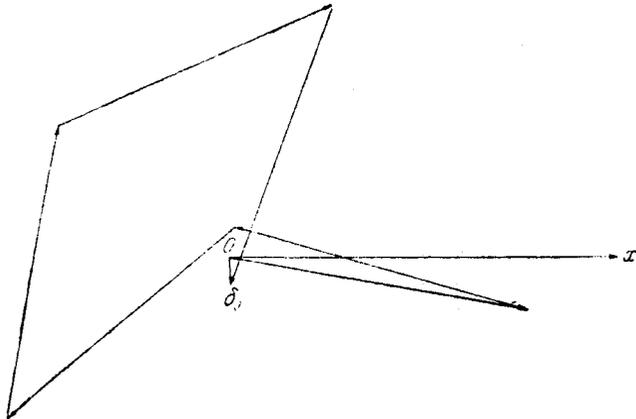


ΦΠΓ. 410.

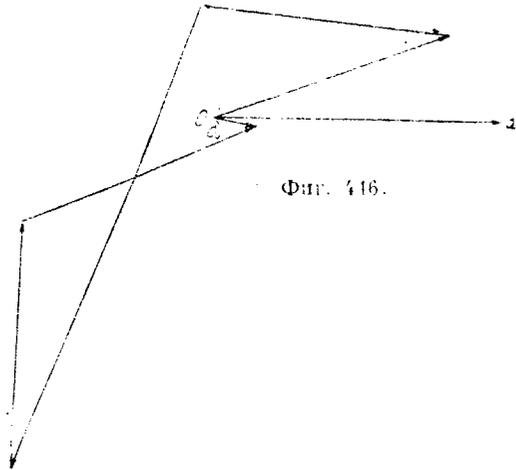




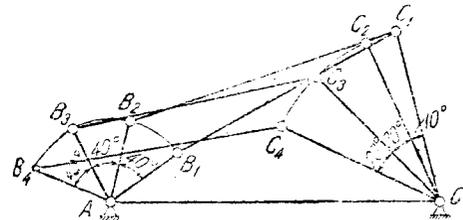
Фиг. 415.



Фиг. 415.



Фиг. 416.



Фиг. 417.

δ_1 является кривошипом, — δ_2 — шатуном, δ_3 — коромыслом (вторым кривошипом), — δ_4 — стойкой.

Пример 11. Построить механизм шарнирного четырехзвенника по следующим заданным значениям углов:

φ_{12}	φ_{13}	φ_{14}	φ_{22}	φ_{32}	φ_{33}	φ_{34}
40°	80°	120°	-10°	10°	30°	50°

Строим определители Δ_0 (фиг. 410), Δ_3 (фиг. 411), Δ_4 (фиг. 412), воспользовавшись приведёнными выше значениями их в развернутом виде. Строим графическое изображение уравнения (167) (фиг. 413) и найдем два значения угла φ'_{23} и φ''_{23} . Воспользуемся одним из найденных значений $\varphi'_{23} = -16^\circ$, строим определители δ_1 (фиг. 414), δ_2 (фиг. 415), δ_3 (фиг. 416) по приведённым выше формулам и образуем из векторов $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ замкнутый векторный контур OAB_1C_1O , представляющий согласно уравнению

$$D = \delta_1 - \delta_2 + \delta_3 - \delta_4 = 0$$

искомый механизм в начальном его положении (фиг. 417).

§ 79. Синтез декартового кривошипно-шатунного механизма по четырём заданным положениям кривошипа и полушки.

Пусть четыре положения кривошипа заданы углами φ_{2k} ($k=2, 3, 4$) и соответствующие им положения полушки — расстояниями r_{4k} ($k=2, 3, 4$). Обозначая углы поворотов шатуна через φ_{3k} ($k=2, 3, 4$), составим матрицу механизма из двух строк (157) и трёх строк (162):

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & u_{22} & u_{32} & r_{42} \\ 1 & u_{23} & u_{33} & r_{43} \\ 1 & u_{24} & u_{34} & r_{44} \end{pmatrix}$$

Выделим из матрицы определитель механизма:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & u_{22} & u_{32} & r_{42} \\ 1 & u_{23} & u_{33} & r_{43} \end{vmatrix} = 0$$

и уравнение совместности:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & u_{22} & u_{32} & r_{42} \\ 1 & u_{23} & u_{33} & r_{43} \\ 1 & u_{24} & u_{34} & r_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Комплексное уравнение $D_1 = 0$ определяет значение только двух неизвестных углов, например φ_{33} и φ_{34} . Угол φ_{32} при решении задачи выбирается произвольно или, как это показано в § 80, в соответствии с дополнительными условиями, налагаемыми на искомый механизм.

Разлагаем определитель D_1 по элементам третьего столбца, содержащего неизвестные углы:

$$D_1 = \Delta_1 - \Delta_2 u_{32} + \Delta_3 u_{33} - \Delta_4 u_{34} = 0. \quad (166')$$

где

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= (r_{43} - r_{44}) u_{22} + (r_{44} - r_{42}) u_{23} + (r_{42} - r_{43}) u_{24}, \\ \Delta_2 &= r_{43} - r_{44} + (r_{44} - 1) u_{23} + (1 - r_{43}) u_{24}, \\ \Delta_3 &= r_{42} - r_{44} + (r_{44} - 1) u_{22} + (1 - r_{42}) u_{24}, \\ \Delta_4 &= r_{42} - r_{43} + (r_{43} - 1) u_{22} + (1 - r_{42}) u_{23}.\end{aligned}$$

Для проверки правильности построений и вычислений, выполняемых при определении Δ_j , служат формулы (167).

Подробное аналитическое и графическое решение уравнения совместности рассматриваемого типа изложено в § 78. После определения из уравнения совместности угла φ_{23} искомого механизма строится по своему определителю D . Разлагаем определитель D по элементам первой строки:

$$D = \delta_1 - \delta_2 + \delta_3 - \delta_4 \equiv 0,$$

где

$$\begin{aligned}\delta_1 &= r_{43} (u_{32} - u_{22}) + r_{42} (u_{23} - u_{33}) + u_{22} u_{33} - u_{23} u_{32}, \\ \delta_2 &= r_{43} (u_{32} - 1) + r_{42} (1 - u_{33}) + u_{33} - u_{32}, \\ \delta_3 &= r_{43} (u_{22} - 1) + r_{42} (1 - u_{23}) + u_{23} - u_{22}, \\ \delta_4 &= u_{22} u_{33} - u_{23} u_{32} - u_{33} + u_{32} + u_{23} - u_{22}.\end{aligned}$$

Вычисления, связанные с определением комплексных чисел δ_j ($j = 1, 2, 3, 4$), проверяются по формулам (171). Найдя значения векторов δ_j , строим из них замкнутый контур по уравнению $D = 0$, причём δ_1 является стойкой, $-\delta_2$ — кривошипом, δ_3 — шатуном, а $-\delta_4$ — кулисой.

§ 80. Исследование возможных решений задачи синтеза по четырём заданным положениям.

При рассмотрении задачи синтеза шарнирного четырёхзвенника по четырём заданным положениям кривошипа и коромысла установлено, что существует ∞^1 механизмов, удовлетворяющих всем условиям задачи. Все эти механизмы определяются уравнением $\delta_1 - \delta_2 + \delta_3 - \delta_4 = 0$ с переменными векторами $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$, если за независимый переменный параметр принять угол φ_{23} .

Воспользовавшись значениями δ_j , приведёнными в § 78, и группируя члены с неизвестными u_{2k} ($k = 2, 3$), получим:

$$\begin{aligned}\delta_1 &= (u_{33} - 1) u_{22} + (1 - u_{32}) u_{23} + u_{32} - u_{33}, \\ \delta_3 &= (1 - u_{13}) u_{22} + (u_{12} - 1) u_{23} + u_{13} - u_{12}, \\ \delta_4 &= (u_{33} - u_{13}) u_{22} + (u_{12} - u_{32}) u_{23} - u_{12} u_{33} + u_{13} u_{32}.\end{aligned}$$

что и записывается в такой общей формуле:

$$\delta_j = z_{j1} + z_{j2} u_{22} + z_{j3} u_{23}, \quad (172)$$

где z_{jk} — постоянные комплексные числа.

Задаваясь рядом значений φ_{22} , вычисляем по формуле (168) соответствующие им пары значений φ_{23} . Вычисляем по условиям задачи постоянные комплексные числа z_{j1}, z_{j2}, z_{j3} . Подставляя значения φ_{22} и φ_{23} в формулы (172), получаем системы значений трёх векторов $\delta_1, \delta_3, \delta_4$, которые вместе с постоянным вектором δ_2 определяют различные варианты проектируемого механизма. Графический способ получения всевозможных решений уравнения совместности (166) при переменном φ_{22} основан на интерпретации этого уравнения как условия замкнутости некоторого вспомогательного четырёхзвенника. Приравняем в определителе D_1 нулю углы φ_{2k} ($k = 2, 3, 4$). Тогда $u_{2k} = e^{i\varphi_{2k}} = 1$ и определитель D_1 будет равен нулю тождественно, как содержащий два равных столбца. Следовательно, если в полученном из определителя D_1 уравнении (166) положить $\varphi_{22} = \varphi_{23} = \varphi_{24} = 0$, то оно также обратится в тождество:

$$\Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_4 \equiv 0,$$

которое, как не отличающееся от (170), может быть рассматриваемо как условие замкнутости некоторого вспомогательного четырёхзвенника со стойкой Δ_1 , кривошипом $-\Delta_2$, шатуном Δ_3 и коромыслом $-\Delta_4$. При повороте криво-

шпа — Δ_2 вспомогательного механизма на угол φ_{23} от своего начального положения шатун повернется на угол φ_{23} , а коромысло — на угол φ_{24} . Если расположить векторы Δ_j в ином порядке, например

$$\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_4 + \Delta_3 = 0,$$

что эквивалентно известному принципу замены шатуна и кривошипа ¹⁾, то в новом вспомогательном механизме стойка Δ_1 и кривошип — Δ_2 останутся прежними, шатуном будет звено — Δ_4 и коромыслом — звено Δ_3 .

Построив вспомогательный механизм по одному из приведённых уравнений и поворачивая его кривошип на углы φ_{23} , определяем углы поворотов φ_{23} и φ_{24} шатуна (коромысла) и коромысла (шатуна) и строим графики функций $\varphi_{23} = f_3(\varphi_{22})$, $\varphi_{24} = f_4(\varphi_{22})$, представляющих решения уравнения совместности при различных возможных значениях φ_{22} .

Графический способ построения возможных значений δ_2 заключается в следующем. Учитывая, что при $\varphi_{22} = 0$ корнями уравнения (166) будут $\varphi_{23} = \varphi_{24} = 0$, строим значения δ_j при $\varphi_{22} = \varphi_{23} = 0$ по формулам (172).

На фиг. 418 такое построение в виде многоугольника $OABC_0$ схематически изображено для вектора δ_4 и даёт одно из возможных его значений OC_0 . Задаваясь рядом значений φ_{22} , определяем по формуле (168) или графику функции $\varphi_{23} = f_3(\varphi_{22})$ соответствующие им значения φ_{23} . Поворачиваем вектор AB на заданные углы φ_{23} и присоединяем к точкам B векторы BC_k , повернутые на соответствующие углы φ_{23} (фиг. 418). Тогда векторы OC_k ($k=0, 1, 2, \dots$) образуют систему всевозможных значений вектора δ_4 , а концы этих векторов — соответствующий голограф. Построив аналогичные голографы для векторов δ_1 и δ_3 , получим геометрическое изображение всех возможных решений рассматриваемой задачи синтеза.

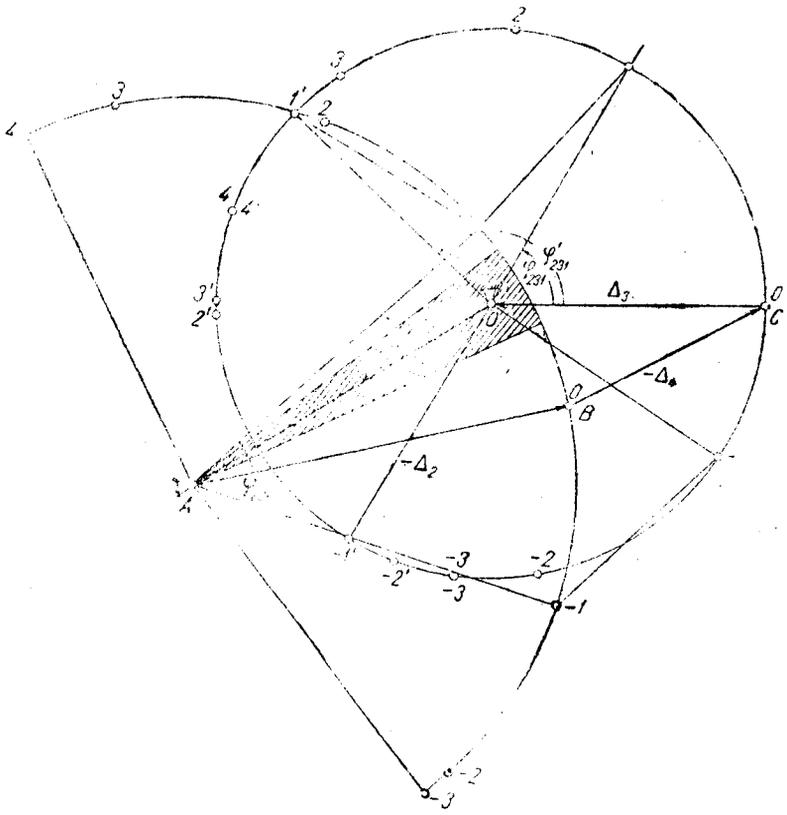
При наложении дополнительных ограничений на выбор дезаксимального кривошипно-шатунного механизма задача решается аналогичным образом. Воспользовавшись значениями δ_j , приведёнными в § 79, и группируя члены с u_{3k} ($k=2, 3$), получим уравнения, не отличающиеся по форме от уравнений (172):

$$\begin{aligned} \delta_1 &= (u_{33} - r_{43}) u_{22} + (r_{42} - u_{32}) u_{23} + r_{43} u_{32} - r_{42} u_{33}, \\ \delta_2 &= (r_{43} - 1) u_{22} + (1 - r_{42}) u_{23} + r_{42} - r_{43}, \\ \delta_4 &= (u_{33} - 1) u_{22} + (1 - u_{32}) u_{23} - u_{33} + u_{32}. \end{aligned}$$

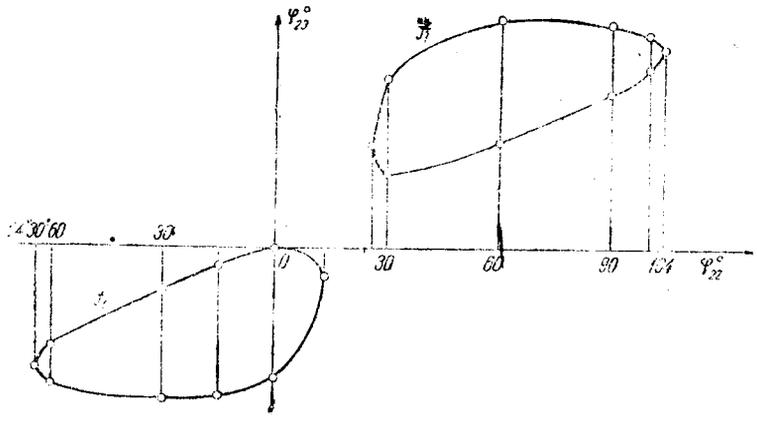
Пример 12. Исследовать возможные решения задачи синтеза шарнирного четырёхзвенника по следующим частным значениям углов φ_{1k} и φ_{3k} :

φ_{12}	φ_{13}	φ_{14}	φ_{32}	φ_{33}	φ_{34}
90°	180°	270°	30°	60°	20°

¹⁾ Koenigs: Leçons de cinématique, Paris, 1879.



Фиг. 419.

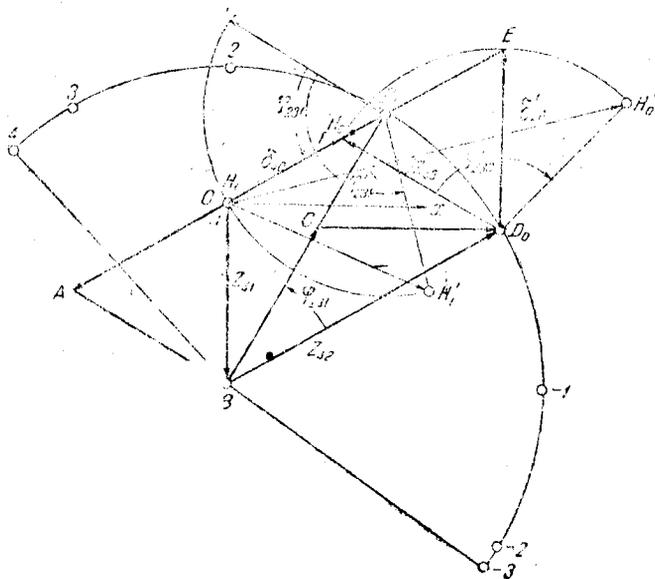


Фиг. 420.

Подставляя значения заданных углов в формулу для Δ_j , приведенные в § 78, и полагая $\Delta_j = x_j + iy_j$ находим:

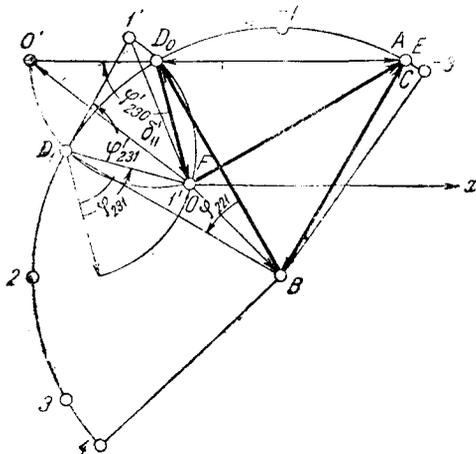
j	1	2	3	4
x_j	0,96370	- 24511	- 0,94568	- 0,63397
y_j	0,03774	- 0,31961	- 0,03630	- 0,35603

Проверим результаты вычислений по формулам (167). Строим замкнутый векторный контур $OABCO$, соответствующий уравнению $\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_4 + \Delta_3 = 0$ (фиг. 419). Поворачиваем вектор AB на угол φ_{22} и измеряем углы поворотов перпендикуляра OC . Строим график функции $\varphi_{22} = f_1(z_{22})$, представляющей всевозможные решения уравнения совместности (166) при переменном φ_{22} (фиг. 420). Строим вектор $O.A + AB = OB = z_{21}$ (фиг. 421). От точки B откла-

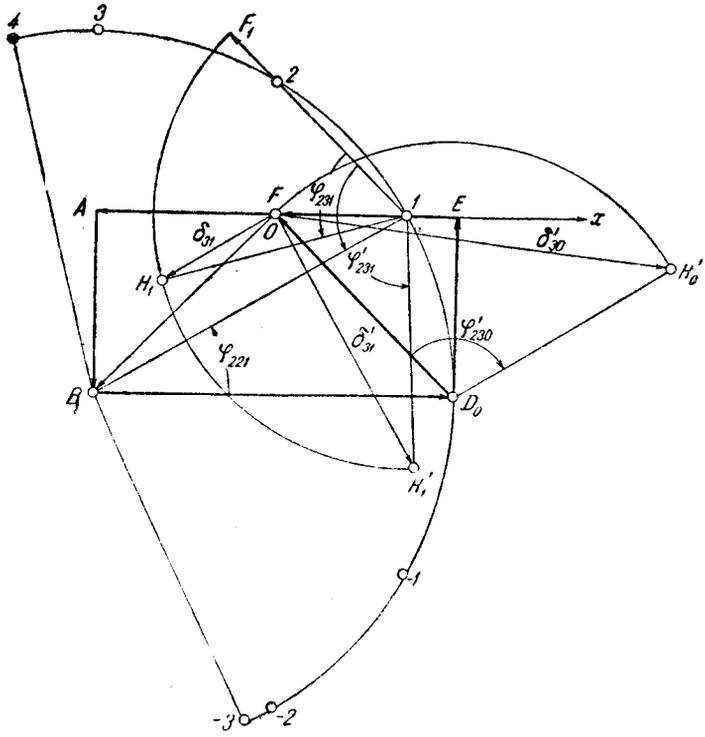


Фиг. 421.

дываем вектор $BC + CD = BD = z_{43}$, а от точки D — вектор $DE + EF = DF = z_{42}$. Вектор OF даёт значение δ_{40} при $\varphi_{22} = 0$. Описываем из точки B как от центра окружность радиусом BD и вписываем на неё от начала D точки, соответствующие избранным значениям φ_{22} . Проводим через полученные точки D_1, D_2, D_3, \dots векторы $D_1F_1, D_2F_2, D_3F_3, \dots$ равные вектору $DF = z_{42}$, и поворачиваем их на соответствующие углы φ_{22} . Вспомогательным образом определяем по кривой $\varphi_{22} = f_1(z_{22})$ (фиг. 420). Складывая точки O с концами $H_0, H'_0, H_1, H'_1, \dots$ повернутых векторов, получаем для каждого значения φ_{22} два значения δ_{42} . Аналогичным образом строятся различные значения δ_{41} (фиг. 422) и δ_{43} (фиг. 423). Используем построенное решение для выбора начального значения по дополнительно заданному условию для соотношения между размерами его зве-

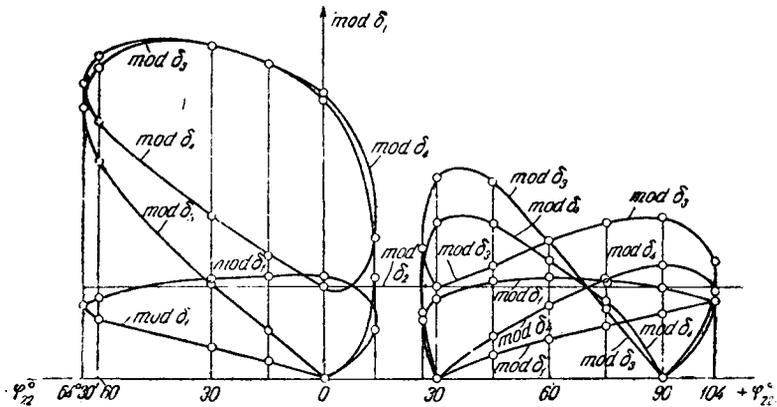


Фиг. 422.



Фиг. 423.

нью. Воспользовавшись построенными значениями $\delta_1, \delta_3, \delta_4$, измеряем отрезки.



Фиг. 424.

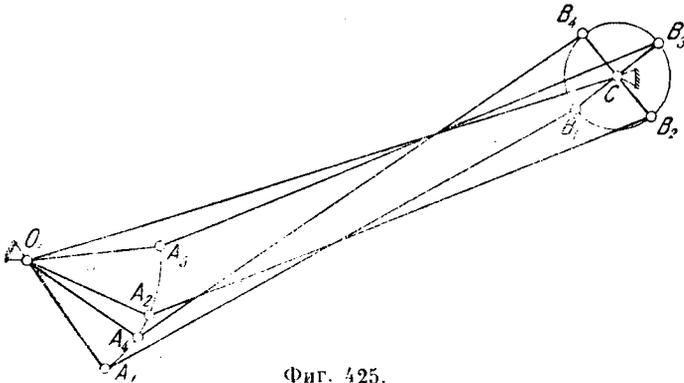
определяющие значения их модулей и строим кривые (фиг. 424):

$$\text{mod } \delta_1 = f_1(\varphi_{22}), \text{ mod } \delta_3 = f_3(\varphi_{22}), \text{ mod } \delta_4 = f_4(\varphi_{22})$$

и

$$\text{mod } \delta_2 = \text{mod } \delta_4 = \sqrt{x_4^2 + y_4^2} = \text{const.}$$

Но построенным кривым в качестве примера выбран четырёхзвенник, допол-



Фиг. 425.

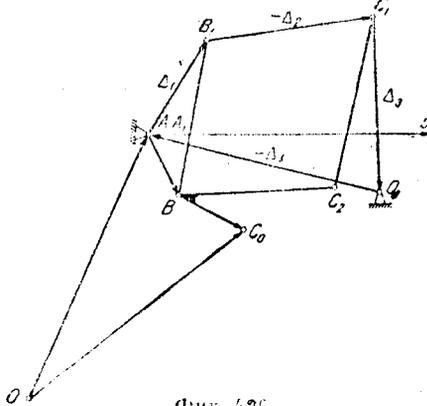
нительно удовлетворяющий условиям Грасгофа (фиг. 425) при $\varphi_{22} = -7^\circ 30'$, $\varphi_{23} = 7^\circ$.

§ 81. Построение годографов при помощи вспомогательного механизма.

Построим вспомогательный четырёхзвенник $A_1B_1C_1O_1$ по уравнению $\Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_4 = 0$ (фиг. 426) и присоединим к нему многоугольник $OABC_0$, изображённый на фиг. 418 так, чтобы точки A и A_1 совпадали. Построив шарнирный параллелограмм $B_1BC_2C_1$, соединим жёстко AB с A_1B_1 и BC_0 с BC_2 . Тогда по свойству вспомогательного механизма при повороте его кривошипа вместе с линией AB на угол φ_{22} шатун вместе со звеном BC_2 и линией BC_0 повернётся на угол φ_{23} .

Следовательно, построение, необходимое для получения годографа вектора δ_4 , выполняется при помощи найденного механизма автоматически и при вращении кривошипа AB ; точка C_0 шатунной плоскости BC_0C_2 опишет шатунную кривую, представляющую искомый годограф с полюсом в неподвиж-

ной точке O . Если к вспомогательному механизму присоединить аналогичным образом соответствующие многоугольники, построенные для векторов δ_1 и δ_3



Фиг. 426.

(Фиг. 427), то точки C_0, C_1, C_3 образовавшегося при этом вспомогательного механизма опишут при его движении необходимые кривые, представляющие годографы всевозможных решений задачи синтеза шарнирного четырёхзвенника по четырём положениям привода и коромысла.

По изображённой на фиг. 427 схеме каждый из годографов описывается точкой шатуновой плоскости присоединённой двухпроводниковой группы, что несколько усложняет построение и разметку кривых. Производя подобное изменение и вращение многоугольников при $\varphi_{22} = \varphi_{23} = 0$, приходим к схеме, изображённой на фиг. 428, когда преобразованные годографы описываются непосредственно точками, принадлежащими шатуновой плоскости

вспомогательного четырёхзвенника. При этом переход от преобразованных значений $\delta'_1, \delta'_2, \delta'_3$ к действительным совершается по формулам:

$$\delta_j = \delta'_j \frac{z_j}{\Delta_j} \quad (j = 1, 2, 3). \quad (173)$$

Пример 13. Исследуем возможные решения задачи синтеза шарнирных четырёхзвенников, по заданным кривошипам и коромыслу которых заданы углы:

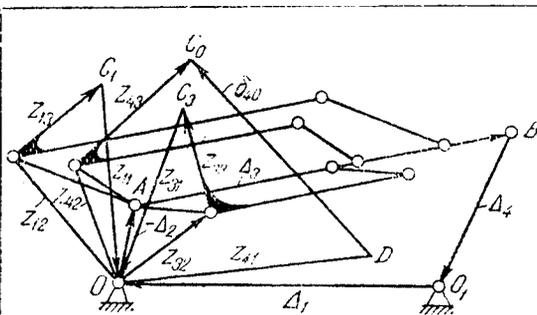
φ_{12}	φ_{13}	φ_{14}	φ_{21}	φ_{31}	φ_{32}
50°	100°	150°	10°	30°	60°

Определяем значения Δ_j и δ_j :

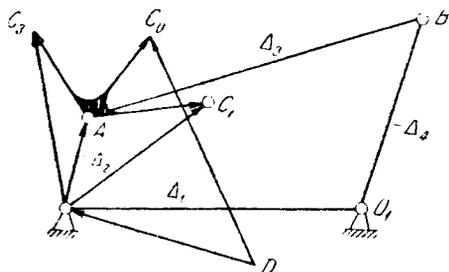
$$\begin{aligned} \Delta_1 &= -0,02169 - 0,21053 i, \\ \Delta_2 &= 0,26604 - 0,50882 i, \\ \Delta_3 &= -0,42634 - 0,36075 i, \\ \delta_2 &= \Delta_4 = -0,18199 - 0,06246 i, \\ \delta_4 &= -0,51567 - 0,04512 i + (1,03968 - 0,48431 i) u_{22} + \\ &\quad + (-0,34202 + 0,59239 i) u_{23}, \\ -\delta_1 &= -0,41878 + 0,32635 i + (0,13397 - 0,5 i) u_{22} + (-0,01519 + \\ &\quad + 0,17365 i) u_{23}, \\ -\delta_3 &= 0,81644 - 0,21877 i + (-1,17365 + 0,93431 i) u_{22} + \\ &\quad + (0,35721 - 0,76603 i) u_{23}. \end{aligned}$$

Для проверки вычислений полезно отметить, что действительные и мнимые части $\Delta_j = x_j + iy_j$ удовлетворяют условиям (167), а для значений $\delta_4, -\delta_1, -\delta_3, \delta_2$ справедливы такие зависимости: сумма коэффициентов при u_{22} и u_{23} действительности равна нулю, сумма свободных членов равна $-\delta_2$, δ_1 и δ_3 обращается в нуль, а δ_4 и $-\delta_2$ при $\varphi_{22} = \varphi_{23} = 0$.

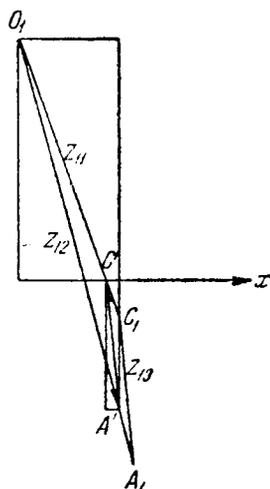
Построим начальные возможные вспомогательного четырёхзвенника $OO_1A_1B_1O$ при $\varphi_{2k} = 0$ (фиг. 429) и соответствующие значения $-\delta_1$ (фиг. 430), $-\delta_3$ (фиг. 431), δ_2 (фиг. 432). Производя подобное преобразование и вращение векторных контуров $C'O_1A''', C'''O_1A''', DO_1A^0C^0$, присоединяем их к звену



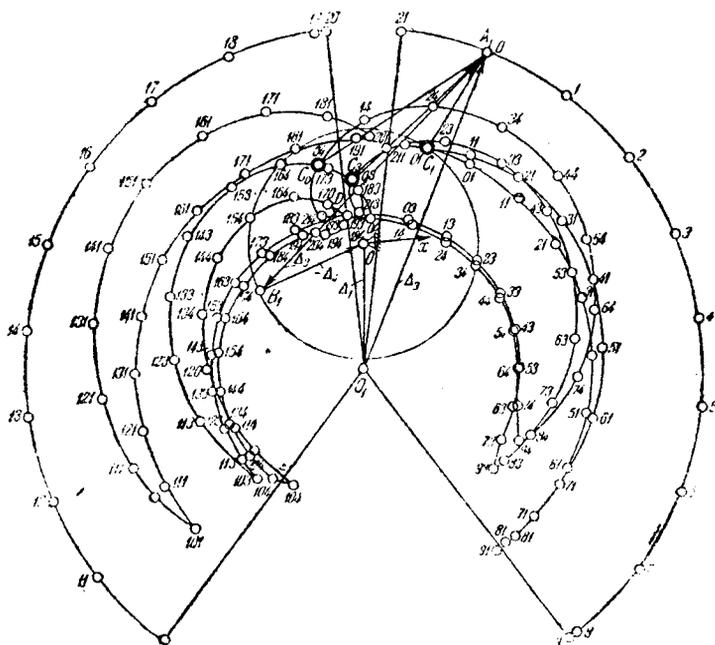
Фиг. 427.



Фиг. 428.



Фиг. 430.



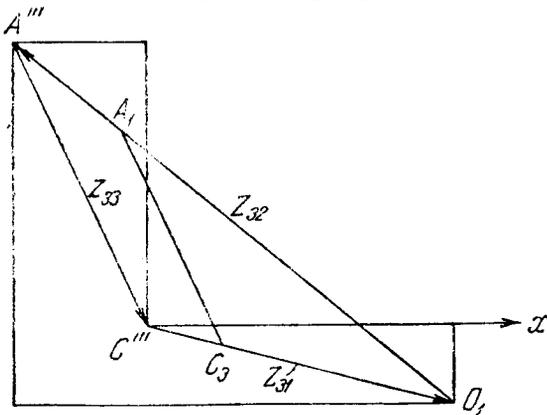
Фиг. 429.

$O_1 A_1$ (фиг. 429) так, чтобы совпали одноименные с ним стороны преобразованных контуров. Тогда вершины C_0, C_1, C_3 присоединённых многоугольников отметят в плоскости шатуна $A_1 B_1$ те точки, шатунные кривые которых дают соответственно преобразованные годографы векторов $-\delta_1, -\delta_3, \delta_4$.

Полюсы годографов будут соответственно в точках C_1, C_3, D .

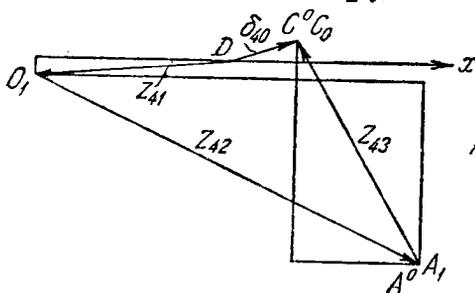
Поворачивая звено $O_1 A_1$ на углы φ_{22} (на фиг. 429 интервал для частных значений φ_{22} принят равным 15°), отмечаем на шатунных кривых точки, принадлежащие совокупности преобразованных значений $-\delta'_1, -\delta'_3, \delta'_4$, определяющих один из возможных искомым четырёхзвенников.

Переходя к истинным значениям $-\delta_1, -\delta_3, \delta_4$ при помощи формул (173) и строя векторное равенство $-\delta_1 + \delta_2 - \delta_3 + \delta_4 = 0$, получаем искомый четырёхзвенник. Каждому значению φ_{22} соответствуют на годографах две точки, отмеченные на фиг. 429 одинаковыми индексами. Последняя цифра нумерации точек годографов соответствует индексам δ_j , первая (первые) индексам, определяющим значения φ_{22} на окружности радиуса $O_1 A_1$. Полученные годографы позволяют найти четырёхзвенники, удовлетворяющие какому-либо дополнительному условию. Так, например, на фиг. 433 показан четырёхзвенник, размеры звеньев которого удовлетворяют дополнительно условиям Грасгофа. Этот четырёхзвенник соответствует значению $\varphi_{22} = 30^\circ$ (точка 19 на окружности радиуса $O_1 A_1$) и определяется точками 194, 191, 193, образующими треугольник, равный треугольнику $C_0 C_1 C_3$ (фиг. 429). Аналогичным образом могут быть найдены четырёхзвенники, для которых дополнительно задан угол между направлениями звеньев в начальном их положении. Как будет

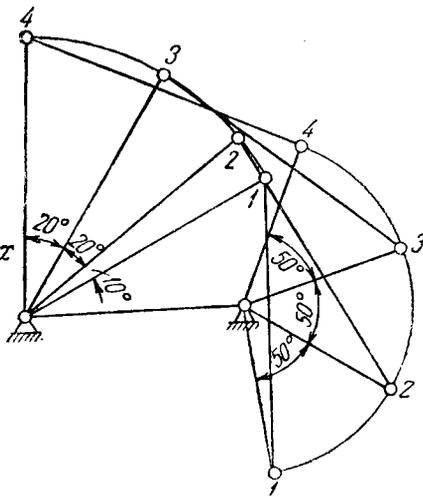


Фиг. 431.

творющие каким-либо дополнительным условием. Так, например, на фиг. 433 показан четырёхзвенник, размеры звеньев которого удовлетворяют дополнительно условиям Грасгофа. Этот четырёхзвенник соответствует значению $\varphi_{22} = 30^\circ$ (точка 19 на окружности радиуса $O_1 A_1$) и определяется точками 194, 191, 193, образующими треугольник, равный треугольнику $C_0 C_1 C_3$ (фиг. 429). Аналогичным образом могут быть найдены четырёхзвенники, для которых дополнительно задан угол между направлениями звеньев в начальном их положении. Как будет



Фиг. 432.



Фиг. 433.

показано, такое дополнительное условие вводится при синтезе механизма по заданным значениям угла давления.

Очевидно, что по изложенной схеме решается всякая задача по синтезу механизма, матрица которого M относится к рассмотренному в § 78 типу, и неизвестными являются орты u_{jk} с одинаковыми значениями индекса j . Так,

например, к матрице типа M приводятся задачи синтеза четырёхзвенника в случае задания четырёх положений шатунной плоскости, или четырёх точек неподвижной плоскости, через которые должна пройти точка шатуна. К аналогичным матрицам приводятся задачи синтеза дезаксиального кривошипно-шатунного механизма по четырём положениям кривошипа и ползушки. Изложенный метод применим и при решении задач синтеза шестизвенных и более сложных механизмов, если уравнение совместности можно записать в виде (166) и неизвестными являются два орта u_{jk} с одинаковыми значениями индекса j .

§ 82. Синтез шарнирного четырёхзвенника по значениям угла давления, заданным в четырёх положениях механизма.

Пусть искомый шарнирный четырёхзвенник определяется в своём начальном положении замкнутым векторным контуром $OABCO$, изображённым на фиг. 434. Назовём углом давления угол между векторами (AB, BC) :

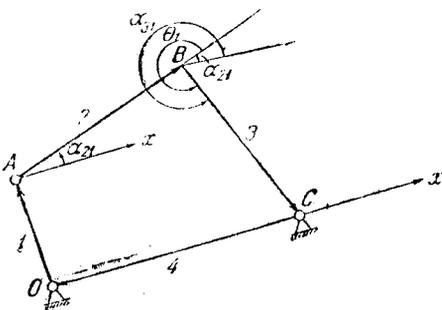
$$\theta_1 = \alpha_{31} - \alpha_{21}$$

Аналогично этому в любом k -том положении рассматриваемого механизма имеем для угла давления:

$$\theta_k = \alpha_{3k} - \alpha_{2k}$$

Воспользовавшись матрицей, служащей для синтеза механизма по четырём положениям двух его звеньев, и заменяя углы шатуна $\varphi_{2k} = \alpha_{2k} - \alpha_{01} = \alpha_{3k} - \alpha_{31} + \theta_1 - \theta_k = \varphi_{3k} + \varphi_{0k}$ имеем

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ u_{12} & u_{32} & u_{02} & u_{32} & 1 \\ u_{13} & u_{33} & u_{03} & u_{33} & 1 \\ u_{14} & u_{34} & u_{04} & u_{34} & 1 \end{vmatrix}$$



Фиг. 434.

где $u_{jk} = e^{i\varphi_{jk}}$, а φ_{0k} — углы, определяющие приращения угла давления θ_1 при деформации механизма.

Выделяем из матрицы уравнение совместности:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ u_{12} & u_{32} & u_{02} & u_{32} \\ u_{13} & u_{33} & u_{03} & u_{33} \\ u_{14} & u_{34} & u_{04} & u_{34} \end{vmatrix} = 0.$$

При решении уравнения совместности возможны два случая. Если заданы углы поворота коромысла и приращения угла давления, то неизвестными будут u_{13} и u_{14} . В этом случае определитель D_1 разлагается по элементам первого столбца и приводится к уравнению, не отличающемуся от (166):

$$D_1 = \Delta_1 - \Delta_2 u_{12} + \Delta_3 u_{13} - \Delta_4 u_{14} = 0.$$

После определения из уравнения совместности u_{13} искомый механизм строится по своему определителю:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ u_{12} & u_{32} & u_{02} & u_{32} \\ u_{13} & u_{33} & u_{03} & u_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Разлагая по элементам первой строки, имеем:

$$D = \delta_1 - \delta_2 + \delta_3 - \delta_4 = 0.$$

Произволом в выборе φ_{12} следует воспользоваться для получения допустимого (или наперёд заданного) значения угла давления θ_1 в начальном положении механизма. Построив, как это было указано выше, годографы векторов $-\delta_2$ и δ_3 , измеряем значение угла между каждой парой векторов $-\delta_2$ и δ_3 , соответствующего одному значению φ_{12} , и получаем функцию:

$$\theta_1 = f(\varphi_{12}) = \arg \frac{-\delta_2}{\delta_3},$$

по которой легко установить φ_{12} , соответствующее наперёд заданному значению θ_1 . Разумеется, что таблица значений θ_1 может быть получена и чисто аналитическим путём по приведённым формулам.

Если заданы углы поворота кривошипа и приращения угла давления, то неизвестными будут u_{33} и u_{34} . В этом случае определитель D_1 разлагается по элементам третьего столбца и приводится к уравнению:

$$z_1 u_{33} u_{34} + z_2 u_{33} + z_3 u_{34} + z_4 = 0,$$

где z_k — постоянные комплексные числа:

$$\begin{aligned} z_1 &= (u_{12} - 1)(u_{04} - u_{03}), \\ z_2 &= (u_{14} - u_{12})(1 - u_{03}) + u_{22}(u_{14} - 1)(u_{03} - u_{02}), \\ z_3 &= (u_{13} - u_{12})(u_{04} - 1) + u_{32}(u_{13} - 1)(u_{02} - u_{04}), \\ z_4 &= u_{32}(u_{14} - u_{13})(u_{02} - 1). \end{aligned}$$

Для построения механизма достаточно определить φ_{33} . Обозначая $z_0 = z_2 \bar{z}_4 - z_1 \bar{z}_3$, где \bar{z}_3, \bar{z}_4 — комплексные числа, сопряжённые z_3 и z_4 , имеем:

$$\cos(\varphi_{33} + \varphi_0) = \frac{r_1^2 + r_3^2 - r_2^2 - r_4^2}{2r_0},$$

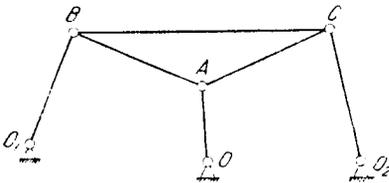
где $\varphi_0 = \arg z_0$, $r_j = \text{mod } z_j$. Задаваясь рядом значений φ_{33} , находим соответствующее им значение φ_{32} , после чего для $-\delta_2$ и δ_3 определяем начальные значения θ_1 и строим кривую $\theta_1 = f(\varphi_{32})$. Далее по заданному наперёд значению θ_1 , находим соответствующие частные значения φ_{32} и строим механизм по определителю D .

§ 83. Синтез шарнирного четырёхзвенника по четырём заданным положениям точки шатуновой плоскости.

Пусть для четырёхзвенника заданы четыре положения кривошипа, два положения коромысла и четыре точки неподвижной плоскости, через которые должна пройти некоторая точка шатуна A . Построим механизм и определим положение точки A в плоскости шатуна.

При задании четырёх точек неподвижной плоскости, через которые должна пройти точка A , возможны следующие случаи: 1) заданные точки лежат на одной окружности, 2) заданные точки лежат на одной прямой, 3) заданные точки лежат на какой-либо заданной кривой.

Рассмотрим цепь, состоящую из двух четырёхзвенников с общим кривошипом OA (фиг. 435). При деформации цепи угол BAC между шатунами будет, вообще говоря, меняться. Подберём четырёхзвенники так, чтобы в ряде положений цепи угол BAC имел одно и то же значение. Для таких положений цепи расстояние между точками C и B также постоянно, и звенья



Фиг. 435.

AB и AC представляют как бы одно жёсткое звено. Соединив AB и BC в одно жёсткое звено и выбросив звено OA , получим четырёхзвенник с точкой A шатуна, располагающейся на заданной окружности радиуса OA в тех положениях цепи, для которых угол BAC имеет одно и то же значение. Следовательно, цепь, изображённая на фиг. 435, позволяет построить четырёхзвенник при заданном расположении точек A_k ($k=1, 2, 3, 4$) на одной окружности.

Для решения поставленной задачи в случае, когда четыре положения точки A заданы на одной окружности, следует по методу, изложенному в § 78, построить два вспомогательных четырёхзвенника, матрицы которых

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} & 1 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & 1 \\ u_{14} & u_{24} & u_{34} & 1 \end{vmatrix},$$

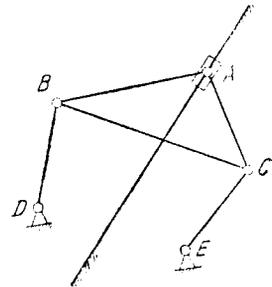
$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} & 1 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & 1 \\ u_{14} & u_{24} & u_{34} & 1 \end{vmatrix}$$

отличаются лишь значениями углов φ_{3k} и φ'_{3k} , определяющих положение их коромысел. Так как углы поворотов кривошинов φ_{1k} и шатунов φ_{2k} одинаковы для обоих проектируемых вспомогательных механизмов в четырёх заданных положениях, то после определения размеров звеньев их соединяют по схеме, изображённой на фиг. 435, и из образовавшейся цепи получают искомый четырёхзвенник описанным выше способом. При решении уравнений совместности в первой матрице за неизвестные следует принять углы φ_{23} и φ_{24} , а во второй — углы φ'_{33} и φ'_{34} .

Для упрощения задачи один из вспомогательных четырёхзвенников, служащий для образования цепи, изображённой на фиг. 435, можно взять произвольно. В этом случае устанавливаем кривошип OA в заданные положения и измеряем углы φ_{1k} кривошипа и φ_{2k} шатуна. После определения углов строим второй вспомогательный четырёхзвенник по его матрице M_2 . Искомый четырёхзвенник определяется наложением вспомогательных механизмов.

Рассмотрим цепь, состоящую из двух дезаксиальных кривошипно-шатунных механизмов с общей ползушкой (фиг. 436). При деформации цепи угол BAC между шатунами будет, вообще говоря, переменным. Подберём механизм так, чтобы для ряда положений цепи угол BAC имел одно определённое значение. Тогда для таких положений цепи звенья AB и AC образуют как бы одно жёсткое звено. Соединив AB и AC жёстко и выбросив кулису, получим четырёхзвенник с точкой шатуна A , располагающейся на заданной прямой OA во всех тех положениях цепи, для которых угол BAC имел одно и то же значение. Следовательно, цепь, изображённая на фиг. 436, позволяет построить четырёхзвенник при заданном расположении точек A на одной прямой.

Для решения поставленной задачи в случае, когда четыре положения точки A заданы на одной прямой, следует по методу, изложенному в § 79, построить два вспомогательных дезаксиальных кривошипно-шатунных меха-

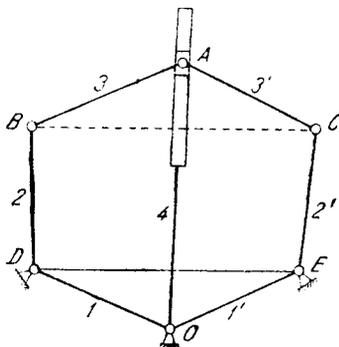


Фиг. 436.

