А. Н. Коркин и Е. И. Золотарев. Новые успехи русских математиков в теории чисел были достигнуты прежде всего А. Н. Коркиным и Е. И. Золотаревым. Александр Николаевич Коркин (3 марта 1837 — 1 сентября 1908) был старшим из учеников Чебышева [3]). Он происходил из зажиточной крестьянской семьи Вологодской губернии. Петербургский университет Коркин окончил в 1858 г. и преподавал в нем с 1860 по 1908 г., причем с 1868 г. в звании профессора. Более 30 лет он состоял также профессором Морской Академии, где его сменил в 1900 г. его ученик А. Н. Крылов.

---

[1]) Н. Д. Беспамятных, Арифметические исследования в России в XIX веке.— Уч. зап. Гродненского пед. института, вып. II, сер. матем., Минск, 1957; А. А. Киселев и Е. П. Ожигова, П. Л. Чебышев на съездах русских естествоиспытателей и врачей.— Ист.-матем. исслед., вып. XV, 1963.

[2]) Архив АН СССР, ф. 2, оп. 1 (1897), № 16. Избрание Бугаева состоялось в том же году.

[3]) К. А. Поссе, А. Н. Коркин (некролог). — Отч. о сост. и деят. С.-Петербургского университета за 1908 г., СПб., 1909.

Глубокий знаток классиков математики, от Эйлера до Дирихле, Коркин подобно Чебышеву не ценил исследований Римана и Вейерштрасса, казавшихся ему «декадентскими».

Работы Коркина относятся к двум областям: дифференциальным уравнениям и теории чисел. К первой области принадлежат обе его диссертации — магистерская «Об определении произвольных функций в интегралах линейных уравнений с частными производными» (СПб., 1860), высоко оцененная в официальном отзыве Чебышева, и докторская «О совокупных уравнениях с частными производными первого порядка и о некоторых вопросах механики» (СПб., 1868), а также ряд статей. Эти труды Коркина продолжили начатые в Петербурге ранее исследования по уравнениям с частными производными. Высоким качеством отличались лекции Коркина, которые частью включил в свои руководства А. Н. Крылов. Так, например, в широко известном курсе дифференциальных уравнений математической физики Крылова изложены, следуя Коркину, методы интегрирования линейных дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. В начале третьей главы этого курса А. Н. Крылов писал:

А. Н. Коркин.

«В 1901 г. я попросил Александра Николаевича объяснить мне непонятое мною место в одном из мемуаров Пуассона, помещенных в 19-й тетради журнала Политехнической школы. Александр Николаевич не только в нескольких словах разъяснил то, что мне представлялось непонятным, но еще и прочел мне целую лекцию, в которой дал свое изложение метода Пуассона. В какой мере он владел этим предметом, читатель может судить по тому, что эта лекция, составляющая § 40, 41 и 43 этой главы, была им прочитана в ответ на мой вопрос, для Александра Николаевича неожиданный, немедленно, без всякой подготовки, причем Александр Николаевич почти не пользовался карандашом, который держал в руке, а лишь следя глазами за моею записью, продиктовал мне все изложенное ниже со всеми выкладками и формулами» [1]).

Коркину принадлежат ценные работы в теории чисел [2]). Они были проведены им вместе с Е. И. Золотаревым, который вначале слушал у него лекции, а затем стал его сотрудником и другом.

Егор Иванович Золотарев родился 12 апреля 1847 г. в Петербурге, где отец его, часовщик, держал небольшой магазин. После окончания пятой гимназии, одной из лучших в столице по составу учителей (физику в ней преподавал, например, К. Д. Краевич (1833—1892), автор популярнейшего до революции учебника), Золотарев в 1863 г. поступил в Петербургский университет. Физико-математический факультет он окончил в 1867 г.; здесь главными учителями его были Чебышев, Сомов, Коркин.

---

[1]) А. Н. Крылов, О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложение в технических вопросах. Л., 1933, стр. 135.

[2]) А. Н. Коркин, Собрание сочинений, т. 1, СПб., 1911.

