АКАДЕМИЯ НАУК УССР

СБОРНИК

ПОСВЯЩЕННЫЙ ПАМЯТИ

АКАДЕМИКА

ДМИТРИЯ АЛЕКСАНДРОВИЧА

ГРАВЕ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ

Акад. О. Ю. Шмидта

чл.-кор. Академии Наук СССР Б. Н. Делоне

чл.-кор. Академии Наук СССР Н. Г. Чеботарева

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1940 ЛЕНИНГРАД

Сборник, посвященный памяти академика Дмитрия Александровича Граве. Государственное издательство технико-теоретической литературы 1940 г. Индекс Т 24-5-4. Изд. № 161.

★

Редактор *Д. А. Райков*
Технический редактор *Е. Г. Шпак*

★

Лист 1-й и полоса 326 сданы в набор 7/II 1940 г., подписаны к печати 20/IV 1940 г. Остальные листы сданы в набор 3/IX 1937 г., подписаны к печати 20/IV 1938 г. Формат 60×92/16. Объем: 10,68 бум. л., 20,5 печ. л. + 6 вклеек, 24,3 авт. л., 25,15 уч.-изд. л., 95 560 тип. знаков в бум. л. Тираж 2100 экз. Бумага Камской фабрики. Уполном. Главлита № Б-56134.

Набрано и сматрицировано в 1-й Образцовой тип. Огиза РСФСР треста „Полиграфкнига". Москва, Валовая, 28. Зак. № 688. Отпечатано с матриц.

Цена книги 8 р. Переплет 2 р.

АКАДЕМИК ДМИТРИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ ГРАВЕ

(1863—1939)

Н. Г. Чеботарев

19-го декабря 1939 года в Киеве скончался Дмитрий Александрович **Граве**, действительный член Украинской Академии наук, почетный член Академии наук СССР, награжденный орденом Трудового Красного знамени. Его смерть является большой утратой для математического мира, так как научная жизнь Д. А. Граве оставила глубокие и плодотворные следы. Д. А. Граве был автором многочисленных ценнейших исследований в различных областях математики, большого количества книг и монографий, на которых было воспитано несколько поколений математиков; он был создателем одной из крупнейших в Союзе математических школ, представители которой в настоящее время являются профессорами математики во многих крупных центрах Союза и продолжают научную деятельность в духе традиций школы Д. А. Граве: конкретность и четкость в постановке проблемы доведения их решений до конца.

Д. А. Граве родился в 1863 году в Петербурге. Рано лишившись отца, он со школьной скамьи должен был собственным трудом содержать себя и свою семью. Поступив в 1881 году в Петербургский университет, он окончил его в 1885 году, после чего был оставлен при университете „для приготовления к профессорскому званию“, согласно тогдашней официальной терминологии. Одновременно он состоял преподавателем Института Путей Сообщения, а затем Высших женских курсов (Бестужевских). О преподавании в этих учебных заведениях у него сохранились богатые и яркие воспоминания, которыми он часто делился с учениками. Особенно любил он вспоминать про работу в путейском институте, где у него сотрудником был исключительно талантливый математик В. А. Марков (брат академика), умерший в молодом возрасте.

26 лет он защитил магистерскую диссертацию „Об интегрировании частных диференциальных уравнений первого порядка“, а 34 лет — докторскую „Об основных задачах математической теории построения географических карт“. Вскоре после этого он был выбран профессором Харьковского университета. Пробыв в Харькове около 2 лет, он перешел в Киевский университет на место умершего там профессора Покровского и в Киеве оставался до конца своей жизни, если не считать большого перерыва, в течение которого Д. А. лечился за границей от туберкулеза.

В 1918 году в Киеве была основана Украинская Академия наук, в которую Д. А. был привлечен, как лучший математик Украины, в качестве одного из первых действительных членов. Отдавая научной работе массу времени и энергии, Д. А. Граве находил время и для общественной работы. Так, в 1923 году он был выбран членом Киевского горсовета. В 1929 году он был избран почетным членом Академии наук СССР.

В 1935 году математический мир и широкая общественность УССР и СССР организовали торжественное празднование 50-летнего юбилея его научно-педагогической деятельности. На юбилей в Киев съехались почти все его ученики и „внуки" (ученики учеников). Правительство СССР наградило его по случаю юбилея орденом Трудового Красного знамени. Д. А. чувствовал себя на юбилее очень бодро и строил планы о написании 17-томного „Трактата по алгебраическому анализу". Смерть помешала полному осуществлению этих планов: он успел написать только три тома.