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ u_{22} & u_{32} & r_{42} & 1 \\ u_{23} & u_{33} & r_{43} & 1 \\ u_{24} & u_{34} & r_{44} & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ u'_{22} & u_{32} & r_{42} & 1 \\ u'_{23} & u_{33} & r_{43} & 1 \\ u'_{24} & u_{34} & r_{44} & 1 \end{pmatrix}$$

отличаются лишь значениями углов φ_{2k} и φ'_{2k} . Так как углы поворотов шатунов φ_{3k} и положения ползушек обоих проектируемых вспомогательных механизмов одинаковы в четырёх заданных положениях, то после определения размеров звеньев их соединяют по схеме, изображённой на фиг. 436, и из образовавшейся цепи получают искомый четырёхзвенник описанным выше способом. При решении уравнений совместности в первой матрице за неизвестные принимаются углы φ_{33} и φ_{34} , а во второй — углы φ_{23} и φ_{24} . Для упрощения задачи один из вспомогательных механизмов можно выбрать произвольно, позаботившись лишь о том, чтобы ползушка прошла через четыре заданные точки неподвижной плоскости A_k ($k = 1, 2, 3, 4$), и спроектировать только второй, воспользовавшись его матрицей M_4 .



Фиг. 437.

Рассмотрим две кинематические цепи с общей кулисой (фиг. 437). При деформации цепей угол между звеньями AB и AC будет меняться. Однако, можно так подобрать цепи, чтобы для ряда их положений угол BAC имел одно и то же значение. Для таких положений цепей расстояния между точками B и C также равны и звенья AB и AC образуют как бы одно жёсткое звено. Соединив звенья AB и AC жёстко и выбросив кулису с ползушкой, получим четырёхзвенник с точкой A шатуна, проходящей через все те положения центра ползушки, лежащие на заданной кривой, для которых угол BAC постоянен. Отсюда следует, что для построения искомого четырёхзвенного механизма при расположении заданных точек на любой кривой необходимо найти две вспомогательные цепи (фиг. 437), у которых ползушки проходят через заданные четыре точки неподвижной плоскости. Матрицы обеих цепей составляются на основании общих соображений, изложенных в § 70:

$$M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & u_{22} & u_{32} & r_{42}u_{42} \\ 1 & u_{23} & u_{33} & r_{43}u_{43} \\ 1 & u_{24} & u_{34} & r_{44}u_{44} \end{pmatrix}$$

$$M_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & u'_{22} & u_{32} & r_{42}u_{42} \\ 1 & u'_{23} & u_{33} & r_{43}u_{43} \\ 1 & u'_{24} & u_{34} & r_{44}u_{44} \end{pmatrix}$$

и отличаются лишь значениями углов φ_{2k} и φ_{2k} . Так как углы поворотов кулис φ_{4k} и векторы, определяющие положения ползушек, одинаковы для обеих цепей в четырёх рассматриваемых положениях, то кулисы и ползушки обеих цепей объединяются в одно звено. Так как углы φ_{3i} поворотов звеньев AB и AC одинаковы в четырёх рассматриваемых положениях обеих цепей, то звенья AB и AC образуют в этих положениях жёсткий треугольник ABC . Следовательно, из цепей, построенных по приведённым выше матрицам M_3 и M_6 , образуется искомый четырёхзвенный механизм описанным выше способом (фиг. 437). Для упрощения задачи одну из вспомогательных цепей можно выбрать произвольно, позаботившись лишь о том, чтобы её ползушка прошла через четыре заданные точки неподвижной плоскости, и сиректировать только вторую вспомогательную цепь по матрице M_6 . Выделяем из матрицы M_6 уравнение совместности:

$$D_6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & u'_{22} & u_{32} & r_{42}u_{42} \\ 1 & u'_{33} & u_{33} & r_{43}u_{43} \\ 1 & u'_{24} & u_{24} & r_{44}u_{44} \end{vmatrix} = 0$$

и принимаем за неизвестные углы φ'_{23} и φ'_{24} . Разлагаем определитель D_6 по элементам второго столбца:

$$D_6 = \Delta_1 - \Delta_2 u'_{22} + \Delta_3 u'_{33} - \Delta_4 u'_{24} = 0,$$

где

$$\Delta_1 = r_{42}u_{42}(u_{34} - u_{33}) + r_{43}u_{43}(u_{32} - u_{34}) + r_{44}u_{44}(u_{33} - u_{32}),$$

$$\Delta_2 = u_{34} - u_{33} + r_{43}u_{43}(1 - u_{34}) + r_{44}u_{44}(u_{33} - 1),$$

$$\Delta_3 = u_{34} - u_{32} + r_{42}u_{42}(1 - u_{34}) + r_{44}u_{44}(u_{32} - 1),$$

$$\Delta_4 = u_{33} - u_{32} + r_{42}u_{42}(1 - u_{33}) + r_{43}u_{43}(u_{32} - 1).$$

Подробное аналитическое и графическое решение такого уравнения изложено в § 78.

После определения угла φ'_{23} переходим к построению определителя искомой цепи, который выделяем из матрицы M_6 :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & & 1 & 1 \\ 1 & u'_{22} & u_{32} & r_{42} u_{42} \\ 1 & u'_{23} & u_{33} & r_{43} u_{43} \end{vmatrix} = 0.$$

Разлагаем определитель по элементам первой строки:

$$D = \delta_1 - \delta_2 + \delta_3 - \delta_4 = 0,$$

где $\delta_2 = \Delta_4$, а

$$\delta_1 = u'_{22}u_{33} - u'_{23}u_{32} + r_{42}u_{42}(u'_{23} - u_{33}) + r_{43}u_{43}(u_{32} - u'_{22}),$$

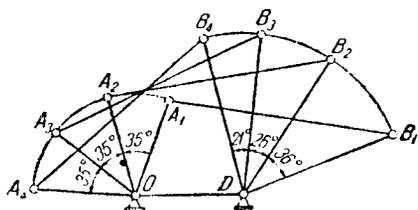
$$\delta_3 = u'_{23} - u'_{22} + r_{42}u_{42}(1 - u'_{23}) + r_{43}u_{43}(u'_{22} - 1),$$

$$\delta_4 = u'_{22}u_{33} - u'_{23}u_{32} - u_{33} + u_{32} + u'_{23} - u'_{22}.$$

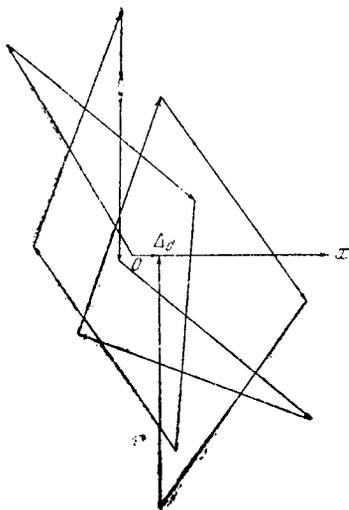
Для получения искомой цепи в начальном её положении следует образовать замкнутый контур из векторов δ_j ($j=1, 2, 3, 4$) по уравнению $D=0$.

Пример 14. Построить четырёхзвенный шарнирный механизм, четыре положения точки A плутона которого лежат на одной окружности радиуса, принятого за единицу. Положения радиуса определяются углами $\varphi_{12} = 35^\circ$.

$\varphi_{13} = 70^\circ$, $\varphi_{14} = 105^\circ$ (фиг. 438). В этом случае искомый механизм строится при помощи двух вспомогательных четырёхзвенников, из которых один выбираем произвольно, позаботившись лишь о прохождении его кривошипа через данные положения. Устанавливаем кривошип механизма в положения OA_1 , OA_2 , OA_3 , OA_4 и измеряем углы шатуна φ_{2k} ($k = 2, 3, 4$), определяющие его поворот по отношению к начальному положению A_1B_1 . Углы φ_{1k} и φ_{2k} второго вспомогательного четырёхзвенника не должны отличаться от соответствующих им углов первого вспомогательного четырёхзвенника. Следовательно



Фиг. 438.



Фиг. 439.

но, для проектирования второго вспомогательного четырёхзвенника имеем таблицу углов:

φ_{12}	φ_{13}	φ_{14}	φ_{22}	φ_{23}	φ_{24}
35°	70°	105°	19°	34°	50°

Строим вспомогательный четырёхзвенник по § 78. Выделим из матрицы M_2 уравнение совместности:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ u_{12} & u_{22} & u'_{32} & 1 \\ u_{13} & u_{23} & u'_{33} & 1 \\ u_{14} & u_{24} & u'_{34} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Принимаем за неизвестное φ'_{33} и φ'_{34} и разлагаем определитель D_2 по элементам третьего столбца:

$$D_2 = \Delta_1 - \Delta_2 u'_{32} + \Delta_3 u'_{33} - \Delta_4 u'_{34} = 0,$$

где

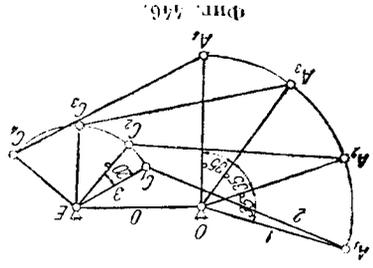
$$\Delta_1 = u_{13}u_{24} - u_{14}u_{23} - u_{12}u_{24} + u_{14}u_{22} + u_{12}u_{23} - u_{13}u_{22},$$

$$\Delta_2 = u_{13}u_{24} - u_{14}u_{23} - u_{24} + u_{23} + u_{14} - u_{13},$$

$$\Delta_3 = u_{12}u_{24} - u_{14}u_{22} - u_{24} + u_{22} + u_{14} - u_{12},$$

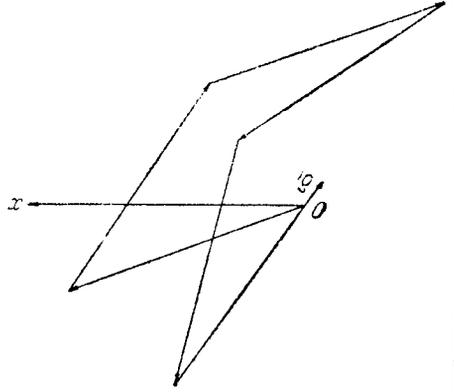
$$\Delta_4 = u_{12}u_{23} - u_{13}u_{22} - u_{23} + u_{22} + u_{13} - u_{12}.$$

Задаёмся $\varphi'_{32} = 20^\circ$ и строим $\Delta_0 = \Delta_1 - \Delta_2 u'_{32}$ (фиг. 439), Δ_3 (фиг. 440), Δ_4 (фиг. 441). Выполнив построения, подробно изложенные в § 78 при решении уравнения (166) (фиг. 442), получим $\varphi'_{33} = 56^\circ 30'$. Определитель вспомогательного механизма D строится по § 78. Строим по формулам, приведённым в § 78, только значения определителей δ_4 (фиг. 443), δ_1 (фиг. 444), δ_3 (фиг. 445).

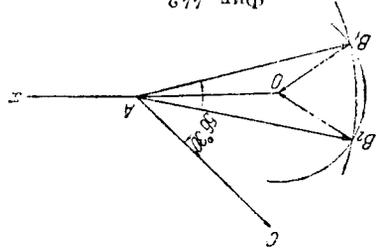


Фиг. 446.

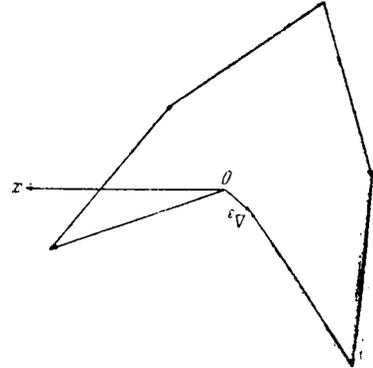
Фиг. 447.



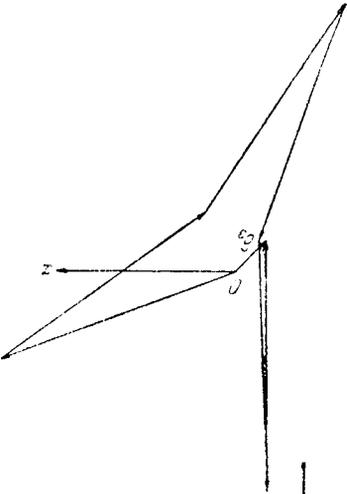
Фиг. 442.



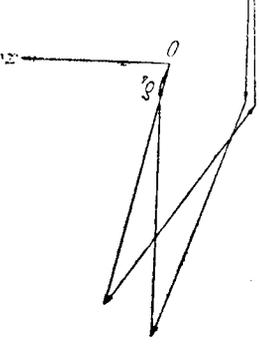
Фиг. 440.



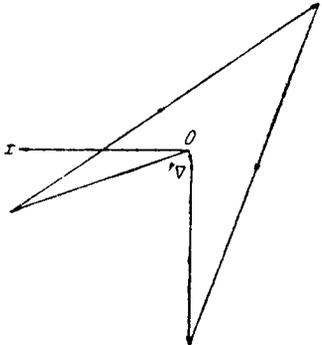
Фиг. 445.



Фиг. 443.

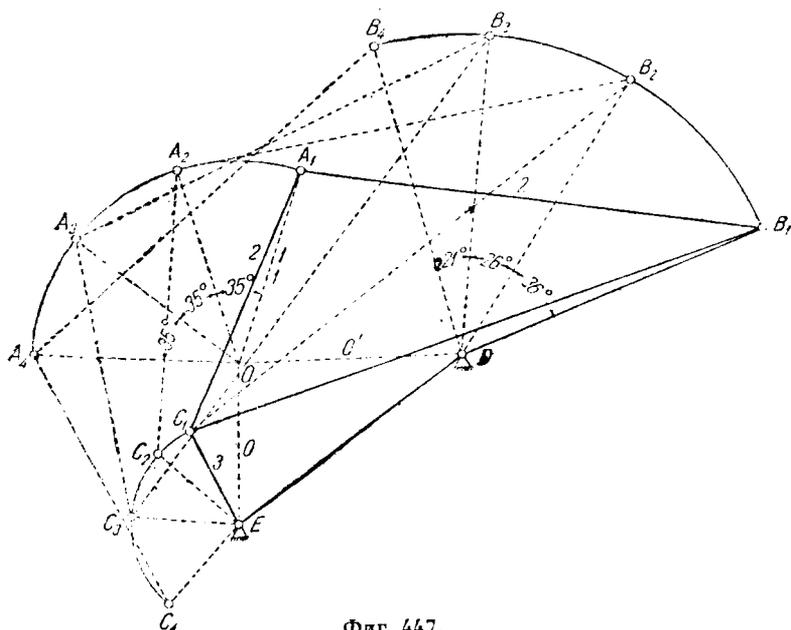


Фиг. 441.



так, как определитель $\delta_2 = \Delta_4$ уже построен (фиг. 441). Образум из векторов δ_j замкнутый контур OA_1C_1EO , определяющий искомый вспомогательный механизм в начальном его положении (фиг. 446).

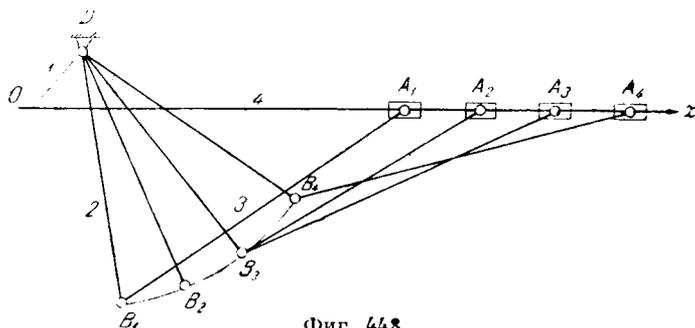
Накладываем вспомогательные четырёхзвенники так, чтобы у них совпали кривошипы OA_1 и соединяем жёстко звенья AB и AC . Выбрасываем



Фиг. 447.

объединённый кривошип и получаем четырёхзвенник DB_1C_1E , у которого четыре положения точки A шатуна лежат на одной окружности радиуса OA (фиг. 447).

Пусть четыре положения точки A заданы из одной прямой (оси x) координатами $r_{41} = 1, r_{42} = 1,2, r_{43} = 1,4, r_{44} = 1,6$ (фиг. 448). В этом случае иско-



Фиг. 448.

мый механизм строится при помощи двух вспомогательных дезаксимальных кривошипно-шатунных механизмов, из которых один выбираем произвольно, позаботившись лишь о прохождении его полушки через заданные положения точки A . Устанавливаем полушку выбранного вспомогательного механизма в положения A_1, A_2, A_3, A_4 и измеряем углы шатуна $\varphi_{32}, \varphi_{33}, \varphi_{34}$, определяю-

щие его поворот по отношению к начальному положению A_1B_1 . Для проектирования второго вспомогательного механизма имеем таблицу величин

r_{42}	r_{43}	r_{44}	φ_{32}	φ_{33}	φ_{34}
1,2	1,4	1,6	-4°	-10°	-20°

Строим вспомогательный механизм по § 79. Выделяем из матрицы M_4 уравнение совместности:

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & u'_{22} & u_{32} & r_{42} \\ 1 & u'_{23} & u_{33} & r_{43} \\ 1 & u'_{24} & u_{34} & r_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Разлагаем определитель D_4 по элементам второго столбца:

$$D_4 = \Delta_1 - \Delta_2 u'_{22} + \Delta_3 u'_{23} - \Delta_4 u'_{24} = 0,$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 0,4u_{33} - 0,2u_{34} - 0,2u_{32}, \\ \Delta_2 &= 0,6u_{33} - 0,4u_{34} - 0,2, \\ \Delta_3 &= 0,6u_{32} - 0,2u_{34} - 0,4, \\ \Delta_4 &= 0,4u_{32} - 0,2u_{33} - 0,2. \end{aligned}$$

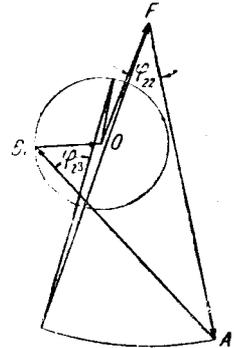
Результаты вычислений приведены в таблице:

j	1	2	3	4
$\text{mod } \Delta_j^1)$	36,07	89,75	71,45	17,82
$\text{arg } \Delta_j$	$63^\circ 10'$	$65^\circ 20'$	$68^\circ 10'$	$73^\circ 10'$

Уравнение $D_4 = 0$ не отличается от (166). Задав $\varphi'_{22} = 30^\circ$ и выполнив построения, изложенные в § 78 при решении уравнения (166) (фиг. 449), получим $\varphi'_{23} = 57^\circ 40'$. Составляем определитель вспомогательного механизма D и разлагаем его по элементам первой строки. Вычислим по формулам, приведенным в § 79, только значения определителей $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$, так как $\delta_2 = \Delta_4$. Результаты вычислений приведены в таблице:

j	4	1	2	3
$\text{mod } \delta_j^1)$	64,8	79,8	14,3	99,6
$\text{arg } \delta_j$	$-26^\circ 20'$	$259^\circ 20'$	$73^\circ 10'$	$39^\circ 30'$

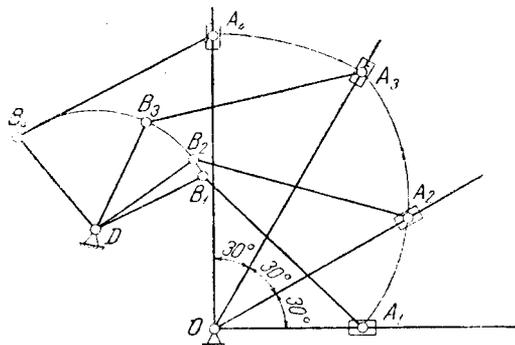
1) Значения всех модулей увеличены.



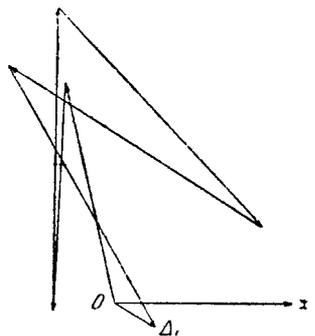
Фиг. 449.

чтобы её ползушка проходила через заданные положения точки A . Устанавливаем ползушку выбранной вспомогательной цепи в положения A_1, A_2, A_3, A_4 (фиг. 452) и измеряем углы φ_{3k} звена AB , определяющие его поворот по отношению к начальному положению A_1B_1 . Для проектирования второй вспомогательной цепи имеем следующую таблицу величин:

r_{41}	r_{42}	r_{43}	r_{44}	φ_{41}	φ_{42}	φ_{43}	φ_{44}	φ_{32}	φ_{33}	φ_{34}
1	1,5	2	2	0°	30°	60°	90°	29°	57°	72°

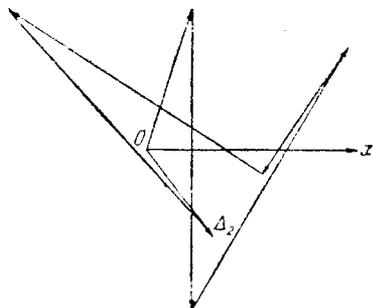


Фиг. 452.

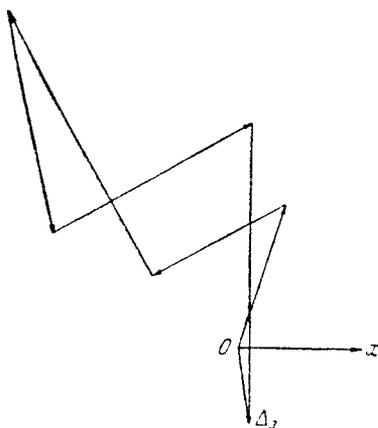


Фиг. 453.

Задавшись $\varphi'_{22} = 31^\circ$, строим по приведённым выше для вспомогательной цепи формулам векторы Δ_1 (фиг. 453), Δ_2 (фиг. 454), Δ_3 (фиг. 455), Δ_4 (фиг. 456), решаем графическим способом уравнение совместности $D_6 = 0$ (фиг. 457) и находим $\varphi'_{23} = 70^\circ 30'$. Строим далее только значения определителей δ_0

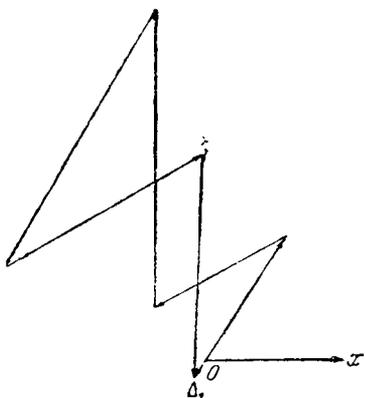


Фиг. 454.

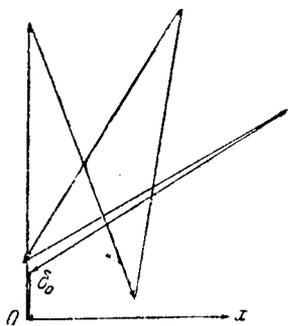


Фиг. 455.

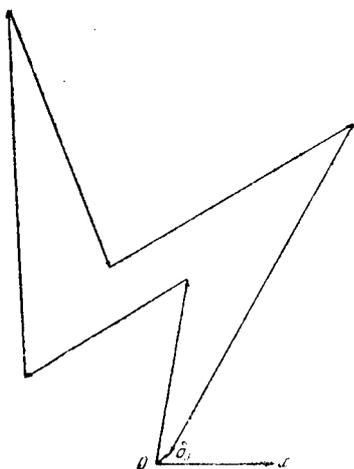
(фиг. 458), δ_1 (фиг. 459), δ_3 (фиг. 460), так как определитель $\delta_2 = \Delta_4$ уже построен (фиг. 456), и образуем из векторов δ_j ($j = 1, 2, 3, 4$) замкнутый контур, определяющий искомую вспомогательную цепь в начальном её положении



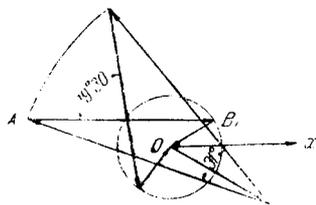
Фиг. 456.



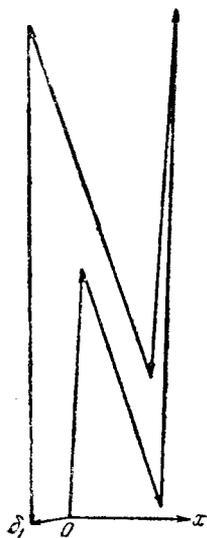
Фиг. 458.



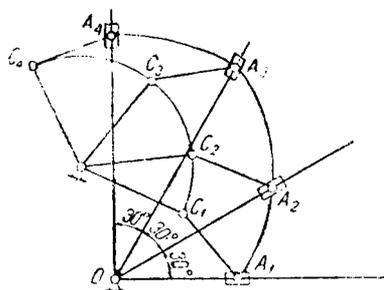
Фиг. 460.



Фиг. 457.

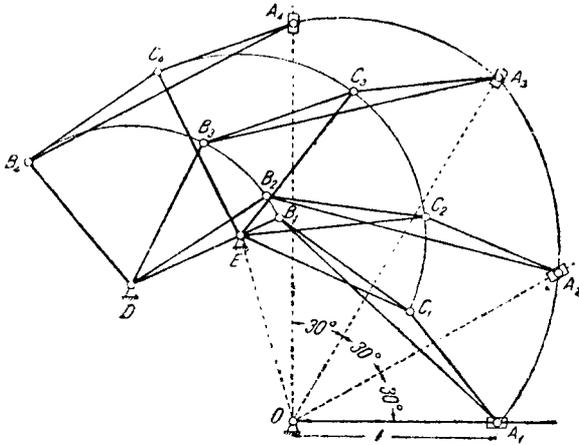


Фиг. 459.



Фиг. 461.

(фиг. 461). Накладываем обе цепи, соединяем жёстко звенья AB и AC , выбрасываем ползушку с кулисой. В результате получаем четырёхзвенник



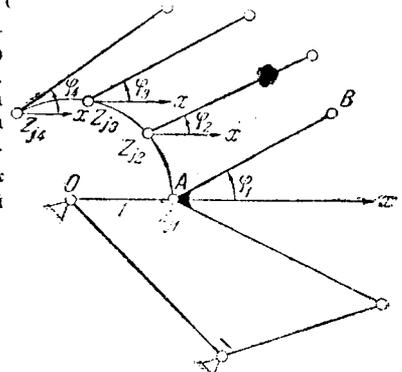
Фиг. 462.

DB_1C_1E , у которого точка A шатуна проходит через заданные четыре точки, лежащие на произвольной кривой (фиг. 462).

§ 84. Синтез четырёхзвенных механизмов по четырём заданным положениям шатунной плоскости.

Зададим последовательные положения плоскости шатуна искомого четырёхзвенника координатами z_{jk} ($k=1, 2, 3, 4$) некоторой её точки A и углами φ_k ($k=1, 2, 3, 4$) неизменно связанной с ней прямой AB , отсчитываемыми от неподвижной оси x (фиг. 463). Ось x и начало координат O выбираем так, чтобы $z_{j1}=1$. Наиболее простым будет случай, когда заданные положения точки A лежат на одной окружности единичного радиуса. Полагая для этого случая $z_{jk} = e^{iz_{jk}} = u_{1k}$ и $\varphi_k = \varphi_{2k}$ ($k=2, 3, 4$), строим искомый четырёхзвенник по матрице:

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} & 1 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & 1 \\ u_{14} & u_{24} & u_{34} & 1 \end{vmatrix},$$



Фиг. 463.

не отличающейся от матрицы, рассмотренной в § 78. За неизвестные, определяемые из уравнений совместности, принимаем углы поворота коромысла φ_{23} и φ_{24} . Производим подобное преобразование и вращение контура построенного четырёхзвенника так, чтобы его кривошип совпал с линией OA (фиг. 463), соединяем жёстко его шатун с заданным начальным положением шатунной плоскости AB . Тогда в образовавшемся механизме при повороте кривошипа OA на углы φ_{1k} плоскости его шатуна будут располагаться в заданных по условию положениях. Произволом в выборе угла φ_{22} можно воспользоваться для наложения дополнительного условия на проектируемый механизм.

При расположении заданных точек A на одной прямой (оси x) полагаем $z_{jk} = r_{1k}$, $\varphi_k = \varphi_{2k}$, $z_{j1} = 1$ ($k=2, 3, 4$) и строим дезаксиальный кривошипно-

шатунный механизм по матрице:

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & u_{22} & u_{32} & r_{42} \\ 1 & u_{23} & u_{33} & r_{43} \\ 1 & u_{24} & u_{34} & r_{44} \end{vmatrix}$$

Принимая за неизвестные φ_{23} и φ_{24} , выделяем из матрицы определитель механизма D_1 , построение которого изложено в § 79, и уравнение совместности:

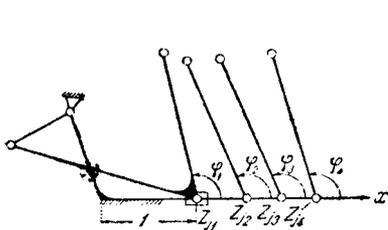
$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & u_{22} & u_{32} & r_{42} \\ 1 & u_{23} & u_{33} & r_{43} \\ 1 & u_{24} & u_{34} & r_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Разлагая определитель D_1 по элементам второго столбца, получим уравнение:

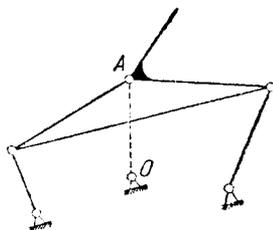
$$D_1 = \Delta_1 - \Delta_2 u_{22} + \Delta_3 u_{23} - \Delta_4 u_{24} = 0,$$

не отличающееся от уравнения, решённого в § 78. После определения φ_{23} строим дезаксиальный кривошипно-шатунный механизм по определителю D и присоединяем к начальному положению шатунной плоскости по схеме, изображённой на фиг. 464.

Если требуется, чтобы точка A , описывая шатунную кривую, заняла на ней четыре положения, расположенных на одной окружности, то искомый



Фиг. 464.



Фиг. 465.

четырёхзвенник строится при помощи двух вспомогательных механизмов по методу, изложенному в § 83. Воспользовавшись матрицей шарнирного четырёхзвенника:

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} & 1 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & 1 \\ u_{14} & u_{24} & u_{34} & 1 \end{vmatrix}$$

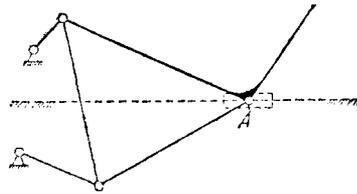
задаём $\varphi_{jk} = \varphi_k$, $u_{jk} = z_{jk}$ ($k=2, 3, 4$), $z_{j1} = 1$ и строим по § 78 два вспомогательных механизма, задавшись двумя различными значениями φ_{32} . У построенных таким образом четырёхзвенников одинаковы углы поворотов кривошипов и шатунов, так что они могут быть соединены по схеме, изображённой на фиг. 435, и связаны затем с заданным начальным положением шатунной плоскости, как это показано на фиг. 465.

Если заданные положения точек A лежат на одной прямой и необходимо построить шарнирный четырёхзвенник, удовлетворяющий поставленным условиям (а не кривошипно-шатунный механизм), то задача решается при помощи двух вспомогательных дезаксиальных кривошипно-шатунных механизмов по

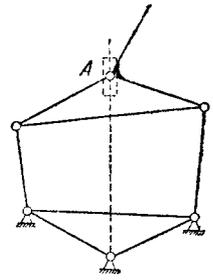
соответствующей матрице:

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & u_{22} & u_{32} & r_{42} \\ 1 & u_{23} & u_{33} & r_{43} \\ 1 & u_{24} & u_{34} & r_{44} \end{vmatrix}.$$

Считая, что $\varphi_{3k} = \varphi_k$, $r_{4k} = z_{jk}$ ($k = 2, 3, 4$), $z_{j1} = 1$, строим по § 79 два вспомогательных механизма, задавшись двумя различными значениями φ_{22} . У построенных таким образом вспомогательных механизмов одинаковы углы поворота шатунов и перемещения ползушек так, что они могут быть соединены по схеме, изображённой на фиг. 466, и связаны затем с начальным положением шатунной плоскости, как это показано на фиг. 466.



Фиг. 466.



Фиг. 467.

Если заданные положения точки A лежат на произвольной кривой, то шарнирный четырёхзвенник, удовлетворяющий поставленным условиям, строится при помощи двух вспомогательных цепей, изображённых на фиг. 437. Воспользовавшись матрицей

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & u_{22} & u_{32} & r_{42}u_{42} \\ 1 & u_{23} & u_{33} & r_{43}u_{43} \\ 1 & u_{24} & u_{34} & r_{44}u_{44} \end{vmatrix},$$

задаём $\varphi_{3k} = \varphi_k$, $r_{4k}u_{4k} = z_{jk}$ ($k = 2, 3, 4$), $z_{j1} = 1$ и строим по § 83 две вспомогательные цепи, задавшись двумя различными углами φ_{2k} . У построенных таким образом цепей одинаковы углы поворотов кулис и шатунов и перемещения ползушек, так что они могут быть соединены по схеме, изображённой на фиг. 437, и связаны затем с начальным положением шатунной плоскости, как это показано на фиг. 467.

§ 85. Синтез четырёхзвенных механизмов по трём заданным положениям двух звеньев и скоростям их в одном из этих положений.

Пусть три положения кривошипа и коромысла шарнирного четырёхзвенника определяются углами φ_{1k} и φ_{3k} ($k = 2, 3$), а угловые скорости кривошипа ω_{11} и коромысла ω_{31} заданы в начальном положении механизма. Обозначая соответствующие величины для шатуна через φ_{2k} и ω_{21} , составим матрицу механизма из двух строк (157), двух первых строк (158) и первой строки (159):

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} & 1 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & 1 \\ \omega_{11} & \omega_{21} & \omega_{31} & 0 \end{vmatrix}.$$

Выделяем из матрицы определитель механизма D , построение которого рассмотрено в § 78, и уравнение совместности:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} & 1 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & 1 \\ \omega_{11} & \omega_{21} & \omega_{31} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Разлагаем определитель D_1 по элементам второго столбца:

$$\Delta_1 - \Delta_2 u_{22} + \Delta_3 u_{23} - \Delta_4 \omega_{21} = 0, \quad (174)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \omega_{31} (u_{13} - u_{12}) + \omega_{11} (u_{32} - u_{33}), \\ \Delta_2 &= \omega_{31} (u_{13} - 1) + \omega_{11} (1 - u_{33}), \\ \Delta_3 &= \omega_{31} (u_{12} - 1) + \omega_{11} (1 - u_{32}), \\ \Delta_4 &= u_{12}u_{33} - u_{13}u_{32} - u_{33} + u_{32} + u_{13} - u_{12}. \end{aligned}$$

Для проверки вычислений и построений, связанных с определением Δ_j ($j = 1, 2, 3$), служат следующие зависимости:

$$\begin{aligned} \Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3 &\equiv 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 &\equiv 0, \\ y_1 - y_2 + y_3 &\equiv 0, \end{aligned}$$

справедливость которых непосредственно вытекает из уравнения:

$$D_1 \equiv 0 \text{ при } \varphi_{22} = \varphi_{23} = 0 \text{ и } \omega_{21} = 0.$$

Если неизвестны φ_{22} и φ_{23} , то, обозначая $\Delta_0 = \Delta_1 - \Delta_4 \omega_{21}$, приводим уравнение совместности к виду:

$$\Delta_0 - \Delta_2 u_{22} + \Delta_3 u_{23} = 0$$

и определяем φ_{22} и φ_{23} по формулам (168) и (169).

Графическая схема решения уравнения $D_1 = 0$ изображена на фиг. 409.

При неизвестных φ_{23} и ω_{21} обозначаем:

$$\Delta_0 = \Delta_1 - \Delta_2 u_{22}$$

и приводим уравнение (174) к виду:

$$\Delta_0 + \Delta_3 u_{23} - \Delta_4 \omega_{21} = 0.$$

Исключаем φ_{23} при помощи сопряжённого уравнения

$$u_{23} = \frac{\Delta_4 \omega_{21} - \Delta_0}{\Delta_3} = \frac{\Delta_3 \omega_{21} - \Delta_0}{\Delta_3 \omega_{21} - \Delta_0}$$

и получаем квадратное уравнение для определения ω_{21} :

$$r_4^2 \omega_{21}^2 - (\Delta_4 + \Delta_0) \omega_{21} + r_0^2 - r_3^2 = 0,$$

где $r_j = \text{mod } \Delta_j$ ($j = 0, 3, 4$). Обозначая $\Delta_j = x_j + iy_j$, находим:

$$\omega_{21} = \frac{(x_0 x_4 + y_0 y_4) \pm \sqrt{(x_0 x_4 + y_0 y_4)^2 - r_4^2 (r_0^2 - r_3^2)}}{r_4^2}. \quad (175)$$

Для получения φ_{23} исключаем аналогичным образом ω_{21} :

$$\omega_{21} = \frac{\Delta_0 + \Delta_3 u_{23}}{\Delta_4} = \frac{-\Delta_0 u_{23} + \Delta_3}{\Delta_4 u_{23}}, \quad u_{23} = \frac{i(x_0 y_4 - y_0 x_4) \pm \sqrt{-(x_0 y_4 - y_0 x_4)^2 + r_3^2 r_4^2}}{-\Delta_3 \Delta_4}.$$

Полагая, что $r_3^2 r_4^2 > (x_0 y_4 - y_0 x_4)^2$, и приравнявая мнимые части, получим:

$$\sin(\varphi_{23} + \varphi_3 - \varphi_4) = \frac{x_0 y_4 - y_0 x_4}{r_3 r_4} \quad (176)$$

где

$$\varphi_j = \arg \Delta_j \quad (j = 3, 4).$$

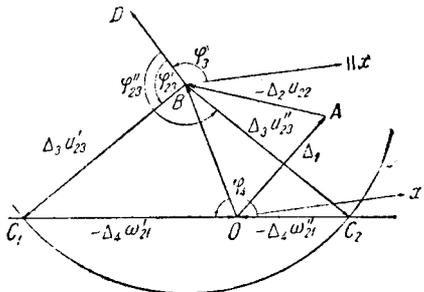
Графическое решение уравнения совместности при неизвестных φ_{23} и ω_{21} выполняется по следующей схеме. Откладываем (фиг. 468) $OA + AB = \frac{1}{1-2}u_{22}$. Описываем из точки B окружность радиусом $\text{mod } \lambda_3$ и приводим из O прямую под углом $\varphi_4 = \arg \lambda_4$ к оси x , которая пересекает окружность в точках C_1 и C_2 . Векторные треугольники OBC_1O и OBC_2O дают два возможных варианта решения уравнения $D_1 = 0$. Проводим через B направление BD под углом $\varphi_{23} = \arg \lambda_3$ к оси x и определяем два значения угла φ_{23} :

$$\varphi'_{23} = (BD, BC_1); \quad \varphi''_{23} = (BD, BC_2).$$

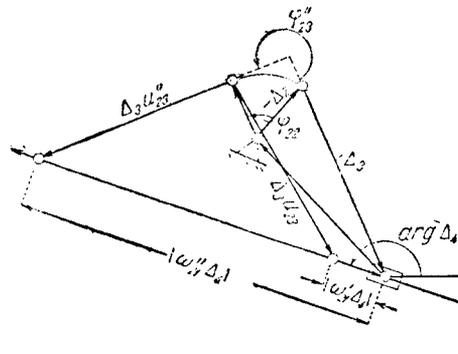
Измеряя отрезки C_1O и C_2O , находим:

$$\omega'_{21} = \pm \frac{C_1O}{\text{mod } \lambda_4}, \quad \omega''_{21} = \pm \frac{C_2O}{\text{mod } \lambda_4},$$

где угловая скорость ω_{21} считается положительной, если векторы C_1O и C_2O направлены под углом $\arg \lambda_4 + \pi$ к оси x . Свободой выбора угла φ_{22} следует воспользоваться для наложения на искомый механизм дополнительного условия. Метод решения совпадает с изложенным в § 81. Годографы решений строятся при помощи вспомогательного



Фиг. 468.



Фиг. 469.

вая скорость кривошипа ω_{21} и линейная скорость ползушки v_{41} заданы в начальном положении механизма. Обозначая соответствующие величины для шатуна через φ_{3k} и ω_{31} , составим матрицу механизма из двух строк (157), двух первых строк (162) и первой строки (163):

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & u_{22} & u_{32} & r_{42} \\ 1 & u_{23} & u_{33} & r_{43} \\ 0 & \omega_{24} & \omega_{34} & -iv_{41} \end{vmatrix}.$$

Выделяем из матрицы M определитель механизма D , построение которого рассмотрено в § 79, и уравнение совместности:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & u_{22} & u_{32} & r_{42} \\ 1 & u_{23} & u_{33} & r_{43} \\ 0 & \omega_{21} & \omega_{31} & -iv_{41} \end{vmatrix} = 0.$$

Разлагаем определитель D_1 по элементам третьего столбца:

$$D_1 = \Delta_1 - \Delta_2 u_{32} + \Delta_3 u_{33} - \Delta_4 \omega_{31} = 0,$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= i v_{41} (u_{22} - u_{23}) + \omega_{21} (r_{42} - r_{43}), \\ \Delta_2 &= i v_{41} (1 - u_{23}) + \omega_{21} (1 - r_{43}), \\ \Delta_3 &= i v_{41} (1 - u_{22}) + \omega_{21} (1 - r_{42}), \\ \Delta_4 &= r_{42} - r_{43} + (r_{43} - 1) u_{22} + (1 - r_{42}) u_{23}. \end{aligned}$$

Решение уравнения совместности совпадает с решением уравнения (174). После определения φ_{23} искомый механизм строится по своему определителю D .

Пример 15. Построить дезаксепальный кривошипно-шатунный механизм, если заданы следующие значения величин:

r_{41}	r_{42}	r_{43}	φ_{22}	φ_{23}	φ_{32}	ω_{21}	v_{41}
1	1,5	2	-60°	-120°	14°	1	0,25

Строим значение определителей Δ_1 (фиг. 470), Δ_2 (фиг. 471), Δ_3 (фиг. 472), Δ_4 (фиг. 473) и проверяем результаты по уравнению:

$$\Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3 = 0.$$

Строим графическое решение уравнения совместности по изложенному выше решению уравнения (174) для случая, когда необходимо определить ω_{31} (фиг. 474), и получаем: $\omega_{31} = \frac{C_1 O}{\text{mod } \Delta_4} = 0,5$.

Искомый механизм проще всего построить по определителю:

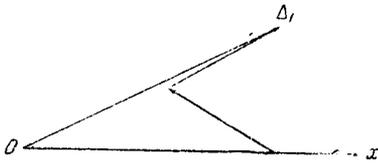
$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & u_{22} & u_{32} & r_{42} \\ 0 & \omega_{21} & \omega_{31} & -i v_{41} \end{vmatrix},$$

выделяемому из матрицы M . Строим только определители δ_1 (фиг. 475), δ_2 (фиг. 476), δ_4 (фиг. 477), так как $\delta_3 = \Delta_3$ (фиг. 472), и образуем из полученных векторов δ_j ($j = 1, 2, 3, 4$) замкнутый контур $OABCO$, определяющий искомый механизм в начальном его положении (фиг. 478). Отметим, что единицей измерения по условию служит $\text{mod } \delta_4 = r_{41} = 1$.

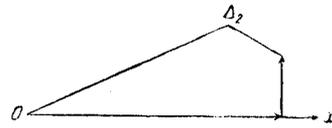
§ 86. Синтез четырёхзвенных механизмов по двум заданным положениям двух звеньев и их скоростям в этих положениях.

Пусть два положения кривошипа и коромысла шарнирного четырёхзвенника определяются углами φ_{12} и φ_{32} , а угловые скорости этих же звеньев ω_{1k} и ω_{3k} ($k = 1, 2$). Обозначая соответствующие величины для шатуна через φ_{22} и ω_{2k} ($k = 1, 2$), составим матрицу механизма из двух строк (157), первой строки (158) и строк (159):

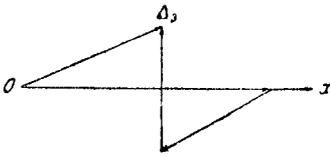
$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} & 1 \\ \omega_{11} & \omega_{21} & \omega_{31} & 0 \\ \omega_{12} u_{12} & \omega_{22} u_{22} & \omega_{32} u_{32} & 0 \end{vmatrix}.$$



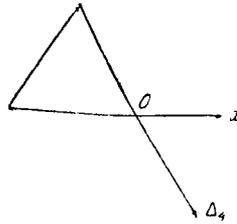
Фиг. 470.



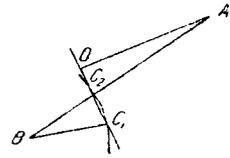
Фиг. 471.



Фиг. 472.



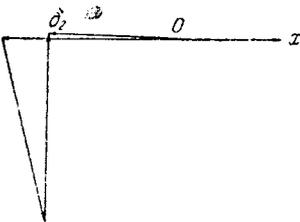
Фиг. 473.



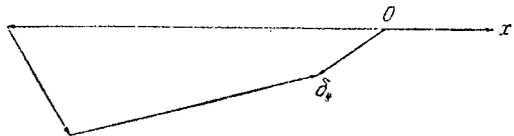
Фиг. 474.



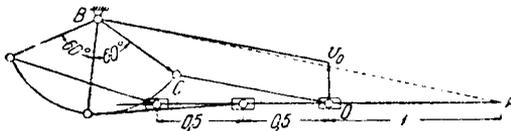
Фиг. 475.



Фиг. 476.



Фиг. 477.



Фиг. 478.