Осенью 1868 г. Золотарев защитил диссертацию на право чтения лекций по теории наилучшего приближения функций (о ней речь впереди), с успехом прочитал две пробные лекции и начал работу в Петербургском университете в качестве приват-доцента. Через год он сдал магистерские экзамены и защитил магистерскую диссертацию «Об одном неопределенном уравнении третьей степени» (СПб., 1869), получившую хорошую оценку оппонентов — П. Л. Чебышева и Ю. В. Сохоцкого. В это же время он начал преподавание вначале механики, а затем и математики в Институте инженеров путей сообщения. В университете он читал теорию эллиптических функций, анализ, механику, алгебру и, впервые, курс введения в анализ. Сохранились литографированные издания некоторых его курсов [1]).

Е. И. Золотарев.

Магистерская диссертация Золотарева имела предметом решение в целых числах неопределенного уравнения

$$x^3 + Ay^3 + A^2z^3 - 3Axyz = 1,$$

где A — данное некубическое число. Говоря на языке теории алгебраических чисел, требовалось найти основную единицу кубического поля $R(\sqrt[3]{A})$. Эту задачу Золотарев решил, приведя ее к разысканию минимумов некоторой квадратичной формы с тремя переменными, зависящей от параметра. Таким образом, в этой работе намечены были два главные направления изысканий Золотарева. Вскоре Золотарев вместе с Коркиным занялся теорией минимумов квадратичных форм. Их совместные статьи печатались на протяжении 1872—1877 гг. Параллельно Золотарев разрабатывал теорию алгебраических чисел и в 1874 г. защитил в качестве докторской диссертации главный свой труд в этой области —«Теорию целых комплексных чисел с приложениями к интегральному исчислению» (СПб., 1874). Оппонентами были Чебышев и Коркин. Результаты этого труда были дополнены затем в двух статьях, одна из которых, переданная Золотаревым в редакцию журнала Лиувилля летом 1876 г. во время поездки за границу, увидела свет только посмертно в 1880 г., а другая, представленная Академии наук в 1877 г., вышла из печати в следующем году, т. е. в самый год его смерти. Заметим, что решенная Золотаревым проблема интегрального исчисления непосредственно примыкала к исследованиям Чебышева по интегрированию алгебраических функций, в ходе обобщения которых Золотарев и пришел к созданию своей теории целых комплексных чисел. В апреле 1876 г. Золотарев получил в Петербургском университете профессуру и в том же году, в декабре, был избран членом Академии наук в звании адъюнкта на место, освободившееся после кончины О. И. Сомова. В отзыве, составленном Чебышевым и подписанном также Буняковским, Перевощиковым и астрономом А. Н. Савичем (1811—1883),

[1]) Подробнее см. Р. О. Кузьмин, Жизнь и научная деятельность Егора Ивановича Золотарева.— УМН, II, 6 (22), 1947; Е. П. Ожигова, Егор Иванович Золотарев, М.—Л., 1966.

отмечалось, что Золотарев, подобно Сомову, «представляет в себе также замечательное соединение познаний по Чистой Математике и по Аналитической Механике» и что наука обязана Золотареву «многими весьма важными трудами, доставившими его имени лестную известность и у нас и за границею» [1]). Не прошло и двух лет, как те же Чебышев, Буняковский и Савич вошли в физико-математическое Отделение Академии с представлением о повышении Золотарева в звание экстраординарного академика, хотя по уставу для этого полагался шестилетний срок работы в звании адъюнкта. Избрание прошло 14 мая 1878 г. в собрании Отделения единогласно и на август был заготовлен протокол для баллотировки в общем собрании Академии наук. Протокол этот, однако, остался незаполненным: в начале июля Е. И. Золотарев попал под поезд и 19 июля скончался от заражения крови всего 31 года от роду.

Таким образом, научная деятельность Золотарева продолжалась всего около десяти лет, но за этот короткий срок он сделал много первоклассных открытий. Уже в советское время основные его труды и часть переписки, представляющей выдающийся научный и биографический интерес, были собраны в двух томах. К сожалению, вопреки своему названию, это издание не является полным [2]).