§ 1. Математическое творчество Дмитрия Александровича с его первых шагов было направлено по руслу знаменитой „петербургской школы" академика Пафнутия Львовича Чебышева, находившейся в то время в полном расцвете. Непосредственное же влияние на его первые работы имел один из старейших учеников Чебышева профессор Александр Николаевич Коркин, в семинаре которого Д. А. получил первоначальный толчок к результатам своей магистерской диссертации „Об интегрировании частных диференциальных уравнений первого порядка", написанной им в возрасте 26 лет. В этой диссертации Д. А. 1) обобщил так называемый второй метод Якоби (или метод Якоби-Майера) на случай, когда заданные уравнения содержат в явном виде искомую функцию V; 2) приложил метод Коркина к решению обобщенной задачи Коши: интегрировать замкнутую систему из g уравнений так, чтобы искомая функция обращалась при частных значениях g из переменных в произвольно заданную функцию остальных; при этом ему пришлось существенно изменить изложение метода Коркина, и оказалось, что метод Майера для линейных уравнений и новый метод Ли являются частными случаями метода Коркина; 3) рассмотрел уравнения задачи трех тел и решил задачу, поставленную Коркиным, о нахождении всех интегралов этой системы, не зависящих от закона действия сил. Для этого он берет эту систему в так называемых бертрановских координатах

$$
\begin{aligned}
u &= x^2 + y^2 + z^2, & u_1 &= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, & q &= xx_1 + yy_1 + zz_1,\\
v &= \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2, & v_1 &= \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2, & s &= \xi\xi_1 + \eta\eta_1 + \zeta\zeta_1,\\
w &= x\xi + y\eta + z\zeta, & w_1 &= x_1\xi_1 + y_1\eta_1 + z_1\zeta_1, & &\\
r &= x_1\xi + y_1\eta + z_1\zeta, & r_1 &= x\xi_1 + y\eta_1 + z\zeta_1, & &
\end{aligned}
$$

которые связаны зависимостью

$$
\begin{vmatrix}
u & q & w & r_1\\
q & u_1 & r & w_1\\
w & r & v & s\\
r_1 & w_1 & s & v_1
\end{vmatrix} = 0.
$$

Д. А. Граве
в студенческие годы.

Уравнения системы принимают вид

$$\frac{du}{dt}=\frac{2w}{m}, \qquad \frac{du_1}{dt}=\frac{2w_1}{m}, \qquad \frac{dq}{dt}=\frac{r}{m}+\frac{r_1}{m_1},$$

$$\frac{dv}{dt}=2\alpha w+2\beta r, \qquad \frac{dv_1}{dt}=2\alpha_1 w_1+2\beta r_1,$$

$$\frac{dw}{dt}=\frac{v}{m}+\alpha u+\beta q, \qquad \frac{dw_1}{dt}=\frac{v_1}{m_1}+\alpha_1 u_1+\beta q,$$

$$\frac{dr}{dt}=\frac{s}{m_1}+\alpha q+\beta u_1, \qquad \frac{dr_1}{dt}=\frac{s}{m}+\alpha_1 q+\beta u,$$

$$\frac{ds}{dt}=\alpha_1 r+\alpha r_1+\beta(w+w_1),$$

где α, α_1, β — коэфициенты, зависящие от закона действия сил. Таким образом, если V — искомый интеграл, то, приравнивая нулю его полную производную, выраженную при помощи этих уравнений, Д. А. получает неоднородную линейную функцию от α, α_1, β. Приравнивая нулю коэфициенты этой функции, он получает для V систему из четырех частных уравнений. Их интегрирование представляло большие трудности в силу большого количества неизвестных и сложности самих уравнений. Решив эту задачу, Д. А. выказал в полном блеске высоту выкладочной техники, которой отличаются все его лучшие работы и которая впоследствии дала ему возможность решить несколько труднейших проблем, стоявших на очереди в математике той эпохи.

В этой работе уже в полной мере выявились математические вкусы Д. А. к конкретной математике, которая не удовлетворяется доказательствами существования, а всегда ищет алгорифмов для получения решений на самом деле. Такое направление было вообще характерно для петербургской школы, представители которой любили считать себя преемниками Эйлера.