Выделяем из матрицы определитель механизма:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} & 1 \\ \omega_{11} & \omega_{21} & \omega_{31} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

и уравнение совместности:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} & 1 \\ \omega_{11} & \omega_{21} & \omega_{31} & 0 \\ \omega_{12}u_{12} & \omega_{22}u_{22} & \omega_{32}u_{32} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Разлагаем определитель D_1 по элементам второго столбца:

$$\Delta_1 - \Delta_1 u_{22} + \Delta_2 \omega_{21} - \Delta_3 \omega_{22} u_{22} = 0, \quad (177)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \omega_{11} \omega_{32} u_{32} - \omega_{12} \omega_{31} u_{12}, \\ \Delta_2 &= (\omega_{32} - \omega_{12}) u_{12} u_{32} - \omega_{32} u_{32} + \omega_{12} u_{12}, \\ \Delta_3 &= \omega_{31} u_{12} - \omega_{11} u_{32} - \omega_{31} + \omega_{11}. \end{aligned}$$

Если неизвестны ω_{21} и ω_{22} , то, приравнявая к нулю действительную и мнимую части уравнения (177) и обозначая $\Delta_j = x_j + iy_j$, получим систему линейных уравнений:

$$x_2 \omega_{21} - (x_3 \cos \varphi_{22} - y_3 \sin \varphi_{22}) \omega_{22} = x_1 \cos \varphi_{22} - y_1 \sin \varphi_{22} - x_1,$$

$$y_2 \omega_{21} - (y_3 \sin \varphi_{22} + x_3 \cos \varphi_{22}) \omega_{22} = x_1 \sin \varphi_{22} + y_1 \cos \varphi_{22} - y_1,$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} \omega_{21} &= \frac{(1 - \cos \varphi_{22})(y_1 x_3 - x_1 y_3) + (x_1 x_3 + y_1 y_3) \sin \varphi_{22}}{y_2 (x_3 \cos \varphi_{22} - y_3 \sin \varphi_{22}) - x_2 (y_3 \cos \varphi_{22} + x_3 \sin \varphi_{22})}, \\ \omega_{22} &= \frac{x_2 (x_1 \sin \varphi_{22} + y_1 \cos \varphi_{22} - y_1) - y_2 (x_1 \cos \varphi_{22} - y_1 \sin \varphi_{22} - x_1)}{y_2 (x_3 \cos \varphi_{22} - y_3 \sin \varphi_{22}) - x_2 (y_3 \cos \varphi_{22} + x_3 \sin \varphi_{22})} \end{aligned} \right\} (178)$$

Для графического решения уравнения (177) откладываем $OA + AB = \Delta_1 - \Delta_1 u_{22}$ (фиг. 479), из точки B проводим прямую BC под углом $\varphi_2 = \arg \Delta_2$ к оси x , а из O — прямую OD под углом $\varphi_{22} + \arg \Delta_3 = \varphi_{22} + \varphi_3$ к той же оси. Векторный треугольник $OBEO$ даёт графическое решение уравнения (177), причём

$$\omega_{21} = \pm \frac{BE}{\text{mod } \Delta_2}, \quad \omega_{22} = \pm \frac{OE}{\text{mod } \Delta_3}.$$

Если неизвестны φ_{22} и ω_{22} , то, обозначая

$$\Delta_0 = \Delta_1 + \Delta_2 \omega_{21}$$

и сокращая уравнение (177) на u_{22} , приводим его к виду:

$$\Delta_1 - \Delta_0 u_{22} + \omega_{22} \Delta_3 = 0,$$

где $u_{22} = e^{-i\varphi_{22}}$, и решаем по методу, изложенному для уравнения (174).

После определения ω_{21} искомым механизм строится по своему определителю D . Разлагаем определитель D по элементам первой строки:

$$D = \delta_1 - \delta_2 + \delta_3 - \delta_4 = 0,$$

где $\delta_2 = \Delta_3$, а

$$\delta_1 = \omega_{31} (u_{22} - 1) + \omega_{21} (1 - u_{32}),$$

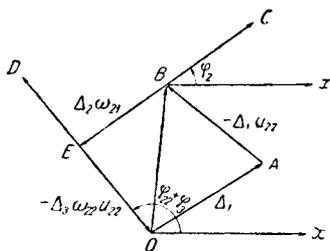
$$\delta_3 = \omega_{21} (u_{12} - 1) + \omega_{11} (1 - u_{22}),$$

$$\delta_4 = (\omega_{31} - \omega_{11}) u_{22} + (\omega_{11} - \omega_{21}) u_{32} + (\omega_{21} - \omega_{31}) u_{12}.$$

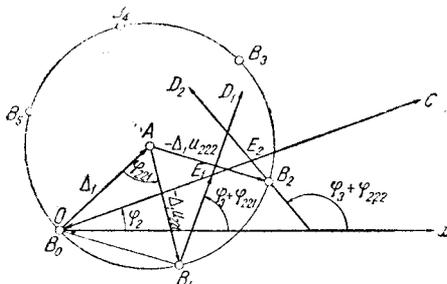
Строим или вычисляем значения векторов δ_j и образуем из них замкнутый контур, представляющий искомым механизм в начальном его положении

Свободой выбора φ_{22} или ω_{22} следует воспользоваться для наложения дополнительного ограничения на выбор проектируемого механизма. Дадим схему графического решения задачи для второго случая, если за независимое переменное принят угол φ_{22} .

Откладываем по уравнению $D_1 = 0$, $OA = \Delta_1$ (фиг. 480) и из точки A радиусом $\text{mod } \Delta_1$ описываем окружность. Задаемся рядом значений φ_{22} и отмечаем на окружности точки B_1, B_2, B_3, \dots , соответствующие выбранным зна-



Фиг. 479.



Фиг. 480.

чениям φ_{22} . Векторы OB_1, OB_2, \dots дадут разность $\Delta_1 - \Delta_1 u_{22}$ для заданных значений φ_{22} . Проводим через точку O прямую OC под углом $\varphi_2 = \arg \Delta_2$ к оси x , а через

точки B_1, B_2, B_3, \dots прямые B_1D_1, B_2D_2, \dots под углами $\varphi_3 + \varphi_{22} = \arg \Delta_3 + \varphi_{22}$ к той же оси, которые пересекут прямую OC в точках E_1, E_2, \dots . Измеряем отрезки OE_1, OE_2, \dots и определяем

$$\omega'_{21} = \pm \frac{OE_1}{\text{mod } \Delta_2},$$

$$\omega''_{21} = \pm \frac{OE_2}{\text{mod } \Delta_2},$$

\dots , причём знак ω_{21} выбираем согласно уравнению $D_1 = 0$. Отклады-

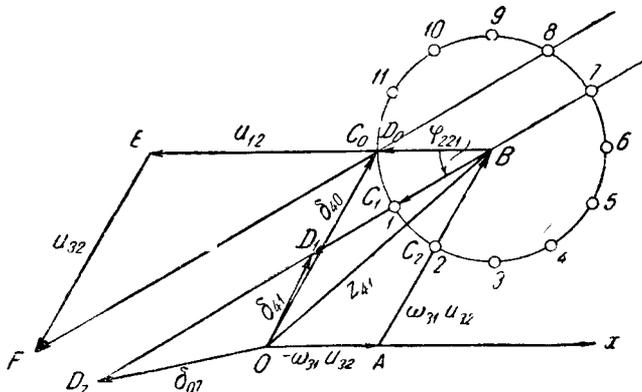
ваем по оси x значения φ_{22} , а по оси y — соответствующие им значения ω_{21} , и получаем график функций $\omega_{21} = f_1(\varphi_{22})$. Переходим к построению определителей δ_j . Группируем члены с u_{22} и ω_{21} и записываем значение определителя δ_j ($j = 1, 3, 4$) в следующем виде:

$$\delta_1 = -\omega_{31} + \omega_{31}u_{22} + (1 - u_{32})\omega_{21} = z_{11} + z_{12}u_{22} + z_{13}\omega_{21},$$

$$\delta_3 = \omega_{11} - \omega_{11}u_{22} + (u_{12} - 1)\omega_{21} = z_{31} + z_{32}u_{22} + z_{33}\omega_{21},$$

$$\delta_4 = \omega_{11}u_{32} - \omega_{31}u_{12} + (\omega_{31} - \omega_{11})u_{22} + (u_{12} - u_{32})\omega_{21} = z_{41} + z_{42}u_{22} + z_{43}\omega_{21}.$$

Определитель δ_2 от φ_{22} и ω_{21} не зависит, и его значение равно Δ_3 . Строим $OA + AB = OB = z_{41}$ (фиг. 481). Из точки B как из центра описываем окружность радиусом $\text{mod } z_{42} = |\omega_{31} - \omega_{11}|$ и отмечаем на ней от начала C_0 точки C_1, C_2, C_3, \dots , соответствующие принятым частным значениям угла φ_{22} . Проводим через точки C_0, C_1, C_2, \dots параллельные прямые под углом $\arg z_{43} = \arg(u_{12} - u_{32})$ к оси x и откладываем на них в должном направлении отрезки: $C_0D_0 = 0, C_1D_1 = \omega'_{21} \text{ mod } z_{43}, C_2D_2 = \omega''_{21} \text{ mod } z_{43}, \dots$, соответствующие



Фиг. 481.

частным значениям угловой скорости ω_{21} для рассматриваемых точек. Концы векторов OD_0, OD_1, OD_2 образуют годограф значений δ_4 .

Аналогичным образом строятся годографы векторов δ_1 и δ_3 , которые вместе с годографом вектора δ_4 используются для выбора четырёхзвенника, удовлетворяющего какому-либо дополнительному условию синтеза.

§ 87. Задача о мёртвых положениях.

Пусть для шарнирного четырёхзвенника заданы по два положения кривошипа и коромысла. Требуется построить механизм, для которого рассматриваемые положения будут мёртвыми. В мёртвых положениях механизма угловые скорости коромысла равны нулю, т. е. $\omega_{21} = \omega_{32} = 0$. Следовательно, задача о мёртвых положениях четырёхзвенника является частным случаем задачи о двух положениях и двух скоростях, решённой в § 86. Подставляя значения ω_{21} и ω_{32} в уравнение совместности $D_1 = 0$, имеем при $\omega_{11} = \omega_{12}$ (кривошип механизма вращается равномерно):

$$D_1 = (1 - e^{i\varphi_{21}})(\omega_{22}e^{i\varphi_{22}} - \omega_{21}e^{i\varphi_{21}}) = 0.$$

Отсюда следует, что уравнение совместности $D_1 = 0$ удовлетворяется при

- 1) $\omega_{22} = -\omega_{21}, \quad \varphi_{22} = \varphi_{21} + \pi,$
- 2) $\omega_{22} = \omega_{21}, \quad \varphi_{22} = \varphi_{21},$
- 3) $\varphi_{32} = 0.$

Для рассматриваемой задачи имеет значение только первый случай. Искомый механизм строится по своему определителю:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ u_{12} & -u_{12} & u_{32} & 1 \\ \omega_{11} & \omega_{21} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Разлагаем определитель по элементам первой строки:

$$D = \delta_1 - \delta_2 + \delta_3 - \delta_4 = 0,$$

где

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \omega_{21}(1 - u_{32}), \quad \delta_2 = \omega_{11}(1 - u_{32}), \\ \delta_3 &= (\omega_{21} + \omega_{11})u_{12} + \omega_{11} - \omega_{21}, \\ \delta_4 &= (\omega_{11} - \omega_{21})u_{32} + (\omega_{11} + \omega_{21})u_{12}. \end{aligned}$$

В мёртвых положениях механизма справедливо условие равенства скоростей:

$$r_1\omega_{11} = \pm r_2\omega_{21},$$

где $r_j = \text{mod } \delta_j$. Задавая угловыми скоростями ω_{11} и ω_{21} , исходя из требуемого соотношения между размерами кривошипа и шатуна, строя векторы δ_j ($j = 1, 2, 3, 4$) по приведённым формулам и образуя из них замкнутый контур, получаем искомый механизм в начальном его положении.

Выведем для аналитических подсчётов более простые формулы¹⁾.

Исключая из δ_j ($j = 1, 2, 3, 4$) $\omega_{21} = -\frac{r_1\omega_{11}}{r_2}$, получим:

$$\delta_1 = \frac{r_1\omega_{11}}{r_2}(u_{32} - 1),$$

$$\delta_3 = \frac{u_{12}}{r_2}(r_2 - r_1) + \omega_{11} + \frac{r_1\omega_{11}}{r_2},$$

$$\delta_4 = \frac{u_{32}}{r_2}(\omega_{11}r_2 + \omega_{11}r_1) + \frac{\omega_{11}u_{12}}{r_2}(r_2 - r_1).$$

¹⁾ Иной вывод этих формул см. в статье Блох Э. Ш.: К синтезу плоского четырёхзвенного механизма, «Сельскохозяйственная машина», № 5-6, 1937.

Воспользовавшись сопряжёнными величинами $\bar{\delta}_j$ ($j = 1, 2, 3, 4$), найдём после упрощений:

$$\left. \begin{aligned} r_1^2 \sin^2 \frac{\varphi_{12} - \varphi_{32}}{2} + r_2^2 \cos^2 \frac{\varphi_{12} - \varphi_{32}}{2} &= r_4^2 \sin^2 \frac{\varphi_{32}}{2}, \\ r_1^2 \sin^2 \frac{\varphi_{12}}{2} + r_2^2 \cos^2 \frac{\varphi_{32}}{2} &= r_3^2 \sin^2 \frac{\varphi_{32}}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (179)$$

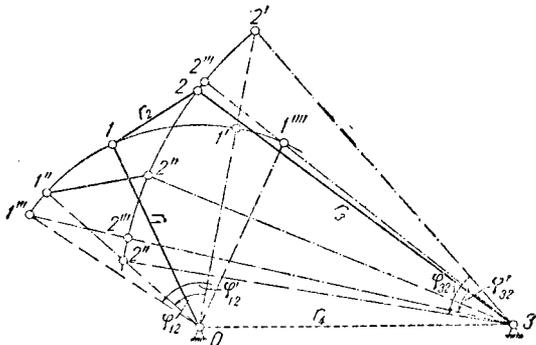
Полученные уравнения линейны относительно квадратов размеров звеньев r_j^2 ($j = 1, 2, 3, 4$) и их практическое использование не представляет затруднений при любой комбинации двух заданных размеров r_j .

Исследуем четырёхзвённый, для которого полный угол колебания коромысла φ_{32} соответствует углу поворота кривошипа $\varphi_{12} = \pi$. Подставив $\varphi_{12} = \pi$ в формулу (179) и исключаем из системы φ_{32} . Тогда

$$r_1^2 + r_4^2 = r_2^2 + r_3^2,$$

причём полный угол колебания коромысла определится по формуле:

$$\sin \frac{\varphi_{32}}{2} = \frac{r_1}{r_3}.$$



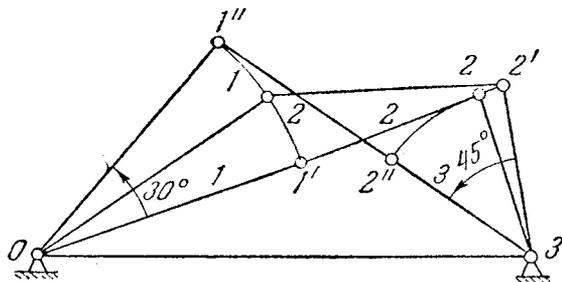
Фиг. 482.

Рассмотренная задача типична для четырёхзвённых, удовлетворяющих условиям Грасгофа. Если у механизма, удовлетворяющего условиям Грасгофа, сделать стойкой кривошип, то получится механизм с двумя кривошипами, не имеющий, вообще говоря, мёртвых положений кривошипов с шатуном. Если у того же механизма сделать стойкой коромысло, то получится механизм с двумя коромыслами. На фиг. 482 показан такой механизм. В нём кроме мёртвых положений, определяемых расположением на одной прямой звеньев 1 и 2, возможны мёртвые положения при расположении на одной прямой звеньев 2 и 3. Очевидно, что при расположении на одной прямой звеньев 2 и 3 $\omega_{11} = \omega_{12} = 0$. Изменив нумерацию звеньев и считая звено 3 кривошипом 1,

а звено 1 коромыслом 3, будем пользоваться для решения задачи ранее выведенными формулами, не внося в них никаких изменений.

Рассмотрим четырёхзвённый, не удовлетворяющий условиям Грасгофа. Пусть для определённости звено 1 наименьшее, а 4 — наибольшее. Тогда по условию

$$r_1 + r_4 > r_2 + r_3. \quad (180)$$



Фиг. 483.

Легко видеть, что такой четырёхзвённый может иметь только следующие мёртвые положения (фиг. 483). Первое мёртвое положение будет при расположении звеньев 1 и 2 на одной прямой, так что $r_1 + r_2 + r_4 > r_3$ или $r_1 + r_2 > r_3 - r_4$, что на основании (180) всегда возможно. Второе мёртвое положение будет при расположении звеньев 2 и 3 на одной прямой, так что $r_1 + r_4 > r_2 + r_3$. Для рассматриваемого случая $\omega_{11} = 0$, $\omega_{12} = 0$. Подставляем эти значения угловых скоростей в уравнение совместности $D_1 = 0$ и развёртываем

значение определителя D_1 в строку:

$$D_1 = \omega_{11}\omega_{32}u_{32}(1 - u_{22}) + \omega_{21}\omega_{32}u_{32}(u_{12} - 1) + \omega_{11}\omega_{22}u_{22}(u_{12} - 1).$$

Для мёртвых положений справедливы условия равенства скоростей:

$$\left. \begin{aligned} r_1\omega_{11} &= -r_2\omega_{21}, \\ r_3\omega_{32} &= -r_2\omega_{22}. \end{aligned} \right\} \quad (181)$$

Исключая ω_{21} и ω_{32} из уравнения $D_1 = 0$ при помощи уравнений (181) и сокращая на $\frac{\omega_{11}\omega_{32}u_{32}}{r_1}$, получим:

$$u_{22}(r_3u_{32} - r_2 - r_3) + r_1 + r_2 - r_1u_{12} = 0. \quad (182)$$

Исключая φ_{32} при помощи сопряжённого уравнения, получим соотношение между размерами звеньев:

$$r_1(r_1 + r_2) \sin^2 \frac{\varphi_{12}}{2} = r_3(r_2 + r_3) \sin^2 \frac{\varphi_{32}}{2}, \quad (183)$$

из которого сразу определяется размер шатуна r_2 по заданным размерам кривошипа r_1 и коромысла r_3 . При другой комбинации двух заданных размеров третий определяется из квадратного уравнения.

Переходим к построению определителя искомого механизма. Подставляя в формулы для δ_j ($j = 1, 2, 3, 4$) $\omega_{31} = 0$, $\omega_{21} = -\frac{r_1\omega_{11}}{r_2}$, получим:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{\omega_{11}r_1}{r_2}(u_{32} - 1), \quad \delta_2 = \omega_{11}(1 - u_{32}), \\ \delta_3 &= -\frac{\omega_{11}r_1}{r_2}u_{12} - \omega_{11}u_{22} + \omega_{11} - \frac{r_1}{r_2}\omega_{11}, \\ \delta_4 &= -\omega_{11}u_{22} + \omega_{11}u_{32} \left(\frac{r_1}{r_2} + 1 \right) - \frac{r_1\omega_{11}u_{12}}{r_2}. \end{aligned}$$

По этим формулам искомый механизм может быть построен, если по условиям задачи предварительно определён угол φ_{22} . Для упрощения вычислений выведем другое уравнение, которое позволит найти размеры звеньев, не прибегая к определению угла φ_{22} . Исключаем u_{32} из выражения для δ_4 при помощи формулы (182):

$$\frac{\delta_4 r_2}{\omega_{11}} = \frac{(1 - u_{32})[(r_1 + r_3)(r_2 + r_3)u_{32} - (r_1 + r_3)u_{12}]}{r_3 - (r_2 + r_3)u_{32}}.$$

Воспользовавшись значением $\delta_2 = \omega_{11}(1 - u_{32})$, найдём:

$$\frac{\delta_4 r_2}{\delta_2} = \frac{(r_1 + r_3)(r_2 + r_3)u_{32} - (r_1 + r_3)u_{12}}{r_3 - (r_2 + r_3)u_{32}}.$$

Умножая на сопряжённое выражение, получим:

$$r_4^2 = \frac{r_2^2(r_1 + r_2 + r_3)^2 + 4r_1r_3(r_1 + r_2)(r_2 + r_3) \sin^2 \frac{\varphi_{12} - \varphi_{32}}{2}}{r_3^2 + 4r_3(r_2 + r_3) \sin^2 \frac{\varphi_{32}}{2}}. \quad (184)$$

Пример 16. Пусть требуется построить шарнирный четырёхзвенник, для которого заданы $\varphi_{12} = 30^\circ$, $\varphi_{32} = 45^\circ$, $r_1 = 5$ и $r_3 = 3$. Подставляя эти величины в формулу (183), находим:

$$r_2 = \frac{r_3^2 \sin^2 \frac{\varphi_{32}}{2} - r_1^2 \sin^2 \frac{\varphi_{12}}{2}}{r_1 \sin^2 \frac{\varphi_{12}}{2} - r_3 \sin^2 \frac{\varphi_{32}}{2}} = 3,7.$$

Подставляя значения r_1 , r_2 , r_3 , φ_{12} , φ_{32} в формулу (184), найдём $r_4 = 8,7$. Искомый механизм изображён на фиг. 483. В нём первое мёртвое положение будет при расположении звеньев 1 и 2 на одной прямой, а второе — при расположении на одной прямой звеньев 2 и 3.

Пример 17. Пусть требуется построить шарнирный четырёхзвенник по следующему данным: $r_2 = 2r_1$, $\varphi_{12} = 240^\circ$, $\varphi_{32} = 60^\circ$. Полагаем $\omega_{11} = 2$ и получаем $\omega_{21} = -1$.

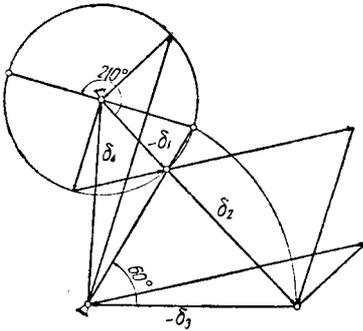
Подставляем приведённые величины в формулы для δ_j :

$$\delta_1 = u_{32} - 1, \quad \delta_2 = 2(1 - u_{32}), \\ \delta_3 = u_{12} + 3, \quad \delta_4 = 3u_{32} + u_{12}.$$

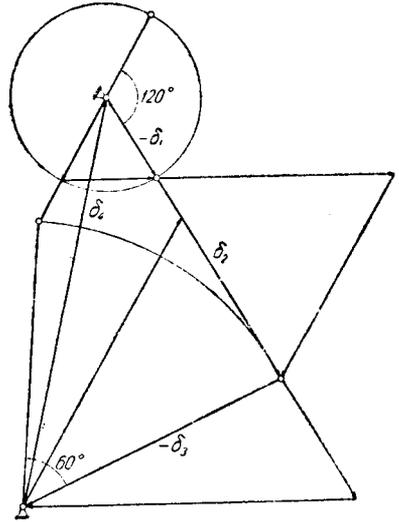
Строим векторы δ_j и образуем из них замкнутый контур, представляющий искомый механизм в начальном положении (фиг. 484). Следует отметить, что не всякое решение задачи будет возможным. Пусть, например, $r_2 = 2,5r_1$, $\varphi_{12} = 120^\circ$, $\varphi_{32} = 60^\circ$. Полагаем, $\omega_{11} = 2,5$ и получаем $\omega_{21} = -1$. При этом

$$\delta_1 = u_{32} - 1, \quad \delta_2 = 2,5(1 - u_{32}), \\ \delta_3 = 1,5u_{12} + 3,5, \quad \delta_4 = 3,5u_{32} + 1,5u_{12}.$$

Найденный механизм изображён на фиг. 485. Коромысло его не может



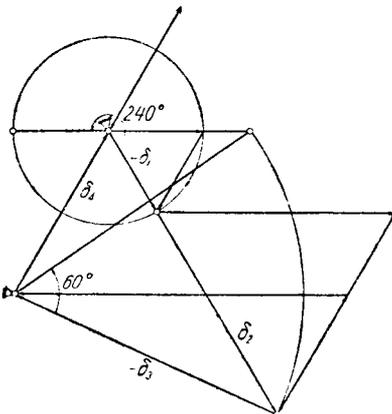
Фиг. 484.



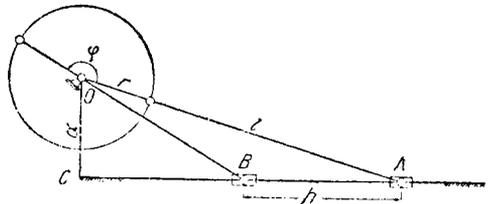
Фиг. 485.

перейти во второе мёртвое положение, и задача становится невозможной. При тех же заданных условиях получится возможное решение, если угол φ_{12} заменить на $\varphi'_{12} = 2\psi - \varphi_{12}$.

Построим четырёхзвенник при $\varphi'_{12} = 360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$, $\varphi_{32} = 60^\circ$, $r_2 = 2,5r_1$. Найденный механизм изображён на фиг. 486. В нём требуемые условием предыдущей задачи соотношения ($\varphi_{12} = 120^\circ$, $\varphi_{32} = 60^\circ$) осуществляются при вращении кривошипа коромысла в противоположные стороны.



Фиг. 486.



Фиг. 487.

Для деаксиального кривошипно-шатунного механизма решаем задачу, исходя из элементарных соображений. Рассмотрим (фиг. 487) два мёртвых

положения механизма. Из треугольников OAB , OAC , OBC имеем:

$$\begin{aligned} h^2 &= (l+r)^2 + (l-r)^2 + 2(l^2 - r^2) \cos \varphi, \\ b^2 + (h+BC)^2 &= (l+r)^2, \\ b^2 + (BC)^2 &= (l-r)^2, \end{aligned}$$

где $h=BA$ — ход ползуна, $b=OC$ — дезаксиал, l — длина шатуна, r — длина кривошипа, φ — угол поворота кривошипа между мёртвыми положениями механизма. Написанные уравнения после исключения BC приводятся к системе:

$$\left. \begin{aligned} h^2 &= 4l^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} + 4r^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \\ 4h^2 b^2 + (4rl - h^2)^2 &= 4h^2 (l-r)^2. \end{aligned} \right\} \quad (185)$$

Угол φ хотя и является заданным, но выбор его ограничен добавочными условиями. Так как обычно $BC > 0$ и $l > r$, то из написанных выше условий легко получить:

$$\cos \varphi < \frac{r-l}{r+l}.$$

Это неравенство удовлетворяется только при $\varphi > \frac{\pi}{2}$, если $l > r$. Кроме того, очевидно, что $\varphi < \pi$ и, следовательно, выбор угла ограничен пределами $\pi > \varphi > \frac{\pi}{2}$.

Уравнения (185) дают зависимость между тремя величинами b , l , r , если считать, что h и φ заданы по условию задачи. Отсюда следует, что одну из этих величин можно выбрать произвольно. Пусть дополнительно заданы радиус кривошипа r . Тогда

$$\begin{aligned} l &= \frac{1}{2 \cos \frac{\varphi}{2}} \sqrt{h^2 - 4r^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}, \\ b &= \frac{1}{2h} \sqrt{4h^2 (l-r)^2 - (4rl - h^2)^2}. \end{aligned} \quad (186)$$

Пусть дополнительно задана длина шатуна l . Тогда

$$r = \frac{1}{2 \sin \frac{\varphi}{2}} \sqrt{h^2 - 4l^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}},$$

а дезаксиал b определяется по формуле (186). Пусть дополнительно задан дезаксиал b , тогда

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{2} \sqrt{h^2 \pm 2bh \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}}, \\ l &= \frac{1}{2} \sqrt{h^2 \mp 2bh \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}. \end{aligned}$$

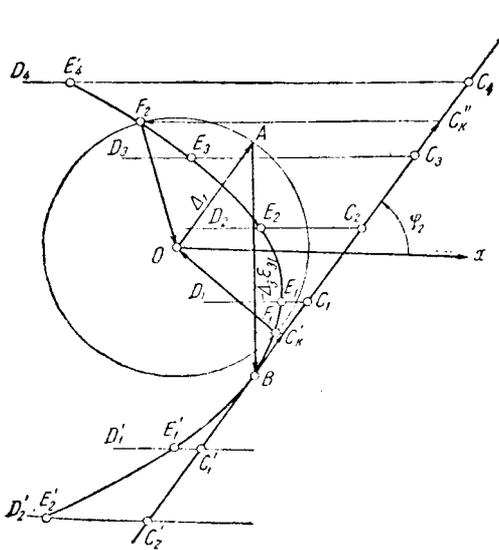
§ 88. Синтез четырёхзвенных механизмов по двум положениям звеньев и скоростям и ускорениям звеньев в одном из этих положений.

Пусть φ_{12} и φ_{32} суть заданные углы, определяющие по два положения кривошипа и коромысла шарнирного четырёхзвенника, ω_{11} и ω_{31} — угловые скорости кривошипа и коромысла в начальном положении механизма, ε_{11} и ε_{31} — угловые ускорения тех же звеньев в начальном положении механизма и φ_{22} , ω_{22} , ε_{22} — соответствующие величины для шатуна. Составим матрицу механизма из двух строк (157), первых строк (158) и (159) и строки (160):

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} & 1 \\ \omega_{11} & \omega_{21} & \omega_{31} & 0 \\ \varepsilon_{11} + i\omega_{11}^2 & \varepsilon_{21} + i\omega_{21}^2 & \varepsilon_{31} + i\omega_{31}^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

$C_1E_1, C_2E_2, C_3E_3, \dots$, на которых откладываем $C_1D_1 = \omega_{21}' \text{ mod } \Delta_3, C_2D_2 = \omega_{21}'' \text{ mod } \Delta_3, C_3D_3 = \omega_{21}''' \text{ mod } \Delta_3, \dots$

Геометрическим местом точек D_1, D_2, D_3, \dots будет кривая, пересечение которой с прямой OD в точках F_1 и F_2 определяет замкнутые контуры $OBC_k'F_1O$ и $OBC_k'F_2O$, дающие графическое представление уравнения (187):



Фиг. 489.

по следующей схеме. Откладываем $OA + AB = \Delta_1 - \sqrt[3]{\epsilon_{21}}$ (фиг. 489), из точки B проводим прямую BC под углом $\varphi_2 = \arg \Delta_2$ к оси x , а из центра O описываем окружность радиусом $\text{mod } \Delta_1$. Задаёмся рядом значений ω_{21} и откладываем на BC отрезки:

$$BC_1 = \omega_{21}' \text{ mod } \Delta_2, \quad BC_2 = \omega_{21}'' \text{ mod } \Delta_2, \quad BC_3 = \omega_{21}''' \text{ mod } \Delta_2 \text{ и т. д.}$$

Через точки C_1, C_2, C_3, \dots проводим параллельные прямые $C_1D_1, C_2D_2, C_3D_3, \dots$ под углом $\arg \Delta_3 + \frac{\pi}{2}$ к оси x и откладываем на них отрезки:

$$C_1E_1 = \omega_{21}' \text{ mod } \Delta_3, \quad C_2E_2 = \omega_{21}'' \text{ mod } \Delta_3, \quad C_3E_3 = \omega_{21}''' \text{ mod } \Delta_3, \dots$$

Точки E_1, E_2, E_3, \dots образуют кривую, пересечение которой с окружностью радиуса $\text{mod } \Delta_1$ в двух (или четырёх) точках F_1 и F_2 определяет замкнутые контуры $OBC_k'FO$ и $OBC_k'F_2O$, дающие графическое представление уравнения (187). Искомые величины определяются по формулам:

$$\omega_{21}' = \pm \frac{BC_k'}{\text{mod } \Delta_2}, \quad \omega_{21}'' = \pm \frac{BC_k''}{\text{mod } \Delta_2}, \quad \varphi_{22}' = (Ox, OF_1), \quad \varphi_{22}'' = (Ox, OF_2).$$

§ 89. Синтез четырёхзвенных механизмов по заданному предельному значению углового ускорения рабочего звена.

Пусть требуется построить шарнирный четырёхзвенник, для которого угловое ускорение коромысла в течение одной из половин его хода не должно превосходить или быть меньше некоторой наперёд заданной величины. По условию задачи первая производная ϵ_{31} углового ускорения ϵ_{31} коромысла должна равняться нулю. Полагая кривошип механизма вращающимся с по-

стоянной угловой скоростью $\omega_{11} = 1$, составим матрицу механизма из двух строк (157), первой строки (159) и строк (160) и (161):

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega_{21} & \omega_{31} & 0 \\ i & \varepsilon_{21} + i\omega_{21}^2 & \varepsilon_{31} + i\omega_{31}^2 & 0 \\ -1 & \varepsilon'_{21} - \omega_{21}^3 + 3i\varepsilon_{21}\omega_{21} & -\omega_{31}^3 + 3\varepsilon_{31}\omega_{31} & 0 \end{vmatrix},$$

где ω_{31} есть заданная угловая скорость коромысла, ω_{21} — угловая скорость шатуна, ε_{21} — угловое ускорение шатуна, ε'_{21} — производная от ε_{21} . Выделяем из матрицы M уравнение совместности:

$$D_1 = \begin{vmatrix} \omega_{21} & \omega_{31} & 1 \\ \varepsilon_{21} + i\omega_{21}^2 & \varepsilon_{31} + i\omega_{31}^2 & i \\ \varepsilon'_{21} - \omega_{21}^3 + 3i\varepsilon_{21}\omega_{21} & -\omega_{31}^3 + 3\varepsilon_{31}\omega_{31} & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Разлагая определитель D_1 по элементам первого столбца, приравняв нулю действительные и мнимые части и решая уравнения относительно ε_{21} и ε'_{21} , получим:

$$\varepsilon_{21} = \frac{\varepsilon_{31}\omega_{31}\omega_{31}(\omega_{21}-1)(\omega_{21}-1)(1-2\omega_{31})}{\omega_{31}^2(\omega_{31}-1)^2(\omega_{31}-3\omega_{21}+1) - 2\varepsilon_{31}^2(\omega_{21}-\omega_{31})}, \quad (189)$$

$$\varepsilon'_{21} = \frac{\omega_{31}(\omega_{21}-1)(\omega_{21}-\omega_{31})[\omega_{31}^2(\omega_{21}-1)^2(\omega_{21}-3\omega_{21}+1) - 3\varepsilon_{31}(\omega_{21}-3\omega_{31}+1)]}{\omega_{31}^2(\omega_{31}-1)^2(\omega_{31}-3\omega_{21}+1) - 2\varepsilon_{31}^2(\omega_{21}-\omega_{31})}. \quad (190)$$

Искомый механизм строится по своему определителю:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega_{21} & \omega_{31} & 0 \\ i & \varepsilon_{21} + i\omega_{21}^2 & \varepsilon_{31} + i\omega_{31}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Разлагая D по элементам первой строки, имеем

$$\delta_1 - \delta_2 + \delta_3 - \delta_4 = 0,$$

где

$$\delta_1 = \omega_{21}\varepsilon_{31} - \omega_{31}\varepsilon_{21} + i\omega_{21}\omega_{31}(\omega_{31} - \omega_{21}),$$

$$\delta_2 = \varepsilon_{31} + i\omega_{31}(\omega_{31} - 1),$$

$$\delta_3 = \varepsilon_{21} + i\omega_{21}(\omega_{21} - 1),$$

$$\delta_4 = \varepsilon_{31}(\omega_{21} - 1) + \varepsilon_{21}(1 - \omega_{31}) + i[\omega_{31}^2(\omega_{21} - 1) + \omega_{21}^2(1 - \omega_{31}) + \omega_{31} - \omega_{21}].$$

Задаёмся значениями ω_{31} , ε_{31} , ω_{21} и вычисляем ε_{21} по формуле (189), чем определяем все величины, входящие в формулы, служащие для построения искомого механизма. Остаётся выяснить, какого рода экстремум (максимум или минимум) должен быть в рассматриваемом положении механизма. Для вывода соответствующей формулы воспользуемся частным значением уравнения вторых производных ускорений (151):

$$\sum_{j=1}^3 [\varepsilon''_{j1} - 6\omega_{j1}^2\varepsilon_{j1} + i(4\varepsilon'_{j1}\omega_{j1} + 3\varepsilon_{j1}^2 - \omega_{j1}^4) r_j e^{i\alpha_{j1}}] = 0.$$

Заменяя $r_j e^{i\alpha_{j1}} = z_{j1}$ по формулам (153) и подставляя частные значения ε''_{j1} , ε'_{j1} , ε_{j1} ($j = 1, 3$) получим после сокращения на δ_1 :

$$i\delta_1 + [\varepsilon''_{21} - 6\omega_{21}^2\varepsilon_{21} + i(4\varepsilon'_{21}\omega_{21} + 3\varepsilon_{21}^2 - \omega_{21}^4)]\delta_2 - [\varepsilon''_{31} - 6\omega_{31}^2\varepsilon_{31} + i(3\varepsilon_{31}^2 - \omega_{31}^4)]\delta_3 = 0.$$

Подставляя приведённые выше значения δ_j и приравнявая нулю действительную и мнимую части уравнения, получаем систему линейных уравнений относительно ϵ_{21}'' и ϵ_{31}'' , из которых находим:

$$\epsilon_{31}'' = 6\epsilon_{31}\omega_{31}^2 + \frac{A}{\epsilon_{21}\omega_{31}(\omega_{31}^2 - 1) - \epsilon_{31}\omega_{21}(\omega_{21} - 1)},$$

где

$$A = (3\epsilon_{31}^2 - \omega_{31}^4) [\epsilon_{21}\epsilon_{31} + \omega_{21}\omega_{31}(\omega_{21} - 1)(\omega_{31} - 1)] - \\ - (4\epsilon_{21}'\omega_{21} + 3\epsilon_{21}^2 - \omega_{21}^4) [\epsilon_{31}^2 + \omega_{31}^2(\omega_{31} - 1)^2] + \\ + \omega_{21}\omega_{31}^2(\omega_{21} - \omega_{31})(\omega_{31} - 1) + \epsilon_{31}(\omega_{21}\epsilon_{21} - \omega_{21}\epsilon_{31}).$$

Пусть далее требуется построить дезакспальный кривошипно-шатунный механизм, для которого линейное ускорение ползушки a в течение одной половины её хода не должно превосходить (или быть менее) некоторой наперед заданной величины, определяемой рабочим процессом, осуществляемым механизмом. Когда ускорение ползушки a достигает своего предельного значения a_{41} , то первая производная $a'_{41} = 0$. Учитывая это и полагая, что кривошип механизма вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_{21} = 1$, составим матрицу механизма из двух строк (157), первой строки (163) и строк (164) и (165):

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \omega_{31} & -i\nu_{41} \\ 0 & i & \epsilon_{31} + i\omega_{31}^2 & -ia_{41} \\ 0 & -1 & \epsilon'_{31} - \omega_{31}^3 + 3\omega_{31}\epsilon_{31} & 0 \end{vmatrix},$$

где ν_{41} есть скорость ползушки, ω_{31} — угловая скорость шатуна, ϵ_{31} — угловое ускорение шатуна, ϵ'_{31} — производная от ϵ_{31} . Выделяем из матрицы M уравнение совместности:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & \omega_{31} & \nu_{41} \\ i & \epsilon_{31} + i\omega_{31}^2 & a_{41} \\ 1 & \epsilon'_{31} - \omega_{31}^3 + 3i\omega_{31}\epsilon_{31} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Разлагая определитель D_1 по элементам третьей строки и приравнявая нулю действительную и мнимую части, получаем систему:

$$\begin{cases} \nu_{41}\epsilon'_{31} - 3\omega_{31}a_{41}\epsilon_{31} = \omega_{31}^2\nu_{41}(\omega_{31} - 1), \\ a_{41}\epsilon'_{31} + \nu_{41}(3\omega_{31} - 1)\epsilon_{31} = \omega_{31}a_{41}(\omega_{31}^2 - 1), \end{cases} \quad (191)$$

откуда

$$\epsilon_{31} = \frac{\omega_{31}\nu_{41}a_{41}(\omega_{31} - 1)}{\nu_{41}^2(3\omega_{31} - 1) + 3\omega_{31}a_{41}^2}, \\ \epsilon'_{31} = \frac{\omega_{31}^2\nu_{41}^2(\omega_{31} - 1)(3\omega_{31} - 1) + 3\omega_{31}^2a_{41}(\omega_{31}^2 - 1)}{\nu_{41}^2(3\omega_{31} - 1) + 3\omega_{31}a_{41}^2}. \quad (192)$$

Искомый механизм строится по своему определителю, выделенному из матрицы M :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \omega_{31} & -i\nu_{41} \\ 0 & i & \epsilon_{31} + i\omega_{31}^2 & -ia_{41} \end{vmatrix} = 0.$$

Разлагая D по элементам первой строки, имеем:

$$\delta_1 - \delta_2 + \delta_3 - \delta_4 = 0,$$

где

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \varepsilon_{31} + v_{41} (1 - \omega_{31}^2) + i (\omega_{31}^2 - \omega_{31} + v_{41} \varepsilon_{31} - a_{41} \omega_{31} + a_{41}), \\ \delta_2 &= -v_{41} \omega_{31}^2 + i (v_{41} \varepsilon_{31} - a_{41} \omega_{31}), \\ \delta_3 &= -v_{41} - i a_{41}, \\ \delta_4 &= \varepsilon_{31} + i \omega_{31} (\omega_{31} - 1). \end{aligned}$$

Векторы δ_j определяют проектируемый механизм в начальном его положении. Дезаксиал механизма определяется по формуле:

$$b = \frac{(a_{41} \omega_{31} - a_{41} - v_{41} \varepsilon_{31}) \varepsilon_{31} - v_{41} \omega_{31} (\omega_{31} - 1) (\omega_{31}^2 - 1)}{\sqrt{\varepsilon_{31}^2 + \omega_{31}^2 (\omega_{31} - 1)^2}}. \quad (193)$$

Для построения механизма задаёмся значениями ω_{31} , v_{41} , a_{41} и вычисляем ε_{31} по формуле (192), чем определяем все величины, входящие в формулы для δ_j .

Остаётся выяснить, какого рода экстремум будет в рассматриваемом положении механизма. Для вывода соответствующей формулы воспользуемся частным значением уравнения вторых производных ускорений:

$$\sum_{j=2,3} [\varepsilon_{j1}'' - 6\omega_{j1}^2 \varepsilon_{j1} + i (4\varepsilon_{j1}' \omega_{j1} + 3\varepsilon_{j1}^2 - \omega_{j1}^4)] r_j e^{i\alpha_{j1}} = i a_{41}''.$$

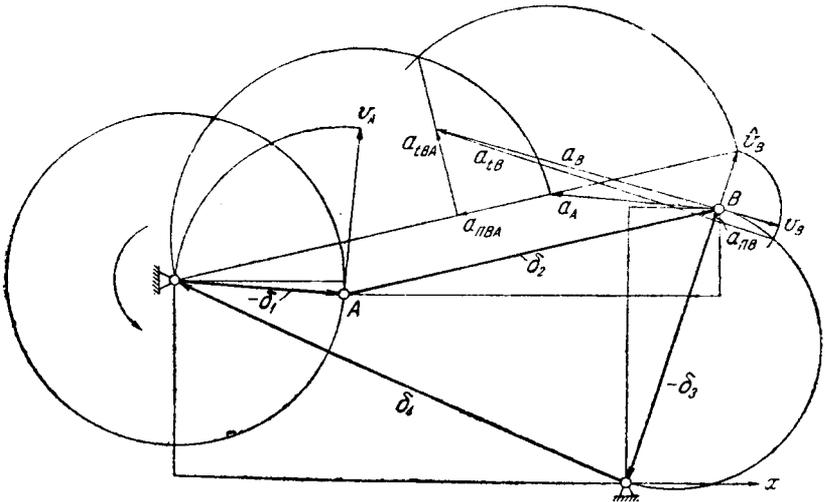
Заменяя $r_j e^{i\alpha_{j1}} = z_{j1}$ по формулам (153) и подставляя значения $\varepsilon_{21}'' = 0$, $\varepsilon_{31}'' = 0$, $\varepsilon_{21} = 0$, $\omega_2 = 1$, получим:

$$i \delta_2 + [\varepsilon_{31}' - 6\omega_{31}^2 \varepsilon_{31} + i (4\varepsilon_{31}' \omega_{31} + 3\varepsilon_{31}^2 - \omega_{31}^4)] \delta_3 = -i a_{41}'' \delta_4.$$

Подставляя в уравнение приведённые выше значения δ_j и приравнявая действительные и мнимые части, получим систему линейных уравнений относительно a_{41}'' и ε_{31}'' , из которой находим:

$$a_{41}'' = \frac{(v_{41}^2 + a_{41}^2) [4\varepsilon_{31}' \omega_{31} + 3\varepsilon_{31}^2 - \omega_{31}^4] + a_{41}^2 \omega_{31} - a_{41} v_{41} \varepsilon_{31} + v_{41}^2 \omega_{31}^2}{\varepsilon_{31} v_{41} + a_{41} \omega_{31} (\omega_{31} - 1)}. \quad (194)$$

Пример 18. Построить четырёхзвенный шарнирный механизм, у которого заданы $\omega_{31} = 0,2$, $\varepsilon_{31} = 1$, $\omega_{21} = 0,5$. Подставляя заданные величины в



Фиг. 490.

(189), находим $\varepsilon_{21} = 0,244$. Находим по формуле (189) значение $\varepsilon_{21}' = 0,69$ и убеждаемся, что $\varepsilon_{31}'' < 0$. Следовательно, угловое ускорение коромысла ε_{31}

имеет в рассматриваемом положении механизма максимум. Подставляя заданные и найденные величины в формулы для δ_j , имеем:

$$\begin{aligned}\delta_4 &= 1,207 + 0,54i, \\ \delta_1 &= -0,451 + 0,03i, \\ \delta_2 &= 1,0 + 0,24i, \\ \delta_3 &= 0,244 + 0,75i.\end{aligned}$$

Найденный механизм изображён на фиг. 490.

§ 90. Синтез четырёхзвенных механизмов по пяти заданным положениям двух звеньев.