Обратимся прежде всего к работам Золотарева и Коркина по теории квадратичных форм.

Работы А. Н. Коркина и Е. И. Золотарева по теории квадратичных форм. Однородный многочлен второй степени с n переменными

$$\sum_{i,\, j=1}^{i,\, j=n} a_{ij}x_ix_j = a_{11}x_1^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + \ldots$$
$$\ldots + a_{n-1,\, n}x_{n-1}x_n + a_{n,\, n-1}x_nx_{n-1},$$

где $a_{ij} = a_{ji}$, называется квадратичной формой; коэффициенты здесь — действительные числа. В зависимости от числа переменных различаются двоичные (бинарные), троичные (тернарные) и т. д. формы. В арифметической теории форм рассматриваются формы, переменные которых принимают только целые рациональные значения. Величина

$$D = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называется определителем формы (мы ставим знак в соответствии с тем, как поступали в XIX веке). Поясним некоторые нужные далее понятия на примере двоичной формы, которую запишем в виде

$$ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

Легко показать, что если определитель этой формы

$$D = -\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = b^2 - ac < 0,$$

---

[1]) Е. П. Ожигова, Егор Иванович Золотарев, стр. 50.

[2]) Е. И. Золотарев, Полное собрание сочинений с биографическим очерком Б. А. Венкова. Вып. 1—2, изд. АН СССР, 1931—1932.

то, исключая тривиальный случай обращения формы в нуль при $x = y = 0$, форма принимает значения только одного знака. В этом случае форма называется определенной. Например, при $a > 0$ (тогда и $c > 0$) форма будет положительно определенной или, короче, положительной. Если же $D > 0$, то при одних значениях x, y форма положительна, а при других — отрицательна. Такая форма называется неопределенной. Случай $D = 0$ мы оставим в стороне. Отрицательные формы получаются из положительных умножением на -1, так что можно ограничиться рассмотрением одних положительных форм.

Линейное преобразование

$$x = \alpha x_1 + \beta y_1,$$
$$y = \gamma x_1 + \delta y_1$$

переводит данную форму в другую квадратичную форму:

$$a_1 x_1^2 + 2b_1 x_1 y_1 + C_1 y_1^2.$$

Если при целых α, β, γ, δ определитель преобразования

$$d = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma$$

равен 1 или -1, то множества чисел, представляемых этими двумя формами, одинаковы. Такие формы Лежандр назвал эквивалентными. Две эквивалентные формы обязательно обладают одним и тем же определителем, ибо

$$D_1 = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} = D \cdot d^2.$$

Однако две формы с одним и тем же определителем могут и не быть эквивалентными. Для эквивалентности двух форм с одним и тем же определителем необходимо и достаточно, чтобы существовало хотя бы одно линейное преобразование с $d = \pm 1$, переводящее одну форму в другую. Множество форм данного определителя, между собою эквивалентных, называется классом форм. Для форм данного определителя число различных классов конечно. Все эти понятия распространяются на квадратичные формы с числом переменных, бóльшим двух, и с любыми действительными коэффициентами.

Изучение арифметики квадратичных форм началось с форм двоичных. Ранее говорилось о работах Эйлера, посвященных проблеме представимости такими формами целых чисел. Исследования Эйлера продолжил и обобщил Лагранж, который начал разработку вопроса об отыскании экстремумов форм (1769 и след. годы), а затем Гаусс, которому принадлежат основные понятия и терминология современной теории и множество важных открытий в этой области (1801). К Гауссу, в частности, восходит развитое учение об эквивалентности форм. От «Арифметических исследований» Гаусса отправлялись все, кто работал в этой области в первой половине XIX века: Дирихле, Якоби, Эйзенштейн, Эрмит и другие. Работы Коркина и Золотарева были посвящены исследованию минимумов положительных квадратичных форм. Возьмем множество положительных форм $\sum_{i,\,j=1}^{i,\,j=n} a_{ij} x_i x_j$ данного определителя $D < 0$. Если действительные коэффициенты a_{ij} фиксированы, а переменные x_k принимают всевозможные целые рациональные значения, не равные одновременно все нулю, то среди значений, получаемых формой, имеется некоторое наименьшее. Этот минимум формы зависит от ее коэффициентов и непрерывно меняется с непрерывным изменением последних; при этом для эквивалентных между собой форм минимум одинаков. В своем изменении этот минимум может иметь один или несколько максимумов, соответствующих неэквивалентным формам (число которых зависит от числа переменных n).