§ 2. Докторская диссертация Д. А. Граве „Об основных задачах математической теории построения географических карт“ вышла в свет лишь в 1896 г., т. е. через семь лет после магистерской. Но это была диссертация! В ней был решен целый ряд фундаментальных проблем диференциальной геометрии, имеющих приложение к черчению карт. В числе этих проблем содержатся следующие:

I. Нахождение всех эквивалентных (т. е. сохраняющих площади) проекций шара на плоскость, которые изображают меридианы и параллели прямыми или окружностями. Эта задача была решена Лагранжем для случая конформных проекций. Ее практическое значение заключается в том, что вычерчивать для карт меридианы и параллели в виде кривых, отличных от прямых и окружностей, технически весьма сложно.

Д. А. решил эту задачу двумя (не слишком отличающимися друг от друга) способами, из которых второй был помещен в Journal de mathématiques (5-я серия, т. 2, 1896). Приведем основную идею этого способа и результаты, к которым пришел Д. А.

Пусть $x=\varphi(u, v)$, $y=\psi(u, v)$ будут координаты проекции точки (u, v) произвольной поверхности с гауссовыми координатами u, v и элементом дуги

$$ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2. \tag{1}$$

Условие эквивалентности проекции запишется в форме

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}=K\sqrt{EG-F^2}, \tag{2}$$

где K — постоянная. Для поверхности вращения можно взять уравнения в форме $x=\varphi(u)\cos v$, $y=\varphi(u)\sin v$, $z=u$, где u — функция широты, пока произвольная, а v — долгота. Тогда

$$E=1+[\varphi'(u)]^2, \quad F=0, \quad G=[\varphi(u)]^2, \tag{3}$$

и уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}=\Omega(u). \tag{4}$$

Меняя функцию u широты, можно привести это уравнение к виду

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}=1 \tag{5}$$

и таким образом решать задачу не для шара, а для произвольной поверхности вращения, форма которой не отражается на искомом решении.

Д. А. расчленяет задачу на две: 1) изображение меридианов в виде прямых, 2) изображение меридианов в виде кругов.

1) В первом случае пусть Σ будет огибающая меридианов (случай параллельных и пересекающихся в одной точке меридианов рассматривается особо). Обозначая через a, b ее координаты, рассматриваемые как функции от v и подчиненные равенству

$$a'^2+b'^2=1$$

здесь мы пользуемся произволом в выборе функции v, но зато берем условие эквивалентности в форме

$$x_v y_u - x_u y_v = V, \tag{6}$$

а не в форме (5)], мы можем представить координаты точек меридиана так:

$$x=a+\rho a', \quad y=b+\rho b', \tag{7}$$

где ρ — функция от y и v.

Легко получить равенство $\rho^2\mu=2u+w$, где μ и w — функции от v.

Обозначая через x', y', ... производные по v, мы должны подчинить параллели $u=\text{const}$ диференциальному уравнению кругов

$$3(x'x''+y'y'')(x'y''-x''y')-(x'^2+y'^2)(x'y'''-x'''y')=0. \tag{8}$$

Подставляя значения x и y из (7), Д. А. после сложных выкладок, упрощаемых путем остроумных подстановок, получает все возможные формы проекций.

2) Во втором случае Д. А. берет уравнения меридианов на карте в форме

$$x=a+\rho\cos\varphi, \quad y=b+\rho\sin\varphi, \tag{9}$$

где a, b, ρ зависят только от v, а φ — от u, v. Без труда [при помощи (5)] получается соотношение

$$\rho a'\sin\varphi-\rho b'\cos\varphi+\rho\rho'\varphi=u+w.$$

Опять пользуемся уравнением (8), что после еще более трудных выкладок дает все возможные формы проекций.

Я считаю уместным привести все полученные Д. А. типы проекций, где функция $u(v)$ взята так, чтобы удовлетворялось уравнение (5):

$$\text{I.}\quad \left.\begin{cases} x = au + \alpha v \\ y = bu + \beta v \end{cases}\right\} \quad a\beta - \alpha b = 1.$$

$$\text{II.}\quad \left.\begin{cases} x = (av + b)\sqrt{2ku + l} \\ y = (\alpha v + \beta)\sqrt{2ku + l} \end{cases}\right\} \quad k(a\beta - \alpha b) = 1.$$

$$\text{III.}\quad \left.\begin{cases} x = (au + b)\sqrt{2kv + l} \\ y = (\alpha u + \beta)\sqrt{2kv + l} \end{cases}\right\} \quad k(b\alpha - a\beta) = 1.$$

$$\text{IV.}\quad \begin{cases} x = a - \dfrac{u + w}{b}, \\ y = bv + \beta + \dfrac{1}{b}\sqrt{b^2\rho^2 - (u + w)^2}. \end{cases}$$