Пусть для построения шарнирного четырёхзвенника заданы пять положений кривошипа и коромысла углами φ_{1k} и φ_{3k} ($k=2, 3, 4, 5$). Обозначим соответствующие углы для шатуна через φ_{2k} ($k=2, 3, 4, 5$) и составим матрицу механизма из строк (157) и (158):

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} & 1 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & 1 \\ u_{14} & u_{24} & u_{34} & 1 \\ u_{15} & u_{25} & u_{35} & 1 \end{vmatrix}.$$

Выделяем из матрицы определитель механизма D , построение которого изучено в § 78, и уравнение совместности:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} & 1 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & 1 \\ u_{14} & u_{24} & u_{34} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} & 1 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & 1 \\ u_{15} & u_{25} & u_{35} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Принимаем за неизвестные углы $\varphi_{22}, \varphi_{23}, \varphi_{24}, \varphi_{25}$. Для построения искомого механизма по его определителю D достаточно вычислить значения углов φ_{22} и φ_{23} . Разлагаем определитель D_1 и D_2 по элементам вторых столбцов:

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= \Delta_1 - \Delta_2 u_{22} + \Delta_3 u_{23} - \Delta_4 u_{24} = 0, \\ D_2 &= \Delta_5 - \Delta_6 u_{22} + \Delta_7 u_{23} - \Delta_8 u_{25} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (195)$$

Уравнение $D_1 = 0$ совпадает с уравнением (166), для которого значения определителей Δ_j ($j=1, 2, 3, 4$) приведены в § 78. Остальные определители Δ_j ($j=5, 6, 7$), входящие в уравнения (195), имеют значения:

$$\begin{aligned}\Delta_5 &= u_{13}u_{35} - u_{15}u_{33} - u_{12}u_{35} + u_{15}u_{32} + u_{12}u_{33} - u_{13}u_{32}, \\ \Delta_6 &= u_{13}u_{35} - u_{15}u_{33} - u_{35} + u_{33} + u_{15} - u_{12}, \\ \Delta_7 &= u_{12}u_{35} - u_{15}u_{32} - u_{35} + u_{32} + u_{15} - u_{12}.\end{aligned}$$

Для проверки построений и вычислений справедливы соотношения:

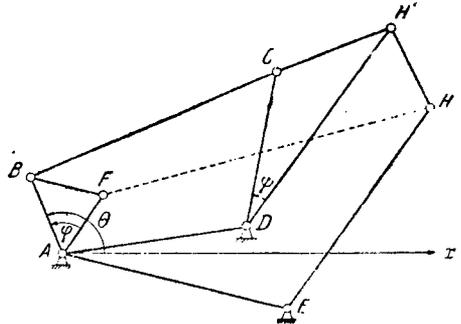
$$\left. \begin{aligned} \Delta_5 - \Delta_6 + \Delta_7 - \Delta_4 &\equiv 0, \\ \Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_4 &\equiv 0. \end{aligned} \right\} \quad (196)$$

Очевидно, решениями системы (195) будут:

- 1) $\varphi_{22} = \varphi_{23} = \varphi_{24} = \varphi_{25} = 0$,
- 2) $\varphi_{22} = \varphi_{32}$, $\varphi_{23} = \varphi_{33}$, $\varphi_{24} = \varphi_{34}$, $\varphi_{25} = \varphi_{35}$,
- 3) $\varphi_{22} = \varphi_{12}$, $\varphi_{23} = \varphi_{13}$, $\varphi_{24} = \varphi_{14}$, $\varphi_{25} = \varphi_{15}$.

Получение остальных решений аналитическим путём связано с значительными трудностями. Ниже рассматриваются различные способы решения уравнений (195), позволяющие в конечном итоге вычислить искомые значения φ_{22} , φ_{23} с достаточной для практики степенью точности.

Первое уравнение системы (195), как это показано в § 78, представляет условие замкнутости некоторого шарнирного четырёхзвенника со стойкой Δ_1 , кривошипом — Δ_2 , коромыслом Δ_3 и шатуном — Δ_4 . Второе уравнение системы (195) представляет условие замкнутости другого шарнирного четырёхзвенника со стойкой Δ_5 , кривошипом — Δ_6 , коромыслом Δ_7 и шатуном — Δ_4 . φ_{22} будет общим углом поворота кривошипов обоих механизмов, φ_{23} — общим углом поворота обоих коромысел, а φ_{24} и φ_{25} — углами поворотов шатунов. Размеры шатунов обоих механизмов одинаковы и равны $\text{mod } \Delta_4$. Кривошипы механизмов расположены под постоянным углом $\varphi = \arg \Delta_2 - \arg \Delta_6$ и коромысла — под постоянным углом $\psi = \arg \Delta_3 - \arg \Delta_7$, в положениях механизмов, удовлетворяющих системе (195).

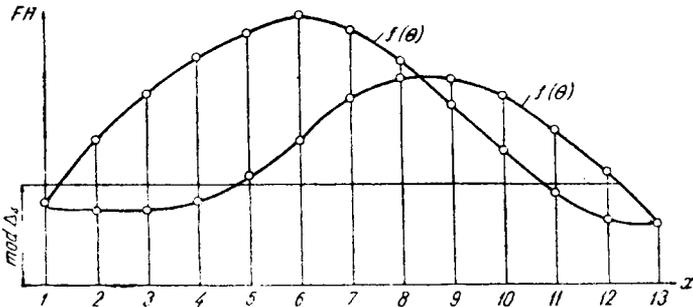


Фиг. 491.

Строим первый четырёхзвенник $ABCD$ в произвольном его положении (фиг. 491) и присоединяем к нему кривошип AF и коромысло EH вюрого четырёхзвенника так, чтобы:

$$(EH, DC) = \psi, \quad (AF, AB) = \varphi.$$

Вращаем кривошип AFB образовавшегося шестизвенника, определяем для ряда значений угла $\theta = (x, AB)$ размер FH и строим график функций $FH = f(\theta)$



Фиг. 492.

(фиг. 492). Проводим прямую $FH = \text{mod } \Delta_4$ и определяем абсциссы θ_k точек её пересечения с кривой $f(\theta)$. Устанавливаем кривошип шестизвенника под углами θ_k к оси x и для каждого из них определяем углы:

$$\begin{aligned} \varphi_{22} &= (x, AB) - \arg(-\Delta_2), \\ \varphi_{23} &= (x, CD) - \arg \Delta_3, \end{aligned}$$

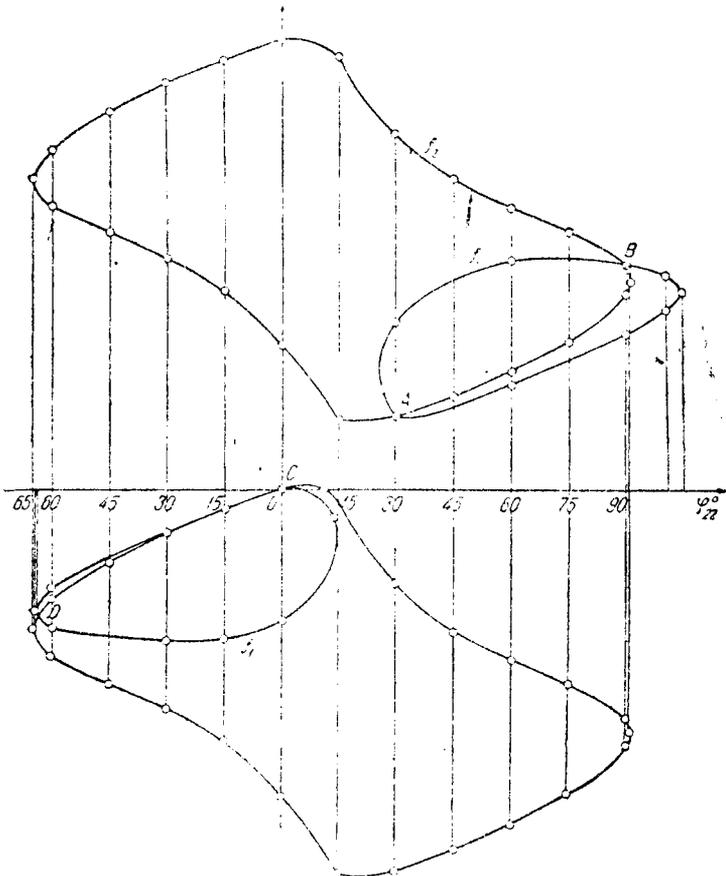
дающие первые приближения корней уравнения (195). Другой приём нахождения приближённых значений корней уравнений (195) заключается в сле-

дующем. Из решения системы (195) $\varphi_{22} = \varphi_{23} = \varphi_{24} = \varphi_{25} = 0$ вытекает справедливость уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_4 + \Delta_3 &= 0, \\ \Delta_5 - \Delta_6 - \Delta_4 + \Delta_7 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Этим уравнениям соответствуют некоторые начальные положения шарнирных четырёхзвенников, представляющих графическую интерпретацию уравнений (195). Построим эти четырёхзвенники в начальных положениях по уравнениям (196) и повернём их кривошпы на угол φ_{22} . При этом их коромысла повернутся, вообще говоря, на разные углы φ'_{23} и φ''_{23} .

Для решения системы (195) следует найти такое положение четырёхзвенников, при котором одинаковому повороту кривошпы (считая от их начальных положений) соответствуют равные углы поворотов коромысел $\varphi'_{23} = \varphi''_{23} = \varphi_{23}$. Для приближённого определения искомых положений четырёхзвенников



Фиг. 493.

строим кривые $\varphi'_{23} = f_1(\varphi_{22})$, $\varphi''_{23} = f_2(\varphi_{22})$ и находим точки их пересечения. Координаты этих точек дают корни φ_{22} и φ_{23} уравнений (195). В качестве примера кривые f_1 и f_2 , пересекающиеся в четырёх действительных точках A, B, C, D , изображены на фиг. 493. Выведем формулу для уточнения значений корней уравнений (195) при определении их на основании графических по-

строений. Воспользовавшись уравнениями, сопряжёнными (195):

$$\begin{aligned} \overline{\Delta_1} - \overline{\Delta_2}u_{22} + \overline{\Delta_3}u_{23} - \overline{\Delta_4}u_{24} &= 0, \\ \overline{\Delta_5} - \overline{\Delta_6}u_{22} + \overline{\Delta_7}u_{23} - \overline{\Delta_4}u_{25} &= 0, \end{aligned}$$

исключаем из системы (195) углы φ_{24} и φ_{25} . Обозначая $\Delta_0 = \Delta_1 - \Delta_2u_{22}$, $\Delta_8 = \Delta_5 - \Delta_6u_{22}$, имеем по формуле (168):

$$\left. \begin{aligned} \cos(\varphi_{23} + \varphi_3 - \varphi_0) &= \frac{r_4^2 - r_0^2 - r_3^2}{2r_4r_3}, \\ \cos(\varphi_{23} + \varphi_7 - \varphi_8) &= \frac{r_4^2 - r_8^2 - r_7^2}{2r_4r_8}, \end{aligned} \right\} \quad (197)$$

где $r_j = \text{mod } \Delta_j$, $\varphi_j = \text{arg } \Delta_j$ ($j = 0, 3, 7, 8$). Задаваясь рядом значений φ_{22} , близких к найденным первым приближениям, вычисляем по формулам (197) пары, вообще говоря, разных значений φ'_{23} и φ''_{23} . Останавливаемся на таком значении φ_{22} , при котором разность $|\varphi'_{23} - \varphi''_{23}|$ не будет превосходить наперёд заданной малой величины, определяющей точность вычислений, и полагаем, что искомое значение $\varphi_{23} = \frac{1}{2}(\varphi'_{23} + \varphi''_{23})$.

После определения φ_{22} и φ_{23} искомый механизм строится по своему определителю.

Пусть для построения деаксиального кривошипно-шатунного механизма заданы пять положений кривошипа углами φ_{2k} ($k = 2, 3, 4, 5$), а соответствующие им положения ползушки — расстояниями r_{4k} ($k = 2, 3, 4, 5$). Обозначим соответствующие углы поворотов шатуна через φ_{3k} ($k = 2, 3, 4, 5$) и составим матрицу механизма из строк (157) и (162):

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & u_{22} & u_{32} & r_{42} \\ 1 & u_{23} & u_{33} & r_{43} \\ 1 & u_{24} & u_{34} & r_{44} \\ 1 & u_{25} & u_{35} & r_{45} \end{pmatrix}.$$

Выделяем из матрицы определитель механизма D , построение которого изложено в § 79, и уравнения совместности:

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & u_{22} & u_{32} & r_{42} \\ 1 & u_{23} & u_{33} & r_{43} \\ 1 & u_{24} & u_{34} & r_{44} \end{vmatrix} = 0, \\ D_2 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & u_{22} & u_{32} & r_{42} \\ 1 & u_{23} & u_{33} & r_{43} \\ 1 & u_{25} & u_{35} & r_{45} \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Принимая за неизвестные φ_{3k} ($k = 2, 3, 4, 5$), разлагаем определители D_1 и D_2 по элементам третьих столбцов:

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= \Delta_1 - \Delta_2u_{32} + \Delta_3u_{33} - \Delta_4u_{34} = 0, \\ D_2 &= \Delta_5 - \Delta_6u_{32} + \Delta_7u_{33} - \Delta_4u_{35} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (198)$$

Уравнение $D_1 = 0$ совпадает с уравнением (166'), для которого значения определителей Δ_j ($j = 1, 2, 3, 4$) приведены в § 79. Остальные определители Δ_j ($j = 5, 6, 7$) имеют значения:

$$\begin{aligned}\Delta_5 &= (r_{43} - r_{45}) u_{22} + (r_{45} - r_{42}) u_{23} + (r_{42} - r_{43}) u_{25}, \\ \Delta_6 &= r_{43} - r_{45} + (r_{45} - 1) u_{23} + (1 - r_{43}) u_{25}, \\ \Delta_7 &= r_{42} - r_{45} + (r_{45} - 1) u_{22} + (1 - r_{42}) u_{25}.\end{aligned}$$

Решение уравнений системы (198) выполняется по схеме, уже установленной для сходных с ними уравнений (195).

§ 91. Синтез шарнирного четырёхзвенника по пяти заданным положениям точки шатуновой плоскости.

Пусть для четырёхзвенника заданы пять положений кривошипа и пять точек неподвижной плоскости, через которые должна пройти некоторая точка шатуна A . Построим механизм и определим положение точки A в плоскости шатуна. При решении задачи рассмотрим следующие частные случаи: 1) заданные точки неподвижной плоскости лежат на одной окружности, 2) заданные точки плоскости лежат на одной прямой, 3) заданные точки плоскости лежат на произвольной кривой. В первом случае искомый механизм строится при помощи двух вспомогательных четырёхзвенников, матрицы которых:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} & 1 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & 1 \\ u_{14} & u_{24} & u_{24} & 1 \\ u_{15} & u_{25} & u_{35} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} & 1 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & 1 \\ u_{14} & u_{24} & u_{34} & 1 \\ u_{15} & u_{25} & u_{35} & 1 \end{pmatrix}$$

отличаются лишь значениями углов φ_{3k} и φ_{3k} . Решение задачи ведётся по следующей схеме. Полагаем, что заданные точки неподвижной плоскости лежат на окружности радиуса, который принят равным единице, и их взаимные положения определяются комплексными координатами u_{1k} ($k = 2, 3, 4, 5$) ($\varphi_{11} = 0$). Задаёмся углами φ_{3k} , входящими в матрицу M , и строим первый вспомогательный четырёхзвенник по пяти заданным положениям кривошипа и коромысла методом, изложенным в § 90. Попутно из уравнений совместности (195) определяем значения углов φ_{2k} ($k = 2, 4, 5$). Теперь для второго вспомогательного четырёхзвенника известны углы φ_{1k} и φ_{2k} кривошипа и шатуна, и его построение выполняется по схеме, изложенной в § 90, если за неизвестные принять φ_{3k} ($k = 2, 3, 4, 5$). Построенные вспомогательные четырёхзвенники соединяются, как указано в § 83, и из них образуется искомый механизм. Для упрощения задачи первый вспомогательный четырёхзвенник можно выбрать произвольно, углы φ_{2k} измерить непосредственно по чертежу и после этого перейти к построению второго вспомогательного четырёхзвенника.

Во втором случае искомый механизм строится при помощи двух вспомогательных дезаксиальных кривошипно-шатунных механизмов, матрицы которых:

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & u_{22} & u_{32} & r_{42} \\ 1 & u_{23} & u_{33} & r_{43} \\ 1 & u_{24} & u_{34} & r_{44} \\ 1 & u_{25} & u_{35} & r_{45} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & u'_{22} & u_{32} & r_{42} \\ 1 & u'_{23} & u_{33} & r_{43} \\ 1 & u'_{24} & u_{34} & r_{44} \\ 1 & u'_{25} & u_{35} & r_{45} \end{pmatrix},$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & u'_{22} & u_{32} & r_{42} \\ 1 & u'_{23} & u_{33} & r_{43} \\ 1 & u'_{24} & u_{34} & r_{44} \\ 1 & u'_{25} & u_{35} & r_{45} \end{pmatrix},$$

отличаются лишь значениями углов φ_{2k} и φ'_{2k} . Построение искомого механизма выполняется по следующей схеме. Полагаем, что заданные точки неподвижной плоскости лежат на оси x и их положения определяются координатами r_{4k} ($k=2, 3, 4, 5$) ($r_{41}=1$). Задаёмся углами φ_{2k} ($k=2, 3, 4, 5$) и строим первый вспомогательный дезаксиальный кривошипно-шатунный механизм по пяти заданным положениям кривошипа и ползушки. Решение такой задачи изложено в § 90. Попутно при решении уравнений совместности (198) определяем углы φ_{3k} ($k=2, 3, 4, 5$). Теперь для построения второго вспомогательного дезаксиального кривошипно-шатунного механизма известны углы φ_{3k} шатуна и положения ползушки, и его построение выполняется по схеме, изложенной в § 90. Построенные вспомогательные механизмы соединяются, как указано в § 83, и из них образуется искомый механизм.

В третьем случае искомый механизм строится при помощи двух вспомогательных цепей, матрицы которых:

$$M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & u_{22} & u_{32} & r_{42}u_{42} \\ 1 & u_{23} & u_{33} & r_{43}u_{43} \\ 1 & u_{24} & u_{34} & r_{44}u_{44} \\ 1 & u_{25} & u_{35} & r_{45}u_{45} \end{pmatrix},$$

$$M_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & u'_{22} & u_{32} & r_{42}u_{42} \\ 1 & u'_{23} & u_{33} & r_{43}u_{43} \\ 1 & u'_{24} & u_{34} & r_{44}u_{44} \\ 1 & u'_{25} & u_{35} & r_{45}u_{45} \end{pmatrix},$$

отличаются лишь значениями углов φ_{2k} и φ'_{2k} . Построение искомого механизма выполняется по следующей схеме. Полагаем, что координаты заданных точек неподвижной плоскости $z_k = r_{4k}u_{4k}$ ($k=2, 3, 4, 5$) ($\varphi_{41}=0, r_{41}=1$). Задаёмся углами φ_{2k} ($k=2, 3, 4, 5$) и строим первую вспомогательную цепь по матрице M_5 .

Выделим из матрицы M_5 определитель цепи, построение которого ничем не отличается от построения соответствующего определителя в § 83, и уравнения совместности:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & u_{22} & u_{32} & r_{42}u_{42} \\ 1 & u_{23} & u_{33} & r_{43}u_{43} \\ 1 & u_{24} & u_{34} & r_{44}u_{44} \end{vmatrix} = 0,$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & u_{22} & u_{32} & r_{42}u_{42} \\ 1 & u_{23} & u_{33} & r_{43}u_{43} \\ 1 & u_{25} & u_{35} & r_{45}u_{45} \end{vmatrix} = 0.$$

Разлагаем определители D_1 и D_2 по элементам их третьих столбцов:

$$\begin{cases} D_1 = \Delta_1 - \Delta_2 u_{32} + \Delta_3 u_{33} - \Delta_4 u_{34} = 0, \\ D_2 = \Delta_5 - \Delta_6 u_{32} + \Delta_7 u_{33} - \Delta_8 u_{35} = 0, \end{cases} \quad (199)$$

где Δ_j ($j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$) — следующие определители третьего порядка (в развёрнутом виде):

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= r_{44}u_{44}(u_{23} - u_{22}) + r_{43}u_{43}(u_{22} - u_{24}) + r_{42}u_{42}(u_{24} - u_{23}), \\ \Delta_2 &= u_{24} - u_{23} + r_{44}u_{44}(u_{23} - 1) + r_{43}u_{43}(1 - u_{24}), \\ \Delta_3 &= u_{24} - u_{22} + r_{44}u_{44}(u_{22} - 1) + r_{42}u_{42}(1 - u_{24}), \\ \Delta_4 &= u_{23} - u_{22} + r_{43}u_{43}(u_{22} - 1) + r_{42}u_{42}(1 - u_{23}), \\ \Delta_5 &= r_{42}u_{42}(u_{25} - u_{23}) + r_{43}u_{43}(u_{23} - u_{22}) + r_{44}u_{44}(u_{22} - u_{25}), \\ \Delta_6 &= u_{25} - u_{23} + r_{45}u_{45}(u_{23} - 1) + r_{43}u_{43}(1 - u_{25}), \\ \Delta_7 &= u_{25} - u_{22} + r_{45}u_{45}(u_{22} - 1) + r_{42}u_{42}(1 - u_{25}). \end{aligned}$$

Уравнение совместности (199) совпадает по форме с уравнениями (195). При решении уравнений совместности определяются углы φ_{3k} , после чего исконая цепь строится по своему определителю D . Для второй вспомогательной цепи известны $r_{4k}u_{4k}$ и φ_{3k} ($k = 2, 3, 4, 5$). Выделяем из матрицы M определитель цепи D и уравнения совместности:

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & u'_{22} & u_{32} & r_{42}u_{42} \\ 1 & u'_{23} & u_{33} & r_{43}u_{43} \\ 1 & u'_{24} & u_{34} & r_{44}u_{44} \end{vmatrix} = 0,$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & u'_{22} & u_{32} & r_{42}u_{42} \\ 1 & u'_{23} & u_{33} & r_{43}u_{43} \\ 1 & u'_{25} & u_{35} & r_{45}u_{45} \end{vmatrix} = 0.$$

Разлагаем определители D_3 и D_4 по элементам их вторых столбцов:

$$\begin{cases} D_3 = \Delta'_1 - \Delta'_2 u'_{22} + \Delta'_3 u'_{23} - \Delta'_4 u'_{24} = 0, \\ D_4 = \Delta'_5 - \Delta'_6 u'_{22} - \Delta'_7 u'_{23} - \Delta'_8 u'_{25} = 0. \end{cases} \quad (200)$$

Уравнение $D_3 = 0$ совпадает с уравнением, для которого значения определителей Δ'_j ($j = 1, 2, 3, 4$) приведены в § 83, причём $\Delta'_j = \Delta'_j$. Остальные опре-

делители ($j = 5, 6, 7$) имеют следующие значения:

$$\begin{aligned}\Delta'_5 &= r_{42}u_{42}(u_{35} - u_{33}) + r_{43}u_{43}(u_{32} - u_{35}) + r_{45}u_{45}(u_{33} - u_{32}), \\ \Delta'_6 &= u_{35} - u_{33} + r_{43}u_{43}(1 - u_{35}) + r_{45}u_{45}(u_{33} - 1), \\ \Delta'_7 &= u_{35} - u_{32} + r_{42}u_{42}(1 - u_{35}) + r_{45}u_{45}(u_{32} - 1).\end{aligned}$$

Решение уравнений (200) изложено в § 90. Для упрощения задачи первую вспомогательную цепь можно выбрать произвольно, позаботившись лишь о том, чтобы её ползушка прошла через заданные точки неподвижной плоскости.

§ 92. Синтез четырёхзвенных механизмов по пяти заданным положениям шатунной плоскости.

Так же как и при решении задачи в § 84, зададим последовательные положения шатунной плоскости координатами z_{jk} ($k = 1, 2, 3, 4, 5$) некоторой её точки A и углами φ_k ($k = 1, 2, 3, 4, 5$) неизменно связанной с ней прямой AB . При расположении заданных точек A на одной окружности единичного радиуса строим шарнирный четырёхзвенник по матрице:

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} & 1 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & 1 \\ u_{14} & u_{24} & u_{34} & 1 \\ u_{15} & u_{25} & u_{35} & 1 \end{vmatrix},$$

считая, что $z_{jk} = u_{1j}$, $\varphi_k = \varphi_{2k}$ ($k = 2, 3, 4, 5$) и $z_{j1} = 1$.

Принимая за неизвестные углы поворота коромысла ($k = 2, 3, 4, 5$), строим искомый механизм по методу, изложенному в § 90, и соединяем с начальным положением шатунной плоскости по схеме, изображённой на фиг. 463. При расположении заданных точек A на одной прямой (оси x) строим дезаксиальный кривошипно-шатунный механизм по матрице:

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & u_{22} & u_{32} & r_{42} \\ 1 & u_{23} & u_{33} & r_{43} \\ 1 & u_{24} & u_{34} & r_{44} \\ 1 & u_{25} & u_{35} & r_{45} \end{vmatrix},$$

считая, что $z_{jk} = r_{4k}$, $\varphi_k = \varphi_{3k}$ ($k = 2, 3, 4, 5$) и $z_{j1} = 1$. Принимая за неизвестные углы поворота кривошипа φ_{2k} ($k = 2, 3, 4, 5$), строим искомый механизм по методу, изложенному в § 90, и соединяем с начальным положением шатунной плоскости по схеме, изображённой на фиг. 464. При расположении заданных точек A на произвольной кривой воспользуемся матрицей вспомогательной цепи:

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & u_{22} & u_{32} & r_{42}u_{42} \\ 1 & u_{23} & u_{33} & r_{43}u_{43} \\ 1 & u_{24} & u_{34} & r_{44}u_{44} \\ 1 & u_{25} & u_{35} & r_{45}u_{45} \end{vmatrix},$$

считая, что $z_{jk} = r_{4k}u_{4k}$, $\varphi_k = \varphi_{3k}$, $z_{j1} = 1$. Как было установлено в § 91, урав-

нения совместности, выделяемые из матрицы M , приводятся к системе (199) и решаются по методу, изложенному в § 90. Легко показать, что при исключении из системы (199) трёх неизвестных, например u_{23} , u_{24} , u_{25} , получится уравнение шестого порядка относительно оставшегося неизвестного u_{22} . Таким образом, φ_{22} может иметь не более шести различных действительных значений. Очевидными решениями системы будут:

$$\begin{aligned} \varphi_{22} &= \varphi_{23} = \varphi_{24} = \varphi_{25} = 0, \\ \varphi_{22} &= \varphi_{32}, \quad \varphi_{23} = \varphi_{33}, \quad \varphi_{24} = \varphi_{34}, \quad \varphi_{25} = \varphi_{35}. \end{aligned}$$

Если отбросить эти решения, как не пригодные для практического использования, то остаются только четыре возможных значения φ_{22} , определяющих не более четырёх различных вспомогательных цепей. Для построенных таким образом цепей будут одинаковыми углы поворотов шатунов и кулис и перемещение ползушек. Выбрав две из этих цепей, соединяем их по схеме, изображённой на фиг. 437, и связываем с начальным положением шатунной плоскости, как это показано на фиг. 467.

§ 93. Синтез четырёхзвенных механизмов по четырём заданным положениям двух звеньев и скоростям звеньев в одном из этих положений.

Пусть для построения шарнирного четырёхзвенника заданы: по четыре положения кривошипа и коромысла углами φ_{1k} и φ_{3k} ($k=2, 3, 4$) и угловые скорости кривошипа ω_{11} и коромысла ω_{31} в начальном положении механизма. Обозначим соответствующие величины для шатуна через φ_{2k} и ω_{21} и составим матрицу механизма из строк (157), трёх строк (158) и первой строки (159):

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} & 1 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & 1 \\ u_{14} & u_{24} & u_{34} & 1 \\ \omega_{11} & \omega_{21} & \omega_{31} & 0 \end{vmatrix}.$$

Выделяем из матрицы определитель механизма D , построение которого было изложено в § 78, и независимые уравнения совместности:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} & 1 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & 1 \\ u_{14} & u_{24} & u_{34} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} & 1 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & 1 \\ \omega_{11} & \omega_{21} & \omega_{31} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Принимаем за неизвестные φ_{22} , φ_{23} , φ_{24} , ω_{21} и разлагаем определители D_1 и D_2 по элементам вторых столбцов:

$$\begin{cases} D_1 = \Delta_1 - \Delta_2 u_{22} + \Delta_3 u_{23} - \Delta_4 u_{24} = 0, \\ D_2 = \Delta_5 - \Delta_6 u_{22} + \Delta_7 u_{23} - \Delta_8 \omega_{21} = 0. \end{cases} \quad (201)$$

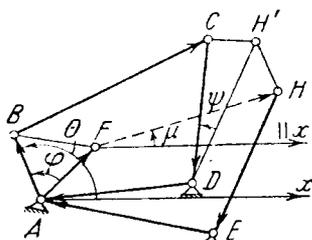
Уравнение $D_1 = 0$ совпадает с уравнением (166), для которого значения определителей Δ_j ($j=1, 2, 3, 4$) приведены в § 78. Уравнение $D_2 = 0$ совпадает с уравнением (174), для которого значения определителей Δ_j ($j=1, 2, 3$) приведены в § 85, причём индексы 1, 2, 3 следует заменить на 5, 6, 7. Очевидные решения уравнений (201):

- 1) $\varphi_{22} = \varphi_{23} = \varphi_{24} = 0, \omega_{21} = 0,$
- 2) $\varphi_{22} = \varphi_{32}, \varphi_{23} = \varphi_{33}, \varphi_{24} = \varphi_{34}, \omega_{21} = \omega_{31}.$
- 3) $\varphi_{22} = \varphi_{12}, \varphi_{23} = \varphi_{13}, \varphi_{24} = \varphi_{14}, \omega_{21} = \omega_{11}.$

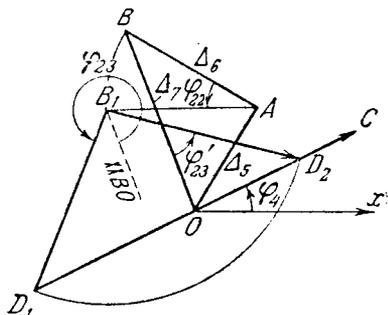
Для проверки вычислений и построений служат формулы:

$$\begin{aligned} \Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_4 &= 0, \\ -\Delta_5 - \Delta_6 + \Delta_7 &= 0. \end{aligned}$$

Графической интерпретацией уравнений (201) являются два четырёхзвенника, у которых кривошип — Δ_2 , — Δ_6 всегда расположены под постоянным углом $\varphi = \arg \Delta_2 - \arg \Delta_6$, а коромысла Δ_3 , Δ_7 — под постоянным углом $\psi = \arg \Delta_3 - \arg \Delta_7$. Построим первый вспомогательный четырёхзвенник $ABCD$ в произвольном положении по уравнению $D_1 = 0$ (фиг. 494) и присоединим к нему кривошип AF и коромысло HE второго вспомогательного четырёхзвенника так, чтобы между кривошипами был угол φ , а между коромыслами угол ψ . Вращаем кривошип образовавшегося шестизвенника и определяем для ряда значений угла $\theta = (x, AB)$ углы $(x, FH) = \arg FH$ и строим график функции



Фиг. 494.



Фиг. 495.

$\arg FH = f(\theta)$. Проводим прямые $\arg FH = \arg \Delta_4$, $\arg FH = \arg \Delta_4 + \pi$ и определяем абсциссы θ_k точек их пересечения с кривой $f(\theta)$. Устанавливаем кривошип AB под найденными углами θ_k к оси x и определяем величины:

$$\begin{aligned} \varphi_{22} &= (x, AB) - \arg(-\Delta_2); \\ \varphi_{23} &= (x, CD) - \arg \Delta_3; \quad \omega_{21} = \pm \frac{FH}{\text{mod } \Delta_4}, \end{aligned}$$

дающие первые приближения корней уравнений (201). Другой метод определения приближённых значения корней уравнений (201) заключается в следующем. Построим векторный контур, соответствующий уравнению $\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_4 + \Delta_3 = 0$. Если повернуть кривошип — Δ_2 образовавшегося четырёхзвенника на угол φ_{22} , то по уравнению $D_1 = 0$ коромысло повернется от своего начального положения на угол φ_{23} . Задавшись рядом значений φ_{22} , измерим соответствующие им значения φ_{23} и строим кривую $\varphi_{23} = f_1(\varphi_{22})$. Построим другой векторный контур $OABO$ по уравнению $\Delta_5 - \Delta_6 + \Delta_7 = 0$ (фиг. 495) и проведём через точку O направление OC под углом $\varphi_4 = \arg \Delta_4$ к оси x . Поворачиваем вектор AB на угол φ_{22} (положение AB_1) и из точки B_1 радиусом $\text{mod } \Delta_7$ засекаем прямую CO в точках D_1 и D_2 . Тогда по уравнению $D_2 = 0$ углы (BOB_1D_1) и (BOB_1D_2) представляют два значения φ_{23} , соответствующих рассматриваемому углу φ_{22} . Задавась рядом значений φ_{22} , находим соответствующие им пары значений φ_{23} и строим кривую $\varphi_{23} = f_2(\varphi_{22})$. Координаты точек пересечений кривых f_1 и f_2 дадут первые приближения для корней φ_{22} и φ_{23} уравнений (201).

Выведем формулы, позволяющие уточнить найденные приближённые значения углов φ_{22} и φ_{23} . Воспользовавшись сопряжёнными уравнениями, исключаем из системы (201) φ_{24} и ω_{21} . Обозначая $\Delta_0 = \Delta_1 - \Delta_2 u_{22}$, имеем по § 78:

$$\cos(\varphi_{23} + \varphi_3 - \varphi_0) = \frac{r_4^2 - r_0^2 - r_3^2}{2r_0 r_3}.$$

Обозначим $\Delta_5 - \Delta_6 u_{22} = \Delta_8$ и найдём по § 85:

$$\sin(\varphi_{23} + \varphi_7 - \varphi_4) = \frac{y_4 x_3 - x_4 y_3}{r_4 r_7}.$$

По формулам:

$$\cos(\varphi_{23} + \varphi_3 - \varphi_0) = \frac{r_4^2 - r_0^2 - r_3^2}{2r_0r_3},$$

$$\sin(\varphi_{23} + \varphi_7 - \varphi_4) = \frac{y_4x_8 - x_4y_8}{r_4r_7},$$

где $r_j = \text{mod } \Delta_j$, $\varphi_j = \arg \Delta_j$ ($j=0, 3, 4, 7, 8$), уточняются найденные графическим путём значения углов φ_{22} и φ_{23} , после чего искомым механизмом строится по своему определителю D .

§ 94. Синтез четырёхзвенных механизмов по трём заданным положениям двух звеньев и скоростям звеньев в двух из этих положений.

Пусть требуется построить шарнирный четырёхзвенник по трём положениям кривошипа и коромысла, заданным углами φ_{1k} и φ_{3k} ($k=2, 3$), и угловым скоростям [этих же звеньев ω_{1k} и ω_{3k} ($k=1, 2$). Обозначим соответствующие величины для шатуна через φ_{2k} и ω_{2k} , составим матрицу механизма из строк (157), двух первых строк (158) и строк (159):

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} & 1 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & 1 \\ \omega_{11} & \omega_{21} & \omega_{31} & 0 \\ \omega_{12}u_{12} & \omega_{22}u_{22} & \omega_{32}u_{32} & 0 \end{pmatrix}.$$

Выделяем из матрицы определитель механизма D , построение которого изложено в § 78, и независимые уравнения совместности:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} & 1 \\ \omega_{11} & \omega_{21} & \omega_{31} & 0 \\ \omega_{12}u_{12} & \omega_{22}u_{22} & \omega_{32}u_{32} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} & 1 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & 1 \\ \omega_{11} & \omega_{21} & \omega_{31} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Принимаем за неизвестные φ_{22} , φ_{23} , ω_{21} , ω_{22} и разлагаем определители D_1 и D_2 по элементам вторых столбцов:

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= \Delta_1 - \Delta_1 u_{22} + \Delta_2 \omega_{21} - \Delta_3 \omega_{22} u_{22} = 0, \\ D_2 &= \Delta_4 - \Delta_5 u_{22} + \Delta_3 u_{23} - \Delta_6 \omega_{21} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (202)$$

Уравнение $D_1=0$ совпадает с уравнением (177), для которого значения определителей Δ_j ($j=1, 2, 3$) приведены в § 86. Уравнение $D_2=0$ совпадает с уравнением (174), для которого значения определителей Δ_j ($j=1, 2, 4$) приведены в § 85, причём индексы 1, 2, 4, следует заменить на 4, 5, 6. Графическое решение уравнений совместности выполняется по следующей схеме. Воспользовавшись уравнением $D_1=0$ и задавая рядом значений φ_{22} , находим по § 86 соответствующие значения ω_{21} построением, изображённым на фиг. 479, и строим график функции $\omega_{21} = f_1(\varphi_{22})$.

Откладываем по уравнению $D_2=0$ $OA = \Delta_4$ (фиг. 496) и из точки A радиусом $\text{mod } \Delta_5$ описываем окружность. Проводим через точку A прямую под

углом $\pi + \varphi_5 = \arg(-\Delta_5)$ к оси x и находим точку B_0 её пересечения с окружностью. Делим окружность на равные части от начальной точки B_0 и получаем точки B_1, B_2, B_3, \dots . Проводим через точку O прямую под углом $\varphi_6 = \arg \Delta_6$ к оси x , засекаем её из точек B_0, B_1, B_2, \dots радиусом $\text{mod } \Delta_3$ и получаем точки $C_0, C'_0, C_1, C'_1, \dots$

Откладываем в прямоугольной системе координат по оси x углы φ_{22k} , соответствующие точкам B_0, B_1, B_2, \dots , а по оси y отрезки:

$$\omega_{210} = \frac{OC_0}{\text{mod } \Delta_6}, \quad \omega'_{210} = \frac{OC'_0}{\text{mod } \Delta_6}, \quad \omega_{211} = \frac{OC_1}{\text{mod } \Delta_6}, \quad \omega'_{211} = \frac{OC'_1}{\text{mod } \Delta_6}, \dots,$$

причём каждому значению φ_{22k} соответствуют два значения угловых скоростей ω_{21k} и ω'_{21k} . Полученная кривая даёт графическое представление функции $\omega_{21} = f_2(\varphi_{22})$. Если кривые, представляющие $f_1(\varphi_{22})$ и $f_2(\varphi_{22})$, наложить, то координаты точек их пересечения дадут приближённые значения φ_{22} и ω_{21} , которые затем уточняются по аналитическим формулам.

Обозначая $\Delta_0 = \Delta_1 + \Delta_2\omega_{21}$, $\Delta_7 = \Delta_4 - \Delta_6\omega_{21}$, приводим уравнения (202) к

$$\begin{aligned} \Delta_0 - \Delta_1 u_{22} - \Delta_3 \omega_{22} u_{22} &= 0, \\ \Delta_7 - \Delta_5 u_{22} + \Delta_3 u_{22} &= 0. \end{aligned}$$

Решение первого уравнения системы при неизвестных u_{22} и ω_{22} изложено в § 86. Решение второго уравнения системы при неизвестных u_{22} и u_{23} изложено в § 78. Воспользовавшись этими решениями, находим:

$$\left. \begin{aligned} \sin(\varphi_{22} + \varphi_3 - \varphi_0) &= \frac{x_1 y_1 - y_1 x_3}{r_0 r_3}, \\ \cos(\varphi_{22} + \varphi_5 - \varphi_7) &= \frac{r_5^2 + r_7^2 - r_3^2}{2r_5 r_7}. \end{aligned} \right\} \quad (203)$$

где $r_j = \text{mod } \Delta_j$, $\varphi_j = \arg \Delta_j$. Задаваясь рядом значений ω_{21} , близких к первым приближениям, находим по формулам (203) два, вообще говоря, различных значения φ'_{22} и φ''_{22} . Останавливаемся на тех значениях φ_{22} , для которых $|\varphi'_{22} - \varphi''_{22}| < \alpha$, где α — наперёд заданная малая величина, определяющая точность вычислений.

Пусть требуется построить шарнирный четырёхзвенник по трём заданным положениям кривошипа и коромысла, причём два положения коромысла — мёртвые. В мёртвых положениях угловые скорости коромысла равны $\omega_{31} = \omega_{32} = 0$. Выделяем из матрицы M уравнения совместности и полагаем в них $\omega_{31} = \omega_{32} = 0$.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} & 1 \\ \omega_{41} & \omega_{21} & 0 & 0 \\ \omega_{12} u_{12} & \omega_{22} u_{22} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} & 1 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & 1 \\ \omega_{11} & \omega_{21} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Решение уравнения $D_1 = 0$ изложено в § 87, причём, как оказалось, оно

удовлетворяется, если $\varphi_{22} = \varphi_{12} + \pi$. Заменяя φ_{22} в уравнении $D_2 = 0$ на $\varphi_{12} + \pi$, убеждаемся, что оно зависит только от двух неизвестных φ_{23} и ω_{21} и, следовательно, может быть решено обычными приёмами, причём для построения механизма достаточно определить ω_{21} . Разлагаем определитель D_2 по элементам второго столбца:

$$D_2 = \Delta_1 + \Delta_2 u_{12} + \Delta_3 u_{23} - \Delta_4 \omega_{21} = 0,$$

где Δ_j ($j = 1, 2, 3, 4$) — определители третьего порядка (в развёрнутом виде):

$$\Delta_1 = \omega_{11}(u_{32} - u_{33}),$$

$$\Delta_2 = \omega_{11}(1 - u_{33}),$$

$$\Delta_3 = \omega_{11}(1 - u_{32}),$$

$$\Delta_4 = u_{13} - u_{12} - u_{32}(u_{13} - 1) + u_{33}(u_{12} - 1).$$

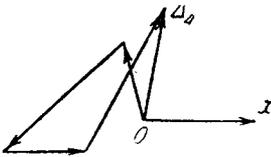
Обозначая $\Delta_0 = \Delta_1 + \Delta_2 u_{12}$, получим уравнение, совпадающее по форме с уравнением (174), решение которого изложено в § 85. После определения определителя D изложено в § 86.

Пример 19. Пусть заданы следующие значения углов и угловых скоростей:

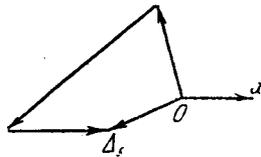
φ_{12}	φ_{13}	φ_{32}	φ_{33}	ω_{11}	ω_{12}	ω_{31}	ω_{32}
180°	100°	60°	40°	1	1	0,5	0,2

Подставляем заданные величины в формулы для Δ_j ($j = 1, 2, 3, 4, 5, 7$) и строим Δ_1, Δ_2 (фиг. 497), Δ_3, Δ_4 (фиг. 498), Δ_5 (фиг. 499), Δ_6 (фиг. 500).

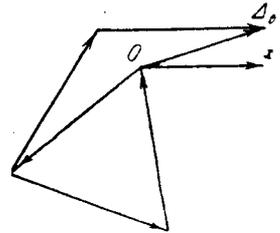
Строим далее по фиг. 480 графическое изображение уравнения $D_1 = 0$ системы (202) (фиг. 501) и по фиг. 496 — графическое изображение уравнения



Фиг. 497.



Фиг. 499.

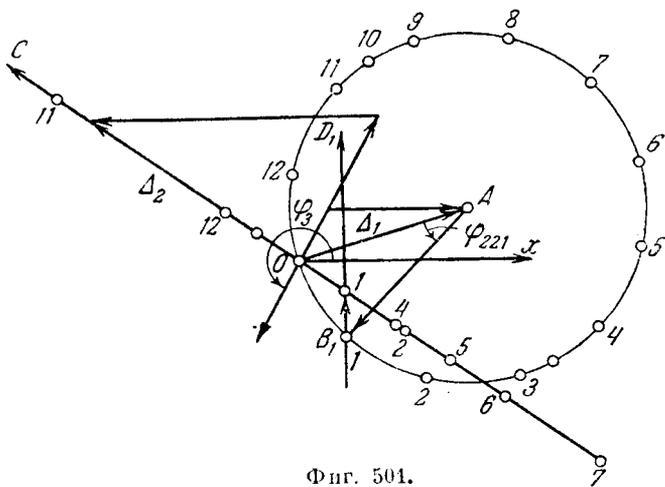


Фиг. 500.

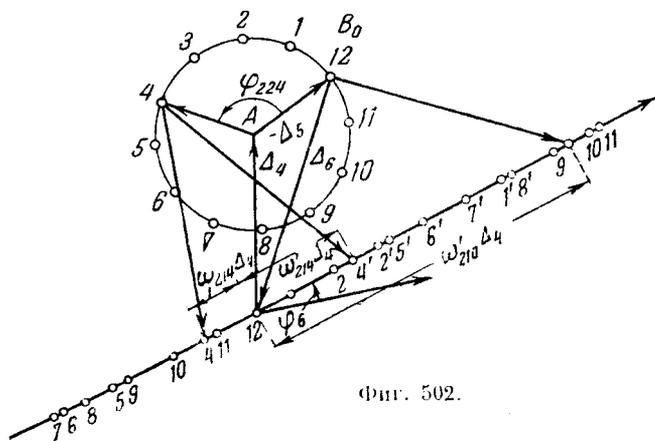
$D_2 = 0$ системы (202) (фиг. 502) и получаем кривые $\omega_{21} = f_1(\varphi_{22})$ (фиг. 503) и $\omega_{21} = f_2(\varphi_{22})$ (фиг. 504). Палагаем кривые f_1 и f_2 (фиг. 504) и находим четыре точки их пересечения A, B, C, D . Воспользовавшись координатами точки A , находим приближённые значения корней уравнений системы (202) $\omega_{21} = 0,31$, $\varphi_{22} = 104^\circ$, после чего искомый механизм строится по § 85. Составляем таблицу величин, входящих в определитель механизма:

φ_{12}	φ_{22}	φ_{32}	ω_{11}	ω_{21}	ω_{31}
180°	104°	60°	1	0,31	0,5

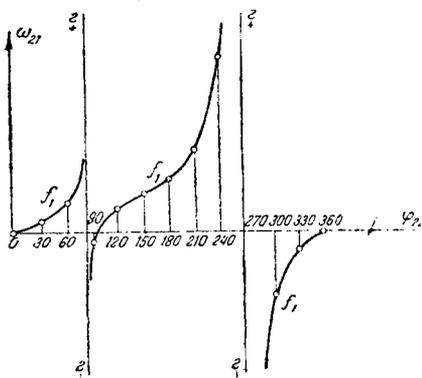
и строим определители δ_4 (фиг. 505), δ_1 (фиг. 506), δ_3 (фиг. 507). Значение определителя δ_2 равно $\delta_2 = \Delta_3$. Образум из векторов δ_j ($j = 1, 2, 3$) замкнутый контур, представляющий искомый механизм в начальном его положении (фиг. 508).



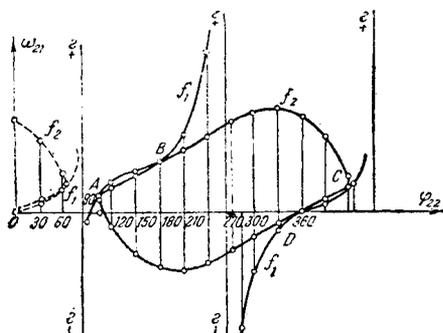
Фиг. 501.