Разыскание минимумов квадратичных форм принадлежит к числу важных задач их арифметической теории и от него зависит решение многих других вопросов. В письме к Якоби, напечатанном в 40-м томе журнала Крелле, Ш. Эрмит указал на значение, которое имело бы определение минимумов двоичной и троичной форм,

$$(y-ax)^2+\frac{x^2}{\Delta} \quad \text{и} \quad A(z-ax)^2+B(y-bx)^2+\frac{x^2}{\Delta},$$

где A и B — положительные числа, a и b — действительные и параметр Δ непрерывно меняется от 0 до ∞. Далее Эрмит сообщал, что для положительных форм с n переменными он получил для границы минимумов число $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt[n]{|D|}$ и высказал предположение, что коэффициент в этом выражении следует заменить на $\frac{2}{\sqrt[n]{n+1}}$. К отысканию минимумов квадратичных форм,— заключал Эрмит,— приводится, в частности, решение в целых числах неопределенных уравнений вида Norme $\varphi(\alpha)=1$, где $\varphi(\alpha)$ — целое комплексное число, зависящее от корня α неприводимого уравнения $F(x)=0$ n-й степени с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом, равным 1. Под целым комплексным числом $\varphi(\alpha)$ здесь понимается многочлен $a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2+\ldots+a_{n-1}\alpha^{n-1}$ с целыми рациональными коэффициентами. Нормой числа $\varphi(\alpha)$ называется произведение $\varphi(\alpha_1)\,\varphi(\alpha_2)\ldots\varphi(\alpha_n)$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — все корни уравнения $F(x)=0$. Так, нормой обыкновенного комплексного числа $a+bi$ служит произведение $(a+bi)(a-bi)$, ибо корни α_1, α_2 уравнения $x^2+1=0$ суть i и $-i$.

А. Н. Коркин заинтересовался теорией квадратичных форм еще во время заграничной поездки 1862—1863 гг.; под его влиянием занялся ею Е. И. Золотарев. Только что упомянутое письмо Эрмита послужило отправным пунктом магистерской диссертации Золотарева «Об одном неопределенном уравнении третьей степени» (СПб., 1869), посвященной решению в целых числах уравнения

$$x^3+Ay^3+A^2z^3-3Axyz=1,$$

где A — целое некубическое число, левая часть которого есть норма целого комплексного числа $x+y\sqrt[3]{A}+z\sqrt[3]{A^2}$, зависящего от корня уравнения $u^3-A=0$. Было известно, что бесчисленное множество решений рассматриваемого уравнения можно вывести, зная одно основное. В первой части работы Золотарев нашел все последовательные минимумы двоичной и троичной форм, о которых шла речь в письме Эрмита, и получил некоторые предварительные результаты, касающиеся предположения Эрмита о границах минимумов n-ичных форм. Во второй части Золотарев показал, что искомое основное решение изучаемого им кубического уравнения содержится среди значений, сообщающих минимумы некоторой квадратичной троичной форме, зависящей от параметра. Умея находить последовательные минимумы последней, он до конца решил поставленную задачу.

Попытка проверить предположение Эрмита относительно коэффициента $\frac{2}{\sqrt[n]{n+1}}$ в выражении для точной верхней границы минимумов форм с n переменными вскоре повлекла за собой серию совместных работ обоих русских математиков, продолжавшихся около 8 лет.