$$\text{V.}\quad \begin{cases} x = a - \dfrac{v + w}{b}, \\ y = bu + \beta + \dfrac{1}{b}\sqrt{b^2\rho^2 - (v + w)^2}. \end{cases}$$

$$\text{VI.}\quad \begin{cases} x = \delta\cos\dfrac{u + \varepsilon}{k} - \sin\dfrac{u + \varepsilon}{k}\sqrt{2kv + l}, \\ y = \delta\sin\dfrac{u + \varepsilon}{k} - \cos\dfrac{u + \varepsilon}{k}\sqrt{2kv + l}. \end{cases}$$

$$\text{VII.}\quad \begin{cases} x = \delta\cos\dfrac{v + \varepsilon}{k} - \sin\dfrac{v + \varepsilon}{k}\sqrt{2ku + l}, \\ y = \delta\sin\dfrac{v + \varepsilon}{k} + \cos\dfrac{v + \varepsilon}{k}\sqrt{2ku + l}. \end{cases}$$

$$\text{VIII.}\quad \begin{cases} x = \sqrt{2kv + l}\left(\dfrac{\lambda}{k} + \cos\varphi\right), \\ y = \sqrt{2kv + l}\left(\dfrac{\mu}{k} + \sin\varphi\right), \\ \text{где } \lambda\sin\varphi - \mu\cos\varphi + k\varphi = u + \jmath. \end{cases}$$

$$\text{IX.}\quad \begin{cases} x = \sqrt{2ku + l}\left(\dfrac{\lambda}{k} + \cos\varphi\right), \\ y = \sqrt{2ku + l}\left(\dfrac{\mu}{k} + \sin\varphi\right), \\ \text{где } \lambda\sin\varphi - \mu\cos\varphi + k\varphi = v + \jmath. \end{cases}$$

$$\text{X.}\quad \begin{cases} x = \cos\dfrac{u + \varepsilon}{k}\cdot\dfrac{\rho^2 + A^2 - R^2}{2A} - \sin\dfrac{u + \varepsilon}{k}\cdot\dfrac{\Delta}{2A}, \\ y = \sin\dfrac{u + \varepsilon}{k}\cdot\dfrac{\rho^2 + A^2 - R^2}{2A} + \cos\dfrac{u + \varepsilon}{k}\cdot\dfrac{\Delta}{2A}, \\ \text{где } \rho = \sqrt{2kv + l},\ \Delta = \sqrt{4A^2\rho^2 - (\rho^2 + A^2 - R^2)^2}. \end{cases}$$

$$\text{XI.}\quad \begin{cases} x=\cos\dfrac{v+\varepsilon}{k}\cdot\dfrac{\rho^2+A^2-R^2}{2A}-\sin\dfrac{v+\varepsilon}{k}\cdot\dfrac{\Delta}{2A}, \\ y=\sin\dfrac{v+\varepsilon}{k}\cdot\dfrac{\rho^2+A^2-R^2}{2A}+\cos\dfrac{v+\varepsilon}{k}\cdot\dfrac{\Delta}{2A}, \\ \text{где } \rho=\sqrt{2ku+l},\ \Delta=\sqrt{4A^2\rho^2-(\rho^2+A^2-R^2)^2}\,. \end{cases}$$

Эта работа произвела громадное впечатление. Один из крупнейших математиков той эпохи Эрмит (Ch. Hermite) написал Д. А.: „Je vous félicite au point de vue algébriste", имея в виду, конечно, проявленное Д. А. необычайное искусство в алгебраических выкладках.

II. Вторая решенная в диссертации Д. А. задача имеет еще большее принципиальное значение для математиков. Это — решение задачи на экстремум нового типа, предложенной П. Л. Чебышевым в следующей формулировке:

«Окончательное решение о наивыгоднейшей проекции карт очень просто: наивыгоднейшая проекция для изображения какой-нибудь части земной поверхности на карте есть та, в которой на границе изображения масштаб сохраняет одну и ту же величину, легко определяемую по принятой, нормальной величине масштаба». (Сочинения П. Л. Чебышева, т. I, стр. 242, Петербург 1899).

Д. А. доказал это утверждение, приведенное Чебышевым без доказательства. Впоследствии он распространил свое доказательство на произвольные поверхности, имеющие гауссову кривизну постоянного знака. В то же время самое доказательство сильно упростилось. Оно опубликовано в Journal für die reine und angewandte Mathematik, т. 140 (1911). Его идея заключается в следующем. Представим линейный элемент заданной поверхности в изотермических координатах: $ds^2=\lambda^2(du^2+dv^2)$.