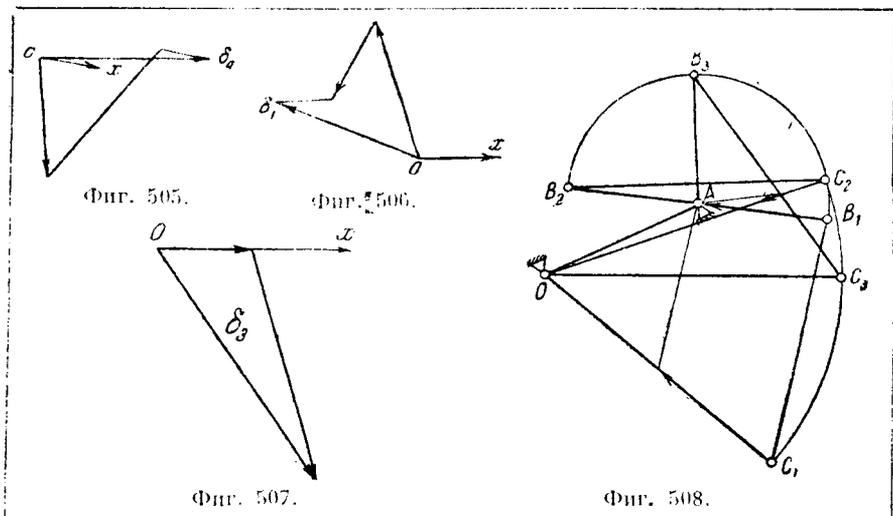
Фиг. 502.



Фиг. 503.



Фиг. 504.



§ 95. Синтез четырёхзвенных механизмов по двум заданным положениям звеньев, скоростям звеньев в этих положениях и ускорениям звеньев в одном положении.

Пусть требуется построить шарнирный четырёхзвенник по двум положениям кривошипа и коромысла, заданным углами φ_{12} и φ_{32} , по угловым скоростям ω_{1k} кривошипа и коромысла ω_{3k} ($k=1, 2$) в этих же положениях и угловым ускорениям ε_{11} кривошипа и ε_{31} коромысла в начальном положении механизма. Обозначим соответствующие величины для шатуна через φ_{32} , ω_{2k} ($k=1, 2$) и ε_{21} , составим матрицу механизма из строк (157), первой строки (158) и строк (159) и (160):

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} & 1 \\ \omega_{11} & \omega_{21} & \omega_{31} & 0 \\ \omega_{12}u_{12} & \omega_{22}u_{22} & \omega_{32}u_{32} & 0 \\ \varepsilon_{11} + i\omega_{11}^2 & \varepsilon_{21} + i\omega_{21}^2 & \varepsilon_{31} + i\omega_{31}^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Выделяем из матрицы M определитель механизма D , построение которого изложено в § 86, и независимые уравнения совместности:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} & 1 \\ \omega_{11} & \omega_{21} & \omega_{31} & 0 \\ \omega_{12}u_{12} & \omega_{22}u_{22} & \omega_{32}u_{32} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

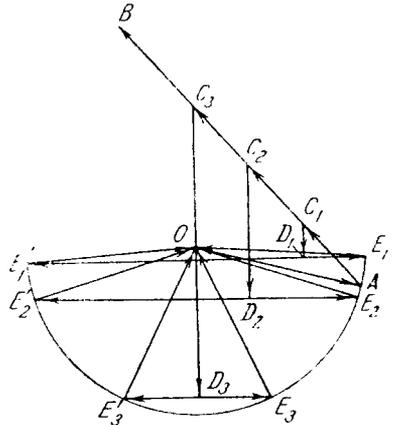
$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} & 1 \\ \omega_{11} & \omega_{21} & \omega_{31} & 0 \\ \varepsilon_{11} + i\omega_{11}^2 & \varepsilon_{21} + i\omega_{21}^2 & \varepsilon_{31} + i\omega_{31}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Принимаем за неизвестные φ_{22} , ω_{21} , ω_{22} , ε_{21} и разлагаем определители D_1 и D_2 по элементам вторых столбцов:

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= \Delta_1 - \Delta_1 u_{22} + \Delta_2 \omega_{21} - \Delta_3 \omega_{22} u_{22} = 0, \\ D_2 &= \Delta_4 - \Delta_4 u_{22} + \Delta_5 \omega_{21} - \Delta_3 (\varepsilon_{21} + i \omega_{21}^2) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (204)$$

Уравнение $D_1 = 0$ совпадает с уравнением (177), для которого в § 86 приведены значения определителей Δ_j ($j = 1, 2, 3$). Уравнение $D_2 = 0$ совпадает с уравнением (187), для которого значения определителей Δ_j ($j = 1, 2$) приведены в § 88, причём индексы 1, 2 следует заменить на 4, 5.

Дадим схему графического решения уравнений (204). Графическое изображение уравнения $D_1 = 0$ рассмотрено в § 86 (фиг. 480). Но изображенному там методу легко построить график функции $\varphi_{22} = f_1(\omega_{21})$. Для графического представления уравнения $D_2 = 0$ откладываем (фиг. 509) $OA = \Delta_4$ и проводим через точку A прямую AB под углом $\varphi_5 = \arg \Delta_5$ к оси x . Задаваясь рядом значений $\omega_{21} \bmod \Delta_5$ и получаем точки C_1, C_2, C_3, \dots . Проводим через точки C_1, C_2, C_3, \dots параллельные прямые под углом $\varphi_3 + \frac{\pi}{2} = \arg \Delta_3 + \frac{\pi}{2}$ к оси x



Фиг. 509.

и откладываем на них отрезки $\omega_{21} \bmod \Delta_3$ в соответствии с заданными частными значениями ω_{21} и получаем точки D_1, D_2, D_3, \dots . Проводим через точки D_1, D_2, D_3, \dots параллельные прямые под углом $\varphi_3 + \pi$ к оси x , пересекаем их из точки O радиусом $\bmod \Delta_4$ и получаем точки $E_1, E'_1, E_2, E'_2, \dots$. Соединим точки $E_1, E'_1, E_2, E'_2, \dots$ с точкой O и измеряем углы $(E_1O, OA) = \varphi_{221}$, $(E'_1O, OA) = \varphi'_{221}$, $(E_2O, OA) = \varphi_{222}$ и т. д. Каждому значению ω_{21} будут соответствовать два значения угла φ_{22} . По точкам $(\omega_{21}, \varphi_{22})$ легко построить кривую $\varphi_{22} = f_2(\omega_{21})$. Координаты точек пересечения кривых f_1 и f_2 дают приближённые значения корней ω_{21} и φ_{22} системы уравнений (204).

Для уточнения найденных значений φ_{22} и ω_{21} получим аналитические формулы. Обозначая

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= \Delta_1 + \Delta_2 \omega_{21}, \\ \Delta_6 &= \Delta_4 + \Delta_5 \omega_{21}, \end{aligned}$$

перепишем уравнения (204) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Delta_0 - \Delta_1 u_{22} - \Delta_3 \omega_{22} u_{22} &= 0, \\ \Delta_6 - \Delta_4 u_{22} - \varepsilon_{21} \Delta_3 &= 0. \end{aligned}$$

Воспользовавшись решениями аналогичных уравнений (177) и (174), получим:

$$\left. \begin{aligned} \sin(\varphi_{22} + \varphi_3 - \varphi_0) &= \frac{x_1 y_3 - y_1 x_3}{r_0 r_3}, \\ \sin(\varphi_{22} + \varphi_4 - \varphi_3) &= \frac{x_3 y_6 - y_3 x_6}{r_3 r_4}, \end{aligned} \right\} \quad (205)$$

где $r_j = \bmod \Delta_j$ ($j = 0, 3, 4$), $\varphi_j = \arg \Delta_j$ ($j = 0, 3, 4$). Задаваясь рядом значений ω_{21} , вычисляем x_0, y_0, x_6, y_6 и находим по формулам (205) два, вообще говоря, различных значения φ_{22} и φ'_{22} . Останавливаемся на тех значениях φ_{22} и ω_{21} , при которых разность $|\varphi'_{22} - \varphi_{22}|$ будет наперёд заданной малой величиной, определяющей точность вычислений. После определения φ_{22} и ω_{21} искомый механизм строится по определителю D .

Все остальные возможные кинематические задачи синтеза шарнирного четырёхзвенника и кривошипно-шатунного механизма по пяти условиям для двух звеньев приводятся к уравнениям и графическим построениям, рассмотренным в § 93—95. В связи с этим эти задачи более подробно не рассматриваются.

§ 96. Синтез четырёхзвенных механизмов по предельным значениям скоростей рабочего звена.

Пусть требуется построить шарнирный четырёхзвенник, для которого наперёд заданы пределы изменения угловой скорости коромысла $\omega_{3\max}$ и $\omega_{3\min}$.

Если необходимо построить механизм по значению экстремальной скорости коромысла ω_{31} , заданной только в одном положении механизма, то для этого частного случая, полагая $\varepsilon_{11} = 0$ (кривошип механизма вращается равномерно) и $\varepsilon_{31} = 0$ (по условию экстремума), составляем матрицу из строк (157) и первых строк (159) и (160):

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \omega_{11} & \omega_{21} & \omega_{31} & 0 \\ i\omega_{11}^2 & \varepsilon_{21} + i\omega_{21}^2 & i\omega_{31}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

В рассматриваемом случае матрица механизма вырождается в его определитель, и уравнения совместности отсутствуют.

Разлагая определитель D_1 по элементам первой строки, имеем векторное уравнение, определяющее искомый четырёхзвенник:

$$\delta_{11} - \delta_{21} + \delta_{31} - \delta_{41} = 0.$$

Аналогичный определитель составляется по условиям задачи, заданным только для второго положения механизма:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \omega_{11} & \omega_{22} & \omega_{32} & 0 \\ i\omega_{11}^2 & \varepsilon_{21} + i\omega_{22}^2 & i\omega_{32}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

и его разложение по элементам первой строки:

$$\delta_{12} - \delta_{22} + \delta_{32} - \delta_{42} = 0.$$

определяет, вообще говоря, другой четырёхзвенник, не совпадающий с ранее найденным по размерам своих звеньев.

Для того, чтобы по уравнениям $D_1 = 0$ и $D_2 = 0$ получить один механизм необходимо удовлетворить дополнительным условиям:

$$\frac{\text{mod } \delta_{j1}}{\text{mod } \delta_{j2}} = m \quad (j = 1, 2, 3, 4), \quad (206)$$

где m — некоторый постоянный коэффициент, определяющий отношение масштабов, в которых должны быть построены искомые механизмы, а $\text{mod } \delta_{j2}$ — размеры звеньев механизмов. Три независимых уравнения системы (206) налагают ограничения на выбор трёх величин, входящих в определители D_1 и D_2 . Следовательно, например, ε_{21} , ε_{22} и ω_{22} не могут быть заданы произвольно, и значения их должны быть корнями уравнений (206). Остальные величины, входящие в определители D_1 и D_2 , выбираются, вообще говоря, произвольно.

если проектируемый механизм не должен удовлетворять [каким-либо дополнителным условиям.

Воспользовавшись значениями δ_{jk} ($k = 1, 2$);

$$\begin{aligned} \delta_{1k} &= -\omega_{3k}\varepsilon_{2k} + i\omega_{2k}\omega_{3k}(\omega_{3k} - \omega_{2k}), \\ \delta_{2k} &= i\omega_{11}\omega_{3k}(\omega_{3k} - \omega_{11}), \\ \delta_{3k} &= \omega_{11}\varepsilon_{2k} + i\omega_{11}\omega_{2k}(\omega_{2k} - \omega_{11}), \\ \delta_{4k} &= (\omega_{11} - \omega_{3k})\varepsilon_{2k} + i[\omega_{2k}\omega_{3k}(\omega_{3k} - \omega_{2k}) + \\ &\quad + \omega_{11}\omega_{2k}(\omega_{2k} - \omega_{11}) + \omega_{11}\omega_{3k}(\omega_{11} - \omega_{3k})]. \end{aligned}$$

находим такие выражения для квадратов размеров звеньев:

$$\left. \begin{aligned} (\text{mod } \delta_{1k})^2 &= \varepsilon_{2k}^2 \omega_{3k}^2 + \omega_{2k}^2 \omega_{3k}^2 (\omega_{3k} - \omega_{2k})^2, \\ (\text{mod } \delta_{2k})^2 &= \omega_{11}^2 \omega_{3k}^2 (\omega_{3k} - \omega_{11})^2, \\ (\text{mod } \delta_{3k})^2 &= \omega_{11}^2 \varepsilon_{2k}^2 + \omega_{11}^2 \omega_{2k}^2 (\omega_{2k} - \omega_{11})^2, \\ (\text{mod } \delta_{4k})^2 &= \varepsilon_{2k}^2 (\omega_{11} - \omega_{3k})^2 + [\omega_{2k}\omega_{3k}(\omega_{3k} - \omega_{2k}) + \\ &\quad + \omega_{11}\omega_{2k}(\omega_{2k} - \omega_{11}) + \omega_{11}\omega_{3k}(\omega_{11} - \omega_{3k})]^2 \end{aligned} \right\} (k = 1, 2). \quad (207)$$

Принимая за неизвестное ε_{21} , ε_{22} , ω_{22} , имеем для их определения систему уравнений:

$$\left(\frac{\text{mod } \delta_{11}}{\text{mod } \delta_{12}} \right)^2 = \left(\frac{\text{mod } \delta_{21}}{\text{mod } \delta_{22}} \right)^2 = \left(\frac{\text{mod } \delta_{31}}{\text{mod } \delta_{32}} \right)^2 = \left(\frac{\text{mod } \delta_{41}}{\text{mod } \delta_{42}} \right)^2 = m^2. \quad (208)$$

Уравнение

$$\left(\frac{\text{mod } \delta_{31}}{\text{mod } \delta_{22}} \right)^2 = m^2$$

не зависит от неизвестных величин и позволяет определить m^2 :

$$m^2 = \frac{\omega_{31}^2 (\omega_{31} - \omega_{11})^2}{\omega_{32}^2 (\omega_{32} - \omega_{11})^2}. \quad (209)$$

Остальные три уравнения системы (208) после исключения ε_{21} и ε_{22} приводятся к алгебраическому уравнению третьей степени относительно ω_{22} , решение которого не представляет никаких затруднений.

Остаётся выяснить, какого рода экстремум (максимум или минимум) будет в каждом из рассматриваемых положений механизма. Для получения соответствующей формулы воспользуемся уравнением вторых производных от скоростей, выведенным в § 63. При применении этого уравнения к четырёхзвеннику учитываем, что $r_{4k} = 1$, $\varphi_{4k} = 0$, $\omega_{4k} = 0$, $\varepsilon_{4k} = 0$, $\varepsilon'_{4k} = 0$ и, следовательно,

$$\sum_{j=1}^3 (\varepsilon'_{jk} \omega_{jk}^3 + 3i\omega_{jk}\varepsilon_{jk}) r_{jk} e^{i\alpha_{jk}} = 0 \quad (k = 1, 2).$$

Полагая по условию задачи $\varepsilon_{11} = 0$, $\varepsilon'_{11} = 0$, $\varepsilon_{31} = 0$ и заменяя $r_{jk} e^{i\alpha_{jk}} = z_{jk}$ по формулам (153), получим после сокращения на δ_4 :

$$\omega_{11}^3 \varepsilon'_{1k} + (\varepsilon'_{2k} - \omega_{2k}^3 + 3i\omega_{2k}\varepsilon_{2k}) \delta_{2k} - (\varepsilon'_{3k} - \omega_{3k}^3) \delta_{3k} = 0.$$

Подставляя значения δ_{jk} , имеем:

$$\begin{aligned} & -\omega_{11}^3 \omega_{3k} \varepsilon_{3k} + i(\omega_{3k} - \omega_{2k}) \omega_{2k} \omega_{3k} \omega_{11}^3 + i\varepsilon'_{2k} \omega_{11} \omega_{3k} (\omega_{3k} - \omega_{11}) - \\ & - \omega_{11} \omega_{2k}^3 \omega_{3k} (\omega_{3k} - \omega_{11}) - 3\omega_{11} \omega_{2k} \omega_{3k} \varepsilon_{2k} (\omega_{3k} - \omega_{11}) - \varepsilon'_{3k} \omega_{11} \varepsilon_{2k} - \\ & - i\varepsilon'_{3k} (\omega_{2k} - \omega_{11}) \omega_{11} \omega_{2k} + \omega_{11} \omega_{3k}^3 \varepsilon_{2k} + i\omega_{3k}^3 (\omega_{2k} - \omega_{11}) \omega_{11} \omega_{2k} = 0. \end{aligned}$$

Приравняв нулю действительную часть уравнения, получим после сокращения на $\varepsilon_{2k}\omega_{11}$ искомую формулу:

$$\varepsilon_{3k}' = \omega_{2k}(\omega_{3k} - \omega_{11})(\omega_{11} + \omega_{2k} - 2\omega_{3k}).$$

Угловые скорости проектируемого механизма должны быть выбраны так, чтобы $\varepsilon_{3k}' \neq 0$. При $\varepsilon_{3k}' < 0$ имеем максимальное значение ω_{3k} , а при $\varepsilon_{3k}' > 0$ — минимальное.

Для двухкривошипного механизма максимальное и минимальные значений угловой скорости коромысла ω_{3k} должны быть одного знака. Сам же ход решения задачи совпадает с рассмотренной выше схемой.

Пусть далее требуется построить дезаксиальный кривошипно-шатунный механизм по наперед заданным предельным значениям линейной скорости ползушки $v_{41} \max$ и $v_{41} \min$. Если механизм строится по значению экстремальной скорости ползушки v_{41} , заданной только в одном положении механизма, то для этого частного случая, полагая $\varepsilon_{21} = 0$

кривошип механизма вращается равномерно и $a_{41} = 0$ (по условию экстремума), составляем матрицу из строк (157) и первых строк (163) и (164):

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \omega_{21} & \omega_{31} & -i v_{41} \\ 0 & i\omega_{21}^2 & \varepsilon_{31} + i\omega_{31}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Аналогичный определитель составляется по условиям задачи, заданным только для второго положения механизма:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \omega_{22} & \omega_{32} & -i v_{42} \\ 0 & i\omega_{22}^2 & \varepsilon_{32} + i\omega_{32}^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Разлагая определители D_k по элементам первых строк, имеем векторные уравнения для построения механизмов:

$$\delta_{1k} - \delta_{2k} + \delta_{3k} - \delta_{4k} = 0,$$

причём

$$\delta_{1k} = \omega_{2k}\varepsilon_{2k} + v_{4k}(\omega_{2k}^2 - \omega_{3k}^2) + i(\omega_{2k}\omega_{3k} - \omega_{2k}^2\omega_{3k} + v_{4k}\varepsilon_{3k}),$$

$$\delta_{2k} = -v_{4k}\omega_{3k}^2 + i v_{4k}\varepsilon_{3k},$$

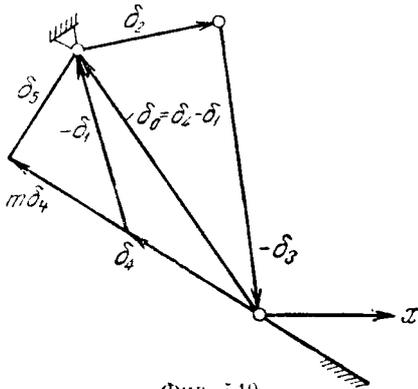
$$\delta_{3k} = v_{4k}\omega_{2k}^2,$$

$$\delta_{4k} = \omega_{2k}\varepsilon_{3k} + i\omega_{2k}\omega_{3k}(\omega_{3k} - \omega_{2k}).$$

Схема построения механизма изображена на фиг. 510.

В дальнейшем целесообразно ввести векторы:

$$\delta_{0k} = \delta_{4k} - \delta_{1k} = v_{4k}(\omega_{3k}^2 - \omega_{2k}^2) - i v_{4k}\varepsilon_{3k} \text{ и } \delta_{5k} = -i n_k \delta_{4k}.$$



Фиг. 510.

причём $\text{mod } \delta_{5k}$, очевидно, определяют дезаксиалы проектируемых механизмов. Для определения $\text{mod } \delta_{5k}$, имеем:

$$m_k \delta_{4k} - i n_k \delta_{4k} = \delta_{0k},$$

где m_k, n_k суть неопределённые скалярные параметры. Приравняв действительные и мнимые части, легко получаем:

$$n_k = \frac{x_0 y_{4k} - y_0 x_{4k}}{(\text{mod } \delta_{4k})^2},$$

где x_{j_k} и y_{j_k} — действительные и мнимые части векторов δ_{j_k} ($j=0,4$). Для того, чтобы получить при $k=1$ и $k=2$ один и тот же механизм в двух своих положениях, необходимо удовлетворить следующему уравнению:

$$\left(\frac{\text{mod } \delta_{j1}}{\text{mod } \delta_{j2}} \right)^2 = m^2 \quad (j=2, 3, 4, 5);$$

для $j=3$ имеем:

$$\left(\frac{\text{mod } \delta_{31}}{\text{mod } \delta_{32}} \right)^2 = \frac{v_{41}^2}{v_{42}^2} = m^2.$$

Остальные уравнения приводятся к системе, линейной относительно ε_{31}^2 и ε_{32}^2 :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{31}^2 - \varepsilon_{32}^2 &= \omega_{32}^4 - \omega_{31}^4, \\ v_{42} \varepsilon_{31}^2 - v_{41} \varepsilon_{32}^2 &= A, \\ v_{42}^2 \varepsilon_{31}^2 - v_{41}^2 \varepsilon_{32}^2 &= B, \end{aligned} \right\} \quad (210)$$

где для краткости обозначено:

$$\begin{aligned} A &= \omega_{32} (\omega_{32} - \omega_{21})^2 (\omega_{32} + \omega_{21}) v_{41} - \omega_{31} (\omega_{31} - \omega_{21})^2 (\omega_{31} + \omega_{21}) v_{42}, \\ B &= \omega_{32}^2 (\omega_{32} - \omega_{21})^2 v_{41}^2 - \omega_{31}^2 (\omega_{31} - \omega_{21})^2 v_{42}^2. \end{aligned}$$

Из условия совместности системы (210)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \omega_{32}^4 & -\omega_{31}^4 \\ v_{42} & -v_{41} & & A \\ v_{42}^2 & -v_{41}^2 & & B \end{vmatrix} = 0$$

получаем уравнение для определения ω_{32} :

$$\begin{aligned} \omega_{32}^3 (1 - \mu) + \omega_{32}^2 (2\mu + 1) - \omega_{32} (1 + \mu) + \\ + \omega_{31}^3 \left(\frac{1}{\mu} - 1 \right) - \omega_{31}^2 \left(\frac{2}{\mu} + 1 \right) + \omega_{31} \left(1 + \frac{1}{\mu} \right) = 0, \end{aligned} \quad (211)$$

где принято $\omega_{21} = 1$ и обозначено $\frac{v_{41}}{v_{42}} = \mu$. Значение ω_{31} может быть выбрано произвольно при условии, что получаемые при этом значения ε_{31} и ε_{32} действительны и, кроме того, удовлетворятся признаками существования максимума и минимума.

Уравнение третьей степени относительно ω_{32} приобретает особенно простой вид при $\mu = -2$. При этом

$$\omega_{32} = \frac{1}{3} + \sqrt{\frac{1}{2} \omega_{31}^3 - \frac{1}{6} \omega_{31} - \frac{1}{27}}.$$

Остаётся выяснить, какого рода экстремум будет в каждом из рассматриваемых положений механизма. Для вывода формулы, устанавливающей эти призна-

наки, воспользуемся уравнением вторых производных от скоростей, выведенным в § 63.

При применении этого уравнения к рассматриваемому механизму учитываем, что $\omega_{4k} = 0$, $\varepsilon_{4k} = 0$, $\varepsilon'_{4k} = 0$, $\omega_{1k} = 0$, $\varepsilon_{1k} = 0$, $\varepsilon'_{1k} = 0$, $\varphi_{4k} = 0$, $\varphi_{1k} = 0$ и, следовательно,

$$\sum_{j=2,3} (\varepsilon'_{jk} - \omega_{jk}^3 + 3i\omega_{jk}\varepsilon_{jk}) r_{jk} e^{i\varphi_{jk}} = ia'_{4k} \quad (k=1, 2).$$

Учитывая, что по условию задачи $\varepsilon_{2k} = 0$, $\varepsilon'_{2k} = 0$, и заменяя $r_{jk} e^{i\varphi_{jk}} = z_{jk}$ по формулам (153), получим:

$$-\omega_{2k}^3 \delta_{2k} - (\varepsilon'_{3k} - \omega_{3k}^3 + 3i\omega_{3k}\varepsilon_{3k}) \delta_{3k} = ia'_{4k} \delta_{4k}.$$

Заменяя δ_2 , δ_3 , δ_4 согласно выведенным формулам, имеем:

$$\begin{aligned} -iv_{4k}\omega_{2k}^3\varepsilon_{3k} + \omega_{2k}^3v_{41}\omega_{3k}^2 - v_{41}\omega_{2k}^2\omega_{3k}^3 + \varepsilon'_{3k}v_{4k}\omega_{2k}^2 + 3i\varepsilon_{3k}v_{4k}\omega_{2k}^2\omega_{3k} &= \\ = i\varepsilon_{3k}\omega_{2k}a'_{4k} + a'_{4k}\omega_{2k}\omega_{3k}(\omega_{2k} - \omega_{3k}). \end{aligned}$$

Приравняв мнимые части обеих частей уравнения, получим:

$$a'_{4k} = \omega_{2k}v_{4k}(3\omega_{3k} - \omega_{2k}).$$

При $a'_{4k} < 0$ имеем максимальное значение v_{41} , а при $a'_{4k} > 0$ — минимальное. Величины, входящие в выведенную формулу, должны быть выбраны так, чтобы $a'_{4k} \neq 0$.

§ 97. Синтез четырёхзвенных механизмов по предельным значениям угла давления.

Определим пределы изменения углов давления в зависимости от размеров звеньев.

Для шарнирного четырёхзвенника из треугольников AOC и ABC находим (фиг. 511):

$$(AC)^2 = r_1^2 + r_4^2 - 2r_1r_4 \cos \alpha = r_2^2 + r_3^2 - 2r_2r_3 \cos \theta,$$

и определяем искомое значение θ :

$$\cos \theta = \frac{r_2^2 + r_3^2 - r_1^2 - r_4^2 + 2r_1r_4 \cos \alpha}{2r_2r_3} \quad (211)$$

Из (211) следует, что экстремум θ возможен при значениях $\alpha = 0$, $\alpha = \pi$, $\alpha = 2\pi$ и т. д. Если $\pi > \theta > 0$, то $\alpha = 0$ даёт минимальное значение θ , определяемое формулой:

$$\cos \theta_{\min} = \frac{r_2^2 + r_3^2 - (r_1 - r_4)^2}{2r_2r_3}, \quad (212)$$

а $\alpha = \pi$ даёт максимальное значение θ , определяемое формулой:

$$\cos \theta_{\max} = \frac{r_2^2 + r_3^2 - (r_1 + r_4)^2}{2r_2r_3} \quad (213)$$

Кроме того, отметим, что невыгоднейшее значение $\theta = \frac{\pi}{2}$ будет при α , определяемом по формуле:

$$\cos \alpha = \frac{r_1^2 + r_4^2 - r_2^2 - r_3^2}{2r_1r_4}. \quad (214)$$

Полученные формулы позволяют решить следующую задачу. Определим соотношение между размерами звеньев четырёхзвенника, для которого невыгод-

наибольшее значение $\theta = \frac{\pi}{2}$ будет средним арифметическим из его крайних значений. Полагая $\theta_{\max} = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$, $\theta_{\min} = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ и подставляя эти значения углов в формулы (212) и (213), получим:

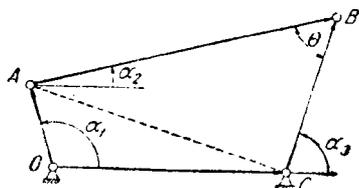
$$2r_2 r_3 \sin \varepsilon = r_2^2 + r_3^2 - (r_1 + r_4)^2,$$

$$2r_2 r_3 \sin \varepsilon = (r_1 - r_4)^2 - r_2^2 - r_3^2.$$

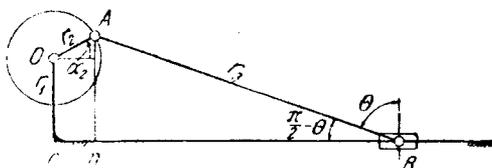
Исключая ε , получим окончательно:

$$r_1^2 + r_4^2 = r_2^2 + r_3^2. \quad (215)$$

У механизмов, размеры звеньев которых удовлетворяют условию (215), отклонения θ от наиболее выгодного значения будут одинаковыми в обе стороны.



Фиг. 511.



Фиг. 512.

Для кривошипно-шатунного механизма находим по фиг. 512:

$$AD = b + r \sin \alpha = l \cos \theta,$$

$$\cos \theta = \frac{b + r \sin \alpha}{l}$$

Исследуя написанное выражение на экстремуме, получим:

$$\cos \theta_{\min} = \frac{b + r}{l}, \quad (216)$$

$$\cos \theta_{\max} = \frac{b - r}{l}. \quad (217)$$

Наиболее выгодное значение θ будет при значении α , определяемом по формуле

$$\sin \alpha = \frac{b}{r}.$$

Полученные формулы позволяют проектировать механизм по заданным пределам изменения угла давления θ . Выясним, при каких условиях отклонения угла давления θ от своего наиболее выгодного значения $\theta = \frac{\pi}{2}$ будут одинаковыми в обе стороны от $\frac{\pi}{2}$. Полагаем $\theta_{\min} = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, $\theta_{\max} = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$ и подставляем в формулы (216) и (217). Тогда

$$\sin \varepsilon = \frac{b + r}{l},$$

$$\sin \varepsilon = \frac{b - r}{l},$$

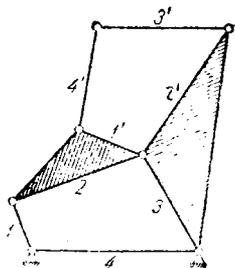
что возможно только при $b = 0$, т. е. для центрального кривошипно-шатунного механизма.

ХИ. СИНТЕЗ ШЕСТИЗВЕННЫХ МЕХАНИЗМОВ.

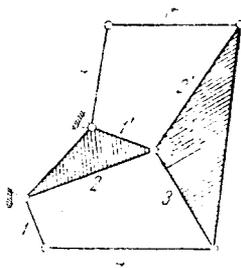
§ 98. Типы шестизвённых механизмов.

Шестизвённые механизмы образуются присоединением к кривошину и к стойке двух двухножковых или одной трёхножковой группы или одной группы третьего класса. При таком присоединении различных группы полученная цепь не будет образовывать одного контура с последовательным соединением звеньев. В связи с этим шестизвённый механизм не может быть частным случаем одной простой цепи.

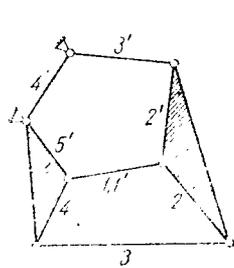
Возьмём кинематическую цепь, состоящую из двух четырёхзвённых цепей с одним общим шарниром, и соединим жёстко звенья 3 и 2', 2 и 1'. Из этой цепи получаются шестизвённые механизмы, представляющие или четырёхзвённый с двухножковой группой, присоединённой к кривошину (коромыслу)



Фиг. 513.



Фиг. 514.

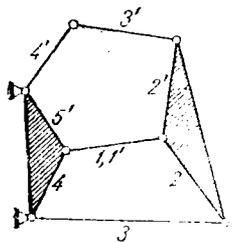


Фиг. 515.

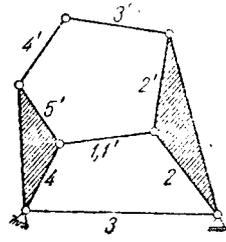
и шатуну, если сделать стойкой звено 1 (фиг. 513), или четырёхзвённый с двухножковой группой, присоединённой к кривошину (коромыслу) и стойке, если стойкой сделать звено 2 (фиг. 514).

Возьмём кинематическую цепь, состоящую из двух цепей — четырёхзвённой и пятизвённой с одним общим звеном. Соединим жёстко звенья 2 и 2', 4 и 5' и будем ставить цепь на различные звенья.

При постановке цепи на звено 1' получим шестизвённый первого класса третьего порядка типа кулисы Стефенсона (фиг. 515) или третьего класса нулевого порядка, если кривошином считать звено 3.



Фиг. 516.



Фиг. 517.

При постановке цепи на звено 4 — 5' получим шестизвённый с диадой, присоединённой к шатуну и стойке (фиг. 516).

При постановке цепи на звено 3 получим шестизвённый с диадой, присоединённой к кривошину и коромыслу (фиг. 517).

Способ образования шестизвённых механизмов совершенно не изменяется, если в простой цепи будут поступательные пары.

При решении практических задач шестизвённые механизмы целесообразно разбить на две группы А и В. К группе А отнесены механизмы, составленные двумя четырёхзвёнными простыми цепями (фиг. 513 и 514).

Так как в структуру таких механизмов входят две четырёхзвённые цепи, то их синтез сводится к двухкратному решению какой-либо из задач, рассмотренных в главе XI. Для упрощения задачи одну из четырёхзвённых простых цепей (обычно связываемую со стойкой) выбирают произвольно и определяют расчётом лишь размеры звеньев второй простой четырёхзвённой цепи. Искомый шестизвённый механизм образуется соединением обеих цепей. Очевидно, что для одного звена механизма группы А можно задавать не более пяти различных условий при их синтезе.

К группе В отнесём шестизвённые механизмы, составленные из цепей четырёхзвённой и пятизвённой (фиг. 515—517). Если по условиям синтеза

механизмов группы *B* требуется определить размеры звеньев обеих вспомогательных цепей расчётным путём, то для одного звена цепи можно задать не более пяти условий, и методы синтеза в этом случае не выходят за пределы того, что было изложено в главе XI. Если по условиям синтеза механизмов группы *B* допускаются произвольный выбор четырёхзвенной цепи, или определение размеров её звеньев не более чем по пяти условиям, а по большому числу условий расчётным путём определяются размеры звеньев пятизвенной цепи, то тогда для одного звена последней можно уже согласно формуле (156) (при $m=5$) до семи различных условий. Тогда задача во многих случаях выходит за пределы, установленные графическими методами Бурместера, Аллта, Федергофера, Бейера и других исследователей¹⁾. В последующем изложении рассматриваются случаи синтеза шестизвенных механизмов группы *B*.

§ 99. Составление матрицы пятизвенной цепи.

Пусть углы поворотов звеньев φ_{jk} заданы в s_1 положениях цепи, угловые скорости ω_{jk} звеньев в s_2 из s_1 положений цепи, угловые ускорения ε_{jk} звеньев в s_3 из s_2 положений цепи и первые производные от ускорений ε_{jk} звеньев в s_4 из s_3 положений цепи. Определяем по формуле (156) максимальное число условий, задаваемых для одного звена $s=7$, полагая $m=5$.

Из условий

$$\begin{aligned} s &= s_1 + s_2 + s_3 + s_4, \\ s_1 &\geq s_2 \geq s_3 \geq s_4 \end{aligned}$$

легко устанавливаем, что $s_1 \leq 7$, $s_2 \leq 3$, $s_3 \leq 2$, $s_4 \leq 1$. Матрицу цепи составляем по изложенному в § 68. Первые две строки всякой матрицы цепи состоят из единиц:

$$\left. \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1. \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1. \end{array} \right\} \quad (218)$$

Если для построения цепи заданы только углы φ_{jk} , определяющие направление звеньев, то $s_1 \leq 7$, $s_2 = s_3 = s_4 = 0$. Полагая $k=1, 2, \dots, 7$, будем в этом случае составлять матрицу цепи из строк (218) и следующих:

$$\left. \begin{array}{ccccc} u_{12} & u_{22} & u_{32} & u_{42} & u_{52}. \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & u_{43} & u_{53}. \\ u_{14} & u_{24} & u_{34} & u_{44} & u_{54}. \\ u_{15} & u_{25} & u_{35} & u_{45} & u_{55}. \\ u_{16} & u_{26} & u_{36} & u_{46} & u_{56}. \\ u_{17} & u_{27} & u_{37} & u_{47} & u_{57}. \end{array} \right\} \quad (219)$$

Если для построения цепи заданы углы φ_{jk} и угловые скорости ω_{jk} , то $s_1 \neq 0$, $s_2 \leq 3$, $s_3 = s_4 = 0$ и матрица M составляется из строк (218), (219) и следующих:

$$\left. \begin{array}{ccccc} \omega_{11} & \omega_{21} & \omega_{31} & \omega_{41} & \omega_{51}. \\ \omega_{12}u_{12} & \omega_{22}u_{22} & \omega_{32}u_{32} & \omega_{42}u_{42} & \omega_{52}u_{52}. \\ \omega_{13}u_{13} & \omega_{23}u_{23} & \omega_{33}u_{33} & \omega_{43}u_{43} & \omega_{53}u_{53}. \end{array} \right\} \quad (220)$$

Если для построения цепи заданы углы φ_{jk} , угловые скорости ω_{jk} и угловые ускорения ε_{jk} звеньев, то $s_1 \neq 0$, $s_2 \neq 0$, $s_3 \leq 2$, $s_4 = 0$ и матрица M составляется из строк (218), (219), (220) и следующих:

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_{11} + i\omega_{11}^2, \varepsilon_{21} + i\omega_{21}^2, \varepsilon_{31} + i\omega_{31}^2, \varepsilon_{41} + i\omega_{41}^2, \varepsilon_{51} + i\omega_{51}^2, \\ \varepsilon_{12} + i\omega_{12}^2, u_{12}(\varepsilon_{22} + i\omega_{22}^2), u_{22}(\varepsilon_{32} + i\omega_{32}^2), u_{32}(\varepsilon_{42} + i\omega_{42}^2), u_{42}(\varepsilon_{52} + i\omega_{52}^2), u_{52}. \end{array} \right\} \quad (221)$$

¹⁾ Как известно, задачи с заданием шести и большего числа условий для одного звена не решены до сих пор графическими методами для механизмов с вращательными парами.

Если для построения цепи заданы углы φ_{jk} , угловые скорости ω_{jk} , угловые ускорения ϵ_{jk} звеньев и первые производные от ускорений ϵ_{jk} , то $s_1 \neq s_2 \neq 0$, $s_3 \neq 0$, $s_4 = 1$ и матрица M составится из строк (218), (219), (220), (221) и следующей:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon'_{11} &= \omega_{11}^3 + 3i\omega_{11}\epsilon_{11}, & \epsilon'_{21} &= \omega_{21}^3 + 3i\omega_{21}\epsilon_{21}, & \epsilon_{31} &= \omega_{31}^3 + 3i\omega_{31}\epsilon_{31}, \\ \epsilon_{41} &= \omega_{41}^3 + 3i\omega_{41}\epsilon_{41}, & \epsilon_{51} &= \omega_{51}^3 + 3i\omega_{51}\epsilon_{51}. \end{aligned} \right\} \quad (222)$$

§ 100. Синтез шестизвённого механизма по четырём положениям трёх кривошипных звеньев.

Вспомогательный шарнирный четырёхзвённый строим по четырём заданным положениям кривошипа и коромысла, используя метод, изложенный в § 78. Остаётся рассмотреть решение аналогичной задачи для пятизвённого шарнирного цепи с неподвижным звеном 5. Полагаем для неподвижного звена $\varphi_{5k} = 0$ и составляем матрицу цепи из строк (218) и трёх первых строк (219):

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} & u_{42} & 1 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & u_{43} & 1 \\ u_{14} & u_{24} & u_{34} & u_{44} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Так как в рассматриваемом случае матрица вырождается в определитель цепи, то уравнения совместности отсутствуют и все углы, входящие в уравнение $D=0$, выбираются, вообще говоря, произвольно. Разлагаем определитель D по элементам первой строки:

$$D = \delta_1 - \delta_2 + \delta_3 - \delta_4 + \delta_5 = 0.$$

где δ_j ($j=1, 2, 3, 4, 5$) — определители четвёртого порядка. Разлагая каждый из определителей δ_j по элементам первой строки, выразим их через следующие определители третьего порядка d_j :

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= d_1 - d_5 + d_6 - d_7, \\ \delta_2 &= d_2 - d_3 + d_8 - d_9, \\ \delta_3 &= d_3 - d_6 + d_8 - d_{10}, \\ \delta_4 &= d_4 - d_7 + d_9 - d_{10}, \\ \delta_5 &= d_1 - d_2 + d_3 - d_4. \end{aligned} \right\} \quad (223)$$

Значений определителей d_j мы не приводим. Вычисляем (строим) значения определителей d_j и составляем из них по приведённым формулам определители δ_j ($j=1, 2, 3, 4, 5$). Образум из векторов δ_j замкнутый контур по уравнению $D=0$ и получаем искомую цепь в начальном её положении.

Пример 20. Построить шестизвённый механизм, у которого к шатуну и стойке заданного шарнирного четырёхзвённого требуется присоединить двухповодковую группу, углы поворотов φ_{3k} шатуна и φ_{4k} коромысла которой заданы следующей таблицей:

φ_{32}	φ_{33}	φ_{34}	φ_{42}	φ_{43}	φ_{44}
30°	45°	60°	60°	100°	140°

Выбираем произвольный четырёхзвённый OA_1B_1C (фиг. 518), устанавливаем его кривошип в заданные наперёд положения OA_1, OA_2, OA_3, OA_4 и измеряем углы поворотов кривошипа φ_{1k} и шатуна φ_{2k} ; от их начальных положений OA_1 и A_1B_1 . Результаты измерений приведены в таблице

φ_{12}	φ_{13}	φ_{14}	φ_{22}	φ_{23}	φ_{24}
40°	80°	120°	15°	$28^\circ 30'$	$44^\circ 30'$

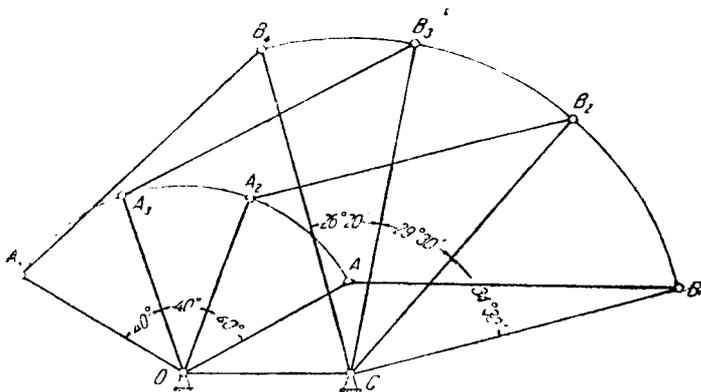
Подставив значения углов в формулы для d_j , находим по уравнениям $d_j = x_j + iy_j$:

j	1	2	3	4	5
x_j	0,01841	0	0	0,01695	0,04434
y_j	-0,00107	0	0	-0,00730	0,06331
j	6	7	8	9	10
x_j	0,04133	0,00337	0	-0,06331	-0,06307
y_j	0,07085	0,01079	0	-0,04434	-0,05243

Для вычисления $\delta_j = x_j + iy_j$ находим по формулам (223):

j	1	2	3	4	5
x_j	12,03	18,97	21,74	13,34	1,46
y_j	24,32	-18,97	-18,42	-10,00	6,23

Выбираем произвольную точку O (фиг. 519), откладываем от неё как от начала



Фиг. 518.

координаты x_5, y_5 и получаем точку A . Откладываем от точки A как от начала координаты $-x_1, -y_1$ и получаем точку B . Откладываем от точки B

как от начала координаты x_2, y_2 и получаем точку C . Откладываем от точки C как от начала координаты $-x_3, -y_3$ и получаем точку D . Если отложить от точки D как от начала координаты x_4, y_4 , то при правильном решении задачи попадём в исходную точку O . В результате построения получаем пятизвенную цепь. Соединением найденную цепь с четырёхзвенником по схеме, изображённой на фиг. 517, и получаем искомый шестизвенник (фиг. 520).

§ 101. Синтез пятизвенной цепи по трём положениям звеньев и одной скорости.

Полагаем для неподвижного звена $\varphi_{5r} = 0, \omega_{5k} = 0$ и составляем из строк (218), двух строк (219) и первой строки (220) матрицу цепи, которая в рассматриваемом случае вырождается в определитель:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} & u_{42} & 1 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & u_{43} & 1 \\ \omega_{11} & \omega_{21} & \omega_{31} & \omega_{41} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнения совместности отсутствуют, и все величины, входящие в определитель D , выбираются, вообще говоря, произвольно. Разлагаем определитель D по элементам первой строки:

$$D = \delta_1 - \delta_2 + \delta_3 - \delta_4 + \delta_5 = 0.$$

где δ_j ($j = 1, 2, 3, 4, 5$) — определители четвёртого порядка. Разлагая каждый из определителей δ_j по элементам четвёртой строки, выразим их через определители третьего порядка d_j :

$$\left. \begin{aligned} \delta_5 &= \omega_{41}d_1 - \omega_{31}d_2 + \omega_{21}d_3 - \omega_{11}d_4, \\ \delta_1 &= \omega_{41}d_5 - \omega_{31}d_6 + \omega_{21}d_7, \\ \delta_2 &= \omega_{41}d_8 - \omega_{31}d_9 + \omega_{11}d_7, \\ \delta_3 &= \omega_{41}d_{10} - \omega_{21}d_9 + \omega_{11}d_6, \\ \delta_4 &= \omega_{31}d_{10} - \omega_{21}d_8 + \omega_{11}d_5. \end{aligned} \right\} \quad (224)$$

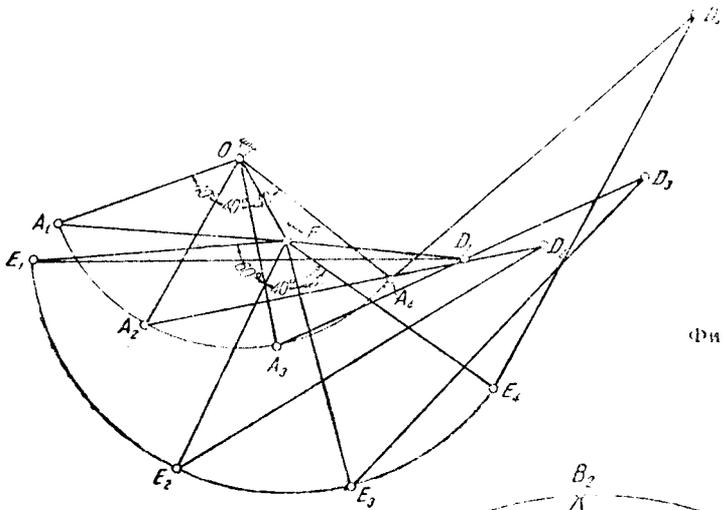
Для проверки вычислений имеем следующие зависимости:

$$\left. \begin{aligned} d_1 - d_5 + d_3 - d_{10} &= 0, \\ d_2 - d_6 + d_9 - d_{10} &= 0, \\ d_3 - d_7 + d_9 - d_8 &= 0, \\ d_4 - d_7 + d_6 - d_5 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (225)$$

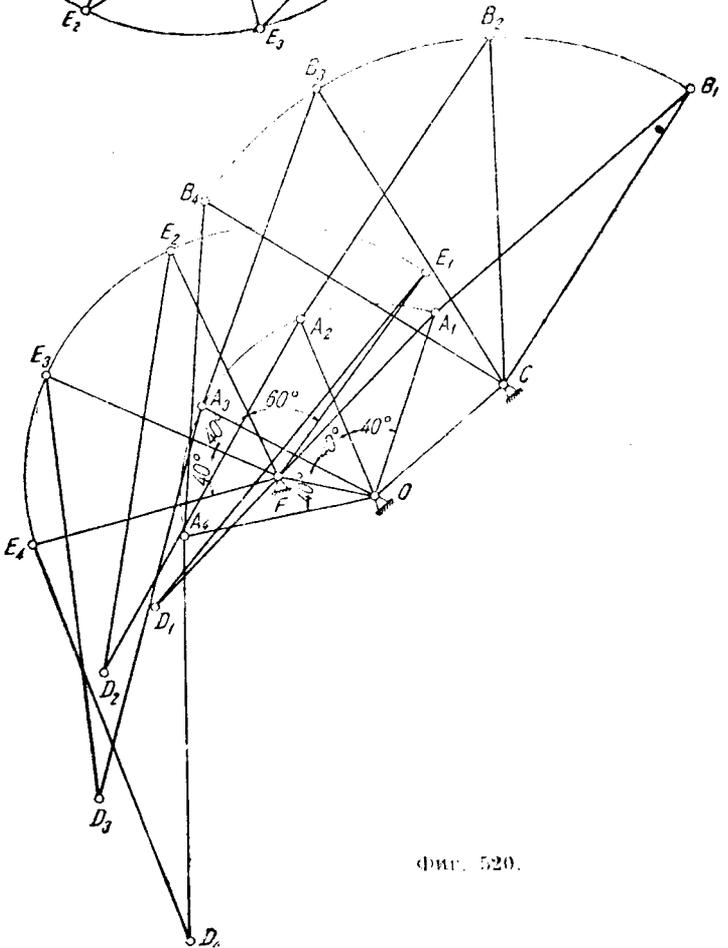
справедливость которых непосредственно вытекает из уравнения $D = 0$ в силу произвольности значений ω_{j1} ($j = 1, 2, 3, 4$). Вычислим значения определителей d_j и составляем из них по приведённым формулам определители δ_j . Образует из векторов δ_j замкнутый контур по уравнению $D = 0$ и получаем искомую цепь в начальном её положении. В целях упрощения вычислений достаточно найти по общим формулам только шесть определителей d_j , а остальные определить по проверочным формулам (225).