В статье «О четверичных положительных квадратичных формах» (Mathematische Annalen, B. 5, 1872), Коркин и Золотарев исследовали вопрос Эрмита для случая четырех переменных и установили, что минимум таких форм не превосходит числа $\sqrt[4]{4|D|}$, причем это значение принимается формой

$$\sqrt[4]{4\,|\,D\,|}\,(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4),$$

например, при $x_1=-1$, $x_2=x_3=x_4=1$. Вместе с тем было показано, что предположение Эрмита, верное для $n=2$ и $n=3$, не оправдывается уже при $n=4$, так как $\frac{2}{\sqrt[4]{5}}<\sqrt[4]{4}$. Величина $\frac{2}{\sqrt[n]{n+1}}\sqrt[n]{|D|}$ при $n>3$ является точной верхней границей только для некоторого класса эквивалентных форм данного определителя.

В двух последующих работах (Math. Annalen, B. 6, 1873; B. 11, 1877) Коркин и Золотарев распространили эти результаты. Здесь вводится важное понятие предельных форм, минимумы которых при любых бесконечно малых изменениях коэффициентов (не меняющих D) могут только уменьшаться. Та предельная форма, минимум которой является наибольшим, доставляет точную верхнюю границу минимумов всех форм данного определителя. В более ранней из этих двух работ авторы с помощью приведения формы к некоторому простейшему виду, которое они назвали разложением формы по ее минимумам, нашли лучшую, чем Эрмит, верхнюю границу минимумов для любого n, дающую точный наибольший минимум при $n=4$. В последней статье они решили ту же задачу для $n=5$ (здесь получается $\sqrt[5]{8|D|}$) и установили все предельные формы для форм с 2, 3, 4 и 5 переменными, причем оказалось, что при $n=2$ и $n=3$ их по одной, в случае четырех переменных — две и в случае пяти — три. Здесь применено было не разложение формы по минимумам, а разыскание совокупностей значений переменных, при которых форма имеет минимум, так называемых представлений минимума. Число представлений минимума n-ичной формы не меньше $\frac{n(n+1)}{2}$ и, зная эти представления, а также значение минимума, можно полностью определить коэффициенты соответствующей предельной формы.

Открытия Коркина и Золотарева были очень высоко оценены Эрмитом, Чебышевым и другими современниками, и положили начало работам многих русских и зарубежных ученых, которые в различных направлениях продолжаются до наших дней. В частности, благодаря усилиям целого ряда исследователей были найдены наибольшие минимумы форм с 6, 7, 8, 9 и 10 переменными (Г. Блихфельдт, 1925—1934; Н. Гофрейтер, 1934; Л. Морделл, 1946—1948). При этом оказалось, что минимумы предельных форм, приведенные в качестве примеров для $n=6$ и $n=7$ во второй статье Коркина и Золотарева, являются для этих случаев наибольшими.

В конце XIX века немецкий математик Г. Минковский, уроженец городка Алексоты Минской губернии (теперь в Литовской ССР), приступил к разработке дисциплины, которую назвал геометрией чисел. Оказалось, что существует глубокий параллелизм между свойствами квадратичных форм и правильных точечных решеток в евклидовом пространстве, число измерений которого равно числу переменных формы. Так, двоичной форме соответствует плоская решетка параллелограммов с вершинами в целочисленных точках косоугольной декартовой системы, определяемой коэффициентами формы. В трехмерном пространстве троичной форме соответствуют параллелепипеды. Все понятия теории квадратичных форм имеют свои аналоги в геометрии чисел и, например, минимум формы выступает как квадрат наименьшего расстояния между точками ее решетки. В 1904 г. Минковский показал, что задачу Коркина и Золотарева можно высказать и как задачу о наиболее плотном заполнении n-мерного пространства одинаковыми n-мерными шарами, центры которых лежат в точках решетки [1]).

Геометрия чисел, в которой плодотворно взаимодействуют арифметические и геометрические представления и методы, выросла в большую науку. В России это направление первым стал развивать Г. Ф. Вороной. Но прежде чем перейти к его работам, мы должны рассмотреть более ранние исследования о минимумах неопределенных форм, принадлежащие А. А. Маркову.

[1]) Б. Н. Делоне, Петербургская школа теории чисел, М.—Л., 1947.