Тогда всякая конформная (а о таких только и идет речь) проекция поверхности на плоскость (x, y) выразится формулой

$$x+iy=f(u+iv),$$

а масштаб — формулой

$$m=\frac{|f'(u+iv)|}{\lambda}.$$

Отсюда, вводя обозначение

$$H=\ln|f'(u+iv)|=\frac{1}{2}\ln f'(u+iv)+\frac{1}{2}\ln f'(u-iv),$$

мы получим $\ln m=H-\ln\lambda$.

H, будучи вещественной частью от аналитической функции $\ln f'(u+iv)$, является гармонической функцией, а потому в силу известной теоремы не принимает во внутренних точках областей экстремальных значений.

Это же отчасти имеет место и для функции $H-\ln\lambda$. В самом деле, если, например, гауссова кривизна K положительна и во внутренней точке $H-\ln\lambda$ достигало бы максимума, то мы имели бы

$$\frac{\partial^2(H-\ln\lambda)}{\partial u^2}\leqslant 0,\quad \frac{\partial^2(H-\ln\lambda)}{\partial v^2}\leqslant 0;$$

складывая, мы получили бы $\dfrac{\partial^2\ln\lambda}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2\ln\lambda}{\partial v^2}\geqslant 0$.

Д. А. Граве в 1896 г.

Но из гауссовой theorema egregium легко получается формула

$$\lambda^2 K = -\left(\frac{\partial^2 \ln \lambda}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \ln \lambda}{\partial v^2}\right),$$

и наше неравенство приобрело бы вид $\lambda^4 K \leqslant 0$, что противоречит предположению. Аналогично доказывается в случае отрицательной гауссовой кривизны отсутствие минимумов.

Пусть на заданном контуре функция $H - \ln \lambda$ равна нулю. Тогда при $K > 0$ она отрицательна внутри контура. Требуется доказать, что амплитуда (т. е. разность между наибольшим и наименьшим значениями) функции $H - \ln \lambda$ меньше, чем для любой другой функции типа $H_1 - \ln \lambda$. Если наибольшее значение последней есть A, то функция $H_2 - \ln \lambda = H_1 - A - \ln \lambda$ имеет ту же амплитуду и принимает внутри и на контуре только неположительные значения. Остается доказать, что функция $H_2 - \ln \lambda$ имеет меньший минимум, чем $H - \ln \lambda$. Это следует из того, что разность

$$H - \ln \lambda - (H_2 - \ln \lambda) = H - H_2,$$

будучи гармонической функцией и принимая на контуре только положительные значения, не может принимать отрицательных значений и внутри контура.

Это весьма простое рассуждение, однако, потребовало для своего открытия немалого промежутка времени (с 1856 по 1911 г.) и усилий многих лучших представителей чебышевской школы.

На диспуте один из оппонентов Д. А., академик А. А. Марков, указал на недостаточность его результата, в котором отсутствовало доказательство существования искомой наилучшей проекции. Путь к этому доказательству был намечен впоследствии профессором Шварцем. Но попытки найти этот путь, а также первоначальная редакция доказательства потребовали от Д. А. углубления в основы общей теории функций вещественного переменного — направление, чуждое чебышевской школе.

III. В той же диссертации был дан новый способ решения задачи Дирихле для алгебраических контуров. Этот способ основан на введении комплексных переменных и на формальных преобразованиях. Он весьма практичен для тех случаев, в которых он применим. Кроме того, исходя из задачи Дирихле, Д. А. предложил новую классификацию алгебраических кривых, которая по мнению авторитетов была бы достойна подробной разработки.

IV. Наконец, был решен большой ряд частных задач по картографии, для чего тоже потребовалось немало остроумия.

Эта диссертация, воспроизведенная по частям в виде статей, помещенных в лучших математических журналах, создала Д. А. репутацию крупного ученого.