§ 102. Синтез пятизвенной цепи по двум положениям звеньев, скоростям и ускорениям звеньев, заданным в одном положении.

Взяв строки (218) и по одной первой строке из (219), (220), (221) и положив для цепи с неподвижным звеном $\varphi_{5r} = 0, \omega_{5r} = 0, \varepsilon_{5r} = 0$, составим матрицу цепи, которая в рассматриваемом случае вырождается в её опреде-



Фиг. 519.



Фиг. 520.

лители:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} & u_{42} & 1 \\ \omega_{11} & \omega_{21} & \omega_{31} & \omega_{41} & 0 \\ \varepsilon_{11} + i\omega_{11}^2 & \varepsilon_{21} + i\omega_{21}^2 & \varepsilon_{31} + i\omega_{31}^2 & \varepsilon_{41} + i\omega_{41}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнения совместности отсутствуют, и все величины, входящие в определитель D , выбираются, вообще говоря, произвольно. Располагаем определитель D по элементам первой строки

$$D = \delta_1 \delta_2 + \delta_3 - \delta_4 - \delta_5 = 0,$$

где δ_j ($j = 1, 2, 3, 4, 5$) — определители четвёртого порядка. Разлагая каждый из определителей по элементам третьей строки, выразим их значения через определители d_j по формулам (224), причём значения d_j удовлетворяют формулам (225). Для построения искомой цепи находим значения d_j , составляем значения определителей δ_j по формулам (224) и образуем из векторов δ_j замкнутый контур по уравнению $D = 0$, представляющий искомую цепь в начальном её положении.

§ 103. Синтез пятизвенной цепи по пяти положениям звеньев.

Взяв строки (218) и четыре первые строки из (219) и положив для цепи с неподвижным звеном $\varphi_{57} = 0$, составим матрицу цепи:

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} & u_{42} & 1 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & u_{43} & 1 \\ u_{14} & u_{24} & u_{34} & u_{44} & 1 \\ u_{15} & u_{25} & u_{35} & u_{45} & 1 \end{vmatrix}.$$

Выделим из матрицы M определитель цепи D и уравнение совместности:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} & u_{42} & 1 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & u_{43} & 1 \\ u_{14} & u_{24} & u_{34} & u_{44} & 1 \\ u_{15} & u_{25} & u_{35} & u_{45} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение совместности определяет значения двух углов, которые, следовательно, не могут быть выбраны произвольно. Так как углы φ_{1k} и φ_{2k} ($k = 2, 3, 4, 5$) определяются обычно выбором вспомогательного четырёхзвенника, то за неизвестные могут быть приняты углы φ_{3k} или φ_{4k} . Пусть требуется присоединить к шатуну и стойке четырёхзвенника двину, для которой заданы пять положений коромысла и три направления шатунового звена. В этом случае неизвестными будут углы φ_{32} и φ_{25} . Разлагаем определитель по элементам третьего столбца:

$$D_1 = \Delta_1 - \Delta_2 u_{32} + \Delta_3 u_{33} - \Delta_4 u_{34} + \Delta_5 u_{35} = 0, \quad (226)$$

где Δ_j ($j = 1, 2, 3, 4, 5$) — определители четвёртого порядка, связанные зависимостью $\Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_4 + \Delta_5 = 0$, непосредственно вытекающей из уравнения $D_1 = 0$, при $\varphi_{32} = 0$. Разлагаем определители Δ_j по элементам первых столбцов и находим их выражения через определители третьего порядка d_j по формулам (223). Если обозначить $\Delta_0 = \Delta_1 - \Delta_2 u_{22} - \Delta_3 u_{23}$ то уравнение

совместности (226) перепишется в виде:

$$\Delta_0 + \Delta_4 u_{34} - \Delta_5 u_{35} = 0.$$

Графическое решение уравнения (226) выполняется по схеме, изображённой на фиг. 409. После определения φ_{34} искомая цепь строится по своему определителю D .

§ 104. Синтез пятизвенной цепи по шести положениям звеньев.

Взяв строки (218) и пять первых строк из (219) и положив в них $\varphi_{52} = 0$, составим матрицу цепи:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} & u_{42} & 1 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & u_{43} & 1 \\ u_{14} & u_{24} & u_{34} & u_{44} & 1 \\ u_{15} & u_{25} & u_{35} & u_{45} & 1 \\ u_{16} & u_{26} & u_{36} & u_{46} & 1 \end{pmatrix}.$$

Выделим из матрицы определитель цепи D , построение которого схематически изложено в § 100, и независимые уравнения совместности:

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} & u_{42} & 1 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & u_{43} & 1 \\ u_{14} & u_{24} & u_{34} & u_{44} & 1 \\ u_{15} & u_{25} & u_{35} & u_{45} & 1 \end{pmatrix} = 0,$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} & u_{42} & 1 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & u_{43} & 1 \\ u_{14} & u_{24} & u_{34} & u_{44} & 1 \\ u_{16} & u_{26} & u_{36} & u_{46} & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Пусть требуется построить четырёхзвённый с двухповодковой группой, присоединённый к шатуну и стойке, для коромысла которой заданы шесть положений и угол между двумя направлениями шатунного звена. Разлагаем определители по элементам третьих столбцов:

$$\begin{cases} D_1 = \Delta_1 - \Delta_2 u_{32} + \Delta_3 u_{33} - \Delta_4 u_{34} + \Delta_5 u_{35} = 0, \\ D_2 = \Delta_6 - \Delta_7 u_{32} + \Delta_8 u_{33} - \Delta_9 u_{34} + \Delta_5 u_{36} = 0. \end{cases} \quad (227)$$

Уравнение D_1 совпадает с уравнением (226), для которого значения определителей Δ_j ($j=1, 2, 3, 4, 5$) приведены в § 100.

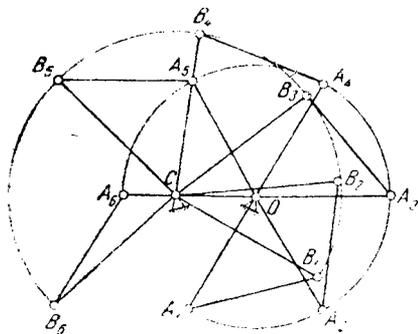
Определители Δ_j ($j=6, 7, 8, 9$) вычисляются по аналогичным формулам:

$$\begin{cases} \Delta_6 = d_{11} - d_{12} + d_{13} - d_4, \\ \Delta_7 = d_{11} - d_{14} + d_{15} - d_7, \\ \Delta_8 = d_{12} - d_{14} + d_{16} - d_9, \\ \Delta_9 = d_{13} - d_{15} + d_{16} - d_{10}. \end{cases} \quad (228)$$

где d_j ($j=4, 7, 9, 10$) — определители, приведённые в § 100. Обозначая $\Delta_0 = \Delta_1 - \Delta_2 u_{32} + \Delta_3 u_{33}$, $\Delta_{10} = \Delta_6 - \Delta_7 u_{32} + \Delta_8 u_{33}$, решаем систему (227) по методу, изложенному в § 90.

После определения φ_{23} и φ_{24} основной механизм строится по своему определителю D .

Пример 21. Построить шестизвенный механизм, у которого положения звеньев, присоединённых к шатуну и стойке двухповодковой группы, заданы следующими углами, определяющими их взаимные положения:



Фиг. 521.

φ_{22}	φ_{42}	φ_{43}	φ_{44}	φ_{45}	φ_{46}
0°	40°	80°	120°	160°	200°

Выбираем произвольный вспомогательный четырёхзвенник (фиг. 521) и для шести заданных углов φ_{4j} ($k=2, 3, 4, 5, 6$) положений его кривошипа OA измерим углы шатуна.

Результаты измерений приведены в таблице:

φ_{12}	φ_{13}	φ_{14}	φ_{15}	φ_{16}	φ_{22}	φ_{23}	φ_{24}	φ_{25}	φ_{26}
60°	120°	180°	240°	300°	69°	$115^\circ 20'$	$143^\circ 40'$	$163^\circ 50'$	$223^\circ 10'$

По условиям наложения четырёхзвенника и пятизвенной цепи углы φ_{1j} должны определять взаимные положения первого звена цепи, а углы φ_{2j} второго. Следовательно, для построения пятизвенной цепи заданы её углы:

$$\varphi_{12}, \varphi_{22}, \varphi_{32}, \varphi_{42}.$$

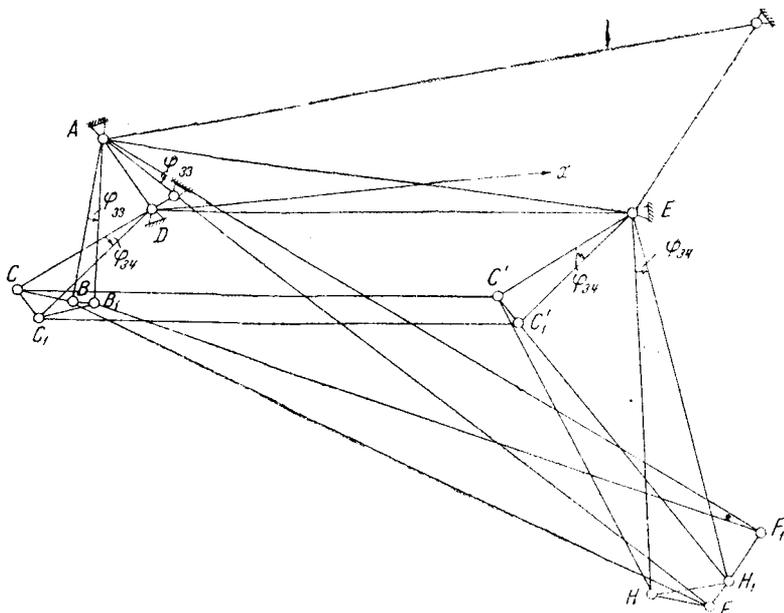
Вычисляем значения определителей $d_j = x_j + iy_j$:

j	1	2	3	4
x_j	0,06455	0,21093	0,23646	0,06507
y_j	0,03766	0,0291	0,07953	-0,08497
j	5	6	7	8
x_j	0,42013	0,36874	-0,05727	-0,15233
y_j	-0,19911	-0,64577	-0,34087	-0,60806
j	9	10	11	12
x_j	-0,31331	-0,13106	0,11860	0,02057
y_j	0,20311	0,03472	-0,06779	-0,05574
j	13	14	15	16
x_j	0,12107	0,18186	0,72613	0,45496
y_j	0,12197	0,22259	0,00684	-0,49430

Составляем значения определителей $\Delta_j = x_j + iy_j$ по формулам (223) и (228) (цифры увеличены):

j	1	2	3	4	5
x_j	2 501	7 043	-4 822	15 355	-5 991
y_j	1 400	6 813	-17 674	-7 654	1 807
j	6	7	8	9	--
x_j	15 403	72 024	60 698	-1 904	--
y_j	19 489	5 733	-56 952	41 389	--

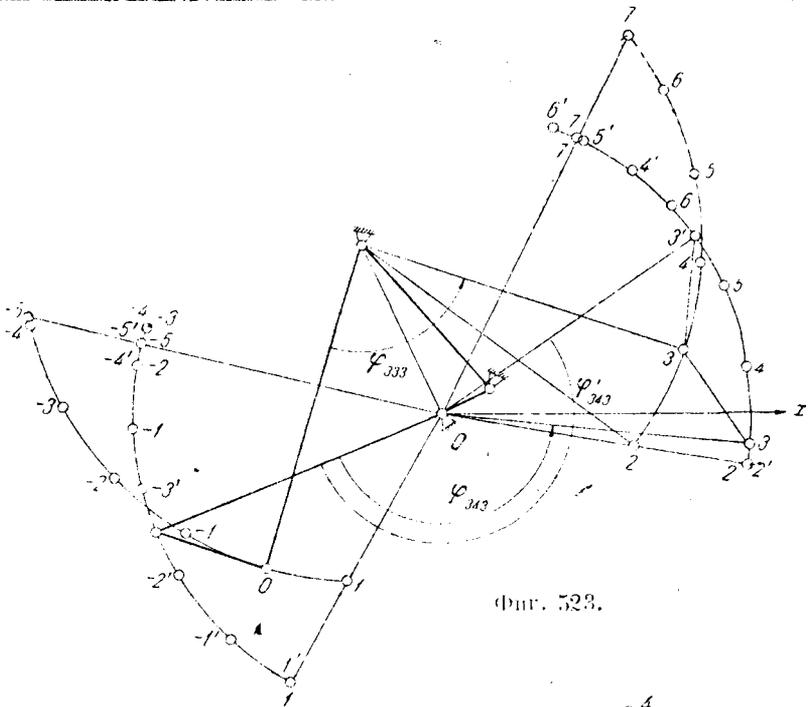
Строим по схеме, изображённой на фиг. 491, вспомогательные четырёхзвенники (фиг. 522) и определяем одно из приближённых решений уравнений совместности $\varphi_{33} = 7^\circ$, $\varphi_{34} = 12^\circ 30'$. Для проверки строим вспомогательные



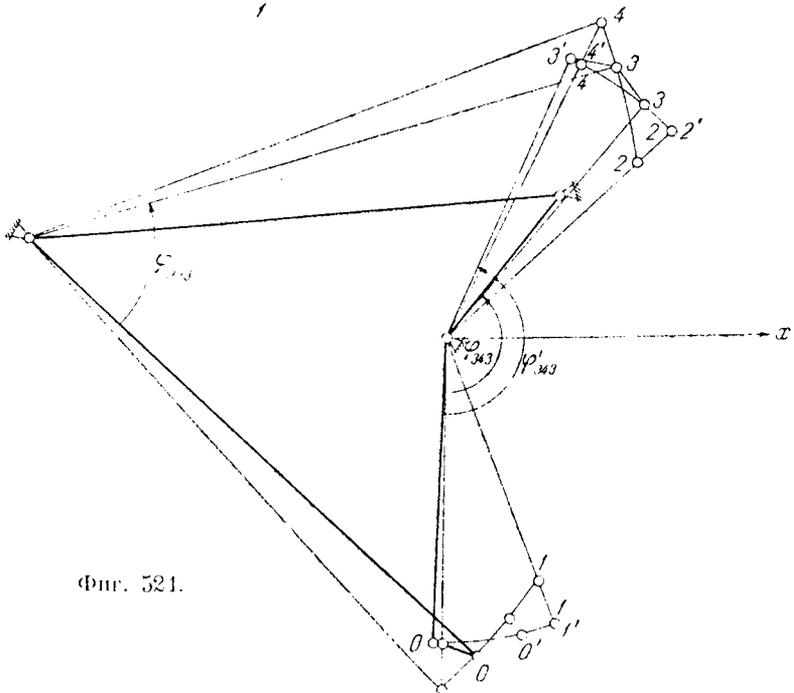
Фиг. 522.

четырёхзвенники (фиг. 523 и 524) и находим зависимости $\varphi_{34} = f(\varphi_{33})$, $\varphi_{34} = f_2(\varphi_{33})$ (фиг. 525) и определяем по координатам точек их пересечения $\varphi_{33} = 6^\circ 30'$, $\varphi_{34} = 12^\circ 30'$.

Задаваясь значениями φ_{33} , близкими к $\varphi_{33} = 7^\circ$, уточняем по формулам, выведенным в § 90, полученное приближение и находим, что при $\varphi_{33} = 6^\circ 35'$, $\varphi_{34} = 11^\circ 45'$ с точностью до $1'$. Переходим к вычислению векторов δ_j по фор-



Фиг. 523.



Фиг. 521.

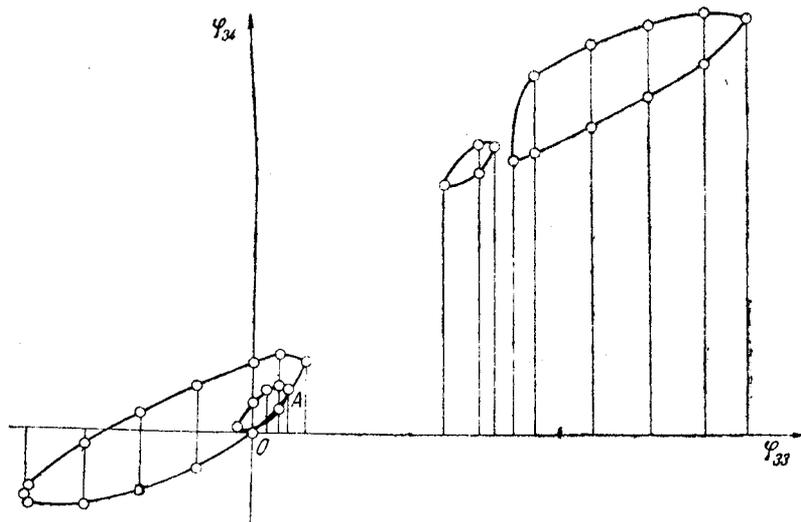
мулам, приведённым в § 100. Полагая $d_j = x_j + iy_j$, находим:

j	1	2	3	4	5
x_j	-0,16438	-0,08856	0,06507	0,01943	0,03999
y_j	0,06488	0,16311	0,08497	0,32383	0,01881
j	6	7	8	9	10
x_j	0,19589	0,02425	0,08126	0,8822	0,01035
y_j	0,05816	0,02830	0,22324	0,03738	0,38444

Составляем значения определителей $\delta = x_j + iy_j$ по формулам (223) (цифры увеличены):

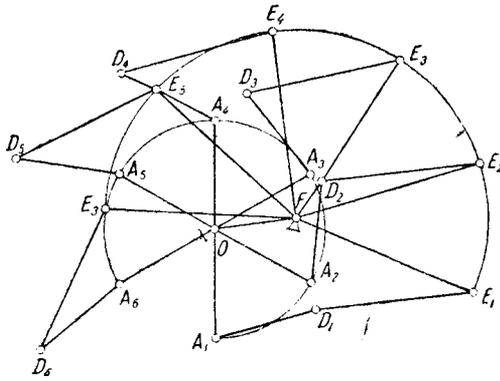
j	0	1	2	3	4
x	-30,18	15,77	40,93	-59,91	-54,89
y_j	10,87	40,39	-3,94	+18,07	51,53

Многоугольник $OA_1D_1E_1F_1O$, построенный по значениям x_j и y_j , представляет искомую цепь в начальном её положении (фиг. 526). Соединяем

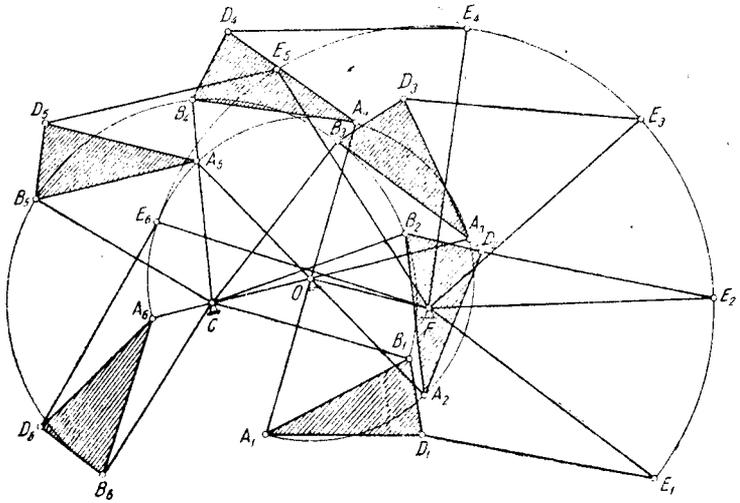


Фиг. 525.

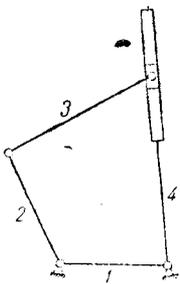
полученную цепь с вспомогательным четырёхзвенником и получаем искомый механизм (фиг. 527), у которого коромысло диады FE занимает на плоскости заданные наперёд положения FE_k ($k=1, 2, 3, 4, 5, 6$), расположенные под



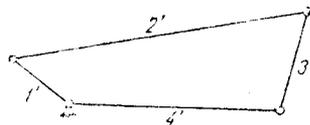
Фиг. 526.



Фиг. 527.



Фиг. 528.



Фиг. 529.

углами φ_{4k} к его начальному положению FE_4 , когда кривошип проходит через заданные наперёд положения OA_k ($k=1, 2, 3, 4, 5, 6$), расположенные под углами φ_{4k} к его начальному положению OA_4 . Кроме того, по заданию $\varphi_{32}=0$ и, следовательно, два положения шатунного звена диады D_1E_1 и D_2E_2 должны быть параллельны.

§ 105. Синтез шестизвённого механизма по четырём заданным положениям точки шатунной плоскости.

Пусть заданы четыре точки неподвижной плоскости, через которые должна пройти некоторая точка шатунного звена двухповодковой группы шестизвённого, присоединяемой к основному четырёхзвённому механизму. Выясним, какого типа шестизвённый позволит осуществить условия поставленной задачи при расположении заданных точек на произвольной кривой.

Выберем вспомогательную кинематическую цепь с одной поступательной парой (фиг. 528), позаботившись лишь о том, чтобы центр её ползушки прошёл через все заданные точки неподвижной плоскости. В случае необходимости размеры звеньев цепи могут быть определены расчётным путём по матрице:

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & u_{22} & u_{32} & r_{42}u_{42} \\ 1 & u_{23} & u_{33} & r_{43}u_{43} \\ 1 & u_{24} & u_{34} & r_{44}u_{44} \end{vmatrix},$$

где $z_k = r_{4k}u_{4k}$ ($k=1, 2, 3, 4$) — комплексные координаты заданных точек неподвижной плоскости, причём принято $z_1 = r_{41}u_{41} = 1$. Углы φ_{22} и φ_{31} выбираются произвольно, а углы φ_{23} и φ_{24} определяются из уравнения совместности:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & u_{22} & u_{32} & r_{42}u_{42} \\ 1 & u_{23} & u_{33} & r_{43}u_{43} \\ 1 & u_{24} & u_{34} & r_{44}u_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

После определения углов искомая цепь строится по своему определителю:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & u_{22} & u_{32} & r_{42}u_{42} \\ 1 & u_{23} & u_{33} & r_{43}u_{43} \end{vmatrix} = 0.$$

При произвольном выборе вспомогательной цепи совмещаем центр её ползушки с данными неподвижными точками и измеряем углы φ_{2k} и φ_{3k} непосредственно по чертежу или вычисляем их значение по выбранным размерам звеньев цепи.

Построим шарнирную четырёхзвённую кинематическую цепь (фиг. 529) по матрице:

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ u'_{12} & u'_{22} & u'_{32} & u'_{42} \\ u'_{13} & u'_{23} & u'_{33} & u'_{43} \\ u'_{14} & u'_{24} & u'_{34} & u'_{44} \end{vmatrix}$$

при следующих значениях углов φ'_{jk} : 1) $\varphi'_{4k} = 0$ (звено 4 неподвижно), $\varphi'_{1k} = \varphi_{2k}$, углы φ'_{22} и φ'_{3k} заданы произвольно, или 2) $\varphi'_{4k} = \varphi_{3k}$, $\varphi'_{1k} = \varphi_{2k}$, углы φ'_{22} и φ'_{3k} заданы произвольно.

Для обоих вариантов четырёхзвенной цепи неизвестные углы φ'_{23} и φ'_{24} определяются из уравнения совместности:

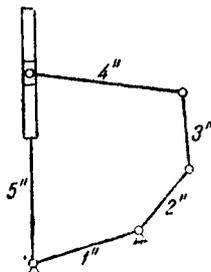
$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ u'_{12} & u'_{22} & u'_{32} & u'_{42} \\ u'_{13} & u'_{23} & u'_{33} & u'_{43} \\ u'_{14} & u'_{24} & u'_{34} & u'_{44} \end{vmatrix} = 0,$$

а сама цепь строится по своему определителю:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ u'_{12} & u'_{22} & u'_{32} & u'_{42} \\ u'_{13} & u'_{23} & u'_{33} & u'_{43} \end{vmatrix} = 0.$$

В целях упрощения решения задачи выберем четырёхзвенную цепь произвольно, установим её кривошип OA и звено OC в заданные положения и измерим углы φ'_{2k} и φ'_{3k} по чертежу или вычислим их значения по размерам звеньев цепи. Для того, чтобы звено OA могло повернуться на любой угол φ'_{1k} , размеры звеньев цепи должны лишь удовлетворять условиям Грасгофа.

Построим третью вспомогательную шестизвенную цепь (фиг. 530) по матрице, которая в рассматриваемом случае вырождается в определитель:



Фиг. 530.

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & u''_{22} & u''_{32} & u''_{42} & r_{52}u_{52} \\ 1 & u''_{23} & u''_{33} & u''_{43} & r_{53}u_{53} \\ 1 & u''_{24} & u''_{34} & u''_{44} & r_{54}u_{54} \end{vmatrix} = 0.$$

Выберем величины, входящие в определитель D_3 , в соответствии с двумя данными ранее вариантами шарнирной четырёхзвенной цепи следующим образом:

- 1) $r_{5k}e^{i\varphi_{5k}} = r_{4k}e^{i\varphi_{4k}}$, $\varphi''_{4k} = \varphi_{3k}$, $\varphi''_{2k} = \varphi'_{3k}$, углы φ''_{3k} произвольны или
- 2) $r_{5k}e^{i\varphi_{5k}} = r_{4k}e^{i\varphi_{4k}}$, $\varphi''_{3k} = \varphi'_{3k}$, $\varphi''_{4k} = \varphi_{3k}$, углы φ''_{2k} произвольны.

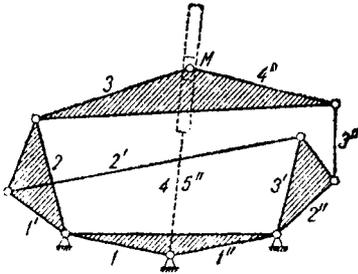
Для построения искомой цепи разлагаем определитель D_3 по элементам первой строки:

$$D_3 = \delta_1 - \delta_2 + \delta_3 - \delta_4 + \delta_5 = 0,$$

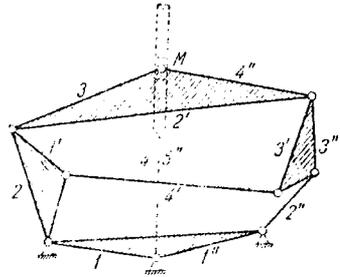
находим значения векторов δ_j и образуем из них замкнутый контур, определяющий искомую цепь в начальном её положении.

Производя подобное преобразование построенных ранее вспомогательных цепей, присоединяем их к найденной цепи. При этом в силу принятых допущений относительно выбора углов получаем по первому варианту четырёхзвенник с диадой, присоединённой к кривошипам (фиг. 531), а по второму — шести-

звенник типа кулисы Стефенсона (фиг. 532). У обоих шестизвенников точка M шатунного звена должна проходить через заданные точки неподвижной плоскости. Так как выбор углов φ''_{3k} в первом варианте и φ''_{2k} — во втором произволен, то при проектировании вспомогательной цепи, изображённой на фиг. 530, можно задать ряд дополнительных условий.



Фиг. 531.



Фиг. 532.

§ 106. Синтез шестизвенного механизма по шести заданным положениям точки шатунной плоскости.

Пусть заданы шесть точек неподвижной плоскости, через которые должна пройти некоторая точка шатунного звена диады шестизвенника. Выберем цепь (фиг. 528), центр ползушки которой проходит через заданные точки неподвижной плоскости. Установим центр её ползушки в заданные точки и измерим углы φ_{2k} и φ_{3k} . Выберем произвольную четырёхзвенную цепь (фиг. 529), зададим углами φ_{4k} и φ_{1k} значения и измерим соответствующие им углы φ'_{2k} и φ'_{3k} ($k = 2, 3, 4, 5$).

Построим цепь (фиг. 530) по матрице:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & u''_{22} & u''_{32} & u''_{42} & r_{52}u_{52} \\ 1 & u''_{23} & u''_{33} & u''_{43} & r_{53}u_{53} \\ 1 & u''_{24} & u''_{34} & u''_{44} & r_{54}u_{54} \\ 1 & u''_{25} & u''_{35} & u''_{45} & r_{55}u_{55} \\ 1 & u''_{26} & u''_{36} & u''_{46} & r_{56}u_{56} \end{pmatrix}$$

наложив на выбор входящих в неё величин ограничения, указанные в § 105.

При решении задачи по первому варианту углы φ''_{3k} ($k = 3, 4, 5, 6$) определяются из уравнений совместности:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & u''_{22} & u''_{32} & u''_{42} & r_{52}u_{52} \\ 1 & u''_{23} & u''_{33} & u''_{43} & r_{53}u_{53} \\ 1 & u''_{24} & u''_{34} & u''_{44} & r_{54}u_{54} \\ 1 & u''_{25} & u''_{35} & u''_{45} & r_{55}u_{55} \end{vmatrix} = 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & u''_{22} & u''_{32} & u''_{42} & r_{52}u_{52} \\ 1 & u''_{23} & u''_{33} & u''_{43} & r_{53}u_{53} \\ 1 & u''_{24} & u''_{34} & u''_{44} & r_{54}u_{54} \\ 1 & u''_{26} & u''_{36} & u''_{46} & r_{56}u_{56} \end{vmatrix} = 0.$$

При решении задачи по второму варианту углы φ_{zk}'' ($k = 3, 4, 5, 6$) определяются из этой же системы уравнений совместности. В обоих случаях определители D_1 и D_2 разлагаются по элементам столбцов, содержащих неизвестные, и получаемая система решается по методу, изложенному в § 90. После определения необходимых неизвестных искомая цепь строится по своему определителю D , значение которого приведено в § 105, и соединяется с вспомогательными цепями по одной из приведённых ранее схем (фиг. 531 и 532) в зависимости от избранного варианта решения задачи.

§ 107. Схема синтеза шестизвённого механизма по семи заданным положениям рабочего звена.

Пусть требуется построить шестизвённый с диадой, присоединённой к шатуну и стойке, для которой задано семь положений коромысла. Из изложенного ранее следует, что достаточно показать возможность построения пятизвённой цепи по семи заданным положениям четырёх её звеньев (включая сюда и неподвижное звено). Составляем матрицу цепи:

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} & u_{42} & 1 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & u_{43} & 1 \\ u_{14} & u_{24} & u_{34} & u_{44} & 1 \\ u_{15} & u_{25} & u_{35} & u_{45} & 1 \\ u_{16} & u_{26} & u_{36} & u_{46} & 1 \\ u_{17} & u_{27} & u_{37} & u_{47} & 1 \end{vmatrix}$$

и выделяем из неё определитель цепи D , построение которого изложено в § 100, и независимые уравнения совместности:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} & u_{42} & 1 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & u_{43} & 1 \\ u_{14} & u_{24} & u_{34} & u_{44} & 1 \\ u_{15} & u_{25} & u_{35} & u_{45} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} & u_{42} & 1 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & u_{43} & 1 \\ u_{14} & u_{24} & u_{34} & u_{44} & 1 \\ u_{16} & u_{26} & u_{36} & u_{46} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} & u_{42} & 1 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & u_{43} & 1 \\ u_{14} & u_{24} & u_{34} & u_{44} & 1 \\ u_{17} & u_{27} & u_{37} & u_{47} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Разлагаем определители D_1 , D_2 , D_3 по элементам третьих столбцов:

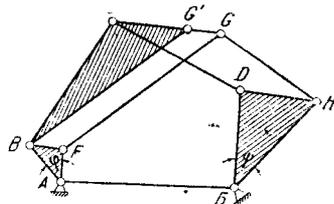
$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 - \Delta_2 u_{32} + \Delta_3 u_{33} - \Delta_4 u_{34} + \Delta_5 u_{35} &= 0, \\ \Delta_6 - \Delta_7 u_{32} + \Delta_8 u_{33} - \Delta_9 u_{34} + \Delta_5 u_{36} &= 0, \\ \Delta_{10} - \Delta_{11} u_{32} + \Delta_{12} u_{33} - \Delta_{13} u_{34} + \Delta_5 u_{37} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (229)$$

где Δ_j суть определители четвёртого порядка, которые без труда выражаются через определители третьего порядка d_j ($j=1, 2, \dots, 22$). Разделив первое уравнение на Δ_1 и второе на Δ_6 , получим:

$$\left. \begin{aligned} 1 - z_2 u_{32} + z_3 u_{33} - z_4 u_{34} + z_5 u_{35} &= 0, \\ 1 - z_7 u_{32} + z_8 u_{33} - z_9 u_{34} + z_{10} u_{36} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (230)$$

Каждое из уравнений написанной системы представляет собой условие замкнутости некоторой пятизвенной шарнирной цепи, причём обе цепи имеют общее основание I , их кривошипные звенья расположены под постоянным углом φ , коромысла — под постоянным углом φ и шатуны — под постоянным углом θ .

Построим обе цепи при $\varphi_{3k} = 0$ и соединим названные выше звенья под постоянным углом (фиг. 533). В результате построения получим восьмизвенный механизм, у которого звено EDH повернётся на угол φ_{33} , а звено BCD' — на угол φ_{34} при повороте кривошипа ABF на угол φ_{32} . Так как при постановке на звено BCD' механизм превращается в параллелограммный механизм $BFDD'$ с группой третьего порядка $EDHDC A$, то определение его положений при вращении кривошипа ABF особых трудностей не представляет. Задавшись рядом значений φ_{32} , определяем по положениям механизма углы φ_{33} , φ_{34} и строим кривые $\varphi_{33} = f_1(\varphi_{32})$, $\varphi_{34} = f_2(\varphi_{32})$.



Фиг. 533.

Построим пятизвенную цепь, соответствующую уравнению $D_3 = 0$ при значениях $\varphi_{3k} = 0$. Задаваясь значениями φ_{32} и определяя по кривой f_1 соответствующие им значения φ_{33} , поворачиваем кривошипные звенья цепи на эти углы и находим соответствующие им положения остальных звеньев. Измерив углы поворотов шатунного звена, определяем значения φ_{34} и строим кривую $\varphi_{34} = f_3(\varphi_{32})$.

Точки пересечения кривых f_2 и f_3 определяют корни φ_{32} и φ_{34} уравнения системы (229). Соответствующие им значения φ_{33} определяются по кривой f_1 . После определения φ_{32} , φ_{33} , φ_{34} искомая цепь строится по своему определителю и соединяется с выбранным четырёхзвенником.

По аналогичной схеме строится шестизвенник, у которого точка шатунной плоскости должна пройти через семь заданных точек неподвижной плоскости, лежащих на произвольной кривой.

ХIII. СИНТЕЗ МНОГОЗВЕННЫХ МЕХАНИЗМОВ.

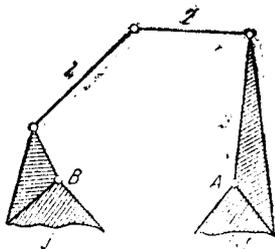
§ 108. Синтез многозвенных механизмов первого класса второго порядка.

Полученные результаты легко распространяются на любой плоский механизм первого класса второго порядка. Если будет установлено, что механизм первого класса второго порядка образуется из кривошипа и конечного числа простых цепей, то тем самым доказывается для него возможность решения всех типовых задач синтеза и даётся сам метод их решения. Мы убедились, что шестизвенный механизм первого класса второго порядка образуется из кривошипа и двух простых цепей.

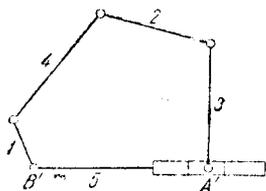
Докажем теперь общую теорему, устанавливающую возможность образования механизма первого класса второго порядка из простых цепей.

Теорема 1. Всякий механизм первого класса второго порядка с n звеньями может быть образован из кривошипа стойки и $\frac{n-2}{2}$ простых цепей.

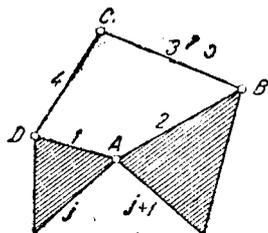
Допустим, что теорема верна для механизма с n звеньями, и докажем, что в таком случае она будет верна и для механизма с $n+2$ звеньями. Выделим в механизме те звенья, к которым должна быть присоединена двухповодковая группа, и обозначим их через j и $j+1$ (фиг. 534). Отметим точки присоединения звеньев цепи (шарниры) A и B . Будем рассматривать AB как некоторое кулисное звено кинематической цепи и определим положение



Фиг. 534.



Фиг. 535.



Фиг. 536.

точки A относительно точки B комплексными числами $z_k = r_{5k} u_{5k}$. Возьмём простую цепь с кулисой (фиг. 535) и присоединим её шарниры A' и B' к выбранным точкам A и B . Связем теперь жёстко звенья j и 1 , $j+1$ и 3 и выростим звено 5.

В результате получим диаду, присоединённую к основной цепи, и механизм с $n+2$ звеньями, образованный из кривошипа и $\frac{n-2}{2} + 1 = \frac{n}{2}$ простых цепей. Так как для $n=4, 6, \dots$ в правильности теоремы мы убедились непосредственно, то отсюда следует, что она верна для любого чётного значения числа n . Из доказанной теоремы следует, что для любого механизма первого класса второго порядка различные задачи синтеза приводятся к определению размеров звеньев $\frac{n-2}{2}$ простых цепей. Механизм образуется соединением этих основных структурных единиц в одну общую цепь, удовлетворяющую всем условиям поставленной задачи.

Из теоремы 1 вытекает и метод решения задач по синтезу механизмов первого класса второго порядка.

Пусть, например, требуется определить размеры звеньев восьмизвенного механизма первого класса второго порядка, удовлетворяющего ряду наперёд заданных условий. Строим по условиям задачи шестизвенный механизм. По известным размерам и положениям звеньев механизма вычисляем модули и аргументы комплексных чисел z_k , после чего определяем размеры звеньев цепи (фиг. 535) и присоединяем её к уже найденному шестизвеннику указанным выше способом.

На практике определение модулей и аргументов чисел z_k для ряда положений механизма обычно связано с громоздкими вычислительными операциями. В связи с этим следует всегда стремиться к тому, чтобы двухповодковая группа присоединялась к механизму первого класса второго порядка при помощи простой цепи без кулисы. Очевидно, что при этом отпадает необходимость в определении величин z_k . На фиг. 536 показан такой случай присоединения двухповодковой группы при помощи простой четырёхзвенной цепи $ABCD$ к звеньям j и $j+1$ механизма, имеющим общий шарнир в точке A .

§ 109. Синтез механизмов первого класса третьего порядка.

Механизмы первого класса третьего порядка в общем случае образуются присоединением трёхповодковой группы к механизмам первого класса второго порядка.

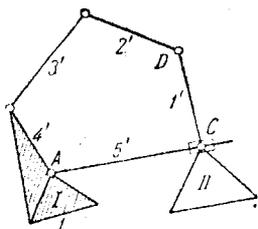
Теорема 2. Трёхповодковая группа присоединяется к трём произвольным звеньям механизма первого класса второго порядка посредством цепи, составленной из двух простых цепей.

Отметим на звеньях механизма первого класса второго порядка положение шарниров A , B и C , к которым будут присоединяться поводки (фиг. 537), и введём обозначения:

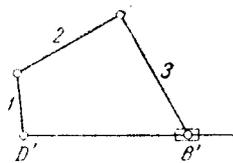
$$AC = r_{5k}u_{5k}, \quad BC = r_{4k}u_{4k}.$$

Модули r_{4k} , r_{5k} и аргументы φ_{4k} и φ_{5k} комплексных чисел BC и AC вычисляются по размерам и положениям звеньев заданного механизма первого класса второго порядка.

Построим шестизвенную цепь с кулисой (фиг. 535) и присоединим её к звеньям I и II заданного механизма в точках A и C (фиг. 537). Считая, что вектор DB известен в заданных положениях образовавшейся после присоеди-



Фиг. 537.



Фиг. 538.

динения цепи, построим пятизвенную цепь (фиг. 538) и присоединим её к звеньям $2'$ и III ранее найденной цепи в точках D и B . Соединив звенья 1 и $2'$, 3 и III жёстко и отбросив кулисные звенья 4 и 5 , получим трёхзвенную группу, присоединённую к трём звеньям I , II и III механизма первого класса второго порядка (фиг. 539). Доказательство, очевидно, не изменится, если вспомогательные цепи будут многозвенными.

Теорема 2 позволяет распространить на любой механизм первого класса третьего порядка методы решения задач, установленные для четырёхзвенных и шестизвенных механизмов.

Как было установлено в § 65, общее решение задач для всякой простой кинематической цепи определяется формулами (153). Отсюда следует, что для любой сложной кинематической цепи, образованной наложением (соединением) простых цепей, решения различных задач синтеза определяются теми же формулами (153).

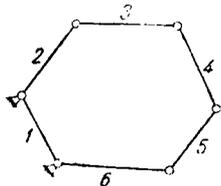
Теорема 2 устанавливает возможность образования механизмов первого класса третьего порядка из простых цепей и указывает способ соединения самих цепей. Исходные цепи подобраны так, чтобы различные задачи по синтезу решались без использования уравнений совместности, по крайней мере при трёх (и большем числе) заданных условиях для одного звена.

Таким образом, вопрос о решении задач синтеза по формулам (153) для плоского механизма любой степени сложности приводится к доказательству теоремы о возможности его образования путём наложения простых цепей.

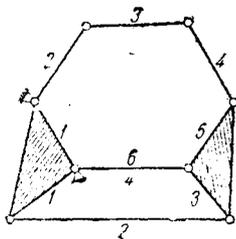
§ 110. Образование многозвенных механизмов.

Возьмём шестизвенную и кинематическую цепь с вращательными парами (фиг. 540) и присоединим к ней некоторую четырёхзвенную цепь так, чтобы два произвольных звена обеих цепей совпали. Соединив жёстко две другие пары звеньев, имеющих общие шарниры с совмещёнными звеньями (фиг. 541),

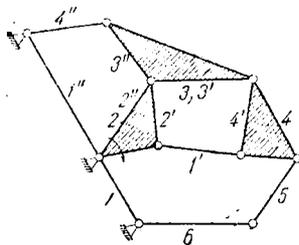
получим семизвенную кинематическую цепь, у которой число степеней свободы на единицу меньше, нежели у исходной шестизвенной цепи. Так как выбранная шестизвенная цепь с неподвижным звеном имеет три степени



Фиг. 540.

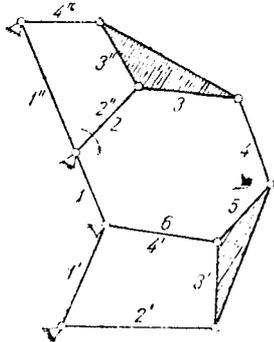


Фиг. 541.



Фиг. 542.

свободы, то для получения механизма к ней необходимо присоединить две вспомогательные четырёхзвенные цепи описанным выше способом. В результате, очевидно, получится восьмизвенный механизм, причём структура его будет зависеть от порядка присоединения вспомогательных цепей к основной.



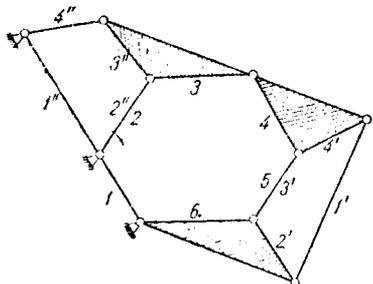
Фиг. 543.

Общее возможное число комбинаций равно числу сочетаний из шести элементов по два: $C = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$. Однако, из этих 15 возможных комбинаций будут отличаться способом присоединения звеньев (но не обязательно структурой) лишь 9 восьмизвенных механизмов, так как в основной шестизвенной цепи звенья 2 и 6, 3 и 5 не отличаются друг от друга способом их соединения с остальными звеньями.

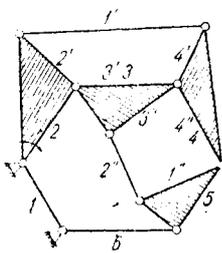
На фиг. 542—545 изображены получающиеся при этом типовые механизмы. Среди них мы находим механизмы первого класса второго порядка (фиг. 542), первого класса третьего порядка (фиг. 543), третьего класса нулевого порядка (фиг. 544) и третьего класса второго порядка (фиг. 545).