§ 3. Из других работ этого периода (который можно назвать петербургским периодом деятельности Д. А.) обращает на себя внимание его работа „Об основных предложениях теории функций двух вещественных переменных“ (Харьков, 1898). В первой ее части Д. А. развивает теорию „фигур maximi“, примыкающую к исследованиям Минковского по теории выпуклых тел. Во второй части Д. А. строит особые „полиэдральные“ функции, обладающие замечательными свойствами. Они определяются так. Всякое число $x > 0$ может быть однозначно представлено в виде ряда

$$x = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{n^i},$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots$ — целые неотрицательные числа, причем при $i \geqslant 1$ $a_i < n$; n будем предполагать нечетным. Если в ряде $a_1, a_2, \ldots$ не встречается нечетных чисел, положим $b_i = \frac{a_i}{2}$ и определим функцию $\vartheta(x)$ так:

$$\vartheta(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{m^i}, \tag{1}$$

где $n = 2m - 1$. Если же a_k — первое нечетное число этого ряда, то положим

$$b_i = \frac{a_i}{2}\ (i \leqslant k-1), \quad b_k = \frac{a_k+1}{2}, \quad b_i = 0\ (i > k),$$

и определим функцию $\vartheta(x)$ опять рядом (1). Функция $\vartheta(x)$ — неубывающая и непрерывная. Она принимает значение

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{m^i} \quad \text{в точке} \quad x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2b_i}{n^i},$$

если существует бесконечно много чисел $b_i > 0$, и в целом интервале

$$\left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{2b_i}{n^i} + \frac{2b_k - 1}{n^k}, \quad \sum_{i=1}^{k} \frac{2b_i}{n^i}\right)$$

— в противном случае. Д. А. называет такие интервалы *промежутками неизменяемости* функции $\vartheta(x)$.

Если в ряде $a_1, a_2, \ldots$ встречаются нечетные числа, то $\vartheta'(x) = 0$. В противном случае производной не существует.

Особенно интересно вычисление определенного интеграла. Чтобы определить функцию

$$\omega(x) = \int_0^x \vartheta(x)\, dx,$$

Д. А. подсчитывает сумму длин промежутков неизменяемости, умножаемых на значения $\vartheta(x)$ в этих промежутках, и получает для случая существования нечетных a_i

$$\omega(x) = \frac{a_0^2}{2} + a_0 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{n^i} + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i(a_i+1)}{n^i m^i} + \sum_{l=1}^{k} \frac{b_l}{m^l} \sum_{m=l+1}^{\infty} \frac{a_l}{n^l}$$

и аналогичную сумму для другого случая. Таким образом за несколько лет до открытия Лебега он пользуется его приемом интегрирования. При этом весьма характерен для чебышевской школы путь, по которому пришел Д. А. к своему результату: не вдаваясь в абстрактные определения, он проводит свои методы на строго конкретном примере.

Однако продолжение пути по линии обобщений основных понятий анализа, повидимому, противоречило математическим вкусам и установкам Д. А. По крайней мере Д. А. больше не писал статей в этом направлении. Вообще в первые годы XX в. Д. А. почти не писал статей. Можно думать, что в его научной деятельности наступил кризис. Кроме того, продолжительная болезнь (туберкулез) и долговременное пребывание в заграничных санаториях оторвали его от тематики первого периода.

§ 4. Второй период подъема творческой деятельности Д. А. начинается с 1908—1910 гг., когда он был уже профессором Киевского университета. Находясь за границей, Д. А. увлекся современным направлением в алгебре и теории чисел и передал это увлечение своим многочисленным ученикам, организовав, таким образом, вокруг себя сильную школу молодых алгебраистов.

Самостоятельные работы Д. А. в этот период большей частью носят характер методических упрощений; они частью бывают весьма изящны, но не имеют принципиального значения. Этот факт легко понять, принимая во внимание, что Д. А. отдавал всю свою энергию и весь свой энтузиазм на создание школы. Из этих работ следует упомянуть: весьма изящное упрощение основ теории Галуа, резко подчеркивающее различие между буквенными и численными уравнениями и пользующееся вспомогательными неопределенными переменными; упрощение изложения основ теории идеалов при помощи функционалов (по Веберу); вывод знака у гауссовой суммы

$$\psi(2\mu, n) = \sum_{s=0}^{n-1} e^{s^2 \frac{2\mu\pi i}{n}},$$

упрощающий и без того наиболее простой вывод Мертенса; новое тождество в теории квадратичных форм, при помощи которого легко выводится существование форм anceps, и много других работ.

Особо отметим работу „Sur les équations du cinquième degré résolubles algébriquement, quand le produit des racines reste arbitraire“ (Bull. des Sciences Mathématiques, 2-я серия, т. 34, 1910). В ней Д. А. получает два класса уравнений пятой степени:

$$x^5 + s = 0,$$

$$x^5 + 10px^3 + 20p^2x + s = 0,$$

которые разрешимы при произвольном значении свободного члена.

К этому же периоду относится написание Д. А. большого количества курсов: „Теория групп“, „Элементарный курс теории чисел“, „Элементы теории эллиптических функций“, „Основы аналитической геометрии“, „Энциклопедия математики“, „Математика страхового дела“, „Элементы высшей алгебры“ и др. Эти книги пользовались большой популярностью среди учащейся молодежи, так как они всегда отличались свежестью и новизной материала, живым и легким изложением, и, что самое главное, в них Д. А. умел вложить тот энтузиазм, которым он обладал в высокой степени. Возьмем, например, его „Теорию чисел“. В ней содержатся основы теории групп, алгебраических чисел, матриц, арифметических функций, и в то же время дается классическая теория форм и непрерывных дробей. Все эти теории преподнесены так, что читатель получает ясное понятие о целях как классической, так и современной теории чисел. А вот книга совсем другого стиля: „Энциклопедия математики". Она имеет целью представить в живом и связном изложении образованному читателю, не занимающемуся математикой, цели и основные методы математического исследования. Трудно представить себе столь богатый и разнообразный материал, сконцентрированный в сравнительно небольшой книжке (601 стр.). Здесь читатель может довольно обстоятельно познакомиться и с аналитической геометрией, и с диференциальным и интегральным исчислением, и с теорией чисел; получить понятие о невозможных задачах в математике, о наименее уклоняющихся от нуля полиномах, о черчении карт, о математической физике, о теории вероятностей и об устройстве и математических принципах рулетки в Монте-Карло и т. д.

Можно без особого преувеличения сказать, что книги Д. А. воспитали и привили вкус к математике большинству современных математиков Союза.

§ 5. Так как главное значение второго периода деятельности Д. А. состоит в создании математической школы, то я считаю уместным остановиться на этом подробнее. Создание крупной математической школы в дореволюционное время, притом в провинциальном центре, является исключительным, почти единичным фактом в истории русской математики, и было бы весьма ценно детально вскрыть причины, благоприятствовавшие ее возникновению.

Основное отличие отношения Д. А. к процессу формирования научного работника от отношения большинства других профессоров состояло в том, что Д. А. приучал молодежь к самостоятельной исследовательской работе с самого начала, не заботясь об эрудиции ученика, которая приходила впоследствии сама собой. В связи с этим он относился враждебно к существованию магистерских экзаменов, которые по его мнению отвлекали молодых ученых от исследовательской деятельности, и всегда советовал своим ученикам не уделять им слишком много времени.

В выборе темы Д. А. проявлял большую смелость, давая ученикам большие отделы алгебры, в которых они сами должны были искать нерешенные задачи. При этом он всегда рекомендовал сразу брать для разрешения трудные вопросы, и это большей частью приводило к прекрасным результатам.

Исключительно велико также количество студентов, которых Д. А. ежегодно оставлял при университете, справедливо считая, что отбор научных работников должен производиться не в процессе учебы, а в процессе творческой работы. При этом ему часто приходилось выдерживать упорную борьбу в университетском совете, отстаивая своих учеников, которые не всегда удовлетворяли формальным требованиям, необходимым для оставления их при университете. Нередко он выслушивал от своих коллег суждения, что он „набирает себе учеников с улицы". Время сыграло в его пользу, доказав, что из этих „подобранных с улицы" учеников могут выработаться первоклассные ученые.

Наконец, в деле организации школы решающую роль сыграло создание им семинара, где Д. А. сумел наладить научную работу со студен-

Д. А. Граве в 1912 г.

(Геттинген)

тами, которые докладывали на заседаниях этого семинара самостоятельные научные исследования. К сожалению, мне не пришлось принимать участия в его семинаре в самый блестящий период его деятельности — в 1910—1911 гг., когда были выращены Б. Н. Делоне, Е. И. Жилинский, А. М. Островский, О. Ю. Шмидт и др.

В настоящее время большинство его учеников являются самостоятельными учеными и уже имеют собственных учеников. Попытаюсь перечислить основные результаты, добытые его школой в целом.

По теории групп (О. Ю. Шмидт и его ученики) — первоклассная монография О. Ю. Шмидта; принятое во всех современных курсах его простое доказательство теоремы Ремака; исследования по разрешимым группам; исследования по цепям Жордана-Гельдера для бесконечных групп; замечательная „теорема Кулакова" о p-группах; новые соотношения между характерами (А. А. Кулаков); новые критерии разрешимости групп (А. П. Дицман, А. А. Кулаков, В. К. Туркин, С. А. Чунихин).