Ещё более широкие возможности для образования механизмов даёт семизвенная цепь с вращательными парами (фиг. 546).

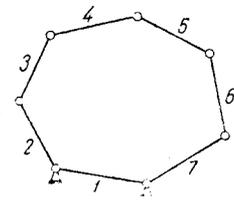
Для превращения этой цепи в механизм к ней присоединяются описанным выше способом три четырёхзвенные цепи. В результате получаем 35 де-



Фиг. 544.



Фиг. 545.



Фиг. 546.

сятизвенных механизмов, из которых будут отличаться способом присоединения звеньев (но не обязательно структурой) лишь 19. Среди этих механизмов мы имеем уже представителей четвёртого класса.

В общем случае замкнутая простая m -звенная цепь ($m > 4$), имеющая $m - 3$ степеней свободы, преобразуется в механизм с $2m - 4$ звеньями при-

соединением к ней $m - 4$ четырёхзвенных цепей. При этом из каждой цепи обязательно получаются механизмы первого класса второго и третьего порядка, нашедшие себе применение в машиностроении.

При чётном m число различных типов механизмов, отличающихся способом соединения звеньев (но не обязательно структурой), равно:

$$\frac{1}{2} \left[C_m^4 + C_m^2 \right].$$

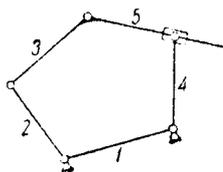
При нечётном m число различных типов механизмов равно:

$$\frac{1}{2} \left[C_m^4 + C_{\frac{m-1}{2}}^2 \right].$$

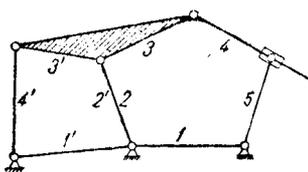
Отметим попутно, что всякую простую m -звенную кинематическую цепь можно спроектировать по $m - 1$ условиям, заданным для всех подвижных звеньев, не прибегая к решению уравнений совместности, по $m + 1$ условиям, решая систему двух комплексных уравнений совместности и по $m + 2$ положениям звеньев, решая систему трёх комплексных уравнений совместности (при $m > 4$).

Для цепей рассматриваемого типа в принципе можно поставить вопрос о решении задач синтеза при задании до $2m - 3$ условий для одного звена. Однако, практические возможности пока ограничены указанными пределами в связи с исключительными трудностями, возникающими при решении большего числа уравнений совместности.

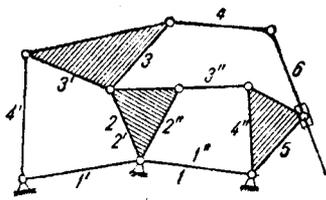
Значительно большие возможности дают цепи с одной кулисой, к рассмотрению которых мы переходим. Возьмём шестизвенную цепь (фиг. 547). По условиям проектирования такой цепи звенья 3 и 5 могут быть соединены



Фиг. 547.



Фиг. 548.



Фиг. 549.

жёстко, в результате чего получается пятизвенная цепь с двумя степенями свободы. Для превращения этой цепи в механизм достаточно присоединить к ней одну четырёхзвенную цепь, например так, как это показано на фиг. 548.

Аналогичным образом из семизвенной цепи получаются восьмизвенные механизмы (фиг. 549) и в общем случае из цепи с m -звеньями механизмы с $2m - 6$ звеньями. Если считать, что из системы уравнений совместности будут найдены величины r_{mk} , v_{mk} , a_{mk} определяющие движение ползушки относительно кулисного звена, то такая система будет линейной и решение её не представляет затруднений. В этом случае для одного звена цепи можно задать

$$s \leq 2m - 6$$

различных условий, решить систему линейных уравнений совместности, полагая $r_{m2} \neq 1$, и затем вычислить размеры и положения звеньев искомой цепи по её определителю.

Таким образом, при применении для проектирования механизмов цепей с одними вращательными парами мы можем задать для одного звена механизма с $2m - 4$ звеньями не более $m + 1$ всевозможных условий, а при применении цепей с одной кулисой -- не более $2m - 4$ условий для механизма

с таким же числом звеньев. Так как $2m - 4 = m + 1$ при $m = 5$, т. е. для шестизвенных механизмов, а при $m > 5$

$$m + 1 < 2m - 4,$$

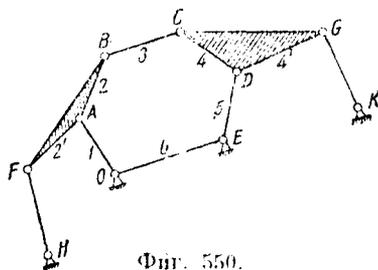
то для образования восьмизвенных и более сложных механизмов целесообразно применять цепь с одной кулисой.

При использовании этой же цепи для образования шестизвенных механизмов получаются более простые (линейные) уравнения совместности, нежели при использовании для этих же целей цепи с одними вращательными парами.

§ 111. Схемы решения задач синтеза многозвенных механизмов по различным условиям.

Так как механизмы с любым числом звеньев образуются из простой цепи, по одному общему принципу, то достаточно изложить схему проектирования для какой-либо одной конкретной цепи, например восьмизвенной.

Пусть заданы восемь положений ведущего кривошипа OA углами φ_{1k} и соответствующие им восемь положений рабочего звена ED — углами φ_{5k} ($k=2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$). Присоединим к звену OA произвольную двухповодковую группу AFH (фиг. 550) и измерим углы φ_{2k} , определяющие повороты шатуна AF в восьми положениях при расположении кривошипа OA в заданных положениях. Присоединив аналогичную группу DGK к звену ED , измерим углы φ_{4k} , определяющие повороты звена DG при расположении



Фиг. 550.

кривошипа в заданных по условию положениях.

В случае необходимости можно задать до пяти условий для звеньев FH и KG и определить размеры звеньев четырехзвенников $OAFH$ и $EDGK$ расчетным путем по методам, изложенным в главе XI. Однако, в этом случае мы рискуем получить четырехзвенники, у которых кривошипные звенья OA и ED не смогут расположиться в заданных по условию восьми положениях. Поэтому проще всего выбрать четырехзвенники произвольно, по-

заботившись лишь о прохождении их кривошипов через заданные положения.

Построим вспомогательную шестизвенную кинематическую цепь с неподвижным звеном 6, задав восемь положений и направлений ее звеньев 1, 2, 4, 5 углами $\varphi_{1k}, \varphi_{2k}, \varphi_{4k}, \varphi_{5k}$. Составляем матрицу цепи:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} & u_{42} & u_{52} & 1 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & u_{43} & u_{53} & 1 \\ u_{14} & u_{24} & u_{34} & u_{44} & u_{54} & 1 \\ u_{15} & u_{25} & u_{35} & u_{45} & u_{55} & 1 \\ u_{16} & u_{26} & u_{36} & u_{46} & u_{56} & 1 \\ u_{17} & u_{27} & u_{37} & u_{47} & u_{57} & 1 \\ u_{18} & u_{28} & u_{38} & u_{48} & u_{58} & 1 \end{pmatrix}$$

и выделяем из неё определитель цепи:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} & u_{42} & u_{52} & 1 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & u_{43} & u_{53} & 1 \\ u_{14} & u_{24} & u_{34} & u_{44} & u_{54} & 1 \\ u_{15} & u_{25} & u_{35} & u_{45} & u_{55} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

и независимые уравнения совместности:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} & u_{42} & u_{52} & 1 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & u_{43} & u_{53} & 1 \\ u_{14} & u_{24} & u_{34} & u_{44} & u_{54} & 1 \\ u_{15} & u_{25} & u_{35} & u_{45} & u_{55} & 1 \\ u_{16} & u_{26} & u_{36} & u_{46} & u_{56} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} & u_{42} & u_{52} & 1 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & u_{43} & u_{53} & 1 \\ u_{14} & u_{24} & u_{34} & u_{44} & u_{54} & 1 \\ u_{15} & u_{25} & u_{35} & u_{45} & u_{55} & 1 \\ u_{17} & u_{27} & u_{37} & u_{47} & u_{57} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} & u_{42} & u_{52} & 1 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & u_{43} & u_{53} & 1 \\ u_{14} & u_{24} & u_{34} & u_{44} & u_{54} & 1 \\ u_{15} & u_{25} & u_{35} & u_{45} & u_{55} & 1 \\ u_{18} & u_{28} & u_{38} & u_{48} & u_{58} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Неизвестными будут углы φ_{3k} ($k = 3, 4, 5, 6, 7, 8$). Так как выбор угла φ_{32} произволен, то условия задачи удовлетворяют ∞^1 цепей и, следовательно, имеется принципиальная возможность решить задачу при девяти заданных положениях звеньев 1, 2, 4, 5 цепи. К сожалению, до сих пор ещё не получено практически приемлемое решение уравнений совместности, число которых для этого случая равно четырём (или восьми) обычным уравнениям.

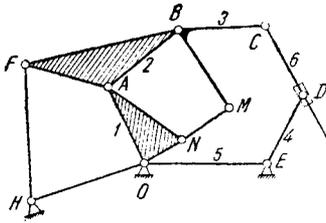
При восьми заданных положениях звеньев простой цепи уравнения совместности решаются по схеме, изложенной в § 107. Разлагаем определители D_1, D_2, D_3 по элементам третьих столбцов:

$$\begin{aligned} \Delta_1 - \Delta_2 u_{32} + \Delta_3 u_{33} - \Delta_4 u_{34} + \Delta_5 u_{35} - \Delta_6 u_{36} &= 0, \\ \Delta_7 - \Delta_8 u_{32} + \Delta_9 u_{33} - \Delta_{10} u_{34} + \Delta_{11} u_{35} - \Delta_{12} u_{36} &= 0, \\ \Delta_{12} - \Delta_{13} u_{32} + \Delta_{14} u_{33} - \Delta_{15} u_{34} + \Delta_{16} u_{35} - \Delta_{17} u_{36} &= 0, \end{aligned}$$

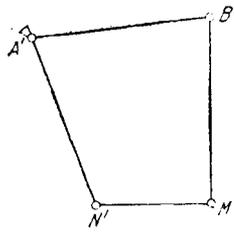
где Δ_j — определители пятого порядка, зависящие только от заданных углов $\varphi_{23}, \varphi_{14}, \varphi_{45}, \varphi_{55}$. Обозначая $\Delta_1 = \Delta_1 - \Delta_2 u_{32}$, $\Delta_{17} = \Delta_7 - \Delta_8 u_{32}$, $\Delta_{18} = \Delta_{12} - \Delta_{13} u_{32}$, приводим уравнение совместности к виду (224) и решаем по методу, изложенному в § 107. После определения углов $\varphi_{33}, \varphi_{34}, \varphi_{35}$ исконая простая цепь строится по своему определителю. Присоединяем к найденной цепи четырёхзвенник $EDGK$ и $OAFH$, изменяя соответствующим образом масштаб, соединяем жёстко AB с AF , DC с DG и получаем искомый восьмизвенник в начальном положении (фиг. 550). По структуре спроектированный механизм представляет собой четырёхзвенник $OAFH$ с трёхпроводковой группой $CDGBEK$, присоединённой к шатуну и стойке.

Решение задачи значительно упрощается при использовании для образования искомого механизма цепи с одной кулисой. Пусть, попрежнему восемь

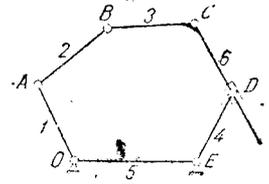
положений ведущего звена OA заданы углами φ_{1k} (фиг. 551) и соответствующие им восемь положений рабочего звена ED — углами φ_{4k} . Присоединим к звену OA диаду AFH и измерим углы φ_{2k} , определяющие повороты шатуна $A'B'$ при расположении кривошипа OA в заданных k положениях. Возьмём



Фиг. 551.



Фиг. 552.



Фиг. 553.

произвольно четырёхзвенную цепь $A'B'M'N'$ (фиг. 552), повернём звено $A'N'$ на углы φ_{1k} , а звено $A'B'$ — на соответствующие им углы φ_{2k} и измерим углы φ_{3k} , определяющие повороты звена $B'M'$. Спроектируем цепь (фиг. 553) по матрице:

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & u_{12} & u_{22} & u_{32} & r_{62}u_{32} & u_{42} \\ 1 & u_{13} & u_{23} & u_{33} & r_{63}u_{33} & u_{43} \\ 1 & u_{14} & u_{24} & u_{34} & r_{64}u_{34} & u_{44} \\ 1 & u_{15} & u_{25} & u_{35} & r_{65}u_{35} & u_{45} \\ 1 & u_{16} & u_{26} & u_{36} & r_{66}u_{36} & u_{46} \\ 1 & u_{17} & u_{27} & u_{37} & r_{67}u_{37} & u_{47} \\ 1 & u_{18} & u_{28} & u_{38} & r_{68}u_{38} & u_{48} \end{vmatrix}.$$

Выделяем из матрицы определитель цепи:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & u_{12} & u_{22} & u_{32} & r_{62}u_{32} & u_{42} \\ 1 & u_{13} & u_{23} & u_{33} & r_{63}u_{33} & u_{43} \\ 1 & u_{14} & u_{24} & u_{34} & r_{64}u_{34} & u_{44} \\ 1 & u_{15} & u_{25} & u_{35} & r_{65}u_{35} & u_{45} \end{vmatrix} \equiv 0$$

и независимые уравнения совместности:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & u_{12} & u_{22} & u_{32} & r_{62}u_{32} & u_{42} \\ 1 & u_{13} & u_{23} & u_{33} & r_{63}u_{33} & u_{43} \\ 1 & u_{14} & u_{24} & u_{34} & r_{64}u_{34} & u_{44} \\ 1 & u_{15} & u_{25} & u_{35} & r_{65}u_{35} & u_{45} \\ 1 & u_{16} & u_{26} & u_{36} & r_{66}u_{36} & u_{46} \end{vmatrix} = 0,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & u_{12} & u_{22} & u_{32} & r_{62}u_{32} & u_{42} \\ 1 & u_{13} & u_{23} & u_{33} & r_{63}u_{33} & u_{43} \\ 1 & u_{14} & u_{24} & u_{34} & r_{64}u_{34} & u_{44} \\ 1 & u_{15} & u_{25} & u_{35} & r_{65}u_{35} & u_{45} \\ 1 & u_{17} & u_{27} & u_{37} & r_{67}u_{37} & u_{47} \end{vmatrix} = 0,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & u_{12} & u_{22} & u_{32} & r_{62}u_{32} & u_{42} \\ 1 & u_{13} & u_{23} & u_{33} & r_{63}u_{33} & u_{43} \\ 1 & u_{14} & u_{24} & u_{34} & r_{64}u_{34} & u_{44} \\ 1 & u_{15} & u_{25} & u_{35} & r_{65}u_{35} & u_{45} \\ 1 & u_{18} & u_{28} & u_{38} & r_{68}u_{38} & u_{48} \end{vmatrix} = 0.$$

Неизвестными будут r_{6k} ($k = 3, 4, 5, 6, 7, 8$). Задаваясь $r_{62} \neq 1$, так как в противном случае единственным решением уравнений совместности будет $r_{6k} = 1$ и размеры звеньев 2, 3, 4, 6 обратятся при этом в нуль, разлагаем определители D_1, D_2, D_3 по элементам пятых столбцов:

$$\begin{aligned} \Delta_1 - \Delta_2 r_{62} + \Delta_3 r_{63} - \Delta_4 r_{64} + \Delta_5 r_{65} - \Delta_6 r_{66} &= 0, \\ \Delta_7 - \Delta_3 r_{62} + \Delta_9 r_{63} - \Delta_{10} r_{64} + \Delta_{11} r_{65} - \Delta_{12} r_{67} &= 0, \\ \Delta_{13} - \Delta_{14} r_{62} + \Delta_{15} r_{63} - \Delta_{16} r_{64} + \Delta_{17} r_{65} - \Delta_{18} r_{68} &= 0. \end{aligned}$$

где Δ_j — величины, зависящие только от заданных углов $\varphi_{1k}, \varphi_{2k}, \varphi_{3k}, \varphi_{4k}$; Приравнявая нулю действительные и мнимые части уравнений, получим систему шести обычных линейных уравнений для определения r_{6k} :

$$\begin{aligned} x_3 r_{63} - x_4 r_{64} + x_5 r_{65} - x_6 r_{66} &= x_2 r_{62} - x_1, \\ y_3 r_{63} - y_4 r_{64} + y_5 r_{65} - y_6 r_{66} &= y_2 r_{62} - y_1, \\ x_9 r_{63} - x_{10} r_{64} + x_{11} r_{65} - x_{12} r_{67} &= x_8 r_{62} - x_7, \\ y_9 r_{63} - y_{10} r_{64} + y_{11} r_{65} - y_{12} r_{67} &= y_8 r_{62} - y_7, \\ x_{15} r_{63} - x_{16} r_{64} + x_{17} r_{65} - x_{18} r_{68} &= x_{14} r_{62} - x_{13}, \\ y_{15} r_{63} - y_{16} r_{64} + y_{17} r_{65} - y_{18} r_{68} &= y_{14} r_{62} - y_{13}. \end{aligned}$$

Полученная система решается методом определителей. Для построения определителя цепи достаточно вычислить r_{63}, r_{64}, r_{65} . Найденная цепь соединяется с вспомогательными по схеме, изображённой на фиг. 551.

Изложенный метод устанавливает практическую возможность синтеза сложного механизма, для рабочего звена которого заданы m различных условий. Эти условия должны осуществляться в определённых и наперёд заданных положениях ведущего звена того же механизма. Если искомым механизм должен быть с одними вращательными парами, то для решения задачи выбирается простая цепь с $m - 1$ звеньями. Выбранная цепь превращается в механизм с $2m - 6$ звеньями присоединением к ней $m - 5$ четырёхзвенных цепей.

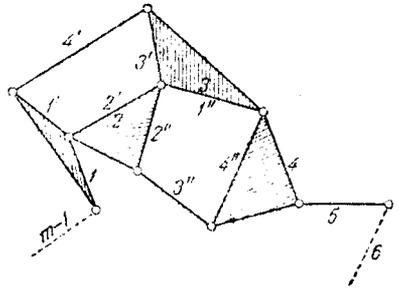
В зависимости от способа присоединения вспомогательных четырёхзвенников к основной цепи при синтезе последней возможны следующие случаи:

- 1) Выбранными вспомогательными цепями определено движение всех $m - 1$ звеньев основной $m - 1$ -звенной цепи.
- 2) Выбранными вспомогательными цепями определено движение только $m - 2$ или $m - 3$ звеньев цепи.

В первом случае основная цепь не может быть спроектирована с применением уравнений совместности, так как мы не располагаем соответствующими неизвестными величинами, и число условий, задаваемых для одного звена, должно быть снижено до $m - 2$.

Во втором случае мы располагаем необходимыми неизвестными, так как движение по крайней мере одного звена цепи не определено присоединяемыми вспомогательными четырёхзвенниками. Покажем, что второй случай всегда возможен.

Пусть 1, 2, ..., $m - 1$ — последовательно расположенные звенья основной цепи, среди которых имеется будущее ведущее звено искомого механизма (фиг. 554). Зададим для двух звеньев $1'$ и $2'$ первой вспомогательной четырёхзвенной цепи по m условий (положений, положений и угловых скоростей и т. д.) и вычислим по ним условия, определяющие движение звена $3'$. Присоединим первую четырёхзвенную цепь к звеньям 1, 2, 3 цепи так, чтобы звенья 2 и $2'$ совпали, и соединим жёстко звенья 1 и $1', 3$ и $3'$.



Фиг. 554.

Зададим для двух звеньев $1''$ и $2''$ второй четырёхзвенной цепи соответственно условия, определяющие движение звеньев $3'$ и $2'$ первой четырёхзвенной цепи, и найдём условия, определяющие движение звена 4. Присоединим вторую четырёхзвенную цепь к звеньям 2, 3, 4 цепи так, чтобы звенья $3'$ и $1''$ совпали, и соединим жёстко звенья 2 и $2''$, 4 и $4''$. Продолжая описанную операцию последовательно дальше, присоединим $m - 5$ вспомогательных четырёхзвенных цепей к $m - 3$ звеньям цепи, чем определим задание по m условий для всех этих $m - 3$ звеньев.

Зададим, далее, для последнего $m - 1$ звена цепи, считая его рабочим звеном, m , вообще говоря, произвольных условий, определяющих его движение, и для $m - 2$ звена зададим $m - 4$ аналогичных условий, считая, что параметры, определяющие четыре остальных условия, должны быть определены из уравнений совместности.

В результате получим систему величин, по которым составляем матрицу цепи. Выделим из матрицы систему двух независимых уравнений совместности и определяем из них величины, необходимые для построения определителя цепи.

Методы решения уравнений совместности и построения определителя для любой цепи ничем не отличаются от изложенных ранее приёмов синтеза четырёхзвенных и пятизвенных цепей.

Если в искомом механизме допускается одна поступательная пара, то для решения задачи выбирается цепь с $\frac{m}{2} + 3$ звеньями. Выбранная цепь превращается в механизм с m звеньями присоединением к ней $\frac{m - 4}{2}$ вспомогательных четырёхзвенных цепей, причём звено цепи, прилегающее к кулисе, жёстко соединяется с последней. Легко показать, аналогично изложенному для цепи с вращательными парами, что присоединяемые четырёхзвенники определяют задания условий для $\frac{m}{2}$ некулисных звеньев основной цепи и одного кулисного звена.

Остаётся одно некулисное рабочее звено, для которого m условий, определяющих его движение, могут быть выбраны, вообще говоря, произвольно. Незвестными, определяемыми из линейных уравнений совместности, будут r_{jk} , v_{jz} , a_{jz} , всего $m - 2$ неизвестных.

Так как движение ползушки определяется m величинами и для начального положения ползушки обычно выбирают $r_{jk} = 1$, то остаётся задать значение ещё одного параметра.

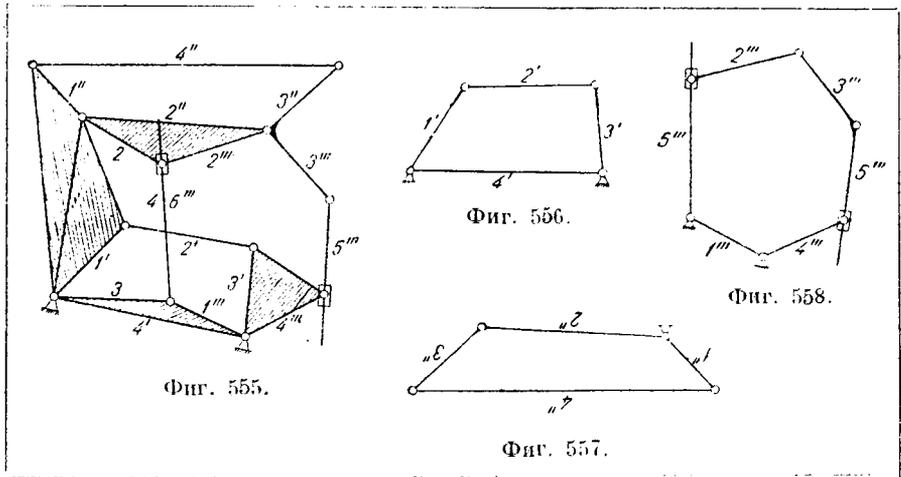
Если при этом задаётся кинематическая величина (v , a), то она обязательно не должна быть равна нулю; если же задаётся размерная величина (r), то она не должна быть равна единице. Остальные величины, определяющие движение ползушки, находятся решением системы обычных линейных уравнений совместности, которые получаются из $\frac{m - 2}{2}$ комплексных определителей, выделяемых из матрицы цепи, составленной по обычным правилам. После решения уравнений совместности искомая цепь строится по своему определителю. Для получения искомого механизма выбранные вспомогательные цепи подобно преобразуются и присоединяются к построенной цепи.

112. Синтез многозвенных механизмов по заданным положениям точки шатуна.

Пусть задано m точек неподвижной плоскости, через которые должна пройти некоторая точка шатуна механизма, и требуется построить механизм, осуществляющий это задание. Если искомым механизм должен быть с одними вращательными парами, то решение задач ничем не отличается от изложенного в главе XII, увеличится лишь число строк и столбцов соответствующей матрицы, по которой проектируется вспомогательная цепь.

Остаётся рассмотреть схему решения задачи для случая, когда в проектируемом механизме допускается одна ползушка. В этом случае система урав-

нений совместности линейна. Изложим схему решения для какого-либо частного значения m , а затем обобщим результаты. Пусть $m = 8$. Выбираем произвольную нятизвенную цепь с кулисой, устанавливаем центр её ползушки в заданные точки и измеряем углы φ_{1k} и φ_{2k} звеньев 1, 2 (фиг. 555). Выби-



раем произвольную четырёхзвенную цепь с неподвижным звеном (фиг. 556), устанавливаем её кривошип под углами φ_{1k} к начальному положению и измеряем углы φ_{3k} коромысла 3. Выбираем вторую вспомогательную цепь (фиг. 557), устанавливаем звено 1 под углами φ_{1k} , а звено 2 — под углами φ_{2k} , и измеряем углы φ_{3k} звена 3. Спроектируем вспомогательную семизвенную цепь по матрице (фиг. 558):

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & r_{62}u_{62} & u_{22} & u_{32} & r_{53}u_{32} & u_{42} \\ 1 & r_{63}u_{63} & u_{23} & u_{33} & r_{53}u_{33} & u_{43} \\ 1 & r_{64}u_{64} & u_{24} & u_{34} & r_{54}u_{34} & u_{44} \\ 1 & r_{65}u_{65} & u_{25} & u_{35} & r_{55}u_{35} & u_{45} \\ 1 & r_{66}u_{66} & u_{26} & u_{36} & r_{56}u_{36} & u_{46} \\ 1 & r_{67}u_{67} & u_{27} & u_{37} & r_{57}u_{37} & u_{47} \\ 1 & r_{68}u_{68} & u_{28} & u_{38} & r_{58}u_{38} & u_{48} \end{pmatrix}$$

выбрав входящие в неё величины следующим образом: $r_{6k}u_{6k}$ — координаты заданных точек неподвижной плоскости, причём $r_{61}u_{61} = 1$, $u_{2k} = e^{i\varphi_{2k}}$, $u_{32} = e^{i\varphi_{3k}}$, $u_{4k} = e^{i\varphi_{3k}}$.

Выделяем из матрицы определитель цепи:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & r_{62}u_{62} & u_{22} & u_{32} & r_{52}u_{32} & u_{42} \\ 1 & r_{63}u_{63} & u_{23} & u_{33} & r_{53}u_{33} & u_{43} \\ 1 & r_{64}u_{64} & u_{24} & u_{34} & r_{54}u_{34} & u_{44} \\ 1 & r_{65}u_{65} & u_{25} & u_{35} & r_{55}u_{35} & u_{45} \end{pmatrix} = 0$$

и независимые уравнения совместности:

$$\begin{aligned}
 D_1 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & r_{62}u_{62} & u_{22} & u_{32} & r_{52}u_{52} & u_{42} \\ 1 & r_{63}u_{63} & u_{23} & u_{33} & r_{53}u_{53} & u_{43} \\ 1 & r_{64}u_{64} & u_{24} & u_{34} & r_{54}u_{54} & u_{44} \\ 1 & r_{65}u_{65} & u_{25} & u_{35} & r_{55}u_{55} & u_{45} \\ 1 & r_{66}u_{66} & u_{26} & u_{36} & r_{56}u_{56} & u_{46} \end{vmatrix} = 0, \\
 D_2 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & r_{62}u_{62} & u_{22} & u_{32} & r_{52}u_{52} & u_{42} \\ 1 & r_{63}u_{63} & u_{23} & u_{33} & r_{53}u_{53} & u_{43} \\ 1 & r_{64}u_{64} & u_{24} & u_{34} & r_{54}u_{54} & u_{44} \\ 1 & r_{65}u_{65} & u_{25} & u_{35} & r_{55}u_{55} & u_{45} \\ 1 & r_{67}u_{67} & u_{27} & u_{37} & r_{57}u_{57} & u_{47} \end{vmatrix} = 0, \\
 D_3 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & r_{62}u_{62} & u_{22} & u_{32} & r_{52}u_{52} & u_{42} \\ 1 & r_{63}u_{63} & u_{23} & u_{33} & r_{53}u_{53} & u_{43} \\ 1 & r_{64}u_{64} & u_{24} & u_{34} & r_{54}u_{54} & u_{44} \\ 1 & r_{65}u_{65} & u_{25} & u_{35} & r_{55}u_{55} & u_{45} \\ 1 & r_{68}u_{68} & u_{28} & u_{38} & r_{58}u_{58} & u_{48} \end{vmatrix} = 0.
 \end{aligned}$$

Разлагаем определители D_1 , D_2 , D_3 по элементам их пятых столбцов:

$$\begin{aligned}
 \Delta_1 - \Delta_2 r_{52} + \Delta_3 r_{53} - \Delta_4 r_{54} + \Delta_5 r_{55} - \Delta_6 r_{56} &= 0, \\
 \Delta_7 - \Delta_8 r_{52} + \Delta_9 r_{53} - \Delta_{10} r_{54} + \Delta_{11} r_{55} - \Delta_{12} r_{57} &= 0, \\
 \Delta_{13} - \Delta_{14} r_{52} + \Delta_{15} r_{53} - \Delta_{16} r_{54} + \Delta_{17} r_{55} - \Delta_{18} r_{58} &= 0,
 \end{aligned}$$

где Δ_j — коэффициенты, зависящие только от заданных величин. Полученная система трёх комплексных уравнений совместности превращается в систему

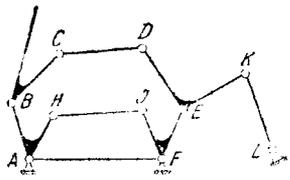
$$\begin{aligned}
 x_3 r_{53} - x_4 r_{54} + x_5 r_{55} - x_6 r_{56} &= x_2 r_{52} - x_1, \\
 y_3 r_{53} - y_4 r_{54} + y_5 r_{55} - y_6 r_{56} &= y_2 r_{52} - y_1, \\
 x_9 r_{53} - x_{16} r_{54} + x_{11} r_{55} - x_{12} r_{57} &= x_8 r_{52} - x_7, \\
 y_9 r_{53} - y_{16} r_{54} + y_{11} r_{55} - y_{12} r_{57} &= y_8 r_{52} - y_7, \\
 x_{16} r_{53} - x_{16} r_{54} + x_{17} r_{55} - x_{18} r_{58} &= x_{14} r_{52} - x_{13}, \\
 y_{16} r_{53} - y_{16} r_{54} + y_{17} r_{55} - y_{18} r_{58} &= y_{14} r_{52} - y_{13}
 \end{aligned}$$

и решается методом определителей. После определения неизвестных r_{53} , r_{54} , r_{55} искомая цепь строится по своему определителю D . Вспомогательные цепи подобно преобразуются и соединяются с пятизвенной цепью по схеме, изображённой на фиг. 555. В результате соединения цепей получаем восьмизвенный механизм первого класса третьего порядка, у которого точка шатунового звена проходит через заданные точки неподвижной плоскости.

При любом числе заданных точек схема решения задачи совершенно не изменится — увеличится лишь число вспомогательных четырёхзвенных цепей и число уравнений совместности. При этом полезно отметить, что число четырёхзвенных цепей равно $\frac{m-4}{2}$, вспомогательной будет цепь с $\frac{m}{2} + 3$ звеньями, и число линейных уравнений совместности равно $m - 2$. Отметим что максимальное число задаваемых точек должно быть в рассматриваемом случае чётным.

§ 113. Синтез многозвенных механизмов по m заданным положениям шатуновой плоскости.

Пусть задано m положений шатуновой плоскости комплексными координатами $z_k = r_k e^{i\alpha_k}$ и углами φ_k . Наиболее простым будет случай, когда точки расположены на одной окружности радиуса, равного единице. Возьмём простую шарнирную цепь с $m - 2$ звеньями (при $m > 5$) и присоединим к ней $m - 6$ четырёхзвенных простых цепей. В результате построения можно всегда получить механизм с $2m - 8$ звеньями, у которого движение трёх звеньев не определяется присоединяемыми вспомогательными цепями, причём одно из этих трёх звеньев является кривошипным. Зададим положение кривошипного звена цепи с $m - 2$ звеньями, считая его первым, величинами $z_k = e^{i\alpha_k} = u_{1k}$ ($\alpha_1 = 0$) и направления, занимаемые вторым звеном, — величинами $\varphi_{2k} = \varphi_k$ ($k = 2, 3, \dots, m$). Для $m = 5$ звеньев цепи выберем величины φ_{jk} совпадающими с соответствующими углами поворотов звеньев присоединяемых вспомогательных четырёхзвенных цепей. Тогда углы φ_{jk} оставшегося одного звена смогут служить неизвестными в уравнениях совместности. Общий метод построения простых цепей по заданным φ_{jk} с решением одного, двух и трёх уравнений совместно рассмотрен в главе XII. Для получения механизма основная цепь с $m - 2$ звеньями связывается с вспомогательными четырёхзвенниками и присоединяется к начальному положению шатуновой плоскости. На фиг. 559 схематически изображён полученный таким образом восьмизвенный механизм.

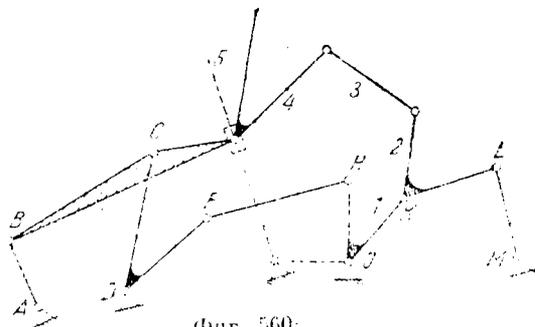


Фиг. 559.

За вспомогательную принята шестизвенная цепь $ABCDEF$, которая строится по матрице:

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & u_{12} & u_{22} & u_{32} & u_{42} & u_{52} \\ 1 & u_{13} & u_{23} & u_{33} & u_{43} & u_{53} \\ 1 & u_{14} & u_{24} & u_{34} & u_{44} & u_{54} \\ 1 & u_{15} & u_{25} & u_{35} & u_{45} & u_{55} \\ 1 & u_{16} & u_{26} & u_{36} & u_{46} & u_{56} \\ 1 & u_{17} & u_{27} & u_{37} & u_{47} & u_{57} \\ 1 & u_{18} & u_{28} & u_{38} & u_{48} & u_{58} \end{vmatrix}.$$

Выбираем произвольный шарнирный четырёхзвенник $AHIF$, устанавливаем кривошип AH под углами $\varphi_{1k} = \alpha_k$ и измерим углы φ_{5k} поворота второго кривошипа (второмысла).



Фиг. 560.

Выбираем второй шарнирный четырёхзвенник $FEKI$, поворачиваем его кривошип EF на углы φ_{5k} и измерим углы φ_{4k} поворота его шатуна EK .

Подставляя измеренные и заданные величины в матрицу M , строим искомую цепь по схеме, установленной выше, решая систему трёх уравнений совместности типа (229). Неизвестными, определяемыми из уравнений совместности, будут углы φ_{3k} ($k=3, 4, 5, 6, 7, 8$). Механизм образуется соединением построенной и выбранных цепей (фиг. 559).

При расположении точек z_k на произвольной шатунной кривой заданного шарнирного четырёхзвенника $ABCD$ задача решается при помощи цепи с одной кулисой. На фиг. 560 изображена семизвенная простая цепь с одной кулисой, которая строится по матрице:

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & u_{12} & u_{22} & u_{32} & u_{42} & r_{52}u_{52} \\ 1 & u_{13} & u_{23} & u_{33} & u_{43} & r_{53}u_{53} \\ 1 & u_{14} & u_{24} & u_{34} & u_{44} & r_{54}u_{54} \\ 1 & u_{15} & u_{25} & u_{35} & u_{45} & r_{55}u_{55} \\ 1 & u_{16} & u_{26} & u_{36} & u_{46} & r_{56}u_{56} \\ 1 & u_{17} & u_{27} & u_{37} & u_{47} & r_{57}u_{57} \\ 1 & u_{18} & u_{28} & u_{38} & u_{48} & r_{58}u_{58} \end{vmatrix}$$

и превращается в десятизвенный механизм при помощи двух вспомогательных четырёхзвенных цепей. Величины, входящие в матрицу, задаются следующим образом: $r_{5k}u_{5k} = z_k$ для кулисного звена, $\varphi_{47} = \varphi_7$, φ_{1k} равны углам поворота коромысла PI первого вспомогательного четырёхзвенника $DFHI$, когда его кривошип FD поворачивается, как коромысло GD заданного четырёхзвенника, φ_{2k} равны углам поворота шатуна второго вспомогательного четырёхзвенника $IKLM$, когда его кривошип KI поворачивается на углы φ_{1k} .

Неизвестными, определяемыми из уравнений совместности будут углы z_{3k} ($k=4, 5, 6, 7, 8$). В общем случае при задании m положений шатунного звена и расположении точек z_k на произвольной шатунной кривой заданного четырёхзвенника строим простую $m+1$ -звенную цепь с одной кулисой (при $m=6$), присоединяем к ней заданный четырёхзвенник и $m-5$ вспомогательных шарнирных четырёхзвенников, выбрасываем ползушку с кулисой и получаем механизм с $2m-6$ звеньями, удовлетворяющий всем условиям поставленной задачи.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Аптовиль А. М.: Бицентроида и центроиды в относительном движении, «Вести. инж. и техников», 1940, № 1.
2. Артоболовский П. П.: Геометрический синтез плоских механизмов, Москва, Изв. ОТН Акад. наук СССР, 1938.
3. Артоболовский П. П.: Некоторые вопросы динамического анализа и синтеза плоских механизмов, Москва, Изв. ОТН Акад. наук СССР, 1939.
4. Артоболовский П. П.: Синтез и кинематическое исследование сферических механизмов, «Труды Ци-та с.-х. машиностроения», 1933, № 1.
5. Артоболовский П. П.: Синтез плоских механизмов, Москва, Изд. Акад. наук СССР, 1939.
6. Баранов Г. Г.: К синтезу четырёхзвенных механизмов, «Труды Моск. авиац. института» (кафедра Теории механизмов и машин), Сб. № 1, 1939.
7. Баранов Г. Г.: Определение основных размеров прицепного механизма, Труды ВВА РККА, 1936, № 15.
8. Блох З. Ш.: Графо-аналитические методы проектирования плоских механизмов с пазными парами, «Вести. инж. и техников», 1938, № 10.
9. Блох З. Ш.: К синтезу плоских механизмов, «Вести. инж. и техн.», 1937, № 8 и № 12.
10. Блох З. Ш.: К синтезу четырёхзвенных механизмов, «Вести. инж. и техн.», 1938, № 2.
11. Блох З. Ш.: К синтезу четырёхзвенных механизмов, Изв. ОТН Акад. наук СССР, 1940, № 1.
12. Блох З. Ш.: Проектирование кривошипно-шатунных механизмов по предельным значениям скорости ползуна, «Вести. инж. и техн.», 1940, № 7.
13. Блох З. Ш.: Синтез плоских кинематических цепей с пазными парами, «Прикл. мат. и мех.», 1939, т. II, вып. 3.
14. Блох З. Ш.: Проектирование шестизвенных механизмов, «Вести. инж. и техн.», 1939 г., № 7.
15. Блох З. Ш.: К теории конхондальных механизмов, «Изв. ОТН», 1941, № 4.
16. Бруевич Н. Г.: О проектировании прицепного кривошипного механизма, Труды ВВА РККА, 1936, № 15.
17. Бруевич Н. Г.: Советские работы по синтезу механизмов, «Вести. металлопром.», 1939, № 4.
18. Бруевич Н. Г.: Современное состояние синтеза механизмов, «Вести. металлопром.», 1937, № 1.
19. Вяхирев С. В.: Основы теоретического анализа обобщенных машин, «Кожевнино-обучная промышленность», 1936, № 10.
20. Гершгорин С. А.: Машинные построения функции комплексного переменного, «Изв. Ленингр. политехн. ин-та», 1928, т. 2.
21. Гершгорин С. А.: О механизмах для построения функций комплексного переменного, «Журн. Ленингр. физ.-мат. об-ва», 1926, т. I, вып. I.
22. Гутьяр Е. М.: Синтез пространственного направляющего механизма, «Труды МАДИ», 1936.
23. Жуковский П. Е.: Приложение теории центров ускорений внешних порядков к направляющему механизму Чебышева. Полн. собр. сочинений, т. I, 1937.

24. З ё р н о в А. А.: К вопросу о синтезе целевых механизмов, «Сорена», 1933, № 3.
25. И в а н о в А. П.: Методика построения механизмов машин-автоматов, «Автоматика и телемеханика», 1937, № 5.
26. К л а п а у х П. Л.: Вопросы проектирования и эксплуатации автоматов, «Станки и инструмент», 1937, № 3.
27. К л а п а у х П. Л.: О теории и методике синтеза автоматических станков и поточных линий, «Вестн. инж. и техн.», 1939, № 4.
28. К л а п а у х П. Л.: Элементы методики синтеза автоматов, «Вестн. металлпрома», 1937, № 18; 1938, № 2.
29. К о т е л ь н и к о в А. П.: Точки Бурместера, их свойства и построение, «Математич. сборник математич. об-ва», 1927, вып. 3-4.
30. Л о й ц я н с к и й Л. Г.: О некоторых общих типах конформных трансформаторов движения, «Изв. Ленингр. политехи. ин-та», 1925, т. 29.
31. Л о й ц я н с к и й Л. Г.: О некоторых свойствах движения Watt'a, «Изв. Ленингр. политехи. ин-та», т. 30.
32. Л у р ь е А. П.: К теории приближённых прямолинейно-направляющих механизмов, «Журн. прикладной физики», 1925, т. 5, вып. 3-4.
33. М а ш и х и н Н. В.: Заметка к решению общей задачи синтеза плоских механизмов методом комплексного переменного, «Труды Моск. инст. механ. и электр. сельского хоз.», вып. XI, 1940.
34. О р л о в Н. В.: К теории рабочего цикла машин-орудий массового производства, Москва, Машметиздат, 1935.
35. С е м ё н о в М. В.: Аналитический метод синтеза стержневых механизмов, заданных двумя и тремя положениями, «Вестн. инж. и техников», 1938, № 12.
36. Ч е б ы ш е в П. Л.: О параллелограммах, состоящих из трёх элементов и симметрических около одной оси. Собрание сочинений, т. I, 1907.
37. Ч е б ы ш е в П. Л.: О преобразовании вращательного движения в движение по некоторым линиям при помощи сочленённой системы. Собрание сочинений, т. II, 1907.
38. Ч е б ы ш е в П. Л.: О простейшей суставчатой системе, доставляющей движение, симметрическое около оси. Собрание сочинений, т. II, 1907.
39. Ч е б ы ш е в П. Л.: Теория механизмов, известных под именем параллелограммов. Собрание сочинений, т. I, 1899.
40. Ч е б ы ш е в П. Л.: Об одном механизме. Собрание сочинений, т. I, 1899.
41. Ч е б ы ш е в П. Л.: О некотором видоизменении коленчатого параллелограмма Уатта. Собрание сочинений, т. I, 1899.
42. Ч е б ы ш е в П. Л.: О параллелограммах, состоящих из трёх каких-либо элементов. Собрание сочинений, т. II, 1907.
43. Ч е б ы ш е в П. Л.: О параллелограммах. Собрание сочинений, т. I, 1899.
44. Ч е б ы ш е в П. Л.: О простейших параллелограммах, доставляющих прямолинейное движение с точностью до четвёртой степени. Собрание сочинений, т. II, 1907.
45. Ч е б ы ш е в П. Л.: О простейших параллелограммах, симметрических около одной оси. Собрание сочинений, т. II, 1907.
46. Ч е б ы ш е в П. Л.: Теорема относительно кривой Уатта. Собрание сочинений, т. II, 1907.
47. Ч е б ы ш е в П. Л.: Собрание сочинений. Изд. Акад. Наук, т. I, 1899; т. II, 1907.
48. Ч е р н у д и н о в С. А.: Механизмы для вычерчивания геометрических мест метрического синтеза, связанных с параметром « σ », «Труды Ленингр. пром. академии им. Н. В. Сталина», 1939.
49. Ю д и н В. А.: Динамический синтез плоских и пространственных кулачковых механизмов, Изд. ВИА РККА, 1940.
50. A l t H.: Die Bedeutung der Getriebelehre für den Bau von Verarbeitungsmaschinen, «VDI», 1930, т. 74, стр. 139.
51. A l t H.: Der Übertragungswinkel und seine Bedeutung für das Konstruieren periodischer Getriebe, «Werkstattstechnik», 1932, т. 26, стр. 61.
52. A l t H.: Die Verwirklichung gegebener Kurven mittels eines Gelenkviereckes, «Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech.».