По диофантовому анализу — решение неопределенных кубических уравнений (Б. Н. Делоне); обобщение его методов на уравнения высших степеней (В. А. Тартаковский, Д. К. Фаддеев); доказательство теоремы „всякое невырождающееся уравнение $f(x_1, \ldots, x_m) = k$, где f — форма n-й степени, а m — достаточно большое число, всегда имеет решение, если имеют решения все сравнения $f \equiv k \pmod{p^s}$, где p — простые числа, а s сколь угодно велико" (В. А. Тартаковский).

По геометрии чисел — перечисление всех правильных систем в четырехмерном пространстве (Б. Н. Делоне).

По непрерывным группам — доказательство того, что всякую группу Ли можно представить в виде группы линейных подстановок (И. Д. Адо).

По теории алгебраических чисел — доказательство существования простых чисел, принадлежащих к заданному классу подстановок (Н. Г. Чеботарев); доказательство того, что индекс поля меньше его степени (Е. И. Жилинский).

По теории абстрактных полей — первое доказательство того, что абсолютные значения и p-адические оценки (Bewertung) величин поля являются единственными возможными их оценками (А. М. Островский).

По наименее уклоняющимся от нуля полиномам — нахождение наименее уклоняющихся от нуля полиномов при трех фиксированных коэфициентах с помощью автоморфных функций (Н. И. Ахиезер).

По интегральным уравнениям — исследование линейных интегральных уравнений типа Фредгольма с так называемым осциллирующим ядром (М. Г. Крейн, Ф. Р. Гантмахер).

§ 6. Третий период деятельности Д. А., можно считать, начинается вскоре после революции. Он характеризуется переключением ее на механику и вообще прикладную математику. В этих областях Д. А. развивает поразительно разностороннюю творческую работу. Из чисто математических работ, близких к математической физике, в первую очередь необходимо упомянуть о его работе „Über die linearen Differentialgleichungen, die in bezug auf die lineare gebrochene Transformationsgruppe invariant sind" (Journal für die reine und angewandte Mathematik, т. 156, 1927), в которой Д. А. решил весьма общую задачу нахождения линейных дифференциальных выражений, инвариантных относительно преобразований дробной линейной группы. Задача решается посредством громадных выкладок, весьма остроумно расположенных. Представляет также интерес его небольшая работа „Über eine Tschebyscheffsche Frage" (Львов, Збірн. Мат.-Прир. Секції Наук. Т-ва ім. Шевченка, 1927), в которой Д. А. предложил изящный алгорифм для решения задачи покрытия шара сеткой. Здесь решение уравнения $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial u \partial v} = -\sin \alpha$ приближенно заменяется решением разностного уравнения, причем последовательные решения получаются одно из другого при помощи формул, выведенных из сферической тригонометрии.

Кроме того, Д. А. написал несколько работ по технической механике; по небесной механике, где, вводя в рассмотрение электромагнитные силы, он дал качественное объяснение неравенств движения перигелиев планет, получив для них величины, пропорциональные наблюдаемым; по магнитным возмущениям; по коррозии металлов и т. д. Поразительна разносторонняя образованность Д. А. в областях, смежных с математикой, и свежесть мысли, которая всегда характеризует его работы.

§ 7. В последнее время Д. А. опять возвратился к теории чисел и алгебре. В этот период он часто возвращается к темам, которые занимали его в ранний период увлечения теорией чисел и алгеброй: сюда относятся, например, его работы по основаниям теории Галуа и теории идеалов. Интересны его работы „Про деякі квадратичні иоля" и „Про прості числа виду $p = 4n + 3$", в которых Д. А. проделывает колоссальные вычисления, связанные с определением числа классов квадратичных полей.

С последним периодом жизни Д. А. связано также составление его „Трактата по алгебраическому анализу", три тома которого Д. А. успел написать до смерти. Это сочинение, содержащее в своих первых томах элементарный материал, ценно тем, что вводит читателя, пользуясь элементарными средствами, в круг современных идей по алгебре, содержащий в то же время много важного, но полузабытого материала, которого не найти ни в каких других руководствах: теорема В. Маркова, многоугольник Ньютона и т. д.

Д. А. Граве прожил всего 76 лет, до конца жизни не переставая работать на пользу советской науки. Его жизнь будет долго служить примером для новых поколений советских ученых.