53. A l t H.: Ermittlung der Abmessungen des Schubkurbelgetriebes auf Grund praktisch vorgeschriebener Bedingungen, «Werkstattstechnik», 1929, т. 23, ср. 693.
54. A l t H.: Getriebe der Papierverarbeitung, «Maschinenbau», 1929, т. 8, ср. 24.
55. A l t H.: Koppelgetriebe als Rastgetriebe, «VDI», 1932, т. 76, ср. 456, 533.
56. A l t H.: Über die Erzeugung gegebener ebener Kurven mit Hilfe des Gelenkvierecks, «Z. angew. Math. u. Mech.», 1923, т. 3, ср. 13.
57. A l t H.: Über die Totlagen des Gelenkvierecks, «Zeitschr. für angew. Math. u. Mechanik», 1925, т. V, ср. 337—346.
58. A l t H.: Zur Geometrie der Koppelrastgetriebe, «Ing.-Arch.», 1932, т. 2, ср. 394.
59. A l t H.: Zur Synthese ebener Mechanismen, «Z. angew. Math. u. Mech.», 1924, т. I, Nr. 5, ср. 373.
60. A l t H.: Zur Getriebetechnik der Verpackungsmaschinen, «VDI», 1931, т. 75, ср. 245.
61. A u g u s t F.: Beweis des Peaucellier'schen Satzes, «Grunert's Archiv für Mathem.», 1875, ср. 216.
62. B l a i s e H.: Zusammengesetzte Gelenkgetriebe. Beitrag zur Systematik und Synthese des Aufbaues, «VDI», 1931, т. 75.
63. B r e g u e t A.: Nouveaux systèmes de tiges articulées de M. M. Hart et Kœpfer, «Revue industr.», 1875, № 21.
64. B r i c a r d R. (C. S t e p h a n o s): Voici comment on peut construire un octaèdre de déformation, ses faces restant invariables, «L'Intermédiaire des Mathématiciens», т. 11, ср. 243—244.
65. B r o c a r d H.: Note sur un compas trisecteur, proposé par M. Zaisant. «Bull. Soc. Math. de France», 1875, т. 111, ср. 47—48.
66. B r o c a r d H.: Sur la division mécanique de l'angle, «Bull. Soc. Math. de France», 1876, т. V, ср. 43—47.
67. B r ü l l A.: Losange articulé destiné à remplacer le parallélogramme de Watt. «Ann. industr.», 1874, № 21.
68. B u r m e s t e r L.: Die Geradföhrung und Proportionalität am Indikator. «VDI», 1888, т. 32, ср. 399.
69. B u r m e s t e r L.: Über das bifocal-veränderliche System. «Math. Ann.», 1880, т. 16, ср. 89.
70. B u r m e s t e r L.: Über die Festlegung projektiv-veränderlicher ebener Systeme, «Math. Ann.», 1879, т. 14, ср. 472.
71. B u r m e s t e r L.: Über die Geradföhrung durch das Kurbelgetriebe, «Civilingenieur», 1876, т. 22, ср. 597, 1877, т. 23, ср. 227, 319.
72. C l i f f o r d W. K.: On the triple generation of three-bar curves. «Proc. London Math. Soc.», 1878, т. IX, ср. 27—28.
73. C a y l e y A.: Mechanical construction of conformal figures, «Amer. J.», 1879, т. 11, ср. 186—187.
74. C a r b o n n e l l e: Sur la théorie géométrique du parallélogramme de Watt. Bulletin de l'Acad. de Belgique. 1853.
75. C a y l e y A.: Zink-work for x^2 , «Amer. J. of Math.», 1878, т. I, ср. 386.
76. C a y l e y A.: On a kinematics of a plane, «Quart. Journ.», 1879, т. XVI, ср. 1—8.
77. C a y l e y A.: On some figures of curves in three-bar motion, «Proc. L.M.S.», 1875, VI, 139.
78. C a y l e y A.: On the bicursal sextic, «Proc. L. M. S.», 1875, т. 76, ср. 166—172.
79. C a y l e y A.: On the question of the mechanical description of a Cartesian, «Proc. L. M. S.», 1875, т. VI, ср. 83.
80. C a y l e y A.: On the mechanical description of a nodal bicircular quartic, «Proc. L. M. S.», 1869—1871, т. 111, ср. 100—106.
81. C a y l e y A.: On the mechanical description of certain quartic curves by a modified oval chuck, «Proc. L. M. S.», 1871—1873, т. IV, ср. 186—190.
82. C a y l e y A.: On the mechanical description of a cubic curve, «Proc. Lond. Math. Soc.», 1872, т. IV, ср. 175—178.
83. C a y l e y A.: On the mechanical description of certain sextic curves, «Proc. L. M. S.», 1872, т. IV, ср. 105—111.

84. Cayley A.: On the scalene transformation of a plane curve, «*Quart. Journ.*», 1875, т. XIII, стр. 321—328.
85. Cayley A.: Three-bar motion. «*Proc. L. M. S.*», 1876, т. VII, стр. 136—166.
86. Darboux G.: Appareils divers de Peaucellier. Hart et Kempe, «*Bullet. des sciences math. et astr.*», 2-e série, т. III, 1888.
87. Darboux G.: De l'emploi des fonctions elliptiques dans la théorie du quadrilatère plan, «*Bullet. des sciences math. et astron.*», 2-e série, т. III.
88. Darboux G.: Présentation d'appareils pour le tracé des lignes droites et des ovales de Cassini. Compte rendu de la 8-e sess. de l'Assoc. franç. pour l'avanc. des sciences (Congrès de Montpellier), стр. 128.
89. Darboux G.: Recherches sur un système articulé, «*Bull. des sciences math. et astron.*», 1879, т. III, стр. 151—192.
90. Darboux G. et Koeni g s G.: Sur deux appareils nouveaux de mécanique, «*C. R.*», 1889, т. CIX, стр. 49—51.
91. Darboux G.: Sur les polygones circonscriptibles à un cercle. «*Bull. des sciences math. et astron.*», 2-e série, 1879, т. III, стр. 64—72.
92. Darboux G.: Sur un nouvel appareil à ligne droite de M. Hart, «*Bullet. des sciences math. et astronom.*», 2-e série, т. III, стр. 144—151.
93. Darwin G. H.: A mechanical method of making a force which varies inversely as the square of the distance from a fixed point.
94. Darwin G. H.: The mechanical description of equipotential lines, «*Proc. L. M. S.*», 1875, т. VI, стр. 115—177.
95. Daseke E.: Zur Theorie der Geradführungen, Bonn. Philos. Diss.
96. Delaunay N.: Die Tschelysheff'schen Arbeiten in der Theorie der Gelenkmechanismen, «*Zeit. für Math. und Phys.*», т. XLIV, стр. 101—111.
97. Delaunay N.: Étude sur le losange articulé du colonel Peaucellier et sur les systèmes articulés à liaison complète, «*Bullet. de la Soc. industr. de Rouen*», 1877.
98. Delaunay N.: Sur les bases nouvelles de la théorie des systèmes articulés, *Proceedings of the international mathematical Congress held in Toronto, 1924*, стр. 11—16.
99. Delaunay N.: Sur quelques nouveaux mécanismes: projecteur, ellipsographe, ellipsoïdographie et hyperbolographe, «*Bullet. des Sciences math.*», 2-e série, т. IX, стр. 240—245.
100. De Roos J. D. C.: Eenige mededeelingen en opmerkingen over stangesfelsels, *Tijdschrift van het Koninklijke Instituut van Ingenieurs, 1876—77*, стр. 210; *Rev. univ. des Mines, 2-e série, т. 44*, стр. 4.
101. De Roos J. D. C.: Ietover de gekoppelde krukbevinging, *Nieuw Architect voor wiskunde, т. IV*, стр. 125—150.
102. De Roos J. D. C.: Linkages the different forms and uses of articulated links, New-York, Van-Nostrand.
103. De Roos J. D. C.: Overstangenstelsels, *Tijdschrift van het Koninklijk Instituut van Ingenieurs, 1875—76*, стр. 194.
104. Dingelde y F.: Über die Erzeugung von Kurven vierter Ordnung durch Bewegungsmechanismen, Diss., Leipzig, Teubner, 1885, т. III.
105. Dixon A. C.: On certain deformable Frameworks, «*Messenger of Math.*», 1899—1900, т. XXIX, стр. 1—21.
106. D'Ocagne M.: Note sur le système articulé du colonel Peaucellier, «*Nouv. Ann. de Math.*», 2-e série, т. XX, стр. 456—459.
107. D'Ocagne M.: Nouvelle remarque sur le système Peaucellier, «*Nouv. Ann. de Math.*», 3-e série, т. III, стр. 199—200.
108. Dyck W.: Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente, München, 1892—1893.
109. Eisenhart L. P.: Surfaces which can be generated in more than one way by the motion of an invariable curve, «*Annals of Math.*», 2nd series, 1918, т. XIX, стр. 217—230.
110. Ellis J. C. W.: On some models of Peaucellier's and other parallel motion. «*Proc. of the Cambridge Philosoph. Soc.*», 1874, т. 11, стр. 334—338.

111. E m c h A.: An application of elliptic functions to Peaucellier's link-work (inversor), «Trans. Amer. Math. Soc.», 1900—1901, т. II, стр. 60—63.
112. E m c h A.: Algebraic transformations of a complex variable realized by linkages, «Trans. Amer. Math. Soc.», т. III, стр. 493—498.
113. E m c h A.: Illustration of the elliptic integral of the first kind by a certain link-work, «Annals of Math.», 2-d series, 1890—1900, т. 1, стр. 81—92.
114. F e d e r h o f e r K.: Zur Synthese der Getriebe, «Z. f. angew. Math. u. Mech.», 1923, т. 3, стр. 217—222.
115. F i s c h e r: Universal-CirkeIgeradführung (Sylvester's Geradführung), «Zeitschrift des oester. Ingen.-Vereins», Jahrg. XXVIII, стр. 196.
116. F r e e l a n d F. T.: Linkages for x^m (m being any positive or negative integer or fraction), «Amer. J. of Math.», т. III, стр. 316—319.
117. G a g a r i n e A.: La règle circulaire et le mouvement rectiligne d'une droite, «Journ. de la Soc. de Physique et de Chimie de Saint-Petersbourg», т. XIV, стр. 52—57.
118. G a g a r i n e A.: Sur quelques systèmes articulés, CHB.
119. G a g a r i n e A.: Systèmes articulés assurant le mouvement rectiligne ou la courbure circulaire, «C. R.», т. XCIII, стр. 741.
120. G e n e s e R.W.: Question... solution by G. Hebbel and others. «Math. Quest. from the Educ. Times», 1880, стр. 102.
121. G r e e n h i l l A. G.: Mechanical solution of a cubic by a quadrilateral linkage, «Messeng. of Math.», 1876, т. V, стр. 162—163.
122. H a a r b l e i c h e r A.: Application des coordonnées isotropes à l'étude de la courbe des trois barres, «J. Ec. Polyt.», 1933, т. 31, стр. 13.
123. H a g e n: Die Geradführung von Zipkin, «Deutsche Bauzeitung», 1872, стр. 98.
124. H a r t H.: A method of solving by linkwork $(x) = 0$, an algebraical equation of the n -th degree, «Proc. L. M. S.», 1877, т. VIII, стр. 264; «Messeng. of Math.», т. VII, стр. 56.
125. H a r t H.: A parallel motion, «London Mech. Soc.», 1875, стр. 137—138.
126. H a r t H.: Generalization of cases of five-bar motion considered at the April Meeting, «Proc. L. M. S.», т. VIII, стр. 264; «Messeng. of Math.», 1877, т. VII, стр. 56.
127. H a r t H.: Note on the mechanical description of bicircular quartics, «Proc. L. M. S.», 1882—83, т. XIV, стр. 199—202.
128. H a r t H.: On certain conversions of motion, «Messeng. of Math.», т. IV, стр. 82—88, 116—120; Report of the 44 Meeting of the British Association for the advancement of science, Meeting of Belfast, 1874, стр. 17—18.
129. H a r t H.: On some cases of parallel motion, «Proc. L. M. S.», т. VIII, стр. 286—289.
130. H a r t H.: On the Cassinian, «Messeng. of Math.», 1877, т. VI, стр. 169—172.
131. H a r t H.: On the mechanical description of a spherico-conic, «Proc. L. M. S.», 1875, стр. 136—137.
132. H a r t H.: On the mechanical description of the limaçon and the parallel motion deduced therefrom, «Messeng. of Math.», т. V, стр. 35—39.
133. H a r t H.: On the production of circular and rectilinear motion, «Messeng. of Math.», 1877, т. VII, стр. 56.
134. H a r t H.: Quaternion proof of the triple generation of three-bar motion, «Mess. of Math.», 1882—83, т. XII, стр. 32.
135. H a r t H.: The kinematic paradox, «Proc. L. S. M.», т. VIII, стр. 264.
136. H a y d e n W.: On approximate parallel motion, Report of the 44. Meeting of the Brit. Assoc. for the advancement of science, (Meeting of Belfast), 1874.
137. H a y d e n W.: On parallel motion, Report of the 46 Meeting of the Brit. Assoc. for the advanc. of science.
138. H a y d e n W.: Parallel motion, «Rev. industr.», 1875, стр. 226.
139. H e s s e n b e r g G.: Gelenkmechanismen zur Kreisverwandtschaft, Tübingen naturwissenschaftliche Abhandlungen, 1924.
140. H i p p i s l e y R. L.: A new method of describing a three-bar curve, «Proc. L. M. S.», 2nd. series, 1920, т. XVIII, стр. 136—140.
141. H i p p i s l e y R. L.: Note on the nodes of the 3-bar sextic, «Proc. L. M. S.», 2nd series, 1923, т. XXI, стр. 410—412.

142. H i p p i s l e y R. L.: A new method of describing a three-bar curve, «Proc. Lond. Math. Soc.», 1920, т. 2, Nr. 18, сp. 186.
143. H i p p i s l e y R. L.: Linkages illustrating the cubic transformation of elliptic, «Lond. R. S. Proc.», т. XCII, сp. 469—476.
144. H o p p e R.: Über das Problem der Geradföhrung eines Punktes, «Grunert's Archiv für Mathem.», 1875, т. LIII, сp. 245.
145. J o n g u e A. E.: Kinematic Synthesis of Mechanisms, «Mech. Engineering», 1940, т. 62, Nr. 7, сp. 537—542.
146. J o h n s o n W. W.: The Peaucellier machine and other linkages, «The Analyst», 1875, т. 11, сp. 41—45.
147. J o u a n n e: Trisection de l'angle au moyen du limaçon de Pascal, «Nouv. Ann. de Math.», 2-e série, 1870, т. IX, сp. 40.
148. K e m p e A. B.: A property of a linkage, «Proc. L. M. S.», 1879, т. XI, сp. 45.
149. K e m p e A. B.: Ein Gelenkmechanismus zur Teilung des Winkels. Verhandlung des dritten internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8 bis 13. August 1904, сp. 492—496.
150. K e m p e A. B.: How to draw a straight line, London, «Nature», 1877, т. 16.
151. K e m p e A. B.: On a general method of describing plane curves of the n -th degree by linkwork, «Proc. of the London Math. Soc.», 1876, т. 18.
152. K e m p e A. B.: On a general method of producing exact rectilinear motion by linkworks, «Proc. of the Royal Soc. of London», 1875, т. XXIII, сp. 565—577.
153. K e m p e A. B.: On a property of the four-piece linkage and on curious locus in linkages, «Proc. L. M. S.», 1878, т. IX, сp. 75.
154. K e m p e A. B.: On conjugate four-piece linkages, «Proc. of the London Math. Soc.», 1878, т. 9.
155. K e m p e A. B.: On some new linkages, «Messeng. of Math.», 1874, т. IV, сp. 121—124.
156. K e m p e A. B.: On the solution of equation by mechanical means, «Messenger of Math.», 1872, т. I.
157. K e m p e A. B.: Sur la production du mouvement rectiligne exact au moyen des tiges articulées, «Nouv. Corresp. Math.», 1877, т. 3, сp. 129—139, 177—186.
158. K i r s c h: Zur Theorie der Geradföhrungen. («Der Civilingenieur», neue Folge), т. XXII, сp. 321—336.
159. K o e n i g s G.: Sur les mouvements doublement décomposables et sur les surfaces qui sont le lieu de deux familles de courbes égales, «C. R.», 1913, т. CLVII, сp. 988—991.
160. K o e n i g s G.: Toute surface algébrique peut être décrite par le moyen d'un système articulé. («C. R.», 1895, т. CXX, сp. 861—863.
161. L a c o l o n g e O., de: Théorie du parallélogramme de Watt, «Mem. Soc. Bord.», (3), т. II, сp. 101—137.
162. L a i s a n t C. A.: Note sur un compas trisecteur, Compte rendu de la 4-e Session de l'Assoc. franç. pour l'avanc. des sciences (Congrès de Nantes), 1875, сp. 161—163.
163. L a u r e n c e E. J.: Conic constructions, «Math. Quest. from the Educ. Times», т. XXIX, сp. 74.
164. L a v e r t y W. H.: Extension of Peaucellier's theorem, «Proc. Lond. Math. Soc.», 1875, сp. 84—85.
165. L é a u t é H.: Méthode d'approximation graphique applicable à un grand nombre de questions de mécanique pratique, «J. de l'Éc. polyt.», 1879, 46-e cahier, т. XXVIII, сp. 166—225.
166. L é a u t é H.: Règles pratiques de la substitution, à un arc donné, de certaines courbes fermées, engendrées par les points d'une bielle en mouvement. Cas general, «C. R.», 1883, т. XCVI, сp. 1356—1358.
167. L é a u t é H.: Sur les systèmes articulés, «C. R.», 1878, т. LXXXVI, сp. 151—154.
168. L é a u t é H.: Sur les trajectoires des divers points d'une bielle en mouvement, «C. R.», 1883, т. XCVI, сp. 639—641.
169. L é a u t é H.: Sur une famille de courbes que l'on rencontre dans les transmissions de mouvement et sur leur application dans les machines, «Journ. de l'Éc. polyt.», 1883, 53-e cahier, сp. 59—78.

170. L e m o i n e E.: Le losange articulé du colonel Peaucellier, *Compte rendu de la 3-e session de l'Assoc. franç. pour l'avanc. des sciences (Congrès de Lille)*, crp. 122—125.
171. L e m o i n e E.: Note sur le losange articulé du commandant du génie Peaucellier, destiné à remplacer le parallélogramme de Watt, *Journal de Physique* publié par M. S. d'Almeida, 1873, crp. 130—134.
172. L e m o i n e E.: Sur le losange articulé du colonel Peaucellier. *Mémoires de la Soc. des ingen. civils*, 1875, crp. 247.
173. L e m o i n e E.: Sur le système articulé à cinq tiges de M. Hart, *Revue industr.*, 1875, Nr. 12.
174. L i g u i n e V.: Liste des travaux sur les systèmes articulés, *Bull. Science math.*, 2nd série, 1883, t. VII, crp. 145—160.
175. L i g u i n e V.: Note sur la méthode de M. Kempe pour résoudre mécaniquement les équations, *Mém. de l'Université d'Odessa*, t. XXII.
176. L i g u i n e V.: Sur les compas composés et leur applications à la résolution des équations, *Mém. de la Soc. des Naturalistes d'Odessa*, section des Sciences. *Math.*, t. III.
177. L i g u i n e V.: Sur les systèmes articulés à six tiges, *Compte rendu de la 4-e sess. de l'Assoc. franç. pour l'avanc. des sciences (Congrès de Nantes)*, 1875, crp. 208—220.
178. L i g u i n e V.: Sur les systèmes de tiges articulées, *Nouv. Ann. de Math.*, 2-e série, t. XIV, crp. 529—561.
179. L i g u i n e V.: Sur les systèmes articulés de MM. Peaucellier, Hart et Kempe, *Nouv. Ann. de Math.*, 3-e série, 1882, t. 11, crp. 153—163.
180. L i p k i n e L.: Dispositif articulé pour la transformation rigoureuse du mouvement circulaire en mouvement rectiligne, *Revue univers. des Mines et de la Métallurgie de Liège*, 4-e série, 1871, t. XXX, crp. 149—150.
181. L i p k i n e L.: Über eine genaue Gelenk-Geradföhrung, *Bullet. de l'Acad. de Saint-Petersbourg*, 1871, t. XVI, crp. 57—60; *Der Naturforscher*, 1871.
182. M a n n h e i m A.: Communications sur le compas composé de M. Peaucellier, *Bullet. de la Société philomatique de Paris*; procès verbaux des séances des 20 et 27 juillet 1864, crp. 124—126.
183. M a n n h e i m A.: Construction de deux systèmes articulés décrivant une conique au moyen de sept tiges, *Bullet. de la Soc. Math. de France*, 1874, t. III.
184. M a n n h e i m A.: Démonstration relative à l'inverseur de Hart, *Messenger of Math.*, 1897 (2), t. XXVI, crp. 151.
185. M a n n h e i m A.: Deux lettres à M. Sylvester, *Proc. L. M. S.*, 1874, t. VI, crp. 35—36.
186. M a n n h e i m A.: Note on linkage, *Messeng. of Math.*, 1884 (2), t. XIV, crp. 20.
187. M a n n h e i m A.: Procédé pour décrire une anallagmatique du quatrième ordre à l'aide d'un appareil à tiges articulées, semblable à celui de M. Peaucellier, en remplaçant le losange par un quadrilatère à côtés inégaux, mais à diagonales rectangulaires, *Nouv. Ann. de Math.*, 2-e série, 1874, t. XIV, crp. 542—543.
188. M a n n h e i m A.: Remarques à propos du mémoire précédent, *Journ. de Math.*, 3-e série, 1897, t. III, crp. 149—150.
189. M a n n h e i m A.: Une construction, due à M. Hart, d'un appareil plus simple que celui de M. Peaucellier, pour obtenir le mouvement rectiligne d'un point au moyen de tiges articulées, *Bullet. de la Soc. Math. de France*, 1874, t. III, crp. 17.
190. M a n s i o n P.: Les compas composés de Peaucellier, Hart et Kempe, *Nouv. corresp. math.*, t. II, crp. 129—139.
191. M a r c k s W. D.: Peaucellier's compound compass and other linkages, *Journ. of the Franklin Instit.*, t. CVII, Nr. 6.
192. M a y e r: Über Sylvester's Parallelogramm, *Zeitschr. des oesterr. Ingen.-Vereins*, 1875, Jahrg. XXVII, crp. 302.
193. M e h m k e R.: Analytischer Beweis des Satzes von R. Müller über die Erzeugung der Koppelkurve durch ein ähnlich veränderliches System, *Ztschr. f. Math. u. Phys.*, 1910, crp. 257.
194. M e h m k e R.: Die kinematische Grundlage von Chr. Wiener's Tangentenmethode und ihr Verhältnis zu Robert's Tangentenmethode, *Math. naturwiss.*

- Mitteil.» im Aufr. d. math.-naturwiss. Vereins in Württemberg, 1904, t. 6, стр. 54.
195. Maxwell J. C.: On Bows method of drawing diagrams in graphical statics with illustrations from Peaucellier's linkage, «Proc. of Cambr.», t. II, стр. 407.
196. Mohrman n H.: Über die Erzeugung algebraischer Kurven mit Hilfe von Gelenkmechanismen, «Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterr.», t. XLVIII, стр. 242—249.
197. Morley F. V.: An analytical treatment of the 3-bar curve, «Proc. L. M. S.», 2-nd série, 1923, t. XXV, стр. 140—160.
198. Müller R.: Beiträge zur Theorie des ebenen Gelenkvierecks, Braunschweig, 1897 (Festschrift), стр. 41—84; «Zeitschr. f. Math. u. Phys.», t. XLII.
199. Müller R.: Konstruktion der Burmester'schen Punkte für ein ebenes Gelenkviereck, «Zeitschr. f. Math. u. Phys.», t. XXXVIII, стр. 129—147.
200. Müller R.: Konstruktion der Burmester'schen Punkte für ein ebenes Gelenkviereck, «Zeitschr. f. Math. u. Phys.», t. XXXVII, стр. 213—217.
201. Müller R.: Die Koppelkurve mit sechspunktig berührender Tangente, «Zeitschr. f. Math. u. Phys.», t. XLVI, стр. 330—342.
202. Müller R.: Erzeugung der Koppelkurve durch ähnlich veränderliche Systeme, «Z. Math. Phys.», 1910, t. 58, стр. 247.
203. Müller R.: Konstruktion der Fokalkurve aus sechs gegebenen Punkten, «Z. Math. Phys.», 1895, t. 40, стр. 337.
204. Müller R.: Über die angenäherte Geradföhrung mit Hilfe eines ebenen Gelenkvierecks, «Zeitschr. f. Math. u. Phys.», t. XLIII, стр. 30—40.
205. Müller R.: Über die Bewegung eines starren ebenen Systems durch fünf unendlich benachbarte Lagen, «Z. Math. Phys.», 1892, t. 37, стр. 129.
206. Müller R.: Über die Doppelpunkte der Koppelkurve, «Zeitschr. f. Math. u. Phys.», 1889, t. 34, стр. 303—305, 372—375, 1891, t. 36, стр. 11.
207. Müller R.: Über die doppelpointige Fokalkurve, «Z. Math. Phys.», 1896, t. 41, стр. 62.
208. Müller R.: Über die Gestaltung der Koppelkurven für besondere Fälle des Kurbelgetriebes, «Z. Math. Phys.», 1891, t. 36, стр. 11.
209. Müller R.: Über einige Kurven, die mit der Theorie des ebenen Gelenkvierecks in Zusammenhang stehen, «Abh. Math. Phys. Chem. beschr. Naturw.», Festschr. 70 Geburtstag Richard Dedekind, Braunschweig, Fr. Vieweg & Sohn, 1901, стр. 37.
210. Müller R.: Über einige Kurven die mit Theorie des ebenen Gelenkvierecks in Zusammenhang stehen, «Z. Math. Phys.», 1903, t. 48, стр. 224.
211. Müller R.: Zur Lehre von der Momentanbewegung eines starrrechenen Systems. Eine Eigenschaft der Burmester'schen Punkte, «Z. Math. Phys.», 1903, t. 48, стр. 220.
212. Müller R.: Zur Theorie der doppelgestreckten Koppelkurve: Die Krümmung der Kurve in den Punkten mit sechspunktiger berührender Tangente, «Z. Math. Phys.», t. 48, стр. 208.
213. Neuber J.: Systèmes de liges articulées. Trace mécanique des lignes, Paris, 1886.
214. Pastore G.: La legge di Roberts sue quadrilatero articolate. Torino Atti, 1890, t. XXVI, стр. 84—101.
215. Peaucellier A. et Wagner. Mémoire sur un appareil diastométrique nouveau dit appareil autoréducteur note, XIV, «Mémorial de l'officier du génie», 1868, № XVIII, стр. 351.
216. Peaucellier A.: Lettre au rédacteur des Nouvelles Annales de Mathématiques, «Nouv. Ann. de Math.», 2-e série, 1864, t. III, стр. 444—445.
217. Peaucellier A.: Note sur l'emploi des systèmes articulés à liaison complète en Géométrie, en Mécanique et dans les Sciences appliquées, «Mémorial de l'officier du génie», 1875, Nr. XXV, стр. 369—389.
218. Peaucellier A.: Note sur un balancier articulé à mouvement rectiligne, «Journal de Physique», publié par M. J. d'Almeida, 1873, t. II.
219. Peaucellier A.: Note sur une question de géométrie de compas, «Nouv. Ann. de Math.», 2-e série, 1873, t. XII, стр. 71—73.
220. Peaucellier's perfect parallel motion, «Irons», t. III, стр. 259.

221. Penrose J. C.: On a method of drawing, by continued motion, a very close approximation of the parabola, proposed with a view to its possible application to figuring reflectors. «Monthly Notices of the Royal Astronom. Soc.», 1874, t. XXXIV, crp. 265—267.
222. Perigal H.: On a kinematic paradox (the Rotameter), «Proc. Lond. Mech.», 1878, t. IX, crp. 28.
223. Perigal H.: Link Trommels. «Proc. L. M. S.», 1874, t. V, crp. 25, 144.
224. Perrin: Note sur la division mécanique de l'angle, «Bull. Soc. Math. de France», 1875, t. III.
225. Phillips A. W.: Link-work for the lemniscate, «Amer. J. of Math.», 1878, t. I, crp. 386.
226. Prudhomme: Sur le losange articulé de M. Peaucellier. «Bulet. de la Soc. industr. de Mulhouse», nouv. série, t. XIV, crp. 179; «Polytechnisches Zentralblatt», Neue Folge, 1875, Jahrg. XXIX, crp. 990—993.
227. Ritter II.: «Perspectivograph» (invented by H. Rittes). Geometrische Transformation by Dr. K. Doeblemann. Leipzig, 1902, crp. 199—204.
228. Rittershaus T.: Zur Frage der Gelenk-Gerädführung, «V. D. I.», 1877, t. XXI, crp. 218—226.
229. Roberts S.: Further note on the motion of a plane under certain conditions. «Proc. L. M. S.», 1876, t. VII, crp. 216—225.
230. Roberts S.: On the mechanical description of some species of circular curves of the third and fourth degrees, «Proc. L. M. S.», 1869, t. II.
231. Roberts S.: On the pedals of conic sections, «Proc. Lond. Mech. Soc.», 1870, crp. 88—89.
232. Roberts S.: On the motion of a plane under certain conditions. «Proc. Lond. Mech. Soc.», 1870, crp. 286—319.
233. Roberts S.: On three-bar motion in plane space, «Proc. Lond. Mech. Soc.», 1875—76, t. VII, crp. 14—23.
234. Rozé C.: Sur une transmission de mouvement, «C. R.», 1844, t. LXXXIV, crp. 1148—1151.
235. Saint-Germain A. de: Sur le parallélogramme de Watt, «Journ. des Math. pures et appliquées», 3-e série, t. VI, crp. 19—26.
236. Saint-Loup: Des systèmes articulés simples et multiples et de leurs applications. «Mémoires de la Soc. d'émul. du Doubs», 1875.
237. Saint-Loup P.: Résolution de l'équation du troisième degré à l'aide d'un système articulé. «C. R.», 1874, t. LXXIX, crp. 1323—1324.
238. Scheiner P.: Pantographice, seu ars, delineandi res quaslibet per parallelogrammum lineare seu curvum, mechanicum, mobile, Romae, 1631 (Encyk., t. IV, crp. 252).
239. Schilling P.: Eine neue kinematische Ebenenführung, «Math. Ann.», 1922, t. LXXXV, crp. 200—207.
240. Schilling F.: Über neue kinematische Modelle, sowie eine neue Einführung in die Theorie der cyklischen Kurven, «Math. Ann.», t. LXXXV, crp. 214—227.
241. Stephanos G.: Existe-t-il des polyèdres à faces invariables susceptibles d'une infinité de transformations avec altération seulement des angles solides et des dièdres? «L'Intermédiaire des Mathématiciens», 1894, t. I, 228.
242. Stulz A.: Zur Anwendung der elliptischen Funktionen auf das Poncelet'sche Schliessungsproblem. Diss., Basel, 1909.
243. Sylvester J. J.: Description of a new instrument for converting circular into general rectilinear motion and into motion in conics and higher plane curves. «Proc. L. M. S. T.», 1873, t. V, crp. 4, 141.
244. Sylvester J. J.: Des systèmes articulés; instrument réciprocatteur du colonel Peaucellier; description des courbes et surfaces algébriques par le moyen de lignes articulées. Compte rendu de la 3-e session de l'Association française pour l'avancement des sciences (Congrès de Lille), crp. 1156—1157, «Revue scientifique», 2-e série, 1874, t. VIII, crp. 640—641.
245. Sylvester's Differential Parallelogramm, «Grothe's Allg. Polytechn. Zeitung», 1876, Jahrg. IV, crp. 5, 14.
246. Sylvester J. J.: Question 4231, solution by G. S. Carr. «Math. Questions from the Educational Times», 1874, t. XXI, crp. 57—60.
247. Sylvester J. J.: Question 4591, solution by E. B. Elliot. «Math. Quest. from the Educ. Times», 1875, t. XXIII, crp. 43.

248. Sylvester J. J.: Question 4637, solution by E. B. Elliot and others. «Math. Quest. from Educ. Times», 1875, т. XXIII, стр. 59—60.
 249. Sylvester J. J.: Question 4660, solution by S. A. Renshaw and others. «Math. Quest. from the Educ. Times», 1875, т. XXIII, стр. 71—73.
 250. Sylvester J. J.: Question 5327, solution by G. S. Carr, J. J. Sylvester. «Math. Quest. from the Educ. Times», 1877, т. XXVIII, стр. 24.
 251. Sylvester J. J.: Question 5357, solution by Curran-Sharp, «Math. Quest. from the Educ. Times», 1880, т. XXXIII, стр. 97.
 252. Sylvester J. J.: Question 6339, solution by S. Roberts, «Math. Quest. from the Educ. Times», 1880, т. XXXIV, стр. 46—47.
 253. Sylvester J. J.: History of the plagiograph. «Nature», 1875.
 254. Sylvester J. J.: On James Watt's parallel motion. «Nature», 1875.
 255. Sylvester J. J.: On recent discoveries in mechanical conversion of motion. «Lond. Roy. Inst. Proc.», 1874, т. 7.
 256. Sylvester J. J.: On the expression of the curves generated by any given system whatever of linkwork under the form of an irreducible determinant. «Proc. L. M. S.», 1875, т. VI, стр. 78, 196—197.
 257. Sylvester J. J.: On the plagiograph after the skew pantograph, «Sylvester's Collected Math. Papers», III, стр. 26—34; «Nature», 1875, т. XII.
 258. Sylvester J. J.: On the representation of any unicursal curve and its nodes in terms of the parametric coefficients and on Robert's cases of unicursal three-bar motion, «Proc. L. M. S.», 1875, т. VI, стр. 37.
 259. Sylvester J. J.: Transformation du mouvement circulaire en mouvement rectiligne. Lecture à l'Institution Royale à la Grande-Bretagne, «Revue scientifique», 2-e série, 1874, т. IV, стр. 490—498.
 260. Teixeira F. G.: Sur une courbe qui figure dans la théorie du quadrilatère articulé. «Batt. G.», 1915, (3)6, т. LIII, стр. 304—31.
 261. Thiebaud G.: Note sur le système articulé de M. Peaucellier. «Nouv. Ann. de Math.», 2-e série, т. XVII, стр. 258—261.
 262. Thue A.: Gelenkgeradföhrungen, Christiania Vid. Selsk. Förh., 1912.
 263. Vincent A.: Essai d'une théorie du parallélogramme de Watt, Lille, 1838.
 264. Wankel H.: Zur Synthese des Gelenkviereckes, Dissert. 1925, T. H. Dresden.
 265. Wassiliew und Delaunay: P. L. Tschebyscheff und seine wissenschaftlichen Leistungen, Leipzig, Teubner, 1900.
 266. Zindler K.: Eine räumliche Geradföhrung, «Sitzungsberichte», Wien, т. CXL, стр. 399—402.
-

ПРЕДМЕТНЫЙ И ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛИ

- Альт (Alt H.) 10, 13, 86, 98, 141, 175, 183, 194, 221, 242
 Альта кривая 225
 - точки 187
 Аналитические методы синтеза механизмов 10, 11, 30 и д., 262 и д.
 Аналитический синтез кулачковых механизмов 78 и д.
 Антипараллелограмм шарнирный 153
 Антовиль А. М. 33
 Артоблевский П. П. 11, 13, 24, 86
 Асеур Ж. В. 11
 Астер (Aster O.) 99
- Баранов Г. Г. 10
 Беккер П. Э. 86
 Бесконечно удаленный полюс 142
 Бесступенчатый редуктор Вазанта 223
 Бейер (Beuer) 10, 13
 Бицентронда 16, 33 и д., 40 и д.
 Блох Э. Ш. 10, 11, 312, 338
 Бок (Bock A.) 98, 99, 223
 Болл (Ball) 127
 Болла точка 127, 128, 130, 136, 145, 156
 Брикар (Bricard R.) 253
 Бурместер (Burmester) 10, 11
 Бурместера кривая 126, 128, 129, 131, 137, 143, 145, 156, 164, 183, 190, 237
 - точки 125, 129, 131, 132, 137, 145, 197, 198, 237
 Бруснич П. Г. 10, 12, 13, 248
 Удобноходность механизмов 12
- Вазанта бесступенчатый редуктор 223
 Взаимогибасмые кривые 15 и д.
 Виллиса теорема 230
 Власов 11
 Высшие кинематические пары 15 и д.
- Гакмюллер (Hackmüller) 200
 Гарт (Hart) 10
 Геометрические методы синтеза механизмов 15, 165, 238
 Геометрические мест метод 165, 238
 Геронимус Я. Л. 63, 80
 Гершгорин С. А. 10, 11
- Годограф Фы 287 и д.
 Гёкен (Hoecken K.) 98, 100
 Голонни Д. П. 39
 Гольцер (Holzer H.) 86
 Грасгофа условия 211 и д., 218, 313, 352
 Гринхилл (Greenhill) 10
 Гродзинский (Grodzinsky) 12
- Давления угол 13, 24 и д., 64, 843
 Дарбу (Darboux) 10
 Двойные точки 153, 116 и д.
 - - шатунных кривых 116 и д.
 Двухромные механизмы 149
 Двухривошинные двухромные механизмы 149, 340
 Деаксиальный кривошипно-шатунный механизм 275, 281 и д., (293), (303), 308, (320), 329, 340
 Делонс 11
 Диаграммы перемещений 45
 Динамический синтез кулачковых механизмов второго вида 65
 - - - первого вида 58 и д.
 - - - третьего вида (76)
 - - механизмов 13, 24, 58 и д., 65, 76
 Добровольский В. В. 10, 11, 13
- Замкнутая кинематическая цепь 258
 Замкнутости условие 323
 Замкнутость простой цепи 258 и д.
 - четырехзвенной [шарнирной] цепи 254
 Звездчатый механизм 98
 Зубчатые механизмы 95 и д., 160, 103
 - для реверсирования движения 103 и д.
 - с остановками 95
 - с центовым зацеплением 105
 Зубчатый цепной механизм 97
- Иванов А. Ш. 112
 Индикатор Резерфорд 204
 - Фарнборо 158
- Касание ягюга [подъяда] 132 и д.
 - третьего порядка 125
 - четвертого порядка 129
- Калашников П. А. 112
 Камуса теорема 23
 Кейлей (Keuley) 10
 Кемпе (Kempe) 10, 11, 14
 Кинематическая цепь 40 и д., 253, 258—261
 - - простая 253 и д., 258, 259, 260, 261
 Кинематические пары 15
 Кинематический синтез кулачковых механизмов второго вида 51 и д.
 - - - первого вида 46
 - - - третьего вида 56 и д.
 Кнхтель (Kneschtel) 12, 106, 109
 Комплексный определитель 270
 - вычисление 272
 Кенезного перемещений полюс 166
 Котельников А. П. 10, 125, 132
 Коэффициент обратного хода 220
 Краус (Kraus R.) 10, 240, 338
 Крафт (Kraft F.) 154
 Кривая Альта 225
 - Бурместера 126, 128, 129, 131, 137, 143, 145, (156), 164, 183, 190, 237
 - круговых точек 181
 - S, 229
 - шатунная 42
 Кривошипно-шатунных кривых 119 и д.
 Кривошипно-ромные механизмы 149
 Кривошипно-шатунные механизмы 154, 164, 166, 170, 208, 222, 246
 Кривошипно-шатунный механизм, деаксиальный 275, 281 и д., 293, 303, 308, 320, 329, 340
 - - центральный равнозвездный 161
 Кривые взаимногибасмые 15 и д.
 - шатунные 114, 115 и д., 149, 237 и д.
 - классификация 149
 Круговых точек кривая 181
 Круг перегиба 122
 Кулачковые механизмы 13, 14, 44 и д., 51, 56, 59, 65, 72, 76, 78 и д., 105 и д.
 - аналитический синтез 78 и д.
 - второго вида 51 и д., 65
 - первого вида 46

- Кулачковые механизмы с
- двумя рамками 106
- с качающимся рычагом
106
- - третьего вида 56 и д.
- - - динамический синтез
76
Кулиса Стефенсона 344,
358
Кулисный механизм 158,
161, 167, 177, 205, 216,
250
- - равнозвонный 161
Леоте 14
Линия 10
Лойцковский Л. П. 10
Лурье А. И. 10
Мамбообразный механизм
Чебышева 161
Мангейм (Mannheim) 10
Мальтийские кресты 86
и д.
Матрица девятикратного
привоинино-шатунного
механизма (245)
- пятизвенной цепи 345
- цепи (264) и д.
- - с вращательными пара-
ми 264 и д.
- - с двумя подвижными
кулисами 268
- - с одной неподвижной
кулисой 266
- - с одной подвижной ку-
лисой 267
- - шарнирного четырёх-
звенника 274
Мёртвые положения 214,
246 и д., 312
Мерзалов П. И. 43, 44,
136
Метод геометрических мест
165 и д., 238
- огибаемых и огибающих
49 и д.
- определителей 369
- поворотных кругов 43
и д.
- проб 209
- центроид 15
Методы синтеза механиз-
мов, аналитические 10,
11, 30 и д.
- - , геометрические 15
- - , структурные 11
- - , экспериментальные
11
- - , эмпирические 12, 39
и д.
Механизм правильного
мальтийского креста с
внутренним зацеплением
91
- с двумя ползунами 166,
170
- Хатта 204
- Эванса 204
Механизмы мальтийских
крестов 86 и д.
- неправильных мальтий-
ских крестов 92 и д.
- перекатывающихся рыча-
гов 82 и д.
- правильных мальтийских
крестов 86 и д.
- с двумя поступательными
парами 161 и д.
Механизмы с остановами
141 и д., 207, 228 и д.,
244
- с вечноым зацеплением
105
Многозвенные механизмы
232 и д., 361 и д., 364,
(366), 370, 373
- - первого класса второго
порядка 361
- - - второго порядка
362
Модели центроид 39
Мюллер (Müller R.) 10, 116
Направляющие механизмы
9, 136, 157, 202 и д.
Неправильные мальтий-
ские кресты 92 и д.
Нестесненности условие 233
и д., 235
Низшие кинематические
пары 40 и д.
Обратный ход коэффи-
циент 220
Обращение движения 46
Огибаемые и огибающие 19
и д.
Определителей метод 369
Определитель кинематиче-
ской цепи 263
- комплексный 270
- - , вычисление 272
Параллелограмм Хатта
446
Параллелограмм шарнир-
ный 153
Пары кинематические 15
Паскаля улитка 161
Передаточное отношение
230 и д.
Передачи угол 221, 235
и д.
Перекатывающиеся рычаги
82 и д., 96
Поворотный круг 43 и д.
Полос 115, 133, 142, 166
- бесконечно удалённый
142
- конечного перемещения
166
Полосная прямая 194
Поселье (Peaucellier) 9
Правильные мальтийские
кресты 86 и д.
Правильный мальтийский
крест с внутренним за-
цеплением 91
Предельные механизмы 153
Продолжительность оста-
новки 207
Простые кинематические
цепи 253 и д.
Противополос 182, 190
Пятизвенная цепь 345, 348,
350
Равнозвонный кривошипно-
шатунный механизм 161
- кулисный механизм 161
Равномерное движение 249
и д.
Рау (Rauh) 12, 14
Реверсирование движения
103 и д.
Реверсивное вращательное
движение 106
Редуктор Вазанта бесступе-
нчатый 223
Рело (Reuleaux) 11
Робертс (Roberts S.) 10,
112, 114
Робертса уравнение 172
- теорема 114, 154
Робертса-Чебышева теоре-
ма 175
Розенбранца индикатор
204
Ромб шарнирный 153
Ромбод шарнирный 153
Савари теорема 44, 124
Синтез механизмов
- , аналитические методы
10, 11, 30 и д., 262 и д.
- , геометрические методы
15
- , динамический 13, 24
и д.
Синтез механизмов методом
геометрических мест 165
- - по четырём заданным
положениям 282 и д.
- , структурные методы
11
- , экспериментальные ме-
тоды 11
- , эмпирические методы
12, 39 и д.
Сильвестр (Sylvester) 10,
11, 14
Совместности уравнение
291, 322, 328
Сомов 11
Стефенсона кулиса 344,
358
Структурные методы син-
теза 14
Сферические механизмы 11
Теорема Виллиса 230
- Кэмуса 23
- Робертса 114 и д., 154
- Робертса-Чебышева 175
- Савари 44, 124
Точка Болла 127, 128,
130, 136, 145, 156
- Чебышева 131, 133, 137,
156
Точки Альта 187
- Вурместера 125, 129, 131,
132, 137, 145, 197, 198,
237
Точки двойные 155
Уатт 9
Уатта механизм 204
- параллелограмм 146
Угол давления 13, 24, 64,
343
- передачи 221, 235 и д.
Улитка Паскаля 161
Уравнение совместности
291
Условие замкнутости 323
- нестесненности 233 и д.,
235
Условия Грасгофа 211 и д.,
218, 313, 358
Фарнборо индикатор 158
Флюке (Flucke) 13
Фурман (Furman) 13
Храповые колеса 100 и д.
Цевочное зацепление 97,
105
Центральный равнозвонный
кривошипно-шатунный
механизм 161
Центроиды 15, 16 и д.
Центроиды в относительном
движении 32 и д.
Цепь кинематическая 40
и д., 253 и д., 258, 259,
260, 261 и д.
Цепь с вращательными па-
рами 264 и д.
- с двумя подвижными ку-
лисами 268

- Цепь с одной неподвижной кулисой 266, 365
 - с одной подвижной кулисой 267
 - четырёхзвенная шарнирная 254
- Чебышева лямбдообразный механизм 161
 - точка 131, 133, 137, 156
 Чебышев П. Л. 9, 10, 14, 114, 131, 264
 Чекурдинов С. А. 10, 11, 171, 175, 216
 Четырёхзвенная шарнирная цепь 254
 Четырёхзвённый шарнирный 274, 276 и д., 291 и д.
- Четырёхзвенные механизмы 166 и д., 170 и д., 180 и д., 196 и д., 273 и д., 276 и д., 291, 292, 303, 305, 308, 316, 318, 322, 329, 330, 332, 336, 338, 342
- Шаблоны центроид 39
 Шарнирная цепь, четырёхзвенная 254
 Шарнирные механизмы 14
 Шарнирный антипараллелограмм 153
 - параллелограмм 153
 - ромб 153
 - ромбонд 153
 Шарнирный четырёхзвённый 274, 276 и д., 291 и д., 326
- Шатун 143, 161
 Шатунная кривая 42, 114, 115 и д., 149, 237
 Шатунные кривые, классификация 149
 Шестизвенные механизмы 243, 344, 346, 351, 357, 359, 360
- Эванса механизм 204
 Экспериментальные методы синтеза механизмов 11
 Эксцентрики 108
 Эмпирические методы синтеза механизмов 12, 39 и д.
- Юдин В. А. 13
- Яр (Jahr W.) 106, 109

О Г И З
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
„ГОСТЕХИЗДАТ“

Москва, Орликов пер., 3

ВЫШЛИ В СВЕТ

Воронков И. М. Курс теоретической механики, изд. 3-е.
1944. Стр. 436. Цена 12 руб.

Лейбензон Л. С. Вариационные методы решения задач
теории упругости. 1943. Стр. 288. Цена 15 руб.

Лейбензон Л. С. Элементы математической теории пла-
стичности. 1943. Стр. 112. Цена 6 руб.

Окунев Б. Н. Вращательное движение артиллерийского
снаряда. 1943. Стр. 160. Цена 6 руб.

Окунев Б. Н. Изменение элементов траектории артилле-
рийского снаряда. 1943. Стр. 144. Цена 5 руб.

Окунев Б. Н. Определение баллистических характери-
стик пороха и давления форсирования. 1943. Стр. 92.
Цена 4 руб.

ГОТОВЯТСЯ К ПЕЧАТИ

Динник А. Н. Устойчивость арок.

Николай Б. Л. Гироскоп в кардановом подвесе.

Седов А. И. Методы теории размерностей и подобия.

Суслов Г. К. Курс теоретической механики, изд. 3-е (посмерт-
ное) под ред. проф. **Н. Н. Бухгольца** и В. К. Гольцмана.

Редактор С. П. Тамбовцев.

Подписано в печати 29/XI 1943 г. 24^{1/4} печ. л., 43,8 авт. л. 71600
тип. знаков в печ. л. Тираж 7000 экз. Л91631. Цена книги 27 р. Заказ № 5275.

1-я Образцовая тип. треста «Полиграфкнига» ОГПЗ при СНК РСФСР.
Москва, Валовая, 